



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in **INGEGNERIA MECCANICA**

CALIBRAZIONE CINEMATICA DI UN ROBOT PARALLELO
AD ELEVATA PRECISIONE

CALIBRATION OF A HIGH PRECISION PARALLEL ROBOT

Relatore:
Prof. Matteo Claudio Palpacelli

Tesi di Laurea di:
Federico Emiliani

A.A. 2019 /2020

Indice

Introduzione	1
1. Panoramica sulla calibrazione dei manipolatori	2
1.1. Manipolatori robot	2
1.2. Calibrazione di un robot.....	4
1.3. Algoritmi di calibrazione	6
2. Piattaforma robotizzata a cinematica parallela	10
2.1. Piattaforma di Gough-Stewart	10
2.2. Piattaforma 66.....	11
2.3. Parametrizzazione	13
2.3.1. Posa	13
2.3.2. Telaio	15
2.3.3. Gambe	15
2.3.4. Piattaforma mobile	16
2.4. Cinematica della piattaforma.....	17
2.4.1. Cinematica inversa	18
2.4.2. Cinematica diretta	20
3. Sviluppo del modello ad errori	22
3.1. Modello teorico	22
3.2. Modello ad errori.....	24
4. Risultati	31
4. Conclusioni	32
5. Bibliografia	33

Introduzione

La seguente trattazione vuole illustrare le varie fasi che compongono il processo di calibrazione di un robot, soffermandosi sulla determinazione del modello cinematico e sulla verifica della bontà di tale modello.

Nel primo capitolo si danno alcune definizioni basilari sui manipolatori robot e le loro caratteristiche, oltre a fornire una panoramica sulla calibrazione dei manipolatori e sugli algoritmi che possono essere sfruttati.

Nel secondo capitolo viene descritto il manipolatore preso in esame dandone una classificazione e descrivendone le caratteristiche geometriche e cinematiche necessarie allo studio da condurre.

Nel terzo capitolo si espone brevemente il procedimento che si è seguito per ricavare il modello cinematico ideale con l'ausilio del software MATLAB, ed in seguito viene illustrato il metodo attraverso cui si ottiene il modello ad errori.

Nel quarto capitolo vengono presentati i risultati relativi all'analisi cinematica condotta sul manipolatore.

Infine, nel quinto capitolo si commentano i risultati ottenuti e si esprimono alcune considerazioni sul lavoro svolto.

1 Panoramica sulla calibrazione dei manipolatori

Nel paragrafo seguente, prima di illustrare la calibrazione dei meccanismi, si forniscono alcuni concetti basilari sui manipolatori robot. La calibrazione e gli algoritmi utili in tale processo vengono poi descritti nei paragrafi successivi.

1.1 Manipolatori robot

Le norme ISO definiscono un robot industriale come un manipolatore con più gradi di libertà, governato automaticamente, riprogrammabile, multiscopo, che può essere fissato in un punto o mobile, utilizzato in applicazioni industriali. Si distinguono quindi robot per uso industriale e robot di servizio, ovvero utilizzati per eseguire attività utili per l'uomo, escluse le attività di automazione industriale.

Un manipolatore robot è solitamente costituito da una serie di corpi rigidi collegati attraverso dei giunti. Un'estremità del manipolatore è fissata a una superficie rigida detta base. L'altra estremità del manipolatore è dotata di un sistema che consente il montaggio di una pinza o uno strumento specializzato, che viene comunemente detto terminale del robot. La movimentazione del manipolatore avviene mediante degli attuatori che sono posti in corrispondenza dei giunti del robot.

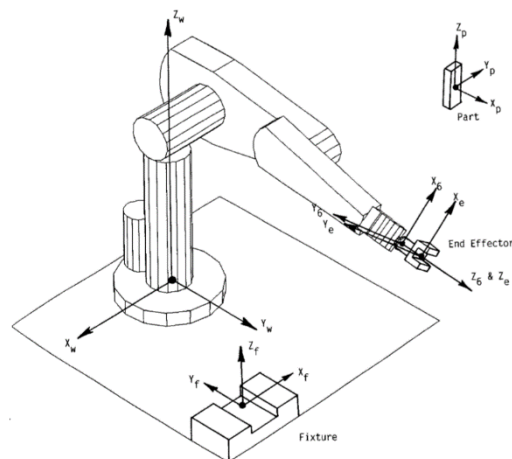


Figura 1.1 generico manipolatore robot

Lo scopo principale del manipolatore è spostare il terminale in una data posizione o lungo una traiettoria specificata. Poiché il terminale della macchina è generalmente un corpo rigido che viene spostato nello spazio tridimensionale, è importante che il robot raggiunga l'orientamento e la posizione desiderati. L'insieme di posizione e orientamento viene indicato col termine posa del manipolatore. Per un corpo rigido che si muove nello spazio tridimensionale, sono necessarie sei quantità per definire

completamente una posa: la posizione di un punto sul corpo, che può essere definita specificandone le tre coordinate di posizione, e l'orientamento, che può essere definito attraverso tre angoli.

I manipolatori robot possono essere classificati dal punto di vista topologico in:

- Manipolatori seriali, caratterizzati cioè da catene cinematiche aperte, al cui interno non possono essere individuate delle maglie chiuse. Sono costituiti da una struttura portante che permette il posizionamento del terminale, un polso che permette di dare al terminale un opportuno orientamento e il terminale stesso, cioè l'utensile che serve per eseguire il compito.
- Manipolatori paralleli, costituiti da catene cinematiche chiuse, al cui interno possono essere definite una o più maglie chiuse. Sono composti da una base, dove tipicamente trovano spazio gli attuatori, collegata al terminale della macchina tramite delle gambe, costituite da una sequenza di corpi e giunti.
- Manipolatori ibridi, che derivano dall'unione dei manipolatori paralleli e seriali.

Le prestazioni di un manipolatore possono essere descritte attraverso la ripetibilità, la risoluzione e l'accuratezza. La ripetibilità è la capacità di un manipolatore di tornare a una posizione precedentemente raggiunta, infatti, supponendo di muovere il terminale del manipolatore da una particolare posa e successivamente di riportarlo indietro nella medesima posa, il terminale non tornerà esattamente nella stessa posizione. Le ragioni di questa deviazione potrebbero includere piccoli errori nel controllo degli spostamenti delle articolazioni, flessibilità nella struttura del robot o una serie di altri fattori. In genere viene specificato come spostamento dell'origine di un sistema di riferimento del terminale della macchina dopo che il robot è tornato nella posizione specificata. Ad esempio, una ripetibilità di 5 mm implicherebbe che un punto sul terminale del robot ritornerebbe sempre all'interno di una sfera di raggio 5 mm.

La risoluzione è il più piccolo scarto della grandezza misurata che un sensore può rilevare; è perciò un parametro dipendente dalla qualità dei sensori utilizzati in un particolare robot. Un tipico strumento di misura utilizzato nei manipolatori robot è l'encoder; se si suppone, ad esempio, che l'encoder sia dotato di 3600 tacche sulla periferia, questo potrà percepire variazioni di un decimo di grado e non meno. La

risoluzione complessiva del manipolatore sarà data dal livello più grossolano di una grandezza, misurata per ciascun giunto.

L'accuratezza, o precisione, è la capacità di un manipolatore di spostare il terminale in una determinata posa o, in altre parole, il massimo errore nella posa che si ottiene quando si muove il terminale in un punto assegnato dello spazio. La differenza fondamentale tra accuratezza e ripetibilità è che la ripetibilità rappresenta la capacità del robot di ritornare a una posa precedentemente raggiunta mentre la precisione è la capacità del manipolatore di spostarsi in una specifica posa che potrebbe non essere mai stata raggiunta in precedenza. Inoltre, la ripetibilità è indipendente da

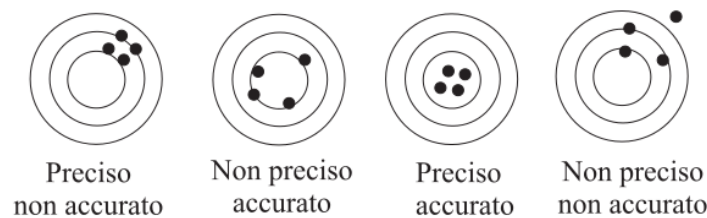


Figura 1.2 differenza tra precisione e ripetibilità

qualsiasi sistema di riferimento mentre la precisione, poiché l'errore nella posa dipende dalla posizione relativa della terna di riferimento del terminale rispetto alla terna fissa, richiede la definizione di un sistema di riferimento a cui ricondurre l'errore.

1.2 Calibrazione di un robot

Per ottenere una determinata posa i singoli giunti vengono attuati in modo da ottenere la configurazione desiderata. La conversione della posa del terminale, negli spostamenti da assegnare ai giunti, viene effettuata utilizzando un modello matematico del manipolatore. Quando il modello matematico utilizzato per descrivere il movimento del robot differisce dalla geometria effettiva del manipolatore, la posa del terminale sarà diversa da quella prevista dal modello matematico. Poiché tali deviazioni tra il modello matematico utilizzato e la geometria effettiva del manipolatore sono una fonte di errore, si devono adottare delle soluzioni per migliorarne l'accuratezza. Si possono seguire due metodi differenti:

- il primo sarebbe costruire ogni robot in modo che tutti i vari parametri corrispondano il più possibile ai valori di design o nominali. In altre parole, si dovrebbero realizzare parti con tolleranze molto strette. Chiaramente,

questo approccio non è conveniente in quanto si avrebbero costi di produzione molto elevati;

- se non si riesce a far corrispondere il robot al modello, la seconda alternativa è far corrispondere il modello matematico al robot ed è proprio questo il concetto alla base della calibrazione di un manipolatore.

In sintesi, la calibrazione di un manipolatore è il processo di definizione di un modello matematico appropriato e quindi della determinazione dei vari parametri del modello che fanno sì che esso corrisponda il più possibile al manipolatore. Il processo di calibrazione può essere suddiviso in quattro fasi:

1. La prima fase è la modellazione, in cui si sceglie il modello matematico ideale che rappresenti il manipolatore studiato. La letteratura fornisce un grande quantità di modelli utilizzabili, quindi la domanda da porsi è quale modello tra quelli disponibili si dovrebbe usare per un dato manipolatore.
2. Il secondo passo nel processo di calibrazione è la misurazione. L'obiettivo di tale fase è determinare con precisione la posa del terminale. Si procede spostando il manipolatore in una data posizione e misurandone i parametri di interesse, il manipolatore è quindi spostato in un'altra posizione e le misurazioni vengono ripetute, continuando per tutte le pose necessarie. Per un caso reale, ovviamente, tutte le misurazioni saranno caratterizzate da una data incertezza e rumore, quindi il numero di misurazioni eseguite deve essere tale da compensare gli effetti del rumore e dell'incertezza.
3. Dopo la scelta di un modello matematico valido e la raccolta di una quantità sufficiente di dati di misurazione, il passo successivo è determinare l'insieme dei parametri del modello che minimizzerà la differenza ∂P_i , tra la posa determinata durante la fase di misurazione e la posa prevista dal modello per la medesima misurazione.

$$\partial P_i = P_i^{mis} - P_i^{mod} = P_i^{mis} - f(\theta_i; l_i; r_i; \alpha_i)$$

Dove si è indicando con P_i^{mis} la posa misurata e con P_i^{mod} la posa indicata dal modello matematico, che è funzione dei parametri da determinare. Questa fase è detta identificazione.

4. L'ultima fase è quella dell'implementazione del modello, in cui si modifica il modello ideale scelto inizialmente incorporando i risultati ottenuti nelle fasi

precedenti, ottenendo così il modello cercato che descrive al meglio il manipolatore.

La complessità del processo di calibrazione di un manipolatore, ed in particolare della fase di modellazione, dipende dalla tipologia del manipolatore stesso. La calibrazione dei manipolatori seriali risulta infatti più semplice rispetto a quella dei manipolatori paralleli. La maggior complessità nella calibrazione dei robot paralleli è dovuta, in parte, proprio alla loro struttura, costituita da una catena cinematica chiusa che comporta:

- l'esistenza di un certo numero di parametri dipendenti nel modello. La relazione tra questi parametri è determinata dall'equazione di vincolo del loop, che si aggiunge all'equazione che lega la posa del terminale al telaio;
- l'esistenza di giunti passivi, ovvero giunti che non hanno né un attuatore né un trasduttore. I giunti attuati, da cui si ricavano le informazioni per la calibrazione, sono solamente sul telaio. Al contrario, in un manipolatore seriale, ogni giunto ha un motore o un attuatore, insieme a un dispositivo di misura.

Questi due aspetti rendono la fase di modellazione di un manipolatore parallelo più difficoltosa, in quanto aumentano il numero di equazioni da considerare e ne complicano la matematica. Inoltre, la mancanza di informazioni dovuta ai giunti passivi del manipolatore può introdurre ulteriori errori nel processo di calibrazione.

1.3 Algoritmi di calibrazione

Per la terza fase della calibrazione di un manipolatore, ovvero l'identificazione, si possono utilizzare vari algoritmi per ridurre al minimo l'errore dovuto al modello matematico, cioè la differenza tra la posa determinata in fase di misurazione e quella prevista dal modello per la medesima misurazione. Gli algoritmi presenti nella letteratura possono essere classificati secondo diversi criteri:

- Algoritmi deterministici e stocastici, a seconda che vengano utilizzati o meno dei modelli probabilistici per il rumore nelle misurazioni;
- Ricorsivi e non ricorsivi, a seconda che l'insieme dei dati osservati sia elaborato nella sua interezza o utilizzato in modo sequenziale, generando così una sequenza di stime basate su un insieme crescente di dati;
- Lineari e non lineari, a seconda del tipo di modello matematico utilizzato.

Riferendosi all'ultimo criterio illustrato, alcuni esempi di algoritmi lineari sono:

- l'algoritmo dei minimi quadrati;
- l'algoritmo della varianza minima;
- filtri di Kalman.

Mentre per gli algoritmi non lineari si possono citare:

- l'algoritmo di Gauss-Newton;
- l'algoritmo Levenberg-Marquardt, introdotto come miglioramento del metodo di Gauss-Newton.

In questa trattazione viene utilizzato l'algoritmo dei minimi quadrati. L'obiettivo di tale algoritmo è trovare una stima \hat{X} del vettore X degli errori nei parametri cinematici del robot. In particolare, si ricerca il vettore \hat{X} che minimizzi la somma dei quadrati degli elementi del vettore degli errori $Z - H\hat{X}$, dove si è indicato con:

- Z , il vettore delle misurazioni che raccoglie tutte le misurazioni $z(j)$. Il vettore $z(j)$ rappresenta la differenza tra la posizione misurata e la posizione calcolata dal modello cinematico nominale del robot per la j -esima configurazione del manipolatore;
- H , la matrice definita dal modello cinematico nominale del robot che dipende dalla configurazione assunta dal manipolatore.

Per tale scopo si definisce una funzione scalare costane J :

$$J = (Z - H\hat{X})^T (Z - H\hat{X})$$

Il minimo della funzione J si ottiene quando la derivata prima è nulla, ovvero:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{X}} = 0$$

Sostituendo la funzione J nell'equazione specificata e risolvendo si ricava:

$$H^T H \hat{X} = H^T Z$$

Quando la matrice $H^T H$ non è singolare l'equazione precedente può essere riscritta come

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

e quindi il problema può essere risolto attraverso l'uso della matrice pseudo-inversa. Questo metodo può essere migliorato attribuendo un peso ai diversi errori attraverso una matrice W . La funzione J diviene quindi:

$$J = (\mathbf{Z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}})^T \mathbf{W} (\mathbf{Z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}})$$

Di conseguenza il valore che minimizza il vettore degli errori sarà:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}$$

e quando la matrice $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ non è singolare si ottiene:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}$$

L'algoritmo della varianza minima utilizza, come l'algoritmo dei minimi quadrati, un modello lineare. In particolare, il modello usato è il seguente:

$$\hat{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{A}(\mathbf{Z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x)$$

Dove si è indicato con:

- \mathbf{Z} , il vettore delle misurazioni che raccoglie tutte le misurazioni $\mathbf{z}(j)$;
- \mathbf{H} , la matrice definita dal modello cinematico nominale del robot che dipende dalla configurazione assunta dal manipolatore;
- $\boldsymbol{\mu}_x = E(\mathbf{X})$, il valore atteso del vettore \mathbf{X} .

L'obiettivo di tale algoritmo è selezionare una matrice \mathbf{A} che minimizzi la varianza dell'errore di stima $Var(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}_x$. Poiché la varianza dell'errore è una matrice e la misura delle prestazioni dovrebbe essere uno scalare, un approccio comune è minimizzare la somma delle varianze di ciascuna componente del vettore degli errori. Questa è la somma dei termini della diagonale principale della matrice di covarianza dell'errore ovvero la traccia della matrice di covarianza dell'errore:

$$J = tr\{Var(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})\} = tr(\boldsymbol{\Sigma}_e)$$

J deve essere minimizzata ricercando la matrice \mathbf{A} tale che:

$$J^* = \min_A tr\{E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{A}(\mathbf{Z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x))(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{A}(\mathbf{Z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x))^T]\}$$

Indicando con \mathbf{A}^* la matrice che minimizza J si ricava:

$$\mathbf{A}^* = \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Sigma}_v)^{-1}$$

Con $\boldsymbol{\Sigma}_v = Var(\mathbf{V})$. Si ottiene così il vettore di stima $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_x \mathbf{H}^T + \boldsymbol{\Sigma}_v)^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x)$$

Questo risultato può essere semplificato attraverso opportuni passaggi matematici e riscritto nella forma seguente:

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^T \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{H} + \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1})^{-1} (\mathbf{H}^T \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1} \boldsymbol{\mu}_x)$$

Gli algoritmi discussi finora sono non ricorsivi, cioè tutti i dati vengono prima raccolti e poi l'insieme di tutte le misurazioni viene elaborato contemporaneamente. Il filtro di Kalman, al contrario, è un algoritmo ricorsivo in cui i dati vengono elaborati in modo sequenziale, generando così una serie di stime basate su un insieme crescente di dati. Per il problema di Kalman si possono utilizzare diverse formule di filtraggio. In questo metodo, anziché assumere un vettore incognito fisso \mathbf{X} , si considera un vettore che si evolve nel tempo secondo un'equazione lineare.

2 Piattaforma robotizzata a cinematica parallela

Il meccanismo preso in esame per la calibrazione cinematica è una piattaforma robotizzata a cinematica parallela, per compiti di elevata precisione, a sei gradi libertà. Il terminale del robot ha quindi la possibilità di traslare lungo tre direzioni indipendenti e di ruotare attorno a tre assi indipendenti. Questo manipolatore rientra nella famiglia delle piattaforme di Gough-Stewart che viene brevemente illustrata nella sezione seguente.

2.1 Piattaforma di Gough-Stewart

Con piattaforma di Gough-Stewart si intende una classe di manipolatori a cinematica parallela composti da una piattaforma collegata a terra da sei gambe ed è spesso utilizzata per la costruzione di simulatori di volo o di guida, aventi la capacità di muovere, in maniera controllata un corpo rispetto al telaio.

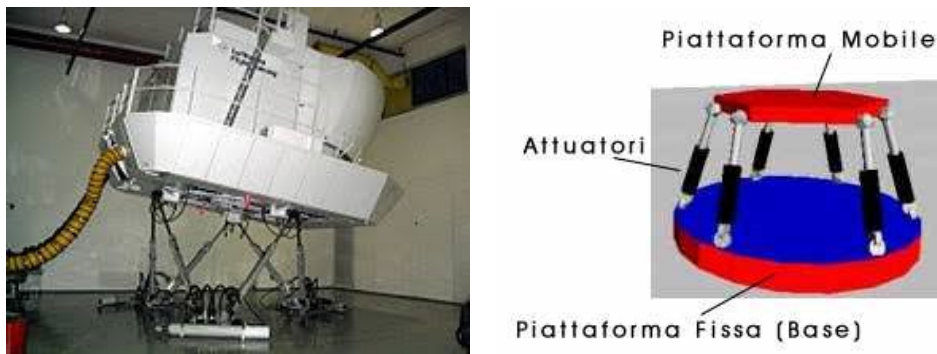


Figura 2.1 piattaforma di Gough-Stewart

Le sei gambe del manipolatore sono caratterizzate dalla stessa topologia di vincolo che permette al terminale un manifold di tipo sferico: fissata la lunghezza della gamba ed il punto di connessione tra gamba e telaio, il punto di attacco gamba-terminale è

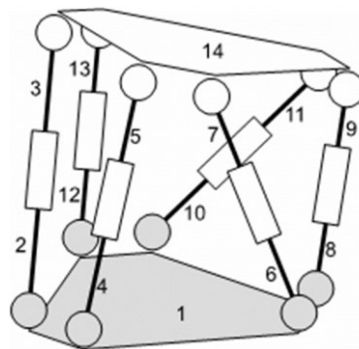


Figura 2.2 schema cinematico di una piattaforma di Gough-Stewart

in grado di muoversi su una superficie sferica di raggio pari alla lunghezza della gamba.

Tale topologia di vincolo può essere realizzata attraverso due coppie sferiche o, per eliminare rotazioni indesiderate delle gambe attorno all'asse passante per le due coppie sferiche, attraverso un giunto di Cardano. Queste rotazioni indesiderate sono presenti ogni qual volta vi sia una sequenza di corpi compresa tra coppie sferiche.

Lo schema di vincolo mostrato nella figura 2.2 è denominato 6-UPS in quanto si ha un'architettura composta da sei gambe con la medesima struttura: Universale-Prismatica-Sferica. In questo caso il movimento delle gambe avviene tramite sei attuatori lineari, modellati come coppie prismatiche, che consentono di modificare la lunghezza delle gambe per riconfigurare la posa del terminale.

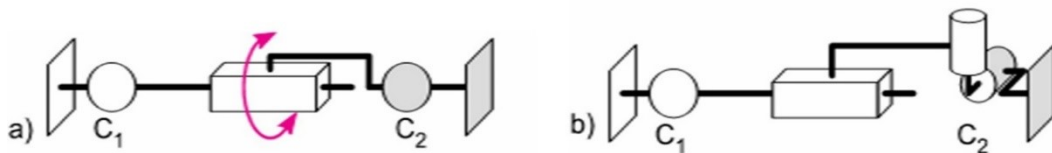


Figura 2.3 topologia di vincolo della singola gamba

2.2 Piattaforma 66

Si considera ora lo specifico manipolatore preso in esame, descrivendone l'architettura e specificando le ragioni che portano a tali scelte strutturali.

I punti di attacco delle gambe sul telaio e sul terminale della macchina possono assumere diverse geometrie spaziali e, in alcuni casi, essere sovrapposti. In funzione di tale caratteristica si possono ulteriormente suddividere le piattaforme Gough-Stewart in diverse classi. Per il manipolatore parallelo considerato sono proposte due possibili alternative:

- La configurazione 6-6; nella quale le gambe possiedono 6 distinti punti di attacco sul telaio e altrettanti sul terminale;
- La configurazione 6-3; in cui i punti di connessione delle gambe al telaio sono 6 mentre sul terminale della macchina le connessioni sono accoppiate a due a due.

Entrambe le strutture possiedono le caratteristiche tipiche dei robot a cinematica parallela e godono quindi dei seguenti vantaggi:

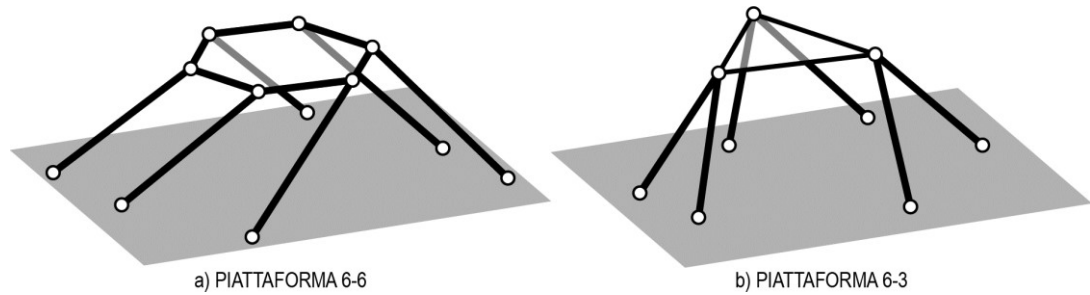


Figura 2.4 schemi vincolari: a) configurazione 6-6; b) configurazione 6-3

- Elevata capacità di carico e spiccata rigidezza; dovute alla possibilità di distribuire i carichi tra le gambe che sostengono il terminale della macchina;
- Precisione di posa; poiché gli errori sui diversi assi non si sommano tra loro;
- Modularità costruttiva; le sei gambe del manipolatore possono essere progettate e realizzate tutte con le stesse modalità;
- Elevate capacità dinamiche; che permettono al terminale della macchina accelerazioni elevate, in parte dovute alla possibilità di posizionare gli attuatori sul telaio della macchina, alleggerendo così la struttura.

Per contro tali strutture risentono dei seguenti svantaggi:

- Modesto spazio di lavoro; al cui interno possono presentarsi punti singolari;
- Cinematica di posizione matematicamente molto complessa.

La piattaforma 6-6 presenta, dal punto di vista meccanico, il vantaggio di poter far uso di componenti reperibili in commercio, mentre la piattaforma 6-3 richiede la progettazione di un giunto sferico specifico per realizzare le tre connessioni tra le gambe e il terminale della macchina.

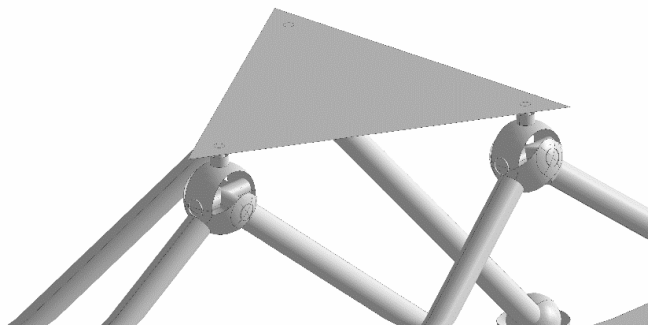


Figura 2.5 particolare del doppio giunto sferico nella piattaforma 6-3

Nella struttura 6-3, infatti, due gambe concorrono nello stesso giunto e ciò richiede l'ingegnerizzazione di un giunto universale apposito per il progetto. Questa problematica, oltre ad aumentare i costi, potrebbe influire sulla precisione degli

accoppiamenti e, di conseguenza, sulla ripetibilità di posizionamento della piattaforma mobile.

Per queste ragioni si preferisce la piattaforma 6-6.

Data la forma dello spazio di lavoro si sceglie di attuare i sei gradi di libertà della piattaforma attraverso altrettanti posizionatori lineari fissati a telaio e controllati al fine di modificare la posizione del punto di attacco delle gambe al telaio. Con questa scelta si passa dallo schema di vincolo 6-UPS, ipotizzato in precedenza, ad uno schema indicato come 6-PUS in cui la configurazione di giunto delle sei gambe è Prismatico-Universale-Sferica.

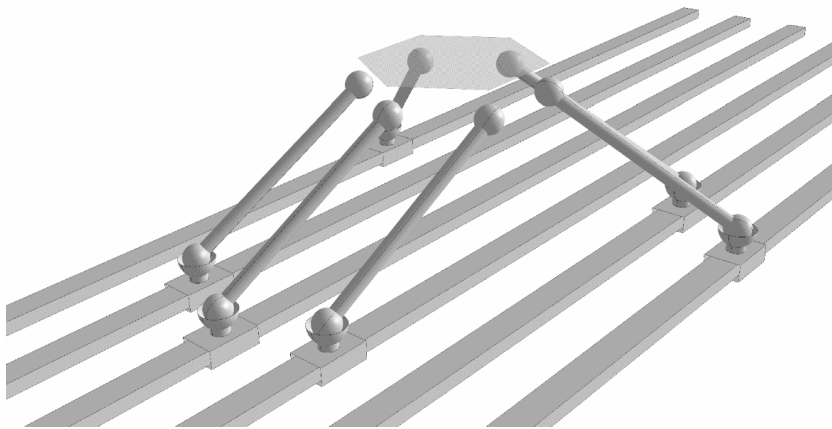


Figura 2.6 schema della piattaforma 6-6 con cinematica 6-PUS

2.3 Parametrizzazione

Ai fini della scrittura del modello cinematico del manipolatore viene considerata la parametrizzazione descritta nella seguente sezione, per ognuna delle parti che lo compongono.

2.3.1 Posa

In generale, la posa del terminale viene descritta attraverso la posa di un sistema di riferimento ad esso solidale, indicata con $\{1\}$, rispetto ad un sistema di riferimento fisso a telaio, $\{0\}$.

Per descrivere la posizione dei due sistemi di riferimento si utilizza la matrice di trasformazione omogenea ${}^0_1\mathbf{T}$ così definita:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^0_1\mathbf{R} & {}^0\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

- 0_1R è la matrice di rotazione che descrive l'orientamento del sistema di riferimento {1} rispetto al sistema fisso {0};
- 0p_1 è il vettore posizione del centro del sistema di riferimento {1} rispetto a {0}.

La conoscenza della matrice 0_1T equivale alla conoscenza della posizione di tutti i punti del terminale della macchina.

La figura seguente riporta i due sistemi di riferimento citati oltre ad altre grandezze caratteristiche della parametrizzazione scelta che si definiranno nel proseguo.

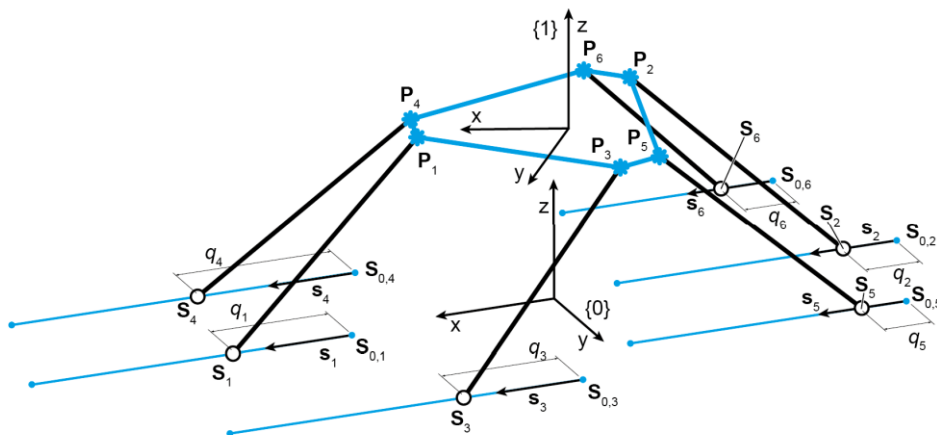


Figura 2.7 parametrizzazione della piattaforma 6-6

Allo scopo di utilizzare una parametrizzazione priva di singularità di rappresentazione si introduce la notazione di Study; tale rappresentazione sfrutta un set sovrabbondante semi-algebrico di parametri tra loro correlati da una quadrica detta quadrica di Study o "soma", dalla forma che assume nello spazio proiettivo. Il vettore dei parametri di Study è definito come:

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$$

Dove gli otto parametri appena definiti sono vincolati dalla quadrica:

$$S: x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

I parametri di Study, oltre ad essere vincolati alla quadrica già menzionata, devono verificare anche l'equazione di normalizzazione:

$$N: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

Gli elementi della matrice di trasformazione omogenea possono quindi essere riscritti sfruttando i parametri di Study.

2.3.2 Telaio

Il telaio del manipolatore parallelo è il corpo solidale alla terna di riferimento fissa $\{0\}$ su cui sono posti gli attuatori lineari che permettono la movimentazione del robot. La posizione di ognuno dei sei attuatori viene parametrizzata come:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{0,i} + q_i \mathbf{s}_i$$

Dove:

- \mathbf{S}_i è la posizione, in ogni istante, del punto di attacco della gamba i -esima al telaio;
- $\mathbf{S}_{0,i}$ corrisponde alla posizione di home dello slider, ovvero alla posizione del punto di attacco della gamba i -esima al telaio quando lo spostamento del giunto i -esimo q_i è nullo;
- q_i è il valore caratteristico dell' i -esimo giunto attuato e rappresenta la distanza lineare tra i punti \mathbf{S}_i e $\mathbf{S}_{0,i}$;
- \mathbf{s}_i è il versore che indica la direzione di traslazione dell' i -esimo giunto.

Si sottolinea che tutti i vettori della relazione precedente hanno tre componenti nello spazio, e che si tiene conto di ciascuna di esse nella modellazione cinematica della piattaforma. I parametri appena definiti sono rappresentati nella figura 2.7 per ognuna delle sei gambe del manipolatore.

Si definisce inoltre il vettore \mathbf{q} che raccoglie tutti i valori degli spostamenti dei sei giunti attuati:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T$$

2.3.4 Gambe

Con gamba si indica l'insieme dei giunti e degli elementi meccanici che si muovono in maniera solidale e che connettono la piattaforma mobile al telaio della macchina. Ciascuna delle sei gambe del manipolatore può essere rappresentata dal vettore \mathbf{L}_i tale che:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{S}_i = L_i \mathbf{I}_i$$

Dove:

- L_i corrisponde alla lunghezza scalare della gamba i -esima fra i due punti di attacco \mathbf{S}_i e \mathbf{P}_i ;
- \mathbf{I}_i è il versore che indica la posa della gamba i -esima.

Nella figura seguente è evidenziata una delle sei gambe del manipolatore insieme alle grandezze appena definite che la rappresentano.

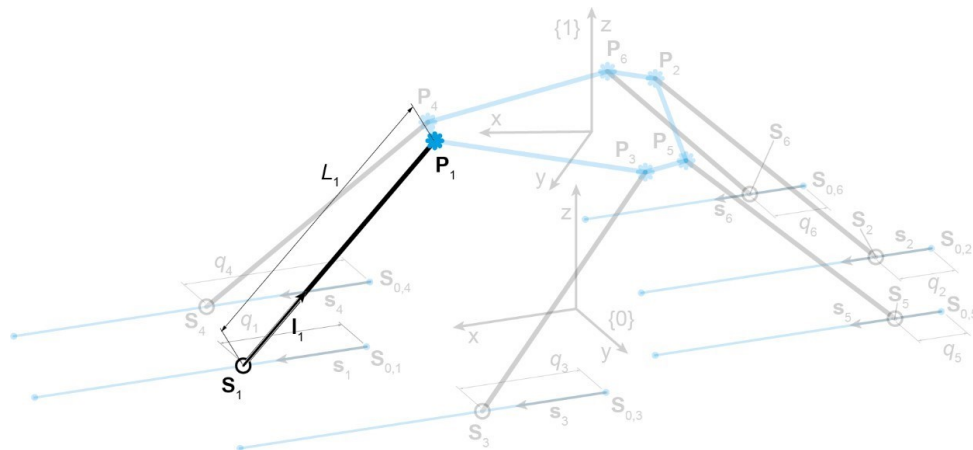


Figura 2.8 particolare della gamba i -esima del manipolatore

2.4.4 Piattaforma mobile

La piattaforma mobile rappresenta il terminale del manipolatore ed è il corpo del quale si vuole conoscere la posa. Dato che, nei robot a cinematica parallela, la forma e le dimensioni del terminale influiscono notevolmente sulle prestazioni finali, si evita una disposizione perfettamente assial-simmetrica dei punti di attacco delle gambe con la piattaforma, in modo da evitare singolarità all'interno dello spazio di lavoro. Per mantenere comunque una certa simmetria si decide di accoppiare i punti di attacco a due a due e disporre le coppie su una circonferenza di raggio r centrata sul sistema di riferimento mobile $\{1\}$.

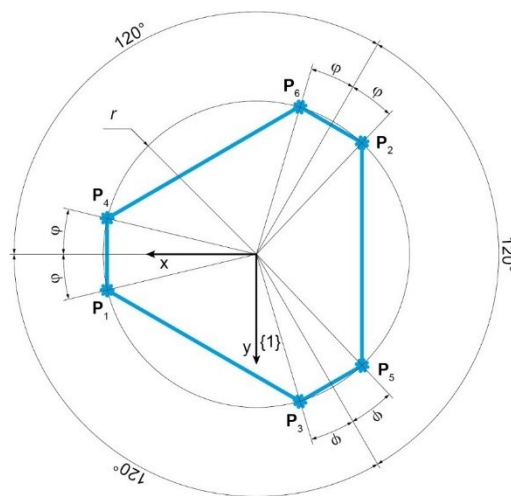


Figura 2.9 schema della piattaforma mobile del robot

Le coordinate dei punti P_i rispetto al sistema di riferimento solidale alla piattaforma $\{1\}$ sono, in teoria, funzione dei parametri caratteristici della piattaforma, che ne determinano la forma e la dimensione.

Le coordinate esatte di questi punti saranno oggetto della successiva calibrazione svolta grazie al modello ad errori implementato.

Risultano invece incognite le coordinate dei punti P_i rispetto al sistema di riferimento fisso a telaio $\{0\}$; la loro posizione è nota se e solo se si conosce la posa della piattaforma mobile attraverso la matrice di trasformazione omogenea 0_1T . Per distinguere rispetto a quale terna si riferiscono le coordinate dei punti P_i si introduce la notazione jP_i con cui si intende il vettore posizione del punto P_i rispetto alla terna di riferimento $\{j\}$. Nel caso in cui non venga indicata la terna di riferimento, si sottintende che essa è la terna di riferimento assoluta: ${}^0P_i \equiv P_i$

La relazione che lega coordinate dei punti nei due sistemi di riferimento considerati ${}^0P_i, P_i$ e la matrice di trasformazione omogenea 0_1T è la seguente:

$$\begin{bmatrix} P_i \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0_1T \begin{bmatrix} {}^0P_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Cinematica della piattaforma

La cinematica studia il movimento dei punti, dei corpi e dei meccanismi senza prendere in considerazione le forze che agiscono su di essi, ma solo le relazioni geometriche che garantiscono che il moto dei corpi sia congruente con i vincoli presenti nel sistema.

Lo studio del movimento dei meccanismi può riguardare le posizioni, ovvero gli spostamenti dei corpi, ma anche le velocità e le accelerazioni. Lo scopo dell'analisi di posizione è determinare le posizioni che i corpi di un meccanismo, o loro punti particolari, assumono durante il suo movimento e quindi fornire una mappa dello spazio cartesiano delle pose del terminale del robot in funzione degli spostamenti dei giunti attuati.

I metodi solitamente utilizzati affrontano il problema cinematico di posizione attraverso la scrittura delle equazioni di chiusura delle maglie del meccanismo. Nel caso di macchine a cinematica parallela, questi metodi risultano spesso inconcludenti e si deve affrontare il problema in maniera diversa.

Una classe di equazioni spesso utilizzata in questi casi è quella dei vincoli di corpo rigido. Tale vincolo, servendosi di equazioni polinomiali di secondo grado, esprime l'indeformabilità dei corpi affermando che: un corpo si dice rigido se, presi comunque due punti P_i e P_j , la distanza tra essi rimane costante durante il moto.

$$|P_i - P_j| = \text{costante}$$

Nel caso della piattaforma considerata la cinematica viene formalizzata attraverso sei equazioni, una per ogni gamba, ciascuna delle quali vincola il punto di attacco gamba-manipolatore a giacere su una sfera di raggio pari alla lunghezza L_i della gamba, centrata sul punto di attacco della gamba al telaio.

$$e_i: (P_i - S_i)^T (P_i - S_i) - L_i = 0$$

Il sistema di equazioni risultante sarà costituito dalle sei equazioni di vincolo delle gambe, dalla quadrica di Study e dall'equazione di normalizzazione.

$$\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; S; N$$

Tale sistema di equazioni viene utilizzato sia per il problema di cinematica inversa che per il problema di cinematica diretta.

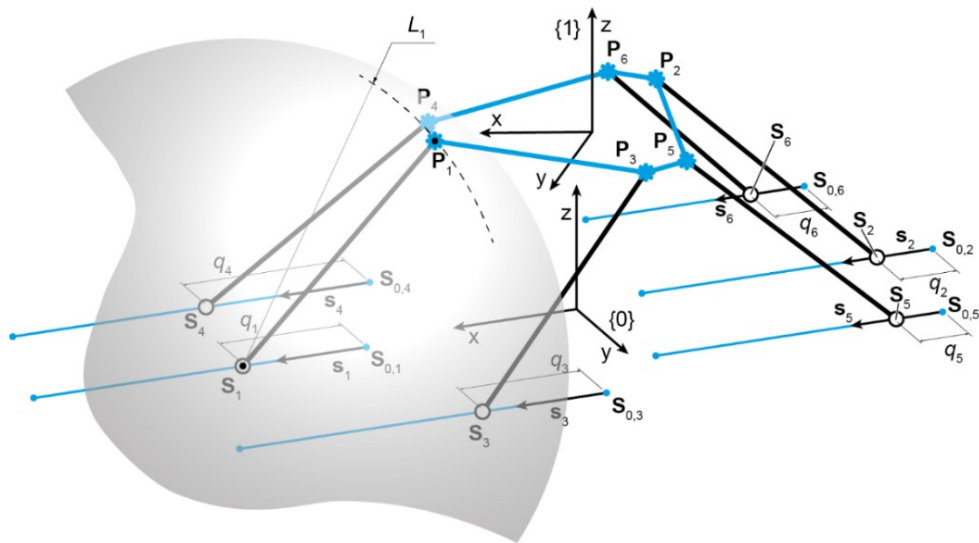


Figura 2.10 manifold di vincolo della gamba i -esima del manipolatore

2.4.1 Cinematica inversa

Il problema di cinematica inversa consiste nel determinare la configurazione dei giunti attuati una volta nota la posa del terminale del manipolatore nello spazio Cartesiano. Sono quindi noti i parametri di Study, da cui si ricavano gli spostamenti dei sei giunti:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{cinematica inversa}} \mathbf{q}$$

Per ricavare gli spostamenti q_i è sufficiente considerare le sole equazioni di vincolo sferico delle gambe e risolverle in maniera disaccoppiata. Ognuna delle sei equazioni

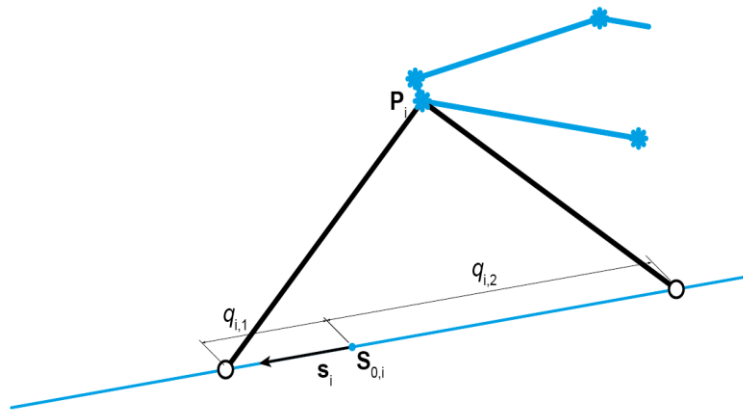


Figura 3.11 soluzioni della cinematica inversa della gamba i -esima del manipolatore

fornisce due risultati matematicamente accettabili che corrispondono alle due possibili configurazioni che ciascuna gamba può assumere per ogni posa della piattaforma mobile.

Il manipolatore, a causa della duplicità delle soluzioni, può presentarsi in un numero elevato di configurazioni, tutte matematicamente ammissibili. Per selezionare la giusta combinazione di soluzioni si considerano le seguenti osservazioni geometriche e fisiche:

- La parametrizzazione dei punti di attacco delle gambe comporta che le variabili di giunto q_i siano positive, infatti lo zero di ciascun asse dei giunti si ottiene quando $q_i = 0$, quindi tutte le configurazioni con $q_i < 0$ non sono fisicamente ammissibili;
- La corsa massima realizzabile dagli attuatori non deve essere superata;
- Durante il normale funzionamento, le gambe del manipolatore non devono assumere un orientamento verticale così da evitare singolarità. Questo comporta che i punti di attacco gamba-telaio S_1 ; S_3 e S_4 devono avere componente x maggiore rispetto ai corrispondenti punti di attacco gamba-terminale P_1 ; P_3 e P_4 e viceversa, i punti S_2 ; S_5 e S_6 devono avere componente x minore di quella dei punti P_2 ; P_5 e P_6 .

Quindi la soluzione è considerata accettabile se vengono rispettate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{ll}
0 \leq q_1 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,1} + q_1 \mathbf{s}_1) > [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_1 \\
0 \leq q_2 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,2} + q_2 \mathbf{s}_2) < [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_2 \\
0 \leq q_3 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,3} + q_3 \mathbf{s}_3) > [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_3 \\
0 \leq q_4 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,4} + q_4 \mathbf{s}_4) > [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_4 \\
0 \leq q_5 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,5} + q_5 \mathbf{s}_5) < [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_5 \\
0 \leq q_6 \leq q_{max} & [1 \ 0 \ 0]^T (\mathbf{S}_{0,6} + q_6 \mathbf{s}_6) < [1 \ 0 \ 0]^T \mathbf{P}_6
\end{array}$$

2.4.2 Cinematica diretta

Il problema di cinematica diretta permette di determinare le pose assunte dal terminale della macchina una volta note le corse dei giunti attuati quindi, al contrario del problema cinematico inverso, sono noti gli spostamenti dei giunti attuati q_i e si devono ricavare i parametri di Study:

$$\mathbf{q} \xrightarrow{\text{cinematica diretta}} \mathbf{x}$$

Il problema matematico considerato ammette un elevato numero di soluzioni e, data la sua complessità, viene risolto numericamente, a partire dal sistema di equazioni definito in precedenza:

$$\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; S; N\}$$

Anche in questo caso la soluzione numerica ottenuta da un qualsiasi algoritmo sarebbe molto dipendente dalle condizioni iniziali scelte per il calcolo. In base alle considerazioni appena fatte risulta impossibile determinare a priori quale delle soluzioni ammissibili venga rintracciata dalla soluzione numerica.

Per evitare tali problematiche si ricorre ad un algoritmo basato sul metodo di Newton-Raphson. Questo è un procedimento iterativo strutturato come segue:

0. Viene fornito in input il vettore \mathbf{q} degli spostamenti dei giunti attuati per cui si vuole determinare la posa della piattaforma mobile;
1. vengono interpolati n vettori di giunto \mathbf{q}_k a partire da un vettore iniziale \mathbf{q}_0 , corrispondente ad una configurazione nota del terminale della macchina, ad esempio la configurazione di home, caratterizzata dalla matrice di trasformazione omogenea:

$${}^0_1\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_0 \xrightarrow{\text{cinematica inversa}} \mathbf{q}_0$$

2. per ciascuno degli n vettori \mathbf{q}_k viene calcolata una soluzione della cinematica diretta attraverso l'algoritmo di Newton-Raphson, come:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{V}_i$$

Dove:

- \mathbf{V}_i è il valore assunto dal sistema di equazioni di vincolo;
 - \mathbf{x}_i è valore del vettore delle incognite di Study all'interazione precedente;
 - \mathbf{J}_i è la matrice Jacobiana, ovvero delle derivate parziali, delle equazioni di vincolo calcolata per il set di incognite \mathbf{x}_i :
3. Questo passaggio viene ripetuto fino alla stabilizzazione dell'errore sul manifold di vincolo $\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; S; N\}$ ad un valore di tolleranza accettabile, a partire dalla soluzione di partenza \mathbf{x}_{k-1} ;
 4. in output viene restituita la soluzione cercata, ovvero il vettore dei parametri di Study \mathbf{x}_n .

L'algoritmo fornirà una soluzione affidabile della posa se quest'ultima rientra nello spazio di lavoro del manipolatore ed è lontana da configurazioni singolari.

3 Sviluppo del modello ad errori

Gli errori considerati nel lavoro svolto sono unicamente quelli sulla lunghezza delle sei gambe del manipolatore, non si considerando cioè, gli errori che posso riguardare le altre parti della piattaforma come ad esempio gli errori sugli spostamenti degli attuatori lineari che movimentano il robot e sulla posizione dei punti di attacco delle gambe del manipolatore sul telaio.

Il modello sperimentale da implementare è lineare, ovvero nelle equazioni ricavate si considerano trascurabili i termini superiori al secondo ordine rispetto ai termini di primo ordine. Per procedere alla creazione di tale modello si sfrutta quanto ottenuto nell'analisi teorica della piattaforma robotizzata; verranno infatti impiegate le equazioni risultanti da tale studio che saranno rielaborate e risolte così da verificare se il modello ottenuto sia accettabile o meno.

3.1 Modello teorico

Il problema di cinematica inversa del manipolatore viene risolto nel software MATLAB grazie alla funzione $invKin66(T, geom)$. Questa funzione raccoglie in input la matrice di trasformazione omogenea T e la variabile struttura " $geom$ ", che contiene i parametri geometrici della macchina, e restituisce il vettore dei sei parametri di giunto q_i . Se la posa indicata dalla matrice di trasformazione T risulta esterna allo spazio di lavoro viene fornito come output un vettore vuoto.

Si assegnano ai valori numerici contenuti in " $geom$ " le variabili geometriche necessarie alla risoluzione del problema:

- q_{max} ; la massima corsa ammessa dei motori;
- l_i ; le lunghezze delle gambe del manipolatore;
- S_i ; la posizione di home delle slitte;
- s_i ; i versori direttori delle slitte;
- P_i ; le coordinate dei punti di attacco delle gambe sul manipolatore rispetto alla terna di riferimento fissa al telaio.

Si procede richiamando per ogni gamba del manipolatore la funzione $q = IKleg(P, S, s, l)$ che risolve la cinematica inversa di una singola gamba affrontando il problema come intersezione di una sfera ad una retta: il punto di attacco gamba-manipolatore è vincolato

a giacere su una sfera di raggio pari alla lunghezza della gamba l_i , centrata sul punto di attacco della gamba al telaio.

$$\begin{aligned} q_1 &= IKleg(T * [P1' 1]', S1, s1, l1); \\ q_2 &= IKleg(T * [P2' 1]', S2, s2, l2); \\ q_3 &= IKleg(T * [P3' 1]', S3, s3, l3); \\ q_4 &= IKleg(T * [P4' 1]', S4, s4, l4); \\ q_5 &= IKleg(T * [P5' 1]', S5, s5, l5); \\ q_6 &= IKleg(T * [P6' 1]', S6, s6, l6); \end{aligned}$$

La funzione citata accetta come input:

- Il punto P_i ;
- Il punto S_i ;
- Il versore s_i ;
- La lunghezza della gamba l_i .

Il problema in esame ha due soluzioni matematicamente accettabili che vengo fornite in output all'interno dello stesso vettore q_i .

$$\begin{aligned} q = & [(X * sx - Sy * sy - Sz * sz - Sx * sx + Y * sy + Z * sz + (-Sx^2 * sy^2 \\ & - Sx^2 * sz^2 + 2 * Sx * Sy * sx * sy + 2 * Sx * Sz * sx * sz + 2 * Sx \\ & * X * sy^2 + 2 * Sx * X * sz^2 - 2 * Sx * Y * sx * sy - 2 * Sx * Z \\ & * sx * sz - Sy^2 * sx^2 - Sy^2 * sz^2 + 2 * Sy * Sz * sy * sz - 2 \\ & * Sy * X * sx * sy + 2 * Sy * Y * sx^2 + 2 * Sy * Y * sz^2 - 2 * Sy \\ & * Z * sy * sz - Sz^2 * sx^2 - Sz^2 * sy^2 - 2 * Sz * X * sx * sz - 2 \\ & * Sz * Y * sy * sz + 2 * Sz * Z * sx^2 + 2 * Sz * Z * sy^2 - X^2 \\ & * sy^2 - X^2 * sz^2 + 2 * X * Y * sx * sy + 2 * X * Z * sx * sz \\ & - Y^2 * sx^2 - Y^2 * sz^2 + 2 * Y * Z * sy * sz - Z^2 * sx^2 \\ & - Z^2 * sy^2 + l^2 * sx^2 + l^2 * sy^2 + l^2 \\ & * sz^2) ^ (1/2)) / (sx^2 + sy^2 + sz^2); \\ & -(Sx * sx + Sy * sy + Sz * sz - X * sx - Y * sy - Z * sz + (-Sx^2 * sy^2 \\ & - Sx^2 * sz^2 + 2 * Sx * Sy * sx * sy + 2 * Sx * Sz * sx * sz + 2 * Sx \\ & * X * sy^2 + 2 * Sx * X * sz^2 - 2 * Sx * Y * sx * sy - 2 * Sx * Z \\ & * sx * sz - Sy^2 * sx^2 - Sy^2 * sz^2 + 2 * Sy * Sz * sy * sz - 2 \\ & * Sy * X * sx * sy + 2 * Sy * Y * sx^2 + 2 * Sy * Y * sz^2 - 2 * Sy \\ & * Z * sy * sz - Sz^2 * sx^2 - Sz^2 * sy^2 - 2 * Sz * X * sx * sz - 2 \\ & * Sz * Y * sy * sz + 2 * Sz * Z * sx^2 + 2 * Sz * Z * sy^2 - X^2 \\ & * sy^2 - X^2 * sz^2 + 2 * X * Y * sx * sy + 2 * X * Z * sx * sz \\ & - Y^2 * sx^2 - Y^2 * sz^2 + 2 * Y * Z * sy * sz - Z^2 * sx^2 \\ & - Z^2 * sy^2 + l^2 * sx^2 + l^2 * sy^2 + l^2 \\ & * sz^2) ^ (1/2)) / (sx^2 + sy^2 + sz^2)]; \end{aligned}$$

dove si è indicato con:

- X la coordinata x del punto i -esimo;
- Y la coordinata y del punto i -esimo;
- Z la coordinata z del punto i -esimo;

- S_x la componente x del vettore S_i ;
- S_y la componente y del vettore S_i ;
- S_z la componente z del vettore S_i ;
- s_x la componente x del versore s_i ;
- s_y la componente y del versore s_i ;
- s_z la componente z del versore s_i ;

Le due soluzioni ottenute sono quelle descritte in precedenza nella risoluzione del problema cinematico inverso.

Data la duplicità della soluzione del problema è necessario effettuare una procedura di selezione per ricercare il risultato corretto. A tale scopo si predispongono le variabili di servizio $Q, Ps1, Ps2, Ps3, Ps4, Ps5, Ps6, saveme, cont$ e si combinano tutte le soluzioni ricavate, per ottenere tutte le possibili configurazioni ammissibili del manipolatore, che risultano essere pari a $2^6 = 64$ configurazioni. La soluzione corrente viene salvata nella matrice Q :

$$Q = [Q; q1(c1) q2(c2) q3(c3) q4(c4) q5(c5) q6(c6)]$$

E inoltre, per la combinazione attuale, viene calcolata la posizione dei sei slider.

$$Ps1 = S1 + q1(c1) * s1;$$

$$Ps2 = S2 + q2(c2) * s2;$$

$$Ps3 = S3 + q3(c3) * s3;$$

$$Ps4 = S4 + q4(c4) * s4;$$

$$Ps5 = S5 + q5(c5) * s5;$$

$$Ps6 = S6 + q6(c6) * s6.$$

Le condizioni da verificare per ritenere la soluzione valida sono due:

1. $0 \leq q_i \leq q_{max}$, ovvero la corsa q_i calcolata grazie alla funzione *IKleg* deve essere maggiore di zero e compatibile con la corsa massima possibile;
2. Nel corso del normale funzionamento le gambe non devono passare per un orientamento verticale e devono essere rivolte verso l'esterno.

Se le due condizioni sono soddisfatte il valore attuale del contatore viene salvato nella variabile "*saveme*"; alla fine del procedimento vengono selezionate solo le soluzioni i cui indici di riga sono presenti nella variabile "*saveme*".

3.2 Modello ad errori

Il punto di partenza per lo sviluppo del modello ad errori sono le due soluzioni ottenute risolvendo la funzione $q = IKleg(P, S, s, l)$ definita nel modello teorico. Dopo aver

selezionato la soluzione corretta si riscrivono le equazioni per ognuna delle sei gambe del manipolatore. Si inseriscono a questo punto gli errori dl_i sulla lunghezza delle gambe sostituendo nelle equazioni considerate il termine l_i , che indica la lunghezza ideale delle gambe, con le lunghezze reali date dalla somma dei termini ($l_{i_id} + dl_i$).

$$\begin{aligned}
q1 = & (X1 * sx1 - Sy1 * sy1 - Sz1 * sz1 - Sx1 * sx1 + Y1 * sy1 + Z1 * sz1 \\
& + (- Sx1^2 * sy1^2 - Sx1^2 * sz1^2 + 2 * Sx1 * Sy1 * sx1 * sy1 \\
& + 2 * Sx1 * Sz1 * sx1 * sz1 + 2 * Sx1 * X1 * sy1^2 + 2 * Sx1 * X1 \\
& * sz1^2 - 2 * Sx1 * Y1 * sx1 * sy1 - 2 * Sx1 * Z1 * sx1 * sz1 \\
& - Sy1^2 * sx1^2 - Sy1^2 * sz1^2 + 2 * Sy1 * Sz1 * sy1 * sz1 - 2 \\
& * Sy1 * X1 * sx1 * sy1 + 2 * Sy1 * Y1 * sx1^2 + 2 * Sy1 * Y1 * sz1^2 \\
& - 2 * Sy1 * Z1 * sy1 * sz1 - Sz1^2 * sx1^2 - Sz1^2 * sy1^2 - 2 \\
& * Sz1 * X1 * sx1 * sz1 - 2 * Sz1 * Y1 * sy1 * sz1 + 2 * Sz1 * Z1 \\
& * sx1^2 + 2 * Sz1 * Z1 * sy1^2 - X1^2 * sy1^2 - X1^2 * sz1^2 + 2 \\
& * X1 * Y1 * sx1 * sy1 + 2 * X1 * Z1 * sx1 * sz1 - Y1^2 * sx1^2 \\
& - Y1^2 * sz1^2 + 2 * Y1 * Z1 * sy1 * sz1 - Z1^2 * sx1^2 - Z1^2 \\
& * sy1^2 + (l1_id + dl1) ^ 2 * sx1^2 + (l1_id + dl1) ^ 2 * sy1^2 \\
& + (l1_id + dl1) ^ 2 * sz1^2) ^ (1/2)) / (sx1^2 + sy1^2 + sz1^2);
\end{aligned}$$

Si raccolgono le sei equazioni dei giunti q_i , in cui si sono sostituite le lunghezze reali delle gambe, e le sei variabili dl_i , che rappresentano gli errori sulla lunghezza delle gambe, rispettivamente nel vettore dei giunti q e degli errori dl .

$$q = [q1; q2; q3; q4; q5; q6];$$

$$dl = [dl1; dl2; dl3; dl4; dl5; dl6].$$

Si costruisce ora la matrice Jacobiana J delle funzioni dei giunti q_i , ovvero la matrice delle derivate parziali delle funzioni dei giunti q_i rispetto alle variabili dl_i . La matrice 6x6 ottenuta è diagonale, infatti le equazioni delle gambe risultano disaccoppiate tra loro, ovvero l'equazione che descrive la cinematica inversa di una singola gamba è funzione solamente dell'errore sulla lunghezza della gamba stessa mentre è indipendente dagli errori sulle restanti gambe.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial l_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_6}{\partial l_1} & \dots & \frac{\partial q_6}{\partial l_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial q_2}{\partial l_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial q_3}{\partial l_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial q_4}{\partial l_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial q_5}{\partial l_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial q_6}{\partial l_6} \end{bmatrix}$$

Viene riportato come esempio il primo elemento della diagonale della matrice espresso in forma estesa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial l_1} = & ((2 * dl1 + 2 * l1_id) * sx1^2 + (2 * dl1 + 2 * l1_id) * sy1^2 + (2 * dl1 \\ & + 2 * l1_id) * sz1^2) / (2 * (sx1^2 + sy1^2 + sz1^2) * (sx1^2 \\ & * (dl1 + l1_id)^2 + sy1^2 * (dl1 + l1_id)^2 + sz1^2 * (dl1 \\ & + l1_id)^2 - Sx1^2 * sy1^2 - Sy1^2 * sx1^2 - Sx1^2 * sz1^2 \\ & - Sz1^2 * sx1^2 - Sy1^2 * sz1^2 - Sz1^2 * sy1^2 - X1^2 \\ & * sy1^2 - X1^2 * sz1^2 - Y1^2 * sx1^2 - Y1^2 * sz1^2 - Z1^2 \\ & * sx1^2 - Z1^2 * sy1^2 + 2 * Sx1 * X1 * sy1^2 + 2 * Sx1 * X1 \\ & * sz1^2 + 2 * Sy1 * Y1 * sx1^2 + 2 * Sy1 * Y1 * sz1^2 + 2 * Sz1 \\ & * Z1 * sx1^2 + 2 * Sz1 * Z1 * sy1^2 + 2 * Sx1 * Sy1 * sx1 * sy1 + 2 \\ & * Sx1 * Sz1 * sx1 * sz1 + 2 * Sy1 * Sz1 * sy1 * sz1 - 2 * Sy1 * X1 \\ & * sx1 * sy1 - 2 * Sz1 * X1 * sx1 * sz1 - 2 * Sx1 * Y1 * sx1 * sy1 - 2 \\ & * Sz1 * Y1 * sy1 * sz1 - 2 * Sx1 * Z1 * sx1 * sz1 - 2 * Sy1 * Z1 * sy1 \\ & * sz1 + 2 * X1 * Y1 * sx1 * sy1 + 2 * X1 * Z1 * sx1 * sz1 + 2 * Y1 \\ & * Z1 * sy1 * sz1)^{(1/2)}) \end{aligned}$$

Costruita la matrice Jacobiana si procede calcolando gli spostamenti dei motori reali e ideali per quattro differenti pose del manipolatore, inoltre si ricavano i valori ideali dei punti di attacco della gamba al manipolatore per ciascuna posa. Questo passaggio sostituisce la fase di misurazione descritta nei capitoli precedenti.

Gli spostamenti dei motori sono ricavati attraverso la funzione $q = invKin66(T, geom)$ già citata. Si vanno quindi a definire tra i parametri raccolti nella variabile "geom" quelli di

interesse e a costruire la matrice di trasformazione omogenea T . I parametri utili al calcolo sono:

- l_i ; le lunghezze delle gambe;
- S_i ; la posizione di home delle slitte;

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,15 \\ -0,05 \\ 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} -0,27 \\ 0,05 \\ 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,15 \\ 0 \end{bmatrix}; S_4 = \begin{bmatrix} 0,10 \\ -0,10 \\ 0 \end{bmatrix}; S_5 = \begin{bmatrix} -0,28 \\ 0,10 \\ 0 \end{bmatrix}; S_6 = \begin{bmatrix} -0,25 \\ -0,15 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- s_i ; i versori direttori delle slitte;

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

- $q_{max} = 0,35$ [m]; la massima corsa ammessa per le slitte;
- $r = 0,1$ [m]; la distanza dei punti di connessione delle gambe sul manipolatore dal centro del sistema di riferimento mobile, considerata uguale per le 6 gambe;
- $th = 20^\circ$; l'angolo che indica la spaziatura angolare tra i due punti di ciascuna coppia. Si ricorda infatti che i punti di connessione sono disposti a coppie intorno ai vertici di un triangolo equilatero, quindi con spaziatura angolare di 120° ;
- rm_1 e rm_2 ; le matrici di rotazione usate per definire la posizione dei punti di attacco;

$$rm_1 = \begin{bmatrix} \cos 120 & -\sin 120 & 0 \\ \sin 120 & \cos 120 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad rm_2 = \begin{bmatrix} \cos th/2 & -\sin th/2 & 0 \\ \sin th/2 & \cos th/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- P_i ; la posizione dei punti di attacco sul manipolatore ricavata attraverso le matrici rm_1 e rm_2 .

$$P_1 = rm_2 \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_2 = rm_1 \cdot rm_1 \cdot rm_2 \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_3 = rm_1 \cdot rm_1 rm_2' \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$P_4 = rm_2' \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_5 = rm_1 \cdot rm_2 \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_6 = rm_1 \cdot rm_1 \cdot rm_2 \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

La matrice di trasformazione omogenea T è così costituita:

$$T = \begin{bmatrix} & R & & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con R e P rispettivamente la matrice di rotazione e il vettore di traslazione del terminale del robot.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione R è ottenuta come prodotto delle tre matrici R_x , R_y , R_z che esprimono tre rotazioni successive rispetto agli assi fissi, nell'ordine xyz :

$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos th_x & -\sin th_x \\ 0 & \sin th_x & \cos th_x \end{bmatrix}; \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos th_y & 0 & \sin th_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin th_y & 0 & \cos th_y \end{bmatrix};$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos th_z & -\sin th_z & 0 \\ \sin th_z & \cos th_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

dove th_x , th_y , th_z sono gli angoli di rotazione attorno gli assi x , y e z .

La posa del manipolatore viene modificata variando il valore del vettore P e degli angoli di rotazione th_x , th_y e th_z ; le quattro pose considerate per il calcolo sono scelte in modo del tutto casuale tra le possibili posizioni assunte dal manipolatore all'interno dello spazio di lavoro e sono le seguenti:

1. $P = \begin{bmatrix} 0,15 \\ 0,1 \\ 0,05 \end{bmatrix} [m]; \quad \begin{bmatrix} th_x \\ th_y \\ th_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{bmatrix};$
2. $P = \begin{bmatrix} 0,07 \\ 0,08 \\ 0,04 \end{bmatrix} [m]; \quad \begin{bmatrix} th_x \\ th_y \\ th_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^\circ \\ -3^\circ \\ -2^\circ \end{bmatrix};$
3. $P = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,02 \\ 0,07 \end{bmatrix} [m]; \quad \begin{bmatrix} th_x \\ th_y \\ th_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2^\circ \\ 5^\circ \\ 8^\circ \end{bmatrix};$
4. $P = \begin{bmatrix} 0,13 \\ -0,06 \\ -0,02 \end{bmatrix} [m]; \quad \begin{bmatrix} th_x \\ th_y \\ th_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^\circ \\ -4^\circ \\ -1^\circ \end{bmatrix}.$

Le traslazioni dei motori ideali per ognuna delle quattro pose si ottengono inserendo le lunghezze ideali delle gambe l_i , pari a:

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = 0,2 [m]$$

Mentre gli spostamenti reali sono ricavati inserendo le lunghezze reali delle gambe, ovvero quelle affette da errore. Gli errori considerati sono ipotizzati arbitrariamente e sono i seguenti:

- $dl_1 = 0,00005 [m] = 50 [\mu m] \rightarrow l_1 = 0,20005 [m];$
- $dl_2 = -0,00002 [m] = -20 [\mu m] \rightarrow l_2 = 0,19998 [m];$
- $dl_3 = -0,00005 [m] = -50 [\mu m] \rightarrow l_3 = 0,19995 [m];$
- $dl_4 = 0,00002 [m] = 20 [\mu m] \rightarrow l_4 = 0,20002 [m];$
- $dl_5 = 0,00001 [m] = 10 [\mu m] \rightarrow l_5 = 0,20001 [m];$
- $dl_6 = -0,00001 [m] = -10 [\mu m] \rightarrow l_6 = 0,19999 [m].$

Infine, si calcolano i valori ideali dei punti di attacco della gamba al manipolatore come:

$$p_1 = T \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_2 = T \cdot \begin{bmatrix} P_2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_3 = T \cdot \begin{bmatrix} P_3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$p_4 = T \cdot \begin{bmatrix} P_4 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_5 = T \cdot \begin{bmatrix} P_5 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad p_6 = T \cdot \begin{bmatrix} P_6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolati i valori di interesse, si procede sostituendoli nella matrice jacobiana J precedentemente definita per ognuna delle quattro pose considerate. Le quattro matrici ottenute sono unite in una matrice globale indicata con J_{tot} 24x6.

$$J_{tot} = \begin{bmatrix} J_{posa1} \\ J_{posa2} \\ J_{posa3} \\ J_{posa4} \end{bmatrix}$$

Si ricerca ora la matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose della matrice J_{tot} ; questa matrice è una generalizzazione della matrice inversa ed è usata nel caso in cui la matrice da invertire non sia quadrata, come in questo caso. L'espressione algebrica per determinare la pseudo-inversa è la seguente:

$$K = [J_{tot}^T \cdot J_{tot}]^{-1} \cdot J_{tot}^T$$

Gli spostamenti ideali precedentemente calcolati per ciascuna delle pose vengono sottratti ai corrispondenti spostamenti reali ed i risultati vengono raccolti nel vettore dq così composto:

$$dq = [dq_{posa1} \quad dq_{posa2} \quad dq_{posa3} \quad dq_{posa4}]^{-1} =$$

$$= [dq_1^{posa1} \quad \dots \quad dq_6^{posa1} \quad \dots \quad dq_1^{posa4} \quad \dots \quad dq_6^{posa4}]^{-1}$$

dove $dq_i^{posan} = q_i^{reale} - q_i^{ideale}$.

Dal prodotto della matrice pseudo-inversa K e del vettore dq si ottiene il vettore dl_{calc} , in cui sono contenuti i sei errori sulla lunghezza delle gambe calcolati attraverso il modello lineare adottato.

$$dl_{calc} = \begin{bmatrix} dl_1^{calc} \\ dl_2^{calc} \\ dl_3^{calc} \\ dl_4^{calc} \\ dl_5^{calc} \\ dl_6^{calc} \end{bmatrix} = K \cdot dq$$

I sei elementi del vettore dl_{calc} rappresentano altrettante equazioni, le cui incognite sono gli errori sulla lunghezza delle gambe. Ciascuna delle equazioni può essere risolta rispetto alla variabile dl_i così da ricavare l'errore sulla lunghezza di ogni gamba, che andrà confrontato con il valore ipotizzato arbitrariamente in fase di calcolo. Tale confronto permette di visualizzare quanto il modello lineare considerato per la calibrazione del manipolatore parallelo rispecchi la realtà ed è realizzato sottraendo agli errori calcolati i corrispondenti errori ipotizzati.

$$err_{gamba1} = dl_1^{calc} - dl_1$$

$$err_{gamba2} = dl_2^{calc} - dl_2$$

$$err_{gamba3} = dl_3^{calc} - dl_3$$

$$err_{gamba4} = dl_4^{calc} - dl_4$$

$$err_{gamba5} = dl_5^{calc} - dl_5$$

$$err_{gamba6} = dl_6^{calc} - dl_6$$

Per migliorare analisi del modello si ricavano anche gli errori percentuali.

$$err\%_{gamba\ i} = \frac{|dl_i^{calc} - dl_i|}{dl_i} \cdot 100$$

4 Risultati

Prima di riportare i dati derivanti dall'analisi condotta si ricordano gli errori sulla lunghezza delle gambe, ipotizzati arbitrariamente durante lo sviluppo del modello ad errori:

- $dl_1 = 0,00005 [m] = 50 [\mu m] \rightarrow l_1 = 0,20005 [m]$;
- $dl_2 = -0,00002 [m] = -20 [\mu m] \rightarrow l_2 = 0,19998 [m]$;
- $dl_3 = -0,00005 [m] = -50 [\mu m] \rightarrow l_3 = 0,19995 [m]$;
- $dl_4 = 0,00002 [m] = 20 [\mu m] \rightarrow l_4 = 0,20002 [m]$;
- $dl_5 = 0,00001 [m] = 10 [\mu m] \rightarrow l_5 = 0,20001 [m]$;
- $dl_6 = -0,00001 [m] = -10 [\mu m] \rightarrow l_6 = 0,19999 [m]$.

Grazie al procedimento precedentemente descritto, e all'utilizzo del software MATLAB, si ricavano i seguenti errori sulla lunghezza delle gambe:

- $dl_1^{calc} = 0.000049986086 [m]$;
- $dl_2^{calc} = -0.000019993928 [m]$;
- $dl_3^{calc} = -0.000049998354 [m]$;
- $dl_4^{calc} = 0.000020005476 [m]$;
- $dl_5^{calc} = 0.000010000151 [m]$;
- $dl_6^{calc} = -0.000010000595 [m]$.

Confrontando i valori degli errori calcolati con quelli ipotizzati, come indicato nella sezione precedente, si ottengono i seguenti risultati:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| • $err_{gamba1} = -0.000000013914$ | • $err\%_{gamba1} = 0.028\%$ |
| • $err_{gamba2} = +0.000000006072$ | • $err\%_{gamba2} = 0.030\%$ |
| • $err_{gamba3} = +0.000000001646$ | • $err\%_{gamba3} = 0.003\%$ |
| • $err_{gamba4} = +0.000000005476$ | • $err\%_{gamba4} = 0.027\%$ |
| • $err_{gamba5} = +0.000000000151$ | • $err\%_{gamba5} = 0.002\%$ |
| • $err_{gamba6} = -0.000000000595$ | • $err\%_{gamba6} = 0.006\%$ |

Da tale confronto emerge che la differenza tra i valori ottenuti col modello ad errori, ed i valori ipotizzati in fase di calcolo è molto piccola. Si può quindi affermare che si è raggiunto l'obiettivo della calibrazione, ovvero si è ricavato un modello che descrive il funzionamento del manipolatore in modo appropriato.

5 Conclusioni

Lo studio condotto durante il tirocinio, su cui si basa la presente tesi, è stato utile all'implementazione di un modello cinematico per un manipolatore parallelo ad elevata precisione. Lo scopo di questa analisi è illustrare i passaggi che compongono il processo di calibrazione di un robot ed in particolare l'implementazione di un algoritmo per la fase di identificazione, fornendo un esempio pratico utile allo studio di progetti riguardanti problematiche simili.

Il modello ottenuto risulta soddisfacente ma vanno però considerati i suoi limiti:

1. Il modello ad errori implementato prende in considerazione i soli errori sulla lunghezza delle gambe del manipolatore, trascurando altri errori che potrebbero risultare più incisivi sulla posa della macchina;
2. gli errori sulla lunghezza delle gambe e i dati utilizzati per le 4 diverse pose del manipolatore in fase di calcolo non nascono da misurazioni effettuate sulla macchina durante il funzionamento ma da ipotesi arbitrarie che possono solo approssimare le misure reali.

Si può condurre un'analisi migliore e più accurata considerando gli errori dovuti agli altri parametri geometrici che caratterizzano il manipolatore. Si possono inoltre utilizzare gli altri algoritmi presenti nella letteratura per l'identificazione degli errori nei parametri del manipolatore. Infine, si possono ricavare i dati utili al calcolo tramite delle misurazioni eseguite sul manipolatore, partendo così da una base più realistica per lo sviluppo del modello.

6 Bibliografia

1. M. Callegari, P. Fanghella e F. Pellicano, *Meccanica applicata alle macchine*, 2^a ed., CittàStudi, 2017.
2. B. W. Mooring, Z. S. Roth e M. R. Driels, *Fundamentals of manipulator calibration*, John Wiley & Sons, 1991.
3. Relazione di progetto, M. C. Palpacelli, *Progettazione funzionale di un robot di manipolazione parallelo ad elevata precisione*.
4. Mihelj M. e al., 2019, *Parallel robots*. In *Robotics*. Springer, Cham.
5. Lien T.K. (2019) *Robot*. In: Chatti S., Laperrière L., Reinhart G., Tolio T. (eds) *CIRP Encyclopedia of production Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg.
6. Saputra, V.B., Ong, S.K. & Nee, A.Y.C. Optimum calibration of a parallel kinematic manipulator using digital indicators. *Adv. Manuf.* 2, 222–230 (2014)
7. A. Rosyid, B. El-Khasawneh and A. Alazzam, "Nonlinear estimation for kinematic calibration of 3PRR planar parallel kinematics manipulator," *2017 7th International Conference on Modeling, Simulation, and Applied Optimization (ICMSAO)*, Sharjah, 2017, pp. 1-5