

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE



INGEGNERIA ELETTRONICA

---

# Studio di varietà stabili e instabili per equazioni differenziali ordinarie

E APPLICAZIONI A CIRCUITI ELETTRICI

---

# Introduction to stable and unstable manifolds for ordinary differential equations

AND APPLICATIONS TO ELECTRICAL CIRCUITS

---

TESI DI LAUREA TRIENNALE

*Autore:*  
**Leonardo Del Grande**

*Relatore:*  
**dott. Matteo Franca**

*Correlatore:*  
**prof. Lucio Demeio**

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

Introduzione	v
<b>1 Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>1</b>
1.1 Equazioni differenziali del primo ordine . . . . .	1
1.1.1 Equazioni a variabili separabili . . . . .	2
1.1.2 Equazioni lineari del primo ordine . . . . .	4
1.2 Equazioni lineari del secondo ordine . . . . .	7
1.2.1 Spazi di funzioni . . . . .	8
1.2.2 Generalità sulle equazioni lineari. Problema di Cauchy	8
1.2.3 La struttura dell'integrale generale . . . . .	10
1.2.4 Equazioni omogenee a coefficienti costanti . . . . .	12
1.2.5 Equazioni non-omogenee . . . . .	14
1.3 Complementi . . . . .	17
1.3.1 Teorema di esistenza e unicità per le equazioni a variabili separabili . . . . .	17
1.3.2 Cenni alle equazioni lineari di ordine $n$ . . . . .	19
<b>2 Analisi qualitativa</b>	<b>23</b>
2.1 Equazioni del primo ordine . . . . .	23
2.1.1 Problema di Cauchy . . . . .	23
2.1.2 Equazioni autonome. Diagrammi di fase. Stabilità . .	31
2.2 Problema di Cauchy per sistemi di $n$ equazioni del primo ordine o equazioni di ordine $n$ . . . . .	34
2.3 Sistemi autonomi bidimensionali . . . . .	38
2.3.1 Stabilità per sistemi autonomi lineari . . . . .	44
2.3.2 Stabilità per sistemi autonomi non lineari . . . . .	50
<b>3 Invertibilità e funzione implicita</b>	<b>53</b>
3.1 Preliminari . . . . .	53
3.2 Invertibilità locale . . . . .	57
3.3 Funzioni definite implicitamente . . . . .	64
3.3.1 Funzione implicita di una variabile . . . . .	64
3.3.2 Funzione implicita di $n$ variabili . . . . .	68

3.3.3	Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni . . .	69
<b>4</b>	<b>Varietà</b>	<b>71</b>
4.1	Varietà k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	71
4.2	Spazio tangente ad una varietà . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Teorema di Hartman</b>	<b>85</b>
5.1	Varietà invarianti . . . . .	85
5.2	Teorema di Hartman . . . . .	89
5.3	Varietà immerse . . . . .	90
5.4	Cicli limite . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Applicazioni</b>	<b>97</b>
6.1	Oscillatore armonico . . . . .	97
6.1.1	Soluzione esatta . . . . .	99
6.1.2	Analisi qualitativa dell'oscillatore armonico . . . . .	99
6.1.3	Oscillatore armonico con smorzamento lineare . . . . .	100
6.1.4	Soluzione esatta . . . . .	102
6.2	Oscillazioni forzate e risonanza lineare . . . . .	102
6.2.1	Risonanza . . . . .	104
6.2.2	Risonanza in assenza di smorzamento . . . . .	106
6.2.3	Analisi qualitativa . . . . .	108
6.3	Oscillatori non lineari . . . . .	108
6.3.1	Introduzione . . . . .	108
6.3.2	Equazione di Duffing . . . . .	110

# Introduzione

Prima di iniziare vorrei esporre un mio pensiero in merito agli insegnamenti forniti nel mio corso di studi, che tuttavia si espande ad ogni ambito ingegneristico. La laurea triennale è stata creata per istruire futuri ingegneri che avessero le conoscenze di base per affrontare il mondo del lavoro. Sembrerebbe una buona premessa, tuttavia per riuscire a fornire una preparazione finalizzata all'ambito lavorativo si è cercato di ridurre al minimo le materie di "base", per fare spazio a materie specialistiche. In questo modo molti ingegneri, competenti nella propria disciplina, avranno grosse difficoltà ad affrontare problemi diversi. Con materie di "base", intendo tutte quelle materie che si sfruttano in ogni ambito del "sapere" scientifico, proprio come la Matematica. Ultimamente c'è la tendenza a voler conoscere la soluzione di un particolare problema senza sapere da dove si parte o come ci si è arrivati. Sicuramente questa riflessione è dettata anche dal fatto che queste materie mi hanno sempre affascinato, in particolare la Matematica. Ho sempre visto nelle formule una certa bellezza, che inizialmente era fine a se stessa, ma con il tempo ho capito che grazie ad esse si potevano spiegare gran parte dei fenomeni che conosciamo in natura. Galileo diceva "La matematica è l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo" e proprio per chiarire questo concetto comincerò ora a parlare della mia tesi.

Partiamo con un concetto noto a quelli che staranno leggendo questo testo, la derivata. Il concetto di derivata di una funzione si presta a numerose interpretazioni fisiche. Se  $x(t)$  rappresenta la posizione all'istante  $t$  di una particella che si muove lungo una retta, le derivate  $x'(t)$  e  $x''(t)$  rappresentano, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione della particella. Quindi non c'è da stupirsi se la traduzione matematica di molte leggi della natura porti a scrivere equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate: è questo il concetto di *equazione differenziale*. Numerosi modelli matematici sviluppati dalle scienze applicate (fisica, biologia, ecologia, economia, ecc...) si formulano per mezzo di equazioni differenziali. In matematica si distinguono le *equazioni differenziali ordinarie* e le *equazioni differenziali alle derivate parziali*. Pur limitandoci alle prime, l'argomento è comunque molto ampio. Tratteremo l'argomento in due capitoli; nel primo, vedremo da un punto di vista elementare alcune classi di equazioni che si incontrano in moltissime applicazioni, come certe equazioni del pri-

mo ordine, equazioni del secondo ordine lineari, in particolare a coefficienti costanti, ed esempi di equazioni lineari di ordine superiore. Per queste equazioni ci concentreremo sui metodi elementari di risoluzione esplicita. Gli strumenti e i metodi sono quelli utilizzati per lo studio di funzioni di una sola variabile reale. Le equazioni differenziali considerate in questo capitolo sono di tipo molto speciale e consentono di avere una rappresentazione dell'integrale generale in forma abbastanza esplicita. Questa circostanza non capita frequentemente nelle applicazioni; spesso si possono ottenere solo le proprietà più rilevanti delle soluzioni di un problema differenziale (come la stabilità, il comportamento asintotico, ecc.) tramite uno studio teorico qualitativo; queste informazioni sono fondamentali per riuscire, con tecniche numeriche, a fornire una rappresentazione quantitativa. Lo scopo del secondo capitolo è proprio fornire un'analisi qualitativa delle equazioni e dei sistemi differenziali. Riprenderemo le equazioni del primo ordine trattando in modo particolare le *equazioni autonome* (in cui non compare in modo esplicito il tempo). Tratteremo i *sistemi di  $n$  equazioni del primo ordine*, che come vedremo si possono ricondurre facilmente ad *equazioni di ordine  $n$* , in particolare quelli autonomi e bidimensionali. Sempre per questi sistemi parleremo del problema della stabilità nel caso lineare, classificando tutti i *punti critici* del sistema, per poi affrontare brevemente la stabilità nel caso non lineare. Proseguendo nella trattazione incontreremo un capitolo in cui, dopo aver fornito qualche nozione preliminare, verranno esposti e poi dimostrati il *Teorema dell'invertibilità locale* e il *Teorema della funzione implicita*. Lo scopo di questo capitolo è semplicemente mostrare nel dettaglio due teoremi che verranno poi utilizzati successivamente per spiegare il concetto geometrico di varietà nel capitolo 4. In pratica una varietà è una generalizzazione delle nozioni di curva e superficie; in uno spazio  $\mathbb{R}^n$  (di dimensione qualunque) consideriamo quei sottoinsiemi che si possono vedere come oggetti geometrici di dimensione  $k$ , con  $k$  compreso tra 1 e  $n-1$ . Chiameremo questi oggetti *varietà  $k$ -dimensionali*, ne daremo una definizione rigorosa e mostreremo diversi esempi. Inoltre vedremo che una varietà  $k$ -dimensionale si può definire sia in forma implicita, mediante un sistema di  $n-k$  equazioni in  $n$  variabili (*varietà grafico*), sia in forma parametrica, mediante un'opportuna funzione  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  (*parametrizzazione locale della varietà  $M$* ). Per concludere il capitolo definiremo lo *spazio tangente* ad una varietà nel punto  $\bar{x}$  come l'insieme di tutti i vettori tangenti alla varietà in  $\bar{x}$ . Il quinto capitolo è probabilmente il più importante di tutta la tesi. Tutto il lavoro fatto in precedenza è servito per poter affrontare con la giusta preparazione questo capitolo. Inizialmente definiremo il *flusso*  $\phi(t)$  con tutte le sue proprietà, gli insiemi *invarianti* e *localmente invarianti* e chiariremo il concetto di spazio *stabile* e *instabile*. Queste premesse serviranno per studiare cosa accade nei dintorni di un punto critico (nel nostro caso l'origine) di un sistema linearizzato. Si

vedrà, grazie al *Teorema di Hartman* (che non dimostreremo), che esistono una *varietà locale stabile* e una *varietà locale instabile*. Faremo inoltre notare la differenza tra varietà *embedded* e *immersed*. Si vedrà che le varietà *immersed* non sono varietà nel senso classico del termine, a differenza di quelle *embedded*. Tuttavia molte varietà, che a livello locale sono *embedded*, si potranno vedere globalmente solo come varietà *immersed*. Dato il punto di vista *dinamico* di questo capitolo, lo concluderemo mostrando che un'orbita può tendere asintoticamente ad un ciclo, chiamato *ciclo limite* e citeremo il famoso teorema di *Poincarè-Bendixon* senza dimostrarlo. Infine, nel capitolo conclusivo, cercheremo di mostrare gran parte dei risultati visti in precedenza anche da un punto di vista applicativo. Proporremo il modello matematico più semplice per descrivere fenomeni di tipo periodico, l'*oscillatore armonico*, governato da un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenea:

$$mx'' = -kx,$$

che avrà come corrispondente modello elettrico un circuito LC. Vedremo anche il caso dell'*oscillatore armonico con smorzamento lineare*, nel quale all'equazione precedente verrà aggiunto un termine del tipo  $-bx'$ , che avrà come corrispondente modello elettrico il circuito RLC. Tratteremo anche il caso in cui ad un oscillatore armonico smorzato sia applicata una forzante esterna, indipendente dallo stato del sistema stesso, che verrà rappresentata attraverso una funzione nota del tempo  $f(t)$ . Il corrispondente modello elettrico sarà in questo caso un circuito RLC al quale è applicato un generatore di forza elettromotrice  $f(t)$ . Studieremo in particolare  $f(t)$  che sono funzioni armoniche del tempo, che sono particolarmente importanti, perchè in questo caso, per particolari valori dei parametri presenti nell'equazione, può verificarsi il fenomeno della *risonanza*. Nell'ultima sezione del capitolo, dopo aver fatto una breve introduzione sugli oscillatori *non lineari*, parleremo nel dettaglio dell'*equazione di Duffing*:

$$x'' + x + \epsilon x^3,$$

anch'essa un'equazione differenziale del secondo ordine, che però contiene un termine *non lineare*. La studieremo in modo molto approfondito, mostrando il modello meccanico di riferimento, osservando cosa accade in prossimità dei punti critici (ci tornerà utile il Teorema di Hartman) e mostrando lo *sviluppo perturbativo diretto* di tale equazione.

*Ringrazio i miei genitori e i miei amici per avermi accompagnato in questo percorso. Ringrazio anche il professore Lucio Demeio per la grande disponibilità dimostrata. Infine ringrazio Matteo Franca, il miglior insegnante che abbia mai avuto, un grande matematico, ma soprattutto una persona speciale.*





# Capitolo 1

## Equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo vedremo qualche nozione di base sulle equazioni differenziali ordinarie. In particolare parleremo di equazioni differenziali del primo ordine, a variabili separabili e lineari, del secondo ordine lineari e discuteremo del problema di Cauchy ad esse associato. Illustreremo le varie soluzioni e qualche metodo risolutivo per ricercare una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea. Infine dimostreremo il Teorema di esistenza e unicità per le equazioni a variabili separabili e faremo qualche cenno alle equazioni lineari di ordine  $n$ . Nel prossimo capitolo cercheremo di dare una descrizione teorica più generale della teoria delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali, per affrontare poi brevemente il tema della stabilità dei punti critici.

### 1.1 Equazioni differenziali del primo ordine

Si dice *equazione differenziale di ordine  $n$*  un'equazione del tipo:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.1)$$

dove  $y(t)$  è la funzione incognita e  $F$  è una funzione assegnata delle  $n+1$  variabili  $t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ , a valori reali. L'*ordine* dell'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare. Si dirà *soluzione*, o (*curva*) *integrale*, della (1.1), nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , una funzione  $s(t)$ , definita almeno in  $I$  e a valori reali, per cui risulti:

$$s^{(n)} = F(t, s(t), s'(t), s''(t), \dots, s^{(n-1)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I. \quad (1.2)$$

Infine, si dirà *integrale generale* dell'equazione (1.1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (1.1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

Ad esempio, la ricerca delle primitive di una funzione  $f$  continua su  $I$  equivale a risolvere l'equazione differenziale del primo ordine:

$$y'(t) = F(t)$$

che ha infinite soluzioni del tipo:

$$y(t) = \int F(t)dt + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

La condizione supplementare

$$y(t_0) = y_0 \tag{1.3}$$

permette di selezionare una *soluzione particolare*. Consideriamo ora equazioni del primo ordine, quindi del tipo

$$y' = F(t, y) \tag{1.4}$$

Il problema di risolvere le equazioni (1.4),(1.3) prende il nome di **problema di Cauchy**. Tale problema ammette un'unica soluzione, almeno *localmente*, cioè per valori di  $t$  in un intorno del punto  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale. Si noti che le soluzioni dell'equazione differenziale, espresse dall'integrale generale, potrebbero essere definite su insiemi diversi a seconda del valore della costante, e talvolta su insiemi più complicati di un intervallo (ad esempio: per ogni  $t \neq 0$ ). Tuttavia, quando si parla di soluzione di un problema di Cauchy, si intende sempre una funzione che:

- a) è definita su un intervallo  $I$ , contenente il punto  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale;
- b) è derivabile in tutto  $I$  e soddisfa l'equazione in tutto  $I$ .

L'idea di soluzione di un problema di Cauchy corrisponde infatti a quella di evoluzione di un sistema, soggetto a una certa legge differenziale e a una certa condizione iniziale. Questa interpretazione ha senso solo se la variabile  $t$  varia a partire dall'istante iniziale  $t_0$ .

Per la maggior parte delle equazioni non è possibile ricavare l'integrale in forma esplicita, allora si può ricorrere a metodi di integrazione approssimati, di cui si occupa il *calcolo numerico*.

### 1.1.1 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono equazioni del tipo:

$$y' = a(t)b(y) \tag{1.5}$$

con  $a$  continua in  $I \subset \mathbb{R}$  e  $b$  continua in  $J \subset \mathbb{R}$ . Osserviamo anzitutto che se il numero  $\bar{y}$  è una soluzione dell'equazione algebrica  $b(y) = 0$ , la funzione costante  $y(t) = \bar{y}$  è una soluzione dell'equazione differenziale. Infatti in tal caso il secondo membro si annulla, perchè  $b(\bar{y}) = 0$ , e il primo membro si annulla, perchè la derivata della funzione costante è zero. Supponendo invece  $b(y) \neq 0$ , la (1.5) si può riscrivere nella forma

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t).$$

Un'ipotetica soluzione  $y(t)$  soddisfa dunque l'identità

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t).$$

Prendendo gli integrali indefiniti di ambo i membri, si ottiene:

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + c.$$

Ora nell'integrale a primo membro si può effettuare il cambio di variabile  $y = y(t)$  ( $dy = y'(t)dt$ ) ottenendo

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) dt + c \tag{1.6}$$

con  $c$  costante arbitraria. La (1.6) assegna l'integrale generale della (1.5). Ciò significa che se  $B(y)$  è una primitiva di  $1/b(y)$  e  $A(t)$  è una primitiva di  $a(t)$ , l'integrale generale della (1.5) è assegnato *implicitamente* dall'equazione

$$B(y) = A(t) + c$$

con  $c$  costante arbitraria.

Infine, se si riesce a ricavare esplicitamente  $y$  dall'ultima equazione (cioè se si sa scrivere la funzione inversa di  $B$ ,  $B^{-1}$ ) si ottiene

$$y = B^{-1}(A(t) + c),$$

cioè un'espressione del tipo

$$y = F(t, c)$$

(in cui la costante arbitraria  $c$  può comparire in qualsiasi forma, anche non additiva). In pratica, data un'equazione a variabili separabili, non è detto che si sappiano determinare esplicitamente le primitive  $B(y)$ ,  $A(t)$ , e anche in caso si riuscisse a fare non è detto che si sappia esprimere  $y$  nella forma  $y = F(t, c)$ . Ciò sarà possibile in casi particolarmente semplici.

Ricordare la (1.6) è facile: basta pensare di scrivere  $y'(t) = dy/dt$  e, trattandolo formalmente come un quoziente, trasformare la (1.5) nella

$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt$$

che poi si integra formalmente membro a membro, arrivando alla (1.6).

Per le equazioni a variabili separabili vale il seguente risultato di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy (caso particolare del Teorema 16):

**1 Teorema** (Problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili). *Si consideri il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

dove  $a$  è una funzione continua in un intorno  $I$  di  $t_0$  e  $b$  è una funzione continua in un intorno  $J$  di  $y_0$ . Allora esiste un intorno  $I' \subset I$  di  $t_0$  e una funzione  $y \in C^1(I')$  soluzione del problema (1.7).

Se inoltre  $b \in C^1(J)$  (o, più in generale,  $b$  è una funzione continua, eventualmente non derivabile ma con rapporto incrementale limitato in  $J$ ), allora tale soluzione è unica.

### 1.1.2 Equazioni lineari del primo ordine

Sono equazioni del tipo (1.4) con  $F$  lineare in  $y$  e  $y'$ , ossia che si possono scrivere nella forma:

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t); \quad (1.8)$$

supporremo  $a$  e  $f$  continue sull'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $f = 0$  l'equazione si dice **omogenea**

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0. \quad (1.9)$$

Al contrario, la (1.8) si dirà **non-omogenea**.

Dimostriamo anzitutto il seguente teorema fondamentale (che, come vedremo, si estenderà alle equazioni lineari di ordine qualsiasi):

**2 Teorema.** *L'integrale generale dell'equazione non-omogenea si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'omogenea una soluzione particolare della non-omogenea.*

*Dimostrazione.* Sia infatti  $y(t)$  una qualunque soluzione della (1.8) e  $\bar{y}(t)$  una soluzione particolare, cioè:

$$\begin{aligned} y' + a(t)y &= f(t) \\ \bar{y}' + a(t)\bar{y} &= f(t). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$(y - \bar{y})' + a(t)(y - \bar{y}) = 0$$

Perciò la funzione  $z(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  è soluzione della (1.9). Viceversa, sia  $z(t)$  una qualunque soluzione della (1.9) e  $\bar{y}(t)$  una soluzione particolare della (1.8); per somma si ottiene che la funzione  $y(t) = z(t) + \bar{y}(t)$  è soluzione della (1.8).

Abbiamo così dimostrato che la generica soluzione dell'equazione non-omogenea si ottiene sommando alla soluzione generica dell'equazione omogenea una soluzione particolare (fissata una volta per tutte) dell'equazione non-omogenea.  $\square$

### Soluzione dell'equazione omogenea

Occupiamoci ora dell'equazione omogenea (1.9). Sia  $A(t)$  una primitiva di  $a(t)$  (cioè  $A'(t) = a(t)$ ); moltiplichiamo ambo i membri della (1.9) per  $e^{A(t)}$ ; abbiamo

$$z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} = 0$$

che si può anche scrivere

$$[z(t)e^{A(t)}]' = 0$$

e cioè

$$z(t)e^{A(t)} = c$$

da cui, essendo  $A(t) = \int a(t)dt$ ,

$$z(t) = ce^{-\int a(t)dt}. \quad (1.10)$$

La formula precedente dice, in particolare, che l'integrale generale dell'equazione omogenea ha la forma

$$z = cz_0$$

dove  $z_0$  è una particolare soluzione dell'omogenea e  $c$  è una costante arbitraria. Ciò significa che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine è uno spazio vettoriale di dimensione 1. Vedremo che l'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari omogenee di ordine  $n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .

### Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea

Spesso una soluzione particolare si riesce a scoprire facilmente; altrimenti il seguente *metodo*, chiamato *di variazione della costante*, consente comunque di trovarne una. Questa viene cercata nella forma seguente:

$$\bar{y}(t) = c(t)e^{-A(t)}$$

dove la funzione  $c(t)$  (non più costante) deve essere trovata in modo che  $\bar{y}(t)$  sia soluzione della (1.8).

Sostituendo l'espressione di  $\bar{y}$  nella (1.8) si trova:

$$e^{-A(t)}(c'(t) - c(t)a(t)) + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$$

cioè

$$e^{-A(t)}c'(t) = f(t)$$

$$c'(t) = f(t)e^{A(t)}$$

$$c(t) = \int f(t)e^{A(t)}dt.$$

Perciò

$$\bar{y}(t) = e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}dt.$$

L'*integrale generale* della (1.8) è quindi dato dalla formula:

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}dt \quad (1.11)$$

ottenuta aggiungendo la (1.10), dove  $A(t) = \int a(t)dt$ .

*1 Osservazione.* Nelle formule precedenti,  $A(t)$  è una primitiva qualsiasi di  $a(t)$ , scelta però una volta per tutte; in altre parole, non c'è bisogno di aggiungere ad  $A(t)$  la costante arbitraria di integrazione, che è presente già nell'addendo  $ce^{-A(t)}$ . Si nota che l'integrale generale non cambierebbe se, anziché  $A(t)$ , scegliessimo un'altra primitiva di  $a(t)$ , ad esempio  $A(t) + k$ . Infatti:

$$\begin{aligned} ce^{-[A(t)+k]} + e^{-[A(t)+k]} \int f(t)e^{A(t)+k}dt &= \\ = ce^{-k}e^{-A(t)} + e^{-A(t)}e^{-k}e^k \int f(t)e^{A(t)}dt &= \\ = c_1e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}dt \end{aligned}$$

con  $c_1$  costante arbitraria. Analogamente, nel calcolare l'integrale indefinito  $\int f(t)e^{A(t)}dt$  non c'è bisogno di aggiungere la costante d'integrazione, in quanto aggiungendola si ha:

$$ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \left[ \int f(t)e^{A(t)}dt + k \right] = (c+k)e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(t)e^{A(t)}dt$$

ottenendo la stessa formula.

## Soluzione del problema di Cauchy

La costante  $c$  nella (1.11) sarà determinata dalla condizione iniziale

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.12)$$

Scegliendo la primitiva  $A(t)$  tale che  $A(t_0) = 0$  (cioè  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ ), l'integrale della (1.8) che soddisfa la (1.12) sarà:

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s) e^{A(s)} ds \quad (1.13)$$

Si osservi il diverso significato dell'integrale nella (1.11) e (1.13): nella (1.11) il simbolo  $\int f(t) e^{A(t)} dt$  denota una primitiva qualsiasi di  $f(t) e^{A(t)}$ , nella (1.13) compare invece una primitiva ben precisa, la funzione integrale con estremo fisso  $t_0$  ed estremo variabile  $t$ ;  $s$  è la "variabile muta" d'integrazione.

In particolare, abbiamo quindi dimostrato il seguente

**3 Teorema** (Problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine). *Siano  $a, f$  funzioni continue in un intervallo  $I \ni t_0$ . Allora, per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*ha una e una sola soluzione  $y \in C^1(I)$ . Tale soluzione è assegnata dalla (1.13).*

Si noti che per le equazioni lineari del primo ordine il dominio di definizione della soluzione coincide con quello di continuità dei coefficienti, mentre per le equazioni a variabili separabili poteva anche essere più piccolo (si veda il Teorema 1).

## 1.2 Equazioni lineari del secondo ordine

Parliamo adesso di equazioni differenziali lineari di ordine superiore al primo. Queste equazioni, che compaiono nella descrizione di molti modelli reali, sono più semplici da studiare di quelle non lineari e rappresentano, alcune volte, un'utile approssimazione anche di modelli non lineari. Tratteremo in particolare le equazioni lineari del *secondo ordine*. In realtà molte delle idee che illustreremo in questo contesto valgono, più in generale, per le equazioni di ordine  $n$ , come si vedrà brevemente nei Complementi. Per comprendere il significato e l'importanza dell'ipotesi di *linearità* di un'equazione differenziale, è utile fare qualche premessa sugli *spazi di funzioni*.

### 1.2.1 Spazi di funzioni

I concetti di *spazio vettoriale* e *trasformazione lineare*, introdotti nello studio dell'algebra lineare, permettono di rileggere alcuni argomenti del calcolo differenziale dal punto di vista degli *spazi di funzioni*, che si rivela molto utile nello studio delle equazioni differenziali lineari.

Sia  $I$  un intervallo e consideriamo l'insieme  $\mathcal{F}_I$  di tutte le funzioni definite in  $I$ , a valori reali. Risultano definite le operazioni naturali di somma di due funzioni e prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x).\end{aligned}$$

Con queste operazioni,  $\mathcal{F}_I$  risulta essere uno spazio vettoriale.

Spesso è più interessante considerare, anziché l'insieme di tutte le funzioni possibili, l'insieme delle funzioni con qualche proprietà di *regolarità*.

Si indica con  $C(I)$  (o anche  $C^0(I)$ ) l'insieme di tutte le funzioni continue in  $I$ . Ovviamente  $C(I) \subset \mathcal{F}_I$ . Di più,  $C(I)$  è un sottospazio di  $\mathcal{F}_I$ , in quanto sappiamo che la combinazione lineare di funzioni continue è una funzione continua. Si indica con  $C^1(I)$  l'insieme di tutte le funzioni derivabili in  $I$ , con derivata continua in  $I$ . Notiamo che  $C^1(I) \subset C(I)$  (se una funzione è  $C^1$ , allora è continua); di più,  $C^1(I)$  è un sottospazio di  $C(I)$ :

se  $f_1, f_2 \in C^1(I)$ , ogni loro combinazione lineare  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  è derivabile; inoltre  $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 (f_1)' + \lambda_2 (f_2)'$  è continua (perché combinazione lineare di funzioni continue).

Per la linearità della derivata possiamo dire che l'operatore di derivazione è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriali  $C^1(I)$  e  $C(I)$ .

Generalizzando queste considerazioni, definiamo  $C^n(I)$  lo spazio delle funzioni dotate di derivata  $n$ -esima (e quindi di tutte le derivate di ordine inferiore), con derivata  $n$ -esima continua. Vale, ovviamente, la catena di inclusioni:

$$C(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots$$

L'operatore di derivazione può vedersi come una trasformazione lineare di  $C^{n+1}(I)$  in  $C^n(I)$ , per ogni  $n \geq 0$ .

Analogamente, l'operatore che associa a una funzione la sua derivata di ordine  $k \geq 1$  può vedersi come operatore lineare da  $C^{n+k}(I)$  a  $C^n(I)$ , per ogni  $n \geq 0$ .

### 1.2.2 Generalità sulle equazioni lineari. Problema di Cauchy

Un'equazione differenziale del secondo ordine si dice *lineare* se è del tipo:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t) \tag{1.14}$$



dove i coefficienti  $a$ ,  $b$  e il termine noto  $g$  sono funzioni definite con continuità in un certo intervallo  $I$ . Se il termine noto  $g$  è identicamente nullo, l'equazione si dice *omogenea*; altrimenti si dice *non-omogenea*. Se le funzioni  $a$ ,  $b$  sono costanti, l'equazione si dirà a *coefficienti costanti* (notare che il termine noto può invece dipendere da  $t$ ), in caso contrario si dirà a *coefficienti variabili*.

Il motivo per cui l'equazione è detta lineare è il seguente. Se indichiamo con  $Ly(t)$  il primo membro dell'equazione (1.14), notiamo che l'operatore

$$\begin{aligned} L : C^2(I) &\rightarrow C^0(I) \\ L : y &\rightarrow Ly \end{aligned}$$

risulta essere proprio un operatore lineare tra questi spazi di funzioni. Infatti, nell'ipotesi di continuità dei coefficienti, se  $y \in C^2(I)$  si ha che  $Ly \in C^0(I)$ ; inoltre, se  $y_1, y_2 \in C^2(I)$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , si ha

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2.$$

La linearità di  $L$  è un fatto ricco di conseguenze, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Facciamo ora alcune considerazioni sul problema di Cauchy per queste equazioni. Vedremo che l'integrale generale di una qualsiasi equazione lineare del secondo ordine dipende da due parametri arbitrari. Per selezionare una soluzione particolare dovremo allora assegnare *due condizioni*; se queste sono del tipo:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \quad (1.15)$$

il problema corrispondente (1.14)+(1.15) prende il nome di *problema di Cauchy*.

Nelle applicazioni, l'equazione (1.14) descrive l'evoluzione di un sistema fisico, il cui lo *stato* è individuato dalla funzione  $y(t)$ ; il termine noto  $g(t)$  rappresenta le forze esterne che agiscono sul sistema, i coefficienti  $a_i(t)$  descrivono generalmente proprietà fisiche del sistema stesso. Assegnare le condizioni (1.15) significa assegnare la posizione e la velocità del punto materiale in un istante iniziale  $t_0$ . Per questo motivo ci si riferisce alle (1.15) come alle "condizioni iniziali". Vale il seguente risultato generale sul problema di Cauchy per le equazioni lineari del secondo ordine in forma normale (che è un caso particolare del Teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale):

**4 Teorema.** [1] *Se  $a, b, f$  sono funzioni continue in un intervallo  $I \ni t_0$ , per ogni  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $y \in C^2(I)$ .

Dimostreremo questo Teorema nei Complementi, nel caso particolare di equazioni del primo ordine a variabili separabili. Come al solito, la soluzione sarà individuata imponendo le condizioni iniziali nell'espressione che assegna l'integrale generale dell'equazione (1.14). Il problema è quindi capire come si scrive tale integrale generale.

### 1.2.3 La struttura dell'integrale generale

Abbiamo visto che un'equazione differenziale lineare del secondo ordine si può scrivere nella forma

$$Ly = f$$

dove  $L : C^2(I) \rightarrow C^0(I)$  è un operatore lineare tra i due spazi di funzioni. L'equazione  $Ly = 0$  si dice equazione omogenea associata all'equazione non-omogenea  $Ly = f$ . La linearità di  $L$  permette di determinare facilmente la struttura dell'integrale generale dell'equazione, come afferma il seguente:

**5 Teorema** (Integrale generale dell'equazione lineare non-omogenea).

- a. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $Lz=0$  in un dato intervallo  $I$  è uno spazio vettoriale (sottospazio di  $C^2(I)$ ).*
- b. *L'integrale generale dell'equazione non-omogenea si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea.*

Nel seguito della trattazione supporremo sempre che l'equazione lineare del secondo ordine sia scritta in forma normale, cioè (1.14). L'equazione omogenea associata è allora:

$$Lz = z'' + a(t)z' + b(t)z = 0. \quad (1.16)$$

Un'ulteriore importante proprietà, che riguarda l'equazione omogenea (1.16), è espressa dal seguente:

**6 Teorema.** *Lo spazio vettoriale delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine ha dimensione 2.*

Esplicitamente, questo significa che esistono 2 soluzioni dell'equazione omogenea in un intervallo  $I$ , chiamiamole  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ , tali che:

1. queste funzioni sono linearmente indipendenti, ossia non sono una multipla dell'altra (in particolare, se le due funzioni non si annullano, il quoziente  $z_2(t)/z_1(t)$  non è costante nell'intervallo  $I$ );

2. ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di  $z_1(t), z_2(t)$ , il che significa che l'integrale generale dell'equazione omogenea è assegnato dalla formula

$$c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

al variare dei coefficienti reali  $c_1, c_2$ .

Quando due soluzioni di un'equazione omogenea sono note esplicitamente, è facile verificare se queste siano linearmente indipendenti, semplicemente controllando che non siano una multipla dell'altra. Tuttavia, nello sviluppo della teoria, è utile avere un criterio generale per decidere dell'indipendenza o meno di due soluzioni, e per sfruttare tale informazione. Vale in proposito il seguente:

**7 Teorema** (Determinante wronskiano e indipendenza). *Siano  $z_1, z_2$  due funzioni  $C^2(I)$ , soluzioni dell'equazione lineare omogenea (1.16) nell'intervallo  $I$ . Allora esse sono linearmente indipendenti in  $C^2(I)$  se e solo se la seguente matrice*

$$\begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix},$$

detta **matrice Wronskiana**, ha determinante diverso da zero per ogni  $t \in I$ . Inoltre, affinché questo accada è sufficiente che il determinante sia diverso da zero in un punto  $t_0 \in I$ .

L'ultima parte del teorema si può esprimere anche così: il determinante della matrice Wronskiana (*Wronskiano*) o si annulla in tutti i punti di  $I$  oppure è diverso da zero in tutti i punti di  $I$ . Nel secondo caso,  $z_1$  e  $z_2$  sono indipendenti. Si noti che questo teorema non caratterizza l'indipendenza di due qualsiasi funzioni in  $C^2(I)$ , ma quella di due soluzioni dell'equazione (1.16).

Ricapitolando, in base ai teoremi 5 e 6, il problema della determinazione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare non-omogenea del secondo ordine si riconduce ai due passi seguenti:

1. determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea; questo a sua volta significa determinare 2 soluzioni  $z_1(t), z_2(t)$  dell'equazione omogenea, linearmente indipendenti;
2. determinare una soluzione particolare  $\bar{y}(t)$  dell'equazione non-omogenea. A questo punto l'integrale generale dell'equazione non-omogenea sarà dato da:

$$\bar{y}(t) + c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$$

al variare dei coefficienti reali  $c_i$ .

Diciamo subito che non esiste alcun metodo generale per risolvere effettivamente questi due problemi, quando i coefficienti  $a, b, f$  siano funzioni continue qualsiasi. Vedremo invece come risolvere il problema 1 quando  $a, b$  sono costanti e come risolvere il problema 2 quando  $f$  è una funzione di forma particolare (“metodo di somiglianza”) oppure quando si è già risolto il problema 1 (“metodo di variazione delle costanti”). Infine, per risolvere un problema di Cauchy, una volta determinato l’integrale generale nella forma precedente, basterà imporre le 2 condizioni iniziali, ricavare di conseguenza il valore delle costanti  $c_1, c_2$  e scrivere la soluzione corrispondente a questi valori di  $c_1, c_2$ .

### 1.2.4 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l’equazione omogenea

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0 \quad (a, b \text{ costanti}) \quad (1.17)$$

e cerchiamo soluzioni di tipo esponenziale:  $t \rightarrow e^{rt}, r \in \mathbb{C}$ . Ciò è suggerito dal fatto che, nel caso analogo del primo ordine, gli integrali sono proprio esponenziali.

Sostituendo  $z(t) = e^{rt}$  nella (1.17), abbiamo:

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Perciò, affinché l’esponenziale  $e^{rt}$  sia soluzione della (1.17), la costante  $r$  deve essere una radice dell’equazione

$$r^2 + ar + b = 0, \quad (1.18)$$

detta **equazione caratteristica** della (1.17).

Distinguiamo tre casi, secondo il valore di  $\Delta = a^2 - 4b$ , discriminante dell’equazione caratteristica.

1.  $a^2 > 4b$ , cioè  $\Delta > 0$ : la (1.18) possiede due radici reali e distinte  $r_1$  e  $r_2$ . Le funzioni  $z_1(t) = e^{r_1 t}$  e  $z_2(t) = e^{r_2 t}$  sono due soluzioni distinte e indipendenti della (1.17) il cui integrale generale è:

$$z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (1.19)$$

2.  $a^2 < 4b$ , cioè  $\Delta < 0$ : la (1.18) ha due radici complesse coniugate  $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$  ( $\alpha, \beta$  reali). Soluzioni (indipendenti) della (1.17) sono perciò le funzioni:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ z_2(t) &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)). \end{aligned}$$

Può essere utile avere soluzioni reali; ricordando che ogni combinazione lineare di soluzioni dell'equazione omogenea è ancora soluzione della stessa equazione, scegliamo, al posto di  $z_1$  e  $z_2$ , le soluzioni  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  e  $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$ , cioè

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

L'integrale generale della (1.17) si può scrivere perciò nella forma:

$$z(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)). \quad (1.20)$$

Un altro modo, spesso utile, di scrivere la (1.20) è il seguente:

$$z(t) = e^{\alpha t} A \cos(\beta t + \phi) \quad (1.21)$$

con  $A, \phi$  costanti reali arbitrarie.

3.  $a^2 = 4b$ , cioè  $\Delta = 0$ : la (1.17) possiede l'unica radice (doppia)  $r = -a/2$ . Perciò  $e^{-\frac{a}{2}t}$  è una soluzione; per trovare una seconda soluzione usiamo ancora il metodo della variazione delle costanti; cerchiamola nella forma:

$$z_2(t) = e^{rt} c(t) \quad \text{con } r = -a/2$$

$$(z_2)'(t) = e^{rt}(rc(t) + c'(t))$$

$$(z_2)''(t) = e^{rt}(r^2 c(t) + 2rc'(t) + c''(t)).$$

Sostituendo nella (1.17), abbiamo:

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)c(t) + (2r + a)c'(t) + c''(t)] = 0$$

Poichè  $r = -a/2$ , risulta verificata l'equazione caratteristica  $r^2 + ar + b = 0$  e anche  $2r + a = 0$ ; perciò dovrà essere  $c''(t) = 0$ , cioè  $c(t) = c_2(t)$ . La soluzione generale della (1.17) sarà allora:

$$z(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{a}{2}t} = e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 + c_2 t) \quad (1.22)$$

In ciascuno dei tre casi ora studiati abbiamo determinato due soluzioni dell'equazione omogenea, che risultano linearmente indipendenti:

$$\begin{array}{lll} e^{r_1 t}, & e^{r_2 t} & (\text{caso } \Delta > 0) \\ e^{\alpha t} \cos(\beta t), & e^{\alpha t} \sin(\beta t) & (\text{caso } \Delta < 0) \\ e^{rt}, & t e^{rt} & (\text{caso } \Delta = 0) \end{array} . \quad (1.23)$$

### 1.2.5 Equazioni non-omogenee

Ci occupiamo ora del problema di determinare una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, associata a un'equazione lineare a coefficienti costanti:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \quad (a, b \text{ costanti}) \quad (1.24)$$

Illustriamo prima il *metodo di somiglianza*, che per una certa classe di casi particolari permette di determinare tale soluzione particolare con brevi calcoli; vedremo poi il *metodo di variazione delle costanti*, che può essere impiegato sempre, ma in compenso porta solitamente a calcoli più lunghi (perciò, quando possibile, è meglio applicare il primo metodo).

#### Metodo di somiglianza

Quando il termine noto  $f(t)$  ha un aspetto particolarmente semplice, si può cercare una soluzione pure abbastanza semplice e *simile* a  $f$ .

- $f(t) = p_r(t)$  (polinomio di grado  $r$ ). Si cerca una soluzione di tipo polinomiale:

$$y(t) = q_r(t) \quad \text{se } b \neq 0$$

$$y(t) = tq_r(t) \quad \text{se } b = 0 \text{ e } a \neq 0$$

$$y(t) = t^2q_r(t) \quad \text{se } b = 0 \text{ e } a = 0.$$

dove  $q_r(t)$  è un generico polinomio di grado  $r$ , di cui occorre determinare i coefficienti.

- $f(t) = Ae^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si cerca una soluzione del tipo  $y(t) = e^{\lambda t}\gamma(t)$ . Si trova (con calcoli simili a quelli svolti per l'equazione omogenea):

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A. \quad (1.25)$$

E' sufficiente trovare una *qualsiasi*  $\gamma(t)$  che soddisfi la (1.25).

- Se  $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$  (cioè se  $\lambda$  non è radice dell'equazione caratteristica), basterà prendere:

$$\gamma(t) = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}, \text{ e dunque } y(t) = \frac{Ae^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b},$$

o più semplicemente  $y(t) = \tilde{A}e^{\lambda t}$  con  $\tilde{A} \in \mathbb{R}$ .

- Se  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , ma  $2\lambda + a \neq 0$ , basterà prendere

$$\gamma'(t) = \text{costante} = \frac{A}{2\lambda + a}, \text{ da cui } \gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a} \text{ e } y(t) = \frac{Ate^{\lambda t}}{2\lambda + a}.$$

o più semplicemente  $y(t) = \tilde{A}te^{\lambda t}$  con  $\tilde{A} \in \mathbb{R}$ .

- Se infine  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  e  $2\lambda + a = 0$ , la (1.25) si scrive semplicemente  $\gamma'' = A$ , da cui

$$\gamma(t) = \frac{A}{2}t^2 \quad , \quad y(t) = \frac{A}{2}t^2 e^{\lambda t}.$$

Nella classe di termini noti del tipo  $e^{\lambda t}$  rientrano anche i casi:

$$\cos(\omega t), \sin(\omega t), e^{\lambda t} \cos(\omega t), e^{\lambda t} \sin(\omega t) \quad (\text{con } \lambda \in \mathbb{R}).$$

## Metodo di variazione delle costanti

Illustriamo ora un metodo generale che consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, *qualunque sia la forma del termine noto  $f(t)$* , quindi anche quando questo non rientra nei casi speciali trattati nel paragrafo precedente. Il metodo è applicabile purchè si conoscano già due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea. Se l'equazione omogenea è a coefficienti costanti, abbiamo visto un metodo standard per ottenere tali soluzioni. Evidenziamo, comunque, che il metodo di variazione delle costanti è applicabile anche alle equazioni lineari a coefficienti variabili. Il punto è che, in questo caso, non vi sono invece *metodi generali* per determinare due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea.

Siano dunque  $z_1(t), z_2(t)$  due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata in un intervallo  $I$ . L'idea è cercare una soluzione particolare nella forma:

$$\bar{y}(t) = c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t). \quad (1.26)$$

Ricordiamo che le funzioni  $z_1, z_2$  sono note, mentre le funzioni  $c_1, c_2$  sono incognite, e vanno determinate in modo tale che  $\bar{y}$  soddisfi l'equazione

$$y'' + ay' + by = f \text{ in } I. \quad (1.27)$$

Quest'equazione fornirà una condizione sulle due funzioni  $c_1, c_2$ . Poichè le funzioni da determinare sono due, potremo imporre una seconda condizione su  $c_1, c_2$ , che sceglieremo in modo opportuno. Cominciamo a calcolare, dalla (1.26),

$$\bar{y}' = c_1' z_1 + c_2' z_2 + c_1 z_1' + c_2 z_2'.$$

Scegliamo di imporre come condizione su  $c_1, c_2$  la seguente:

$$c_1' z_1 + c_2' z_2 = 0.$$

Questa fa sì che risulti

$$\bar{y}' = c_1 z_1' + c_2 z_2' \quad (1.28)$$

e di conseguenza

$$\bar{y}'' = c_1' z_1' + c_2' z_2' + c_1 z_1'' + c_2 z_2''. \quad (1.29)$$

Sostituendo (1.28) e (1.29) nella (1.27) otteniamo:

$$(c'_1 z'_1 + c'_2 z'_2 + c_1 z''_1 + c_2 z''_2) + a(c_1 z'_1 + c_2 z'_2) + b(c_1 z_1 + c_2 z_2) = f$$

che si può riscrivere come:

$$c_1(z''_1 + az'_1 + bz_1) + c_2(z''_2 + az'_2 + bz_2) + (c'_1 z'_1 + c'_2 z'_2) = f$$

che a sua volta, ricordando che per ipotesi  $z_1, z_2$  soddisfano l'equazione omogenea si riduce a:

$$c'_1 z'_1 + c'_2 z'_2 = f$$

In definitiva, siamo arrivati a scrivere il sistema lineare di due equazioni nelle due funzioni incognite  $c'_1, c'_2$ :

$$\begin{cases} c'_1 z_1 + c'_2 z_2 = 0 \\ c'_1 z'_1 + c'_2 z'_2 = f \end{cases}$$

Si osserva ora che la matrice dei coefficienti di questo sistema è esattamente la matrice Wronskiana corrispondente a  $z_1, z_2$ ; essendo queste soluzioni linearmente indipendenti per ipotesi, il determinante Wronskiano

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z'_1 & z'_2 \end{vmatrix}$$

è diverso da zero per ogni  $t \in I$  (Teorema 7). Perciò il sistema può essere risolto in  $c'_1, c'_2$ . Si trova:

$$c'_1 = \frac{-z_2 f}{z'_2 z_1 - z_2 z'_1} \quad c'_2 = \frac{z_1 f}{z'_2 z_1 - z_2 z'_1}.$$

(Si noti che il denominatore è proprio il determinante non nullo). Ne segue che, essendo  $f$  continua e  $z_1, z_2$  derivabili con continuità, le funzioni  $c'_1, c'_2$  sono continue; si possono quindi antiderivare, ottenendo  $c_1(t), c_2(t)$  che, sostituite nella (1.26), forniscono una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea.

Più precisamente: se determiniamo due particolari primitive  $c_1(t), c_2(t)$  otteniamo una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea, del tipo

$$\bar{y}(t) = c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t).$$

Se invece sostituiamo nella (1.26) le *generiche* primitive, sommando cioè costanti arbitrarie di integrazione, otteniamo

$$y(t) = (c_1(t) + k_1)z_1(t) + (c_2(t) + k_2)z_2(t) = \bar{y}(t) + k_1 z_1(t) + k_2 z_2(t)$$

ovvero l'integrale generale dell'equazione non-omogenea.

Il problema di scrivere una soluzione dell'equazione non-omogenea è dunque ricondotto a quello del calcolo di due integrali indefiniti. (In pratica, solo in casi molto semplici tali integrazioni si riescono ad eseguire in forma esplicita).



## 1.3 Complementi

### 1.3.1 Teorema di esistenza e unicità per le equazioni a variabili separabili

Vogliamo dimostrare qui, nel caso particolare delle equazioni del primo ordine a variabili separabili, il teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Questo risultato, pur essendo un caso molto particolare del Teorema generale di esistenza e unicità che enunceremo (ma non dimostreremo) nel capitolo seguente, è istruttivo per le seguenti ragioni:

- si applica ad una classe di problemi che non sempre sappiamo risolvere esplicitamente a “mano”;
- riguarda una classe di equazioni non lineari;
- evidenzia il fatto che le ipotesi sotto cui si può stabilire l’esistenza di una soluzione sono più deboli di quelle sotto cui si può stabilire l’unicità della soluzione stessa.

L’enunciato del teorema è già stato presentato, si veda il Teorema 1.

*Dimostrazione.* Cominciamo dalla prima parte del teorema, che stabilisce l’esistenza di una soluzione. Se  $b(y_0) = 0$ , la funzione costante  $y = y_0$  risolve il problema in tutto  $I$  e l’esistenza di una soluzione è in tal caso dimostrata. Sia dunque  $b(y_0) \neq 0$ . Poichè  $b$  è continua, per il teorema di permanenza del segno questo implica che  $b(y)$  è diversa da zero e ha segno costante in un certo intorno di  $y_0$ ,  $J' \subset J$ . In tale intorno  $1/b(y)$  è continua, perciò ammette una primitiva  $B(y)$ . Anche  $a$ , essendo continua, ammette una primitiva  $A(t)$  in  $I$ . Vogliamo determinare una funzione  $y(t)$  che soddisfi l’identità:

$$B(y(t)) - B(y_0) = A(t) - A(t_0) \quad \forall t \in I',$$

dove  $I'$  è un opportuno intorno di  $t_0$ ,  $I' \subset I$ . Poichè  $B'(y) = 1/b(y)$  e  $b$  ha segno costante in  $J'$ ,  $B(y)$  è una funzione strettamente monotona in  $J'$ , e quindi invertibile in  $J'$ . Detta  $B^{-1}$  la sua inversa, che è definita nell’intervallo  $B(J')$ , possiamo scrivere quindi:

$$y(t) = B^{-1}(B(y_0) + A(t) - A(t_0)) \quad \forall t \in I', \quad (1.30)$$

dove  $I'$  è stato scelto in modo tale che

$$t \in I' \implies B(y_0) + A(t) - A(t_0) \in B(J').$$

Questo è possibile perchè  $A$  è continua e per  $t = t_0$  è  $B(y_0) + A(t) - A(t_0) = B(y_0) \in B(J')$ . La funzione  $y(t)$  definita da (1.30) soddisfa il problema di

Cauchy. Anzitutto  $y$  è di classe  $C^1$ , perchè composta di funzioni  $C^1$ ; infatti, poichè  $A$  e  $B$  sono primitive di funzioni continue, esse sono di classe  $C^1$  nei rispettivi domini di definizione, e  $B^{-1}$  è anch'essa  $C^1$ .

Inoltre:

$$y(t_0) = B^{-1}(B(y_0) + A(t_0) - A(t_0)) = B^{-1}(B(y_0)) = y_0,$$

mentre, per il teorema di derivazione della funzione inversa e della funzione composta:

$$y'(t) = \frac{1}{B'(B^{-1}(B(y_0) + A(t) - A(t_0)))} A'(t) = \frac{1}{B'(y(t))} A'(t) =$$

(ricordando che  $A$  è primitiva di  $a$  e  $B$  è primitiva di  $1/b$ )

$$= b(y(t))a(t).$$

Questo completa la dimostrazione della prima parte del teorema.

Proviamo ora l'*unicità* della soluzione, sotto l'ulteriore ipotesi che  $b$  abbia rapporto incrementale limitato, ossia che valga

$$|b(y_1) - b(y_2)| \leq c|y_1 - y_2|$$

per qualche costante  $c$  e per ogni  $y_1, y_2 \in J$ . (Questo in particolare sarà vero se  $b \in C^1$ , ad esempio se l'intervallo  $J$  è chiuso e limitato).

Supponiamo dunque che  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  siano due soluzioni del problema di Cauchy, e mostriamo che in realtà coincidono. Sia

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} z(t_0) &= y_1(t_0) - y_2(t_0) = y_0 - y_0 = 0; \\ z'(t) &= y_1'(t) - y_2'(t) = a(t)[b(y_1(t)) - b(y_2(t))]. \end{aligned}$$

Poichè  $a$  è continua in  $I$ , e quindi limitata in qualunque intervallo  $I'$  compatto,  $I' \subset I$ , scegliendo  $I'$  sufficientemente piccolo in modo che risulti anche  $y_1(t), y_2(t) \in J$  per ogni  $t \in I'$ , possiamo scrivere:

$$|z'(t)| \leq c|a(t)||y_1(t) - y_2(t)| \leq M|y_1(t) - y_2(t)| = M|z(t)|$$

per ogni  $t \in I'$  e un'opportuna costante  $M$ . Ricordando che  $z(t_0) = 0$ , possiamo scrivere:

$$z(t) = \int_{t_0}^t z'(s) ds$$

e quindi, per  $t \in I' = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ,

$$|z(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |z'(s)| ds \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t |z(s)| ds \right| \leq M\delta \cdot \max_{s \in I'} |z(s)|.$$

da cui

$$\max_{s \in I'} |z(s)| \leq M\delta \cdot \max_{s \in I'} |z(s)|.$$

Riducendo eventualmente  $\delta$  in modo che risulti  $M\delta < 1$ , si deduce che  $\max_{s \in I'} |z(s)| = 0$ , ossia  $z(t)$  è identicamente nulla in  $I'$ . Dunque in questo intorno di  $t_0$  le due soluzioni  $y_1(t), y_2(t)$  coincidono. Ripetendo il ragionamento a partire da  $t_0 + \delta$  e  $t_0 - \delta$  si prolunga l'intervallo di coincidenza a  $[t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta]$ . Dopo un numero finito di passi si mostra infine che le due soluzioni coincidono in tutto l'intervallo in cui sono entrambe definite.  $\square$

### 1.3.2 Cenni alle equazioni lineari di ordine $n$

Le proprietà delle equazioni lineari del secondo ordine si generalizzano in modo molto naturale alle equazioni di ordine  $n$ .

Consideriamo l'equazione lineare non-omogenea in forma normale:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t) \quad (1.31)$$

con  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) e  $f$  funzioni continue in un intervallo  $I$ , e l'equazione omogenea associata:

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z' + a_0z = 0. \quad (1.32)$$

#### Struttura dell'integrale generale

Valgono le seguenti proprietà:

- L'integrale generale della (1.31) si ottiene come somma dell'integrale generale della (1.32) e di una soluzione particolare (qualsiasi) della (1.31).
- L'integrale generale della (1.32) si ottiene prendendo tutte le combinazioni lineari di  $n$  soluzioni linearmente indipendenti della (1.32). Si può quindi affermare che l'insieme delle soluzioni della (1.32) costituisce uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .
- Per riconoscere se  $n$  funzioni  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ , soluzioni della (1.32) nell'intervallo  $I$ , sono linearmente indipendenti, si può utilizzare ancora la *matrice Wronskiana* relativa a questo sistema di soluzioni, che in questa situazione più generale è definita come segue:

$$W(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \dots & z_n(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) & \dots & z_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(t) & z_2^{(n-1)}(t) & \dots & z_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice si chiama *Wronskiano* dell'equazione.

Vale la seguente

**1 Proposizione.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè  $n$  soluzioni dell'equazione (1.32) siano linearmente indipendenti in  $C^n(I)$  è che il determinante Wronskiano sia diverso da zero  $\forall t \in I$ . Inoltre, il Wronskiano di un sistema di soluzioni dell'equazione (1.32) o è identicamente nullo su  $I$  oppure è diverso da zero in ogni punto di  $I$ .*

Dunque anche in questo caso è sufficiente verificare il criterio in un solo punto. L'ultima affermazione si può vedere anche come conseguenza del prossimo risultato:

**8 Teorema** (di Liouville). [1] *Il Wronskiano di una  $n$ -upla di soluzioni dell'equazione (1.32) in  $I$  soddisfa l'equazione differenziale*

$$W' = -a_{n-1}(t)W;$$

in particolare, per ogni  $t_0, t \in I$  si può scrivere:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(r)dr}.$$

## Problema di Cauchy

Vale il seguente risultato, perfettamente analogo al Teorema 4:

**9 Teorema.** *Siano  $f$  e  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) funzioni continue in un intervallo  $I \ni t_0$ ; allora per ogni  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$  assegnati, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t) \\ y(t_0) = b_0 \\ y'(t_0) = b_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1} \end{cases} \quad (1.33)$$

ammette una e una sola soluzione  $y \in C^n(I)$ .

## Equazioni a coefficienti costanti

Nel caso particolare in cui i coefficienti dell'equazione (1.32) siano *costanti*, esiste un metodo standard per determinare  $n$  soluzioni indipendenti della (1.32): cercare, come per le equazioni del secondo ordine, soluzioni di tipo esponenziale  $e^{rt}$  ( $r \in \mathbb{C}$ ). In pratica, si procede al modo seguente:

1. Si considera l'equazione caratteristica associata alla (1.32):

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0 \quad (1.34)$$

Questa è un'equazione polinomiale di grado  $n$  a coefficienti reali, che può avere radici reali o coppie di radici complesse coniugate, ciascuna delle quali può essere semplice o avere molteplicità maggiore di 1.

2. Ogni radice  $r$  reale della (1.34), di molteplicità  $s$ , fornisce le  $s$  soluzioni della (1.32):

$$e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}, \dots, t^{s-1}e^{rt}$$

3. Ogni coppia di radici complesse coniugate della (1.34),  $\alpha \pm i\beta$ , di molteplicità  $s$ , fornisce  $s$  coppie di soluzioni della (1.32):

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ te^{\alpha t} \cos(\beta t) & te^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \dots & \dots \\ t^{s-1}e^{\alpha t} \cos(\beta t) & t^{s-1}e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array}$$

Il procedimento appena illustrato fornisce sempre  $n$  soluzioni indipendenti della (1.32) (pur di saper risolvere l'equazione polinomiale (1.34)) e permette quindi di scriverne l'integrale generale. L'indipendenza delle soluzioni sopra trovate si può verificare applicando la Proposizione 1.

- Una volta scritto l'integrale generale della (1.32), una soluzione particolare della (1.31) può essere determinata o con il *metodo di somiglianza*, adattando al caso presente le considerazioni svolte nel paragrafo in precedenza, o col *metodo di variazione delle costanti*, che nel caso delle equazioni di ordine  $n$  acquista la forma seguente:

1. Si considerano le  $n$  soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea (1.32), determinate nel modo descritto in precedenza,

$$z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$$

definite per  $t \in \mathbb{R}$ , e si cerca una soluzione particolare della (1.31), del tipo seguente:

$$\bar{y}(t) = c_1(t)z_1(t) + c_2(t)z_2(t) + \dots + c_n(t)z_n(t) \quad (1.35)$$

dove  $c_i(t)$  sono  $n$  funzioni incognite, da determinarsi imponendo su di esse  $n$  condizioni opportune.

2. Si risolve ora il seguente sistema lineare di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $c'_i(t)$  (le derivate delle funzioni incognite):

$$\begin{cases} c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + \cdots + c'_n z_n = 0 \\ c'_1 z'_1 + c'_2 z'_2 + \cdots + c'_n z'_n = 0 \\ \cdots \\ c'_1 z_1^{(n-2)} + c'_2 z_2^{(n-2)} + \cdots + c'_n z_n^{(n-2)} = 0 \\ c'_1 z_1^{(n-1)} + c'_2 z_2^{(n-1)} + \cdots + c'_n z_n^{(n-1)} = f(t) \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è esattamente il determinante Wronskiano associato alle  $n$  soluzioni  $z_i(t)$ ; poichè per ipotesi queste soluzioni sono indipendenti, per la Proposizione 1 il determinante è diverso da zero per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; di conseguenza il sistema lineare ha sempre un'unica soluzione  $(c'_1(t), c'_2(t), \dots, c'_n(t))$  definita almeno sull'intervallo  $I$  in cui  $f(t)$  è definita e continua.

3. Si calcola ora una primitiva di ciascuna delle  $n$  funzioni  $c'_n(t)$  soluzione del sistema precedente, determinando così  $n$  funzioni  $c_i(t)$  che, sostituite nella (1.35), forniscono una soluzione particolare della (1.31).
- Noto l'integrale generale della (1.32) e una soluzione particolare della (1.31), si può ora scrivere l'integrale generale della (1.31).
  - Per risolvere il *problema di Cauchy* (1.35) per l'equazione (1.31), una volta determinato l'integrale generale della (1.31) è sufficiente calcolare le derivate fino all'ordine  $n - 1$  della soluzione generica (dipendente da  $n$  costanti arbitrarie  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ), imporre le condizioni iniziali e risolvere il sistema lineare di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $c_1, c_2, \dots, c_n$  che si ottiene in questo modo. (Il sistema risulta avere determinante diverso da zero per l'ipotesi di indipendenza delle  $n$  soluzioni dell'equazione omogenea; pertanto ha un'unica soluzione). I valori delle costanti così ottenuti determinano la soluzione del problema di Cauchy.

## Capitolo 2

# Analisi qualitativa di equazioni e sistemi differenziali

In questo capitolo riprenderemo, da un punto di vista più generale, lo studio delle equazioni differenziali. Tratteremo le equazioni del primo ordine, discutendo in particolare il problema di Cauchy e trattando più estesamente le equazioni autonome, ossia quelle in cui nell'equazione non compare esplicitamente il tempo. Spiegheremo cosa si intende quando si parla di diagramma di fase e parleremo dei sistemi di  $n$  equazioni del primo ordine, a cui, come vedremo, si possono ricondurre anche le equazioni di ordine  $n$ ; mostreremo come si estendano a questo contesto i risultati trovati nel paragrafo sulle equazioni del primo ordine. Ci soffermeremo sullo studio dei sistemi autonomi, in particolare bidimensionali, ed infine tratteremo il problema della stabilità per questi sistemi nel caso lineare e poi più brevemente nel caso non lineare, facendo una classificazione dei vari punti critici.

### 2.1 Equazioni del primo ordine

#### 2.1.1 Problema di Cauchy

Consideriamo un'equazione del primo ordine in forma normale, cioè del tipo

$$y' = f(t, y) \tag{2.1}$$

Piuttosto che prendere in esame la totalità delle soluzioni della (2.1), è più conveniente puntare l'attenzione sulle soluzioni del problema di Cauchy associato alla (2.1), cioè sulle funzioni che soddisfano la condizione supplementare (detta *condizione iniziale*)

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.2}$$

(con  $y_0 \in \mathbb{R}$  assegnato) e che sono soluzioni della (2.1) almeno *localmente*, cioè in un intorno del punto in cui è assegnata la condizione iniziale.

Come abbiamo già affermato, per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto determinate ipotesi, che il problema di Cauchy (2.1)+(2.2) ammetta un'unica soluzione. Esaminiamo separatamente la questione dell'*esistenza* di almeno una soluzione (richiesta minima perchè il problema possa descrivere l'evoluzione di un qualche fenomeno reale) e quella dell'*unicità* di questa soluzione (che mostra come l'evoluzione di un tale fenomeno sia univocamente determinata dalla legge che lo governa e dal suo stato iniziale (cioè dall'equazione (2.1) + (2.2)). Se tali proprietà non sono entrambe soddisfatte diventa inutile da un punto di vista applicativo qualsiasi modellizzazione. Enunceremo ora, senza dimostrazione, alcuni risultati fondamentali della teoria classica delle equazioni differenziali. Il primo è il seguente:

**10 Teorema** (di Peano, di esistenza di una soluzione). [1] *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un aperto connesso e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua; sia  $(t_0, y_0) \in D$ . Allora il problema di Cauchy (2.1)+(2.2) ammette almeno una soluzione, definita in un intorno di  $t_0$ .*

La sola continuità di  $f$  è sufficiente a garantire l'esistenza, ma non l'unicità, della soluzione del problema di Cauchy.

L'unicità della soluzione del problema di Cauchy può essere garantita aumentando le richieste di *regolarità* della funzione  $f(t, y)$ .

**11 Teorema** (di Cauchy, di esistenza e unicità locale). *Siano  $f$  e  $\partial f/\partial y$  continue in un aperto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $(t_0, y_0) \in D$ . Allora esiste un intorno  $I$  di  $t_0$  tale che il problema di Cauchy (2.1)+(2.2) ammette una e una sola soluzione definita in  $I$ .*

*2 Osservazione* (condizione di Lipschitz). La condizione  $\partial f/\partial y \in C(D)$  può essere attenuata. Infatti, basta richiedere che il rapporto incrementale di  $f$  rispetto a  $y$  sia localmente limitato. Più precisamente, chiediamo che, per ogni insieme chiuso e limitato  $K \subset D$ , esista una costante  $L$  tale che:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in K.$$

Se ciò accade diremo che  $f$  è **localmente lipschitziana** rispetto a  $y$ , *uniformemente* in  $t$ . Dunque: *se  $f$  è continua in  $D$  e localmente lipschitziana rispetto a  $y$ , uniformemente in  $t$ , vale ancora il teorema precedente.*

Osserviamo che la continuità di  $\partial f/\partial y$  implica la locale lipschizianità di  $f$ . Infatti, se  $\partial f/\partial y$  è continua in  $D$ , per il teorema di Weierstrass essa è limitata in  $K$ ; detto allora

$$L = \max_{(t,y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|,$$



per il teorema di Lagrange applicato alla funzione di una variabile  $y \rightarrow f(t, y)$  si ha, per ogni  $(t, y_1), (t, y_2) \in K$  e un opportuno  $\bar{y} \in (y_1, y_2)$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \bar{y})(y_1 - y_2) \right| \leq L|y_1 - y_2|,$$

dunque  $f$  risulta localmente lipschitziana rispetto a  $y$ , uniformemente in  $t$ . Il viceversa però non è in generale vero. Esempi standard di funzioni localmente lipschitziane (ma non derivabili) sono funzioni continue il cui grafico è regolare salvo un numero finito di punti angolosi (ad esempio il valore assoluto).

I risultati enunciati nel precedente capitolo, sul problema di Cauchy per le equazioni del primo ordine lineari o a variabili separabili, si possono ritrovare come casi particolari dei teoremi appena enunciati.

*3 Osservazione* (ulteriore regolarità della soluzione). Se  $s(t)$  è soluzione del problema di Cauchy (2.1)+(2.2) in un intervallo  $I$ , per definizione  $s$  è almeno derivabile e quindi continua in  $I$ . Poichè  $f(t, y)$  è continua, dall'identità

$$s'(t) = f(t, s(t))$$

leggiamo che  $s'$  è anche continua (perchè per il teorema di continuità della funzione composta  $f(t, s(t))$  è continua). Quindi, in realtà  $s$  è di classe  $C^1(I)$ . Una maggior regolarità di  $f$  implica poi un'ulteriore regolarità della soluzione  $s$ ; ragionando iterativamente, si mostra che:

$$f \in C^k(D) \implies s \in C^{k+1}(I);$$

$$f \in C^\infty(D) \implies s \in C^\infty(I).$$

## Intervallo massimale di esistenza della soluzione

Ora parlerò dell'intervallo in cui esiste la soluzione del problema di Cauchy: Intrduco il problema con questo esempio:

*1 Esempio.* Si considerino i seguenti due problemi:

$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad (2.4)$$

La funzione  $f(t, y)$  è  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ; perciò i due problemi ammettono ognuno una sola soluzione, che sarà di classe  $C^\infty$  in base all'osservazione precedente.

Poichè l'equazione è a variabili separabili, si scrive nella forma

$$-\frac{dy}{y^2} = 2tdt,$$

che per integrazione dà

$$\frac{1}{y} = t^2 + c;$$

dunque, l'integrale generale è

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + c}.$$

La condizione (2.3) implica  $c = 1$ , che dà la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

definita su tutta la retta e limitata; la condizione (2.4) implica  $c = -1$ , che dà la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - 1},$$

definita solo sull'intervallo  $(-1, 1)$  e illimitata.

In generale possiamo avere qualche informazione sull'intervallo in cui esiste la soluzione ragionando nel modo seguente. Sia  $t \rightarrow s(t, y_0)$  la soluzione del problema di Cauchy (2.1)+(2.2) e consideriamo un rettangolo

$$R = \{(t, y) : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}, \quad a, b > 0,$$

centrato nel punto iniziale  $(t_0, y_0)$  e contenuto in  $D$ . Sia

$$M = \max_{(t,y) \in R} |f(t, y)|$$

(tale massimo esiste perchè  $f$  è continua sull'insieme  $R$  chiuso e limitato). L'equazione (2.1) ci dice che  $f(t, y)$  è la pendenza di  $s$  nel punto  $(t, y)$ , cosicchè  $M$  e  $-M$  saranno la massima e minima pendenza possibile in  $R$ . Questo implica che il grafico di  $s$  deve stare nel doppio settore delimitato dalle rette di equazione

$$y = y_0 + M(t - t_0) \quad \text{e} \quad y = y_0 - M(t - t_0).$$

Queste rette tagliano la frontiera di  $R$  nei punti di ascissa  $t_0 \pm b/M$  se  $b/M < a$ , oppure in punti di ascissa  $t_0 \pm a$  se  $b/M \geq a$  (Fig.2.1 a) e b)). Se poniamo

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

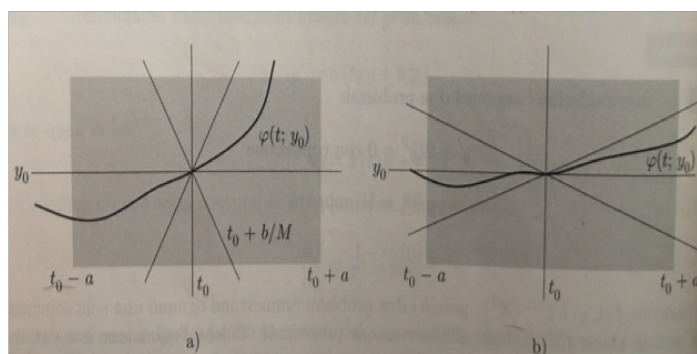


Figura 2.1:

possiamo concludere che la soluzione è definita *almeno* nell'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .

L'argomento può ora essere iterato. Consideriamo il punto

$$(t_1, y_1) = (t_0 + \delta, s(t_0 + \delta))$$

che appartiene ad  $R$  e quindi all'interno di  $D$  (essendo questo un aperto); esisterà allora un rettangolo chiuso  $R_1$  centrato in  $(t_1, y_1)$  e contenuto in  $D$ , del tipo:

$$R_1 = \{(t, y) : t_1 - a_1 \leq t \leq t_1 + a_1, y_1 - b_1 \leq y \leq y_1 + b_1\}, \quad a_1, b_1 > 0.$$

Il teorema 11 ci assicura allora che il problema di Cauchy con punto iniziale  $(t_1, y_1)$  ha un'unica soluzione  $s(t, y_1)$  definita almeno in  $I_1 = [t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$  (con  $\delta_1$  opportuno). Tale soluzione, per l'unicità deve coincidere con  $s(t, y_0)$  in  $I \cap I_1 = [t_1 - \delta_1, t_0 + \delta_0]$ . Perciò questa soluzione è un'estensione della precedente  $s(t, y_0)$ , che risulta ora definita in  $[t_0 - \delta_0, t_1 + \delta_1]$  (estensione destra, Fig.2.2).

Iterando il procedimento, si arriva così a definire un intervallo massimale destro  $[t_0, t_{max})$  di esistenza della soluzione  $s(t, y_0)$ ; analogamente si definisce un intervallo massimale sinistro  $(t_{min}, t_0]$ , con  $-\infty \leq t_{min} < t_{max} \leq +\infty$ .

In conclusione:

*nelle ipotesi del teorema 11, la soluzione del problema di Cauchy (2.1)+(2.2) è definita in un intervallo massimale  $(t_{min}, t_{max})$ ; al di fuori di questo intervallo la soluzione non esiste oppure esce dal dominio  $D$ .*

Più precisamente, si può dimostrare che per  $t \rightarrow t_{min}^+$  e per  $t \rightarrow t_{max}^-$  il grafico della soluzione del problema di Cauchy si avvicina indefinitamente

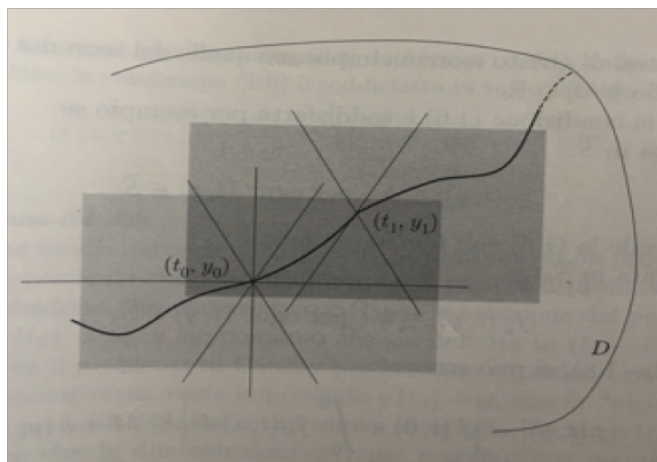


Figura 2.2:

al bordo di  $D$  se  $t_{min}$  e  $t_{max}$  sono numeri reali. Si osservi, tuttavia, che anche nel caso in cui sia  $D = \mathbb{R}^2$  questo non significa necessariamente che la soluzione sia definita su tutto  $\mathbb{R}$ : potrebbe anche tendere all'infinito per  $t$  tendente a un valore finito, come nell'Esempio 1.

Dal punto di vista delle applicazioni, sarebbe utile avere condizioni sufficienti a garantire l'esistenza (e unicità) della soluzione in tutto un prefissato intervallo  $[a, b]$  contenente il punto  $t_0$ . A questa esigenza risponde (parzialmente) il prossimo

**12 Teorema** (di esistenza e unicità globale). [1] Siano  $f$  e  $\partial f/\partial y$  di classe  $C^0(\bar{S})$ , essendo  $\bar{S}$  la striscia

$$\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R};$$

inoltre esistano due numeri positivi  $h, k$  (in generale dipendenti da  $a, b$ ) per cui risulti:

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \quad \forall (t, y) \in \bar{S}. \quad (2.5)$$

Allora ogni soluzione dell'equazione (2.1) è definita su tutto l'intervallo  $[a, b]$ .

Si noti che le ipotesi di questo teorema implicano quelle del teorema 11 in  $[a, b] \times [c, d]$  per ogni intervallo  $[c, d] \subset \mathbb{R}$ .

A sua volta, la condizione (2.5) è soddisfatta per esempio se:

i)  $f$  è limitata in  $\bar{S}$ :

$$|f(t, y)| \leq h \quad \forall (t, y) \in \bar{S} \quad (2.6)$$

(in questo caso vale la (2.5) con  $k = 0$ ), oppure se

ii)  $\partial f/\partial y$  è limitata in  $\bar{S}$ :

$$|\partial f/\partial y| \leq k \quad \forall (t, y) \in \bar{S}. \quad (2.7)$$

Infatti, se vale la (2.7), si può scrivere:

$$\begin{aligned} |f(t, y)| &= \left| f(t, 0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(t, s) ds \right| \leq |f(t, 0)| + \left| \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(t, s) ds \right| \leq \\ &\leq M + \left| \int_0^y \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, s) \right| ds \right| \leq M + \left| \int_0^y k ds \right| \leq M + k|y| \end{aligned}$$

con

$$M = \max_{[a, b]} |f(t, 0)|,$$

e quindi vale (2.5).

Tuttavia queste condizioni sono sufficienti, ma niente affatto necessarie per l'esistenza globale della soluzione del problema di Cauchy, come dimostra l'Esempio 3, con la condizione (2.3): in quel caso la (2.5) non vale, eppure la soluzione esiste su tutto  $\mathbb{R}$ .

Si osservi, infine, che per un'equazione lineare del primo ordine, si ha

$$f(t, y) = a(t)y + b(t),$$

perciò la (2.5) è soddisfatta se i coefficienti  $a(t)$  e  $b(t)$  sono continui nell'intervallo  $[a, b]$ . Ritroviamo quindi un risultato enunciato nel capitolo precedente: *la soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine è definita su tutto l'intervallo in cui i coefficienti sono continui.*

## Dipendenza continua

Un'altra questione che riguarda la soluzione di un problema di Cauchy è la seguente. Supponiamo che  $f$  soddisfi le ipotesi per cui il problema (2.1)+(2.2) ha una e una sola soluzione. Sia per esempio  $s(t, y_0)$  la soluzione del problema con condizione iniziale  $y(t_0) = y_0$ , e supponiamo che sia definita in  $(t_0 - T, t_0 + T)$ . Se ora andiamo a risolvere il problema di Cauchy per la stessa equazione, ma con una condizione iniziale di poco diversa, ossia imponendo  $y(t_0) = y_1$  con  $y_1$  "vicina" a  $y_0$ , la nuova soluzione  $s(t, y_1)$  sarà definita su un nuovo intervallo,  $(t_0 - T_1, t_0 + T_1)$ ; potremo garantire che le due soluzioni  $s(t, y_0)$  e  $s(t, y_1)$  si mantengano "vicine" almeno su un intervallo comune di definizione, cioè potremo garantire la *dipendenza continua dai dati*?

E inoltre, se andiamo a risolvere il problema di Cauchy con un'equazione leggermente diversa, ossia  $y' = f_1(t, y)$  dove  $f_1$  è una funzione "vicina" a  $f$ , potremo garantire ancora che la nuova soluzione si mantenga vicina alla

precedente, cioè potremo garantire la *dipendenza continua dai parametri o robustezza*?

Queste domande sono estremamente naturali per diversi motivi. Anzitutto, dal punto di vista applicativo, la condizione iniziale  $y_0$  di un sistema fisico, così come la sua legge di evoluzione  $f$ , sono sempre note con una certa approssimazione; perciò è di vitale importanza sapere che, se sbagliamo di poco a valutare quantitativamente  $y_0$  e  $f$  del nostro modello, sbaglieremo conseguentemente di poco nel calcolare la soluzione. Inoltre, il fatto che il modello matematico che facciamo di un certo fenomeno fisico garantisca le proprietà di *esistenza* della soluzione, *unicità* della soluzione, *dipendenza continua* della soluzione dagli ingredienti del problema si può vedere come indice del fatto che il nostro modello è stato ben formulato. Se qualcuna di queste proprietà venisse a cadere, significherebbe o che stiamo cercando di descrivere un fenomeno intrinsecamente molto complesso e instabile, oppure che il nostro modello matematico è inadeguato per qualche aspetto e va modificato.

Il risultato di dipendenza continua si può formulare così:

**13 Teorema.** *Siano  $f_1(t, y), f_2(t, y)$  due funzioni continue in un aperto connesso  $D \subset \mathbb{R}^2$ , localmente lipschitziane rispetto a  $y$ , uniformemente in  $t$ . Siano  $(t_0, y_1), (t_0, y_2) \in D$  e siano  $s_1(t), s_2(t)$ , rispettivamente, le soluzioni dei problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = y_2 \end{cases}$$

Allora, se nell'intervallo  $[t_0, t_0 + T]$  entrambe le soluzioni sono definite, vale la disuguaglianza:

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq (|y_1 - y_2| + (t - t_0)M)e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (2.8)$$

dove

$$M = \max_{(t,y) \in K} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|,$$

$L$  è la costante di lipschizianità di  $f_1$  e  $f_2$  su  $K$ , e  $K$  è un insieme chiuso e limitato contenuto in  $D$  e contenente i grafici delle soluzioni  $s_1(t), s_2(t)$ .

Si osservi che la stima di dipendenza continua (2.8) esprime proprio il fatto che, se  $y_1$  è vicino a  $y_2$  (quindi  $|y_1 - y_2|$  è piccolo) e  $f_1$  è vicina a  $f_2$  (quindi  $M$  è piccolo), allora  $s_1(t)$  è vicina a  $s_2(t)$  in  $[t_0, t_0 + T]$ . In particolare, per  $t = t_0$  troviamo:

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq |y_1 - y_2|,$$

che dice nuovamente che la soluzione del problema di Cauchy è unica (infatti per  $y_1 = y_2$  le due soluzioni coincidono); invece per  $f_1 = f_2$  (e  $t$  qualsiasi)

troviamo:

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq |y_1 - y_2|e^{L(t-t_0)} \leq |y_1 - y_2|e^{LT} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

che dice che le due soluzioni si discostano per non più di  $c|y_1 - y_2|$ .

Il fatto che la costante  $c$  abbia la forma  $e^{LT}$  ha un significato importante: ci dice che le soluzioni relative a condizioni iniziali diverse, ma vicine, si mantengono “ragionevolmente vicine” per intervalli di tempo limitati, ma possono allontanarsi per tempi lunghi: infatti, la costante di dipendenza continua cresce esponenzialmente con  $T$ . La dipendenza continua si ha quindi *per tempi finiti*, mentre per  $t \rightarrow +\infty$  può accadere che soluzioni relative a condizioni iniziali vicine abbiano comportamenti molto diversi. E' questo il motivo per cui lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni per tempi lunghi è un capitolo importante dell'analisi delle equazioni differenziali, la cui problematica non è affatto chiusa dal sapere che la soluzione per tempi finiti dipende con continuità dai dati e dai parametri.

### 2.1.2 Equazioni autonome. Diagrammi di fase. Stabilità

In questo paragrafo consideriamo le equazioni *autonome*, cioè del tipo

$$y' = f(y) \tag{2.9}$$

con  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo; assumeremo  $f \in C^1(I)$ . In altre parole,  $f$  non dipende esplicitamente da  $t$ .

Notiamo che questa è una particolare equazione a variabili separabili; se impostiamo la risoluzione scrivendo

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dt,$$

otteniamo (indicando con  $g$  una primitiva di  $1/f$ ):

$$g(y) = t + c$$

e quindi l'integrale generale ha la forma:

$$y(t) = g^{-1}(t + c)$$

per  $g^{-1}$  inversa di  $g$  e  $c$  costante arbitraria. Questo implica la seguente proprietà di *invarianza per traslazioni temporali*:

se  $s$  è una soluzione di (2.9) in  $(a, b)$ , anche  $s^*(t) = s(t + \tau)$ , con  $\tau \in \mathbb{R}$  fissato, è una soluzione in  $(a - \tau, b - \tau)$ . Tenuto conto della precedente osservazione, nello studio del problema di Cauchy possiamo senz'altro assumere  $t_0 = 0$ ; la soluzione che soddisfa la condizione  $y(0) = y_0$ , cioè la

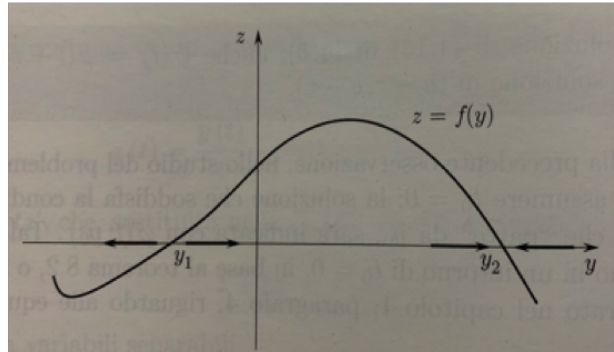


Figura 2.3:

soluzione che “parte” da  $y_0$ , sarà indicata con  $s(t, y_0)$ . Tale soluzione esiste, almeno in un intorno di  $t_0 = 0$ , in base al teorema 11. Daremo adesso un’importante

**1 Definizione.** Si dice *soluzione di equilibrio* o *stato stazionario* o *punto critico* di (2.9) ogni (eventuale) zero di  $f$ : in altre parole  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  è uno stato stazionario se  $f(\bar{y}) = 0$ ; a  $\bar{y}$  corrisponde allora la soluzione costante (soluzione di equilibrio) della (2.9)

$$y(t) = \bar{y} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per le equazioni autonome, anche quando formule esplicite per le soluzioni non sono disponibili, è possibile ricavare informazioni attraverso il cosiddetto *diagramma di fase*.

## Diagramma di fase

Rappresentiamo (Fig.2.3) su un piano, che chiameremo *piano delle fasi*, il grafico di  $f$ : sull’asse delle ascisse (detto *asse delle fasi*) collochiamo i valori della *variabile di stato*  $y$ ; le intersezioni del grafico di  $f$  con l’asse delle fasi ci danno gli stati stazionari. Per determinare il comportamento qualitativo delle soluzioni ragioniamo così. Indichiamo, come sopra, con  $s(t, y_0)$  la soluzione della (2.9) che parte dallo stato  $y_0$ ; con riferimento alla Figura 2.3, se  $y_0 < y_1$ , essendo  $f(y_0) < 0$ , sarà, in base alla (2.9),  $f(y_0) = s'(0, y_0) < 0$ ; perciò  $s$  parte con pendenza negativa e decresce lungo l’asse  $y$  allontanandosi da  $y_1$ . Se  $y_1 < y_0 < y_2$  risulta invece  $s'(0; y_0) > 0$ ; perciò  $s(t, y_0)$  ora parte con pendenza positiva e aumenta lungo l’asse  $y$ , allontanandosi da



$y_1$  e avvicinandosi a  $y_2$ , senza però mai raggiungere  $y_2$  (se ciò avvenisse al tempo  $t = \tau$ , avremmo due diverse soluzioni  $s^*(t) = y_2$  e  $s(t, y_0)$  dello stesso problema di Cauchy, con condizione  $y(\tau) = y_2$ ). Infine, se  $y_0 > y_2$ , la soluzione  $s(t, y_0)$ , essendo  $s'(0, y_0) < 0$ , si avvicina indefinitamente a  $y_2$ . La Figura 2.3, che rappresenta graficamente la precedente discussione, si chiama **diagramma di fase** per l'equazione (2.9).

## Stabilità

Possiamo ora precisare la nozione di *stabilità* di un punto critico.

**2 Definizione.** Diremo che un punto critico  $\bar{y}$  è:

i) **stabile** se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tale che, se  $|y_0 - \bar{y}| < \delta$ , allora la soluzione  $s(t, y_0)$  esiste per ogni  $t \geq 0$  e soddisfa

$$|s(t, y_0) - \bar{y}| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

in altre parole: una soluzione che parte in prossimità di  $\bar{y}$  rimane sempre (cioè per ogni  $t \geq 0$ ) vicino a  $\bar{y}$ .

ii) **asintoticamente stabile** se è stabile e inoltre esiste  $\delta_1 > 0$  tale che, se  $|y_0 - \bar{y}| < \delta_1$ , allora risulta

$$s(t, y_0) \rightarrow \bar{y} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty; \quad (2.10)$$

in questo caso il punto  $\bar{y}$  viene detto un *attrattore (locale)* e il più grande intorno  $U$  di  $\bar{y}$  tale che se  $y_0 \in U$  vale la (2.10) si dice *bacino di attrazione* di  $\bar{y}$ ; se il bacino di attrazione di  $\bar{y}$  coincide col dominio di  $f$ , si dice che  $\bar{y}$  è un *attrattore globale*.

iii) Infine, diremo che un punto critico  $\bar{y}$  è **instabile** se non è stabile, cioè se esistono soluzioni che, pur partendo in prossimità di  $\bar{y}$ , non rimangono sempre vicine a  $\bar{y}$ . Naturalmente ciò non significa che tutte le soluzioni si allontanino da  $\bar{y}$ ; se invece accade quest'ultima cosa, il punto di equilibrio si chiama *repulsore*.

*4 Osservazione* (dipendenza continua e stabilità). La dipendenza continua della soluzione di un problema di Cauchy dai dati iniziali, discussa in precedenza, ci permette di affermare che, se  $\bar{y}$  è un punto critico, fissato un tempo  $T > 0$  e un  $\epsilon > 0$  qualsiasi, qualunque soluzione parta da una condizione iniziale  $y_0$  sufficientemente vicina a  $\bar{y}$  rimarrà fino al tempo  $T$  a distanza minore di  $\epsilon$  da  $\bar{y}$ . Il problema della stabilità, tuttavia, riguarda il comportamento delle soluzioni “per tempi lunghi” (non solo  $< T$ ), perciò non è in alcun modo risolto dal fatto di sapere che la soluzione dipende con continuità dalla condizione iniziale.

Anche se lo studio del diagramma di fase per equazioni autonome del primo ordine è generalmente abbastanza semplice, può essere utile avere un criterio generale di stabilità asintotica o di instabilità, di uso pratico immediato. Ciò si può ottenere rimpiazzando in vicinanza dei punti critici il grafico di  $f$  con la retta tangente al grafico (*metodo di linearizzazione*; ricordiamo che per ipotesi  $f$  è di classe  $C^1$ ) e discutendo il caso lineare corrispondente. Vale infatti il seguente

**14 Teorema** (criterio di stabilità/instabilità). *Sia  $I$  un intervallo aperto,  $\bar{y} \in I$ ,  $f \in C^1(I)$ ,  $f(\bar{y}) = 0$ ,  $f'(\bar{y}) \neq 0$ . Allora:*

i) *se  $f'(\bar{y}) < 0$ ,  $\bar{y}$  è asintoticamente stabile;*

ii) *se  $f'(\bar{y}) > 0$ ,  $\bar{y}$  è instabile.*

La validità di questo teorema si osserva in Fig.2.3, infatti in  $y_1$  la derivata di  $f$  è positiva e la soluzione si allontana da  $y_1$  in entrambe le direzioni all'aumentare di  $t$ , quindi  $y_1$  è instabile, mentre in  $y_2$  la derivata di  $f$  è negativa e la soluzione si avvicina a  $y_2$  in entrambe le direzioni all'aumentare di  $t$  (per  $t \rightarrow +\infty$  la soluzione coincide con  $y_2$ ), quindi  $y_2$  è asintoticamente stabile.

## 2.2 Problema di Cauchy per sistemi di $n$ equazioni del primo ordine o equazioni di ordine $n$

Generalizziamo ora la teoria vista nel paragrafo 2.1.1 per le equazioni del primo ordine al caso più significativo dei sistemi di  $n$  equazioni del primo ordine. Come mostreremo subito, anche le equazioni di ordine  $n$  si possono riscrivere come sistemi di  $n$  equazioni del primo ordine. Perciò la teoria che svilupperemo nel seguito si può anche vedere come il quadro teorico generale che fa da sfondo alle equazioni differenziali discusse nel capitolo precedente e ad altre non lineari.

### Sistemi di equazioni del primo ordine

Supponiamo che lo stato di un sistema fisico sia descritto da  $n$  variabili di stato  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , funzioni del tempo  $t$ , che raggruppo in un vettore di stato

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)).$$

## 2.2. PROBLEMA DI CAUCHY PER SISTEMI DI $n$ EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE O EC

L'evoluzione di  $y(t)$  sia governata da un sistema di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.11)$$

Scriveremo il sistema in forma compatta

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.12)$$

dove il vettore  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  è una funzione

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Una soluzione di (2.11) nell'intervallo  $I$  è un vettore

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)),$$

le cui componenti sono funzioni continue e derivabili in  $I$ , le quali simultaneamente soddisfano il sistema (2.11) (cioè lo rendono un'identità per  $t \in I$ ).

### Equazioni di ordine $n$

Osserviamo che un'equazione differenziale di ordine  $n$  in forma normale

$$y^{(n)}(t) = f_n(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.13)$$

nella funzione scalare incognita  $y(t)$  può sempre essere scritta nella forma di un sistema del tipo (2.11) ponendo

$$y_1 = y; y_2 = y'; \dots; y_n = y^{(n-1)}. \quad (2.14)$$

Infatti le precedenti e la (2.13) implicano allora:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.15)$$

Perciò d'ora in poi svilupperemo il discorso teorico per i sistemi di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine, tenendo presente che i risultati riguardanti i sistemi si traducono anche in risultati riguardanti le equazioni differenziali di ordine  $n$ .

## Problema di Cauchy

Fissato un istante iniziale  $t_0$ , il *problema di Cauchy* per il sistema (2.12) consiste nel cercare una soluzione locale di (2.12) (cioè definita in un non precisato intervallo  $I$  contenente  $t_0$ ) tale che sia soddisfatta la *condizione iniziale*:

$$y(t_0) = \bar{y} \quad (2.16)$$

con  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  vettore assegnato. Nel caso dell'equazione di ordine  $n$  (2.13), tenuto conto delle (2.14)-(2.15), il problema di Cauchy consiste nel trovare una soluzione locale (funzione  $y(t)$  derivabile  $n$  volte in  $I$ , con  $t_0 \in I$ , soddisfacente la (2.13)), tale che siano soddisfatte le  $n$  condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(t_0) = \bar{y}_0 \\ y'(t_0) = \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = \bar{y}_{n-1}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Si faccia attenzione al fatto che  $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}$  nella (2.17) indicano costanti assegnate, mentre  $y_1, y_2, \dots, y_n$  nella (2.11) indicano funzioni incognite.

## Risultati fondamentali sul problema di Cauchy per i sistemi

I seguenti teoremi generalizzano al caso dei sistemi (e quindi delle equazioni di ordine superiore al primo) i teoremi 10,11,12 e 13 validi nel caso scalare.

**15 Teorema** (di Peano, di esistenza di una soluzione). [1] Sia  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un aperto connesso e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua; sia  $(t_0, \bar{y}) \in D$ . Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = \bar{y} \end{cases} \quad (2.18)$$

ammette almeno una soluzione, definita in un intorno di  $t_0$ .

**16 Teorema** (di Cauchy, di esistenza e unicità locale). [1] Sia  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un aperto connesso,

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua,  $\partial f_i / \partial y_k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) continue in  $D$  e sia  $(t_0, y_0) \in D$ . Allora esiste un intorno  $I$  di  $t_0$  tale che il problema di Cauchy (2.18) ammette una e una sola soluzione definita in  $I$ .

**17 Teorema** (di esistenza e unicità globale). [1] Sia  $\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ ,

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

## 2.2. PROBLEMA DI CAUCHY PER SISTEMI DI $n$ EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE O EC

continua in  $\bar{S}$ ,  $\partial f_i / \partial y_k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) continue in  $\bar{S}$ ; inoltre esistano due numeri positivi  $h, k$  (in generale dipendenti da  $a, b$ ) per cui risulti

$$|f(t, y)| \leq h + k|y| \quad \forall (t, y) \in \bar{S}. \quad (2.19)$$

Allora ogni soluzione dell'equazione  $y(t) = f(t, y(t))$  è definita su tutto l'intervallo  $[a, b]$ .

Come già osservato nel caso scalare, l'ipotesi che le derivate parziali rispetto alle variabili  $y_i$  siano definite e continue si può indebolire chiedendo semplicemente che  $f(t, y)$  sia *localmente lipschitziana in  $y$ , uniformemente rispetto a  $t$* . Ciò significa che, per ogni insieme chiuso e limitato  $K \subset D$ , esiste una costante  $L$  tale che:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \forall y, z \in K, t \in I.$$

Ancora, sotto l'ipotesi di continuità di  $f$  e delle sue derivate parziali rispetto alle  $y_i$ , la condizione (2.19), sufficiente per l'esistenza e unicità globale, è soddisfatta in particolare nei due casi semplici; quando  $f(t, y)$  è limitata in  $y$ :

$$|f(t, y)| \leq h \quad \forall (t, y) \in \bar{S} \quad (2.20)$$

e quando le sue derivate parziali rispetto alle  $y_i$  sono limitate:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, y) \right| \leq k \quad \forall (t, y) \in \bar{S}, i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

**18 Teorema** (dipendenza continua). *Siano  $f_1(t, y), f_2(t, y)$  due funzioni continue in un aperto connesso  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , localmente lipschitziane rispetto a  $y$ , uniformemente in  $t$ . Siano  $(t_0, y_1), (t_0, y_2) \in D$  e siano  $s_1(t), s_2(t)$ , rispettivamente, le soluzioni dei problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = y_2 \end{cases}.$$

Allora, se nell'intervallo  $[t_0, t_0 + T]$  entrambe le soluzioni sono definite, vale la disuguaglianza:

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq (|y_1 - y_2| + (t - t_0)M)e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in (t_0, t_0 + T)$$

dove

$$M = \max_{(t,y) \in K} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|,$$

$L$  è la costante di lipschizianità di  $f_1$  e  $f_2$  su  $K$ , e  $K$  è un insieme chiuso e limitato contenuto in  $D$  e contenente i grafici delle soluzioni  $s_1(t), s_2(t)$ .

Il seguente lemma viene utilizzato per dimostrare il Teorema 18.

**1 Lemma** (di Gronwall). Sia  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e non negativa, sia  $t_0 \in I$  e supponiamo che per certe due costanti  $a, b > 0$  sia:

$$h(t) \leq a + b \int_{t_0}^t h(s) ds \quad \forall t \geq t_0, t \in I.$$

Allora

$$h(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$$

*5 Osservazione* (condizioni diverse da quelle iniziali). Nello studio dei modelli matematici nelle scienze applicate, si incontrano talvolta altri tipi di condizioni aggiuntive, diverse dalle condizioni iniziali (2.16); un esempio è dato dalle cosiddette *condizioni ai limiti*, condizioni cioè che vengono prescritte agli estremi di un intervallo, come per esempio nel caso seguente:

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = A \\ y(b) = B. \end{cases}$$

In questo caso le condizioni chiedono alla soluzione di “passare” per i due punti  $(a, A)$ ,  $(b, B)$  del piano  $(t, y)$  e perciò la soluzione deve essere definita in tutto l’intervallo  $[a, b]$ . Ciò conferisce a un problema ai limiti un aspetto di *globalità* che quello ai valori iniziali, a priori, non possiede. Per tali problemi tuttavia non sono garantite né esistenza né unicità.

## 2.3 Sistemi autonomi bidimensionali

Un sistema (2.12) si dice *autonomo* se  $f$  non dipende esplicitamente da  $t$ , cioè se è della forma:

$$z'' = f(z). \quad (2.22)$$

In questo paragrafo ci occuperemo dei sistemi di questo tipo *bidimensionali*, anche se alcune definizioni si estendono facilmente al caso  $n$ -dimensionale. Scriveremo il sistema nella forma scalare:

$$\begin{cases} x' = h(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (2.23)$$

con  $h, g \in C^1(D)$ ,  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Queste ipotesi garantiscono esistenza e unicità per la soluzione del problema di Cauchy con i dati iniziali:

$$\begin{cases} x(t_0) = \bar{x}_0 \\ y(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad \text{con } (\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in D \text{ assegnato.}$$

## Curve integrali e orbite

Prima di iniziare questa sezione diamo alcune definizioni.

**3 Definizione.** Sia  $I$  un intervallo reale, una funzione  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **curva** se è continua in ogni suo punto.

**4 Definizione.** Sia  $r = (r_1, \dots, r_n)$  una curva, chiamo **sostegno** di  $r$  la sua immagine:

$$Im(r) = \{r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)) : t \in I\}, \quad n > 1.$$

D'ora in poi chiameremo, per semplicità, il sostegno di una curva solamente curva.

Una soluzione di (2.23) è una funzione

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

definita su qualche intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , di classe  $C^1(I)$  e soddisfacente il sistema (2.23).

Il grafico di questa funzione è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  che rappresenta una curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in I \quad (2.24)$$

e viene detta **curva integrale**. Il piano delle variabili di stato  $x, y$  è detto **piano delle fasi**; la proiezione di una curva integrale sul piano delle fasi è la curva piana orientata (in base all'orientazione di  $I$ ) di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{cioè } r(t), \text{ con } t \in I.$$

Tali curve si chiamano **orbite** o **traiettorie** del sistema (2.23) e una descrizione qualitativamente accurata dell'andamento delle orbite di un sistema si chiama **ritratto di fase**.  $r(t)$  è il vettore posizione (esso ci dice in quale stato si trova il sistema all'istante  $t$ ) e  $r'(t) = (x'(t), y'(t))$  (il vettore velocità) è tangente alla traiettoria in  $r(t)$ . Risolvere il sistema (2.23) si può interpretare così: in  $D$  è assegnato un campo di velocità che associa a ogni punto  $(x, y) \in D$  un vettore

$$v = (h(x, y), g(x, y));$$

si tratta di trovare le orbite che sono tangenti a  $v$  in ogni punto. In particolare si tratta di trovare il ritratto di fase e per risolvere l'equazione richiedi anche che il vettore tangente abbia la lunghezza giusta.

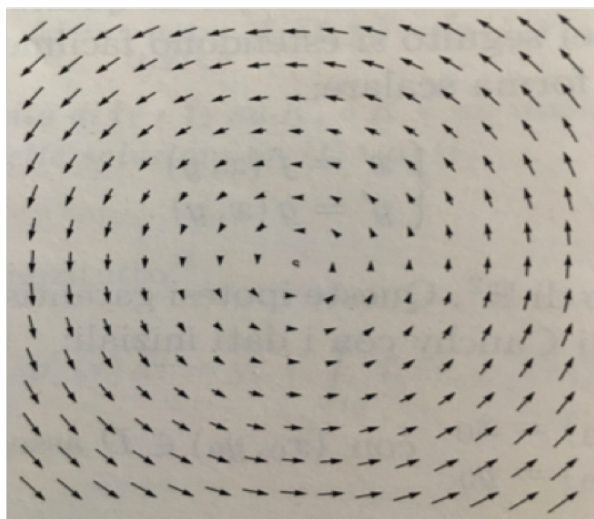


Figura 2.4: Il campo di velocità  $v = (-y, x)$  associato al sistema (2.25).

2 *Esempio*. La Fig.2.4 rappresenta il campo di velocità del sistema:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases} \quad (2.25)$$

Una soluzione di (2.25) è:

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ per } t \in [0, 2\pi),$$

il cui grafico (Fig.2.5) è un arco di elica cilindrica e la cui orbita è la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

Come abbiamo visto nel caso unidimensionale, il fatto che il sistema sia autonomo comporta che *le soluzioni siano invarianti per traslazioni temporali*, cioè se  $r(t) = (x(t), y(t))$  è una soluzione di (2.23) definita in  $I = (a, b)$ , allora

$$r^*(t) = (x(t + \tau), y(t + \tau))$$

(per  $\tau \in \mathbb{R}$  fissato) è soluzione dello stesso sistema in  $(a - \tau, b - \tau)$ ; infatti:

$$\begin{aligned} (r^*)'(t) &= (x'(t + \tau), y'(t + \tau)) = (h(x(t + \tau), y(t + \tau)), g(x(t + \tau), y(t + \tau))) = \\ &= v(r^*(t)). \end{aligned}$$

Si osservi che le due soluzioni hanno la *stessa* orbita: perciò a ogni orbita corrispondono infinite soluzioni, ognuna ottenuta da un'altra per traslazione temporale.

Una conseguenza importante della proprietà di invarianza appena ricordata è che *le orbite non possono intersecarsi*: ogni punto  $p \in D$  appartiene a una e una sola orbita. Infatti, se il punto  $p$  appartenesse a due orbite



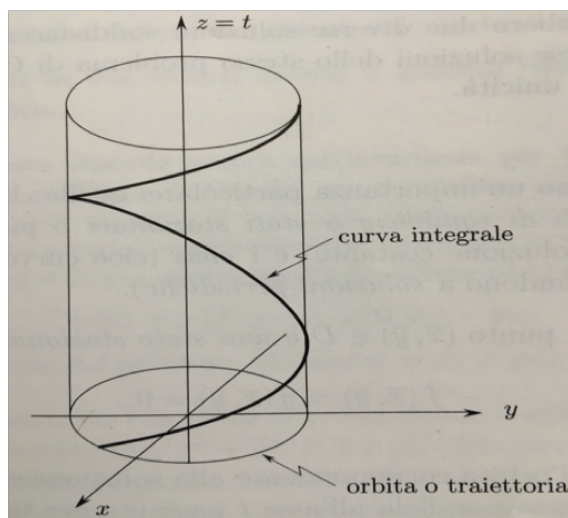


Figura 2.5:

distinte, corrispondenti a due soluzioni  $r(t), r^*(t)$ , esisterebbero due istanti  $t_1, t_2$  per cui

$$r(t_1) = r^*(t_2) = p.$$

Ma allora, posto  $\tau = t_2 - t_1$ , la funzione  $w(t) = r^*(t + \tau)$  sarebbe una soluzione del sistema (2.23) tale che:

$$w(t_1) = r^*(t_1 + \tau) = r^*(t_2) = p$$

e perciò  $w$  ed  $r$  sarebbero due diverse soluzioni soddisfacenti la stessa condizione iniziale, cioè due diverse soluzioni dello stesso problema di Cauchy, in contrasto col teorema di esistenza e unicità.

## Punti critici e cicli

Due tipi di orbite hanno un'importanza particolare: quelle che si riducono a un solo punto (sono detti *stati di equilibrio* o *stati stazionari* o **punti critici** o *singolari*; corrispondono a una *soluzione costante*) e i *cicli* (cioè curve semplici e chiuse che corrispondono a *soluzioni periodiche*).

**5 Definizione.** Un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$  è un *punto critico* del sistema (2.23) se

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Un tale punto è perciò l'orbita corrispondente alla soluzione costante  $r(t) = (\bar{x}, \bar{y})$ , il cui grafico in  $\mathbb{R}^3$  è la retta parallela all'asse  $t$  passante per tale punto. Se all'istante iniziale il sistema si trova in questo stato, vi rimane per sempre. Nessuna soluzione può raggiungere questo stato in un tempo finito (due diverse orbite non hanno punti in comune), ma una soluzione può

tendere a un punto critico per  $t \rightarrow \pm\infty$ ; anzi, se una soluzione  $(x(t), y(t))$  ammette limite  $(\bar{x}, \bar{y})$  per  $t \rightarrow +\infty$  (oppure per  $t \rightarrow -\infty$ ), allora il punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un punto critico del sistema, come si vede passando al limite ambo i membri della (2.23).

Osservo che, per i sistemi autonomi, se  $\bar{z}$  è un punto critico, con la traslazione  $p(t) = z(t) - \bar{z}$  il sistema  $z' = f(z)$  si trasforma in

$$p' = z' = f(p(t) + \bar{z}) = l(p(t))$$

Alla soluzione  $z(t) = \bar{z}$  del sistema originale corrisponde la soluzione  $p(t) = 0$  del nuovo sistema e viceversa.

Come abbiamo fatto in precedenza per il caso scalare, posso classificare i punti critici riguardo alla stabilità.

**6 Definizione.** Indicando con  $s(t, q)$  la soluzione del sistema (2.23) che si trova all'istante  $t = 0$  nel punto  $q$ , diremo che il punto critico  $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$  è:

i) **stabile** se, per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tale che, se  $|\bar{p} - q| < \delta$ , la soluzione  $s(t, q)$  esiste per ogni  $t \geq 0$  e risulta

$$|s(t, q) - \bar{p}| < \epsilon \quad \forall t \geq 0;$$

ii) **asintoticamente stabile** se è stabile e inoltre esiste  $\delta_1$  tale che, se  $|\bar{p} - q| < \delta_1$ , risulta

$$s(t, q) \rightarrow \bar{p} \text{ per } t \rightarrow +\infty;$$

iii) **instabile** se non è stabile.

Se  $\bar{p}$  è asintoticamente stabile, si dice anche che è un *attrattore locale*: esiste un intorno  $U$  di  $\bar{p}$  tale che ogni orbita che ha origine in  $U$  converge a  $\bar{p}$ ; l'unione di tutti gli intorni  $U$  con questa proprietà costituisce il *bacino di attrazione* di  $\bar{p}$ .

Di fondamentale importanza sono anche le soluzioni  $s(t)$  *periodiche* (anche se nella mia trattazione non verranno quasi mai citate), cioè: esiste  $T > 0$  tale che  $s(t + T) = s(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , ma  $s(t + \tau) \neq s(t)$  per  $\tau \in (0, T)$ . Allora  $T$  si chiama *periodo*; chiaramente la traiettoria descritta da  $s(t)$  è una curva semplice e chiusa (*ciclo*).

La cosa notevole è che, per i sistemi autonomi, vale anche il viceversa, cioè:

**2 Proposizione.** *Se in due istanti diversi il sistema ripassa dallo stesso punto, allora l'orbita è periodica.*

Perciò, per i sistemi autonomi i concetti di orbita chiusa e orbita periodica coincidono.

Per esempio, la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  è un ciclo per il sistema (2.25); è facile mostrare che ogni soluzione di questo sistema è  $2\pi$ -periodica (Esempio 4). Ogni ciclo divide il piano delle fasi in due regioni, una interna e una esterna: ogni orbita che nasce (al tempo  $t_0$ ) all'interno di un ciclo vi resta per sempre intrappolata; ogni orbita che nasce all'esterno resta per sempre esterna.

Può succedere che esistano una o più orbite chiuse isolate sulle quali, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale. Queste orbite si chiamano *cicli limite* (tipicamente indicano la presenza di *oscillazioni autosostenute*), dei quali parleremo in maniera più approfondita nel Capitolo 4. Per i sistemi bidimensionali si può dimostrare che un'orbita chiusa contiene *sempre* un punto critico al suo interno.

Anche i cicli limite si possono classificare in base alla stabilità, come abbiamo fatto per i punti critici.

In conclusione, si può mostrare che le traiettorie possono essere solo di tre tipi:

*punti critici, cicli, curve semplici non chiuse.*

## Integrali primi o costanti di moto

Sia  $E : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1(D)$ , Essa si chiamerà *integrale primo* se è costante lungo le traiettorie del sistema. Più precisamente, sia  $s(t)$  una soluzione del sistema (2.23) (definita nel suo intervallo massimale); allora è ben definita la funzione composta  $E(s(t))$ . Essendo  $s'(t) = f(s(t))$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}[E(s(t))] = \nabla E(s(t)) \cdot s'(t) = \nabla E(s(t)) \cdot f(s(t)) = (\nabla E \cdot f)(s(t)).$$

Allora chiameremo  $E$  integrale primo o costante del moto per il sistema (2.23) se  $d[E(s(t))]/dt = 0$ , cioè se e solo se  $\nabla E$  risulta ortogonale al campo di velocità  $(h, g)$ .

L'importanza degli integrali primi è dovuta al fatto che, se un integrale primo  $E$  è noto, le sue curve di livello

$$E(x, y) = k$$

hanno le seguenti proprietà: ogni curva di livello di  $E$  è unione di orbite di (2.23) e, viceversa, ogni orbita è contenuta in qualche curva di livello. Per convincersene, basta osservare che:

- i)  $v(x, y)$  (cioè il vettore velocità  $(h, g)$ ) è tangente all'orbita passante per  $(x, y)$ ;

ii)  $\nabla E$  è ortogonale alla curva di livello passante per  $(x, y)$ ;

iii)  $\nabla E$  è ortogonale a  $v$ .

Perciò  $v$  deve essere tangente alla curva di livello nel punto  $(x, y)$  e questa deve essere un'orbita in vicinanza di  $(x, y)$ .

Si può osservare che, nell'intorno di un punto regolare (non critico), al sistema (2.23) è associata l'equazione differenziale (ottenuta eliminando  $t$  dalle due equazioni del sistema):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \quad \text{oppure} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}. \quad (2.26)$$

Ogni soluzione dell'equazione differenziale (2.26) coincide (almeno localmente) con una traiettoria del sistema (2.23) e viceversa. Si noti, che nei punti regolari in cui  $g(x, y) = 0$  oppure  $h(x, y) = 0$ , la direzione del campo vettoriale  $(h, g)$ , tangente all'orbita, è orizzontale o verticale, rispettivamente. Studiando i segni di  $h$  e  $g$  si può poi ripartire il piano delle fasi nelle zone di crescita e decrescita per  $x$  e  $y$ , determinando così anche il verso di percorrenza delle orbite.

Riprendiamo l'Esempio 2: il sistema lineare (2.25) ha un unico punto critico: l'origine. L'equazione differenziale delle traiettorie è:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{cioè} \quad ydy = -xdx$$

(oppure  $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$  cioè  $xdx = -ydy$ ), il cui integrale generale è

$$x^2 + y^2 = c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Tutte le orbite sono cicli, tutte le soluzioni sono periodiche. Nella Figura 2.5 è rappresentata un'orbita e la corrispondente curva integrale, che è un'elica cilindrica. Per determinare il verso di percorrenza dell'orbita basta osservare, per esempio, che, essendo  $x' = -y$ ,  $x(t)$  deve essere decrescente nel semipiano  $y > 0$ ; perciò l'orbita è percorsa in senso antiorario. Il punto critico è stabile, ma non asintoticamente stabile. Osserviamo infine che  $E(x, y) = x^2 + y^2$  è un integrale primo; infatti  $\nabla E = (2x, 2y)$  è ortogonale al vettore velocità  $(-y, x)$ .

### 2.3.1 Stabilità per sistemi autonomi lineari

Consideriamo il sistema (2.22) e studiamo i suoi punti critici. Supponiamo che il sistema (2.22) sia *bidimensionale* e *lineare*, cioè  $f$  sia rappresentata da una matrice  $A$ ,  $2 \times 2$ , a coefficienti reali. In questo caso l'analisi può

essere condotta facilmente in modo completo, fino a una classificazione di tutti i possibili comportamenti delle traiettorie vicino a 0.

Consideriamo dunque un sistema omogeneo bidimensionale:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Sarà allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e supponiamo  $\det A = ad - bc \neq 0$ , cosicchè l'origine è l'*unico* punto critico del sistema. Osserviamo che un'equazione del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti,

$$x'' = \mathfrak{A}x' + \mathfrak{B}x$$

può risciversi nella forma di un sistema (2.27), ponendo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \mathfrak{A}y + \mathfrak{B}x. \end{cases}$$

Viceversa, al sistema (2.27) corrisponde sempre un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti. Infatti, derivando la seconda equazione (2.27) abbiamo:

$$y'' = cx' + dy'$$

da cui, sostituendo in quest'equazione  $x'$  e  $y'$  dati dalle (2.27), otteniamo:

$$y'' = c(a + d)x + (cb + d^2)y. \quad (2.28)$$

Ricavando poi dalla seconda delle (2.27)  $cx = y' - dy$  e sostituendola nella (2.28), abbiamo infine:

$$y'' = (a + d)y' - (ad - cb)y = (\text{Tr}A)y' - (\det A)y. \quad (2.29)$$

Nella prima sezione abbiamo esaminato le *soluzioni* dell'equazione (2.29); qui analizzerò le *orbite* del sistema corrispondente (2.27). Come abbiamo già fatto vedere le soluzioni della (2.29) sono esponenziali  $e^{\lambda t}$ , con  $\lambda$  soluzione dell'equazione caratteristica (questo è vero nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano semplici):

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda - (cb - ad) = 0$$

che si può scrivere nella forma

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$$

e perciò  $\lambda$  è un *autovalore* della matrice  $A$ . Se  $h$  è l'autovettore corrispondente, la soluzione del sistema (2.27) sarà  $he^{\lambda t}$ . Infatti, per definizione di autovalore,  $Ah = \lambda h$  e quindi

$$Ahe^{\lambda t} = \lambda he^{\lambda t}$$

che, ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = he^{\lambda t},$$

si riscrive come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda he^{\lambda t} = Ahe^{\lambda t} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

pertanto  $he^{\lambda t}$  è soluzione del sistema (2.27).

Consideriamo quindi il sistema (2.27), indichiamo con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  gli autovalori di  $A$ , soluzioni dell'equazione caratteristica, e distinguiamo vari casi secondo cui la matrice  $A$  possiede:

- i) due autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  reali e distinti;
- ii) due autovalori reali coincidenti;
- iii) due autovalori complessi e coniugati.

Distingueremo poi dei sottocasi in corrispondenza del segno degli autovalori.

- i) *Autovalori reali e distinti.* Il sistema possiede le due soluzioni (linearmente indipendenti)  $h_1 e^{\lambda_1 t}$ ,  $h_2 e^{\lambda_2 t}$ , dove  $h_1$  e  $h_2$  sono autovettori (reali) di  $A$ ; ogni soluzione reale sarà della forma

$$s(t) = c_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 e^{\lambda_2 t},$$

con  $c_1, c_2$  costanti arbitrarie.

- i<sub>1</sub>) Sia  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Infatti ogni orbita, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi  $(x, y)$ , si avvicina indefinitamente all'origine. Prendendo  $c_2 = 0$  si hanno le due traiettorie rettilinee indicate nella Figura 2.6a con  $\gamma_1^+$  e  $\gamma_1^-$ ; prendendo  $c_1 = 0$  si hanno le due traiettorie  $\gamma_2^+$  e  $\gamma_2^-$ ; anche l'andamento delle altre traiettorie è illustrato in Figura 2.6a. Si osservi che, essendo  $\lambda_2 > \lambda_1$ , per  $t \rightarrow +\infty$  il termine  $c_1 h_1 e^{\lambda_1 t}$  è infinitesimo di ordine superiore rispetto all'altro  $c_2 h_2 e^{\lambda_2 t}$ , cosicchè tutte le traiettorie (tranne  $\gamma_1^\pm$ ) sono asintotiche a  $\gamma_2^\pm$ . Il punto critico prende il nome di **nodo stabile**.

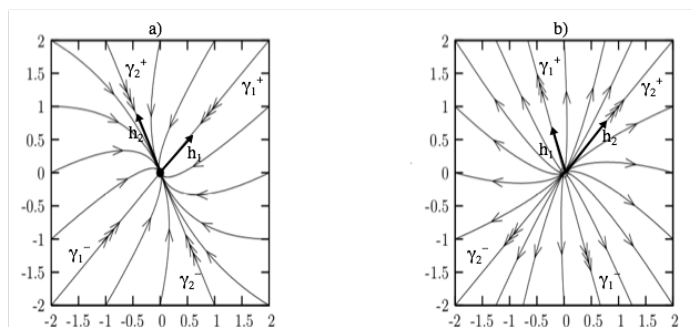


Figura 2.6: a) nodo stabile. b) nodo instabile.

**i<sub>2</sub>)** Sia  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . L'origine è instabile. La discussione di questo caso è del tutto analoga alla precedente; le traiettorie hanno, geometricamente, lo stesso andamento, ma il punto mobile, che rappresenta la soluzione, partendo da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi, vicino quanto si vuole all'origine, si allontana indefinitamente da essa. Si parla in questo caso di **nodo instabile** (Fig.2.6b).

**i<sub>3</sub>)** Sia  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . L'origine è instabile. Per  $c_2 = 0$  abbiamo le traiettorie rettilinee  $\gamma_1^\pm$  lungo le quali il punto mobile si avvicina indefinitamente all'origine (essendo  $\lambda_1 < 0$ ); per  $c_1 = 0$  abbiamo le traiettorie  $\gamma_2^\pm$  lungo le quali il punto si allontana indefinitamente dall'origine (essendo  $\lambda_2 > 0$ ). Ogni altra traiettoria risulta asintotica ad una del tipo  $\gamma_1$  per  $t \rightarrow -\infty$  e ad una del tipo  $\gamma_2$  per  $t \rightarrow +\infty$ . L'andamento è illustrato in Figura 2.7.

L'origine si chiama, in questo caso, **sella**.

**ii)** *Autovalori reali e coincidenti.* Sia  $\lambda$  l'autovalore doppio della matrice  $A$ . Dobbiamo distinguere due casi.

**ii<sub>1</sub>)** Se  $A$  non è diagonalizzabile la soluzione generale del sistema è della forma

$$s(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t},$$

dove  $c_1, c_2$  sono due opportuni vettori, dipendenti da due sole costanti arbitrarie. Se  $\lambda < 0$ , l'origine è globalmente asintoticamente stabile: tutte le traiettorie convergono verso l'origine e sono asintotiche alle traiettorie rettilinee di equazione

$$s(t) = c_2 t e^{\lambda t},$$

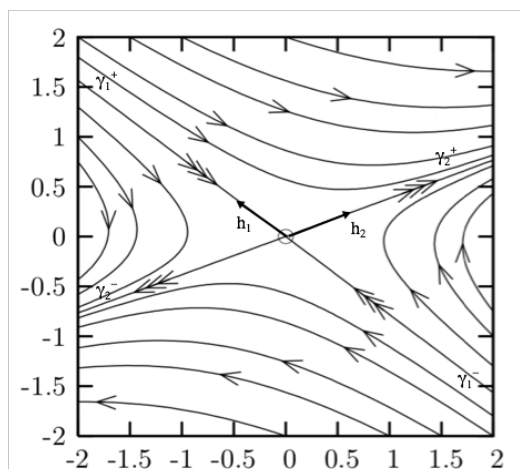


Figura 2.7: Sella.

indicate nella Figura 2.8a con  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$ .

Se  $\lambda > 0$ , tutte si allontanano dall'origine, che è instabile. L'origine si chiama ancora **nodo**.

**ii<sub>2</sub>)** Se la matrice  $A$  è diagonalizzabile allora la soluzione generale è semplicemente:

$$s(t) = ce^{\lambda t},$$

con  $c$  vettore arbitrario. Le traiettorie sono allora tutte rettilinee (Figura 2.8b) e l'origine si dice anche **nodo a stella**, stabile se  $\lambda < 0$ , instabile se  $\lambda > 0$ .

**iii)** *Autovalori complessi coniugati.* Siano  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  gli autovalori di  $A$ ; gli autovettori corrispondenti possono essere scelti in modo che risultino anch'essi coniugati; abbiamo così la coppia di soluzioni (linearmente indipendenti)

$$he^{\alpha t + i\beta t}, \bar{h}e^{\alpha t - i\beta t}. \quad (2.30)$$

Conviene sostituire a queste soluzioni una coppia di soluzioni reali. Posto  $h = h_1 + ih_2$ , con  $h_1, h_2$  vettori reali, prendendo la semisomma e la semidifferenza delle due soluzioni (2.30), otteniamo le due soluzioni reali e linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= e^{\alpha t}(h_1 \cos(\beta t) - h_2 \sin(\beta t)); \\ s_2(t) &= e^{\alpha t}(h_1 \sin(\beta t) + h_2 \cos(\beta t)). \end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale è dato da

$$s(t) = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) = e^{\alpha t}[(c_1 h_1 + c_2 h_2) \cos(\beta t) + (c_2 h_1 - c_1 h_2) \sin(\beta t)]$$



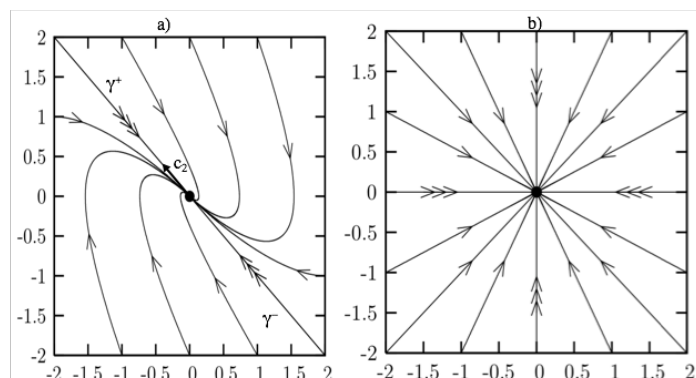


Figura 2.8: a) nodo stabile. b) nodo a stella stabile.

con  $c_1, c_2$  costanti reali arbitrarie. Distinguiamo ora i seguenti casi.

- iii<sub>1</sub>) Se  $\alpha = 0$  (autovalori immaginari puri), l'origine è stabile (ma non asintoticamente stabile); le traiettorie sono delle ellissi. Facciamo vedere che in questo caso il sistema ha un integrale primo della forma:

$$E(x, y) = cx^2 - 4axy - by^2 = \text{costante}. \quad (2.31)$$

Infatti, essendo gli autovalori immaginari puri, risulta  $a = -d$  e l'equazione differenziale delle traiettorie (2.26) si scrive

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx - ay}{ax + by}.$$

Essa è pertanto un'equazione differenziale esatta e una funzione potenziale è data da  $E(x, y)$  come in (2.31). L'integrale generale è quindi assegnato dalla famiglia di ellissi  $E(x, y) = \text{costante}$ , le quali sono anche la famiglia delle traiettorie.

Abbiamo quindi un'infinità di orbite periodiche; l'origine, in questo caso, è un **centro** (Figura 2.9a).

- iii<sub>2</sub>) Se  $\alpha < 0$ , l'origine è globalmente asintoticamente stabile. Tutte le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine, con andamento a spirale (Figura 2.31b). L'origine è un **fuoco stabile**.
- iii<sub>3</sub>) Se  $\alpha > 0$ , l'andamento geometrico delle traiettorie è lo stesso che nel caso precedente, ma il punto mobile si allontana indefinitamente dall'origine. L'origine è un **fuoco instabile**.

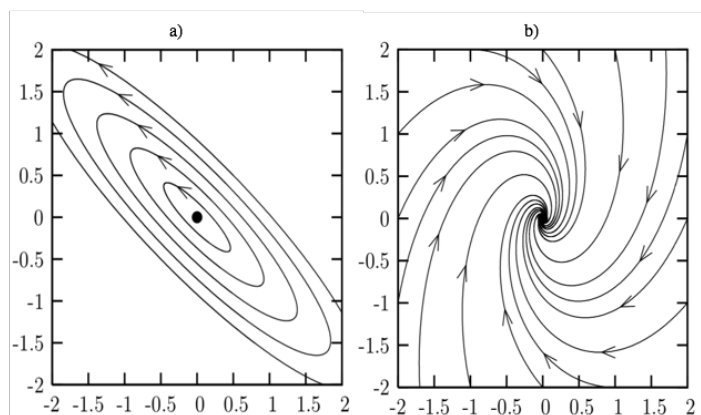


Figura 2.9: a) centro. b) fuoco stabile.

Per sistemi lineari autonomi di  $n$  equazioni lo studio del comportamento delle orbite intorno all'origine (punto critico) procede in modo analogo. Riportiamo, senza entrare nei dettagli e senza dimostrazione, il seguente

**19 Teorema** (stabilità per sistemi  $n$  dimensionali). [1] Indichiamo con  $\lambda_j$ , per  $j = 1, 2, \dots, k$  gli autovalori distinti della matrice  $A$ ,  $n \times n$ .

1. L'origine è un punto critico asintoticamente stabile se e solo se  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$  per  $j = 1, 2, \dots, k$ . La stabilità è globale in  $\mathbb{R}^n$ .
2. L'origine è stabile, non asintoticamente, se e solo se  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$  e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (cioè la dimensione dell'autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore).
3. L'origine è instabile negli altri casi.

### 2.3.2 Stabilità per sistemi autonomi non lineari

Per un sistema lineare autonomo la stabilità di un punto critico è completamente risolta dal teorema 19, che abbiamo illustrato nei dettagli nel caso bidimensionale. Se il sistema non è lineare un modo di procedere è cercare di sostituire il sistema originale con un sistema lineare approssimante, utilizzare la teoria lineare e cercare di trasferire le informazioni ottenute a quello non lineare.

In generale, però, l'approssimazione è efficace solo nell'intorno del punto critico considerato e perciò, anche se le informazioni sul sistema lineare hanno carattere globale, la loro validità in riferimento al sistema originale è per lo più locale. E' un tipico esempio della dicotomia locale-globale

associata a non lineare-lineare. Il procedimento che mostreremo prende il nome di *metodo di linearizzazione*.

Consideriamo un sistema autonomo

$$y' = f(y) \quad (2.32)$$

con  $f \in C^1(D)$ ,  $D$  aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e tale che  $f(0) = 0$ . Ipotesi fondamentale per tutto il seguito è che la matrice jacobiana di  $f$  in  $0$ ,  $\mathcal{J}_f(0)$  sia *degenere*. Si può dimostrare che questo, tra l'altro, assicura che  $0$  sia un punto critico *isolato*, ossia che esiste un intorno di  $0$  in cui non vi sono altri punti critici del sistema.

Essendo  $f \in C^1(D)$ , si può scrivere:

$$f(y) = \mathcal{J}_f(0)y + g(y)$$

con  $g(y) = o(|y|)$  per  $y \rightarrow 0$ . Poniamo  $A = \mathcal{J}_f(0)$  e consideriamo il sistema lineare

$$z' = Az \quad (2.33)$$

che prende il nome di sistema linearizzato (in  $y = 0$ ).

Il risultato fondamentale, che ci limitiamo a enunciare, è il seguente:

**20 Teorema** (di linearizzazione).

- i) Se l'origine è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato (2.33), allora lo è anche per il sistema non lineare (2.32).
- ii) Se esiste un autovalore di  $A$  con parte reale positiva, allora l'origine è instabile per il sistema non lineare (2.32)

Infine si può dire che se l'origine è un fuoco, una sella o un nodo (non a stella) per il sistema linearizzato, allora il ritratto di fase in un intorno dell'origine per il sistema non lineare sarà *topologicamente equivalente*, cioè qualitativamente simile. Si potrà così parlare di fuoco, sella o nodo anche per il *sistema non lineare*.

Ciò significa sostanzialmente che una "piccola" perturbazione sulla  $f$  non altera localmente il ritratto di fase in questi casi. Si parla allora di **stabilità strutturale** del sistema. Un centro non può essere strutturalmente stabile, infatti una piccola perturbazione può distruggere la periodicità di una soluzione.



# Capitolo 3

## Invertibilità e funzione implicita

Questo capitolo ha come scopo fornire i giusti prerequisiti per capire al meglio il prossimo capitolo, che tratterà le varietà  $k$ -dimensionali. Dopo aver fornito qualche requisito preliminare enunceremo e dimostreremo il Teorema dell'invertibilità locale e il Teorema di Dini, della funzione implicita. Quest'ultimo lo estenderemo prima al caso  $n$ -dimensionale, poi al caso più generale di sistemi di equazioni.

### 3.1 Preliminari

Indichiamo con  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  l'insieme delle funzioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^n$ . Di solito lo spazio vettoriale con cui si lavora,  $V = \mathbb{C}^n$  o  $\mathbb{R}^n$ , avrà la norma vettoriale, chiamata  $|x|_v$ , con  $x$  (*generico vettore*)  $\in V$ . Dato uno spazio vettoriale con la norma  $\|\cdot\|_v$ , la norma matriciale associata è definita da:

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Bx|_v}{|x|_v} \quad (3.1)$$

Questa è spesso chiamata **norma operatore**.

Tali norme, matriciale e vettoriale, sono *compatibili* cioè:

$$|Bx|_v \leq \|B\| |x|_v \quad \forall x \in V, \forall B \text{ (generica matrice)} \quad (3.2)$$

Enunciamo due disuguaglianze spesso utilizzate:

*Disuguaglianza triangolare:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (3.3)$$

*Disuguaglianza triangolare inversa:*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad (3.4)$$

**7 Definizione.** Sia  $X$  un insieme qualsiasi. Una **distanza** su  $X$  è un'applicazione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- i)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y$  in  $X$ , e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$  (*positività*);
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y$  in  $X$  (*simmetria*);
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y$  e  $z$  in  $X$  (*disuguaglianza triangolare*).

Uno **spazio metrico** è una coppia  $(X, d)$  con  $X$  insieme qualsiasi e  $d$  distanza su  $X$ .

**8 Definizione.** Una successione  $\{x_n\}$  è una **successione di Cauchy** se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $N(\epsilon) > 0$  tale che:

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

per ogni  $n, m > N(\epsilon)$ .

In uno spazio metrico, ogni successione convergente è di Cauchy.

Per avere uno *spazio metrico completo* deve valere anche il viceversa, cioè tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio.

**9 Definizione.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia

$$T : X \rightarrow X.$$

Si dice che  $T$  è una **contrazione** in  $(X, d)$  se esiste una costante positiva  $L < 1$  tale che

$$d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**21 Teorema** (di Banach, del punto fisso). [2] Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo e sia

$$T : X \rightarrow X$$

una contrazione in  $(X, d)$ . Allora esiste ed è unico un punto  $x \in X$  tale che

$$T(x) = x. \tag{3.5}$$

**Nota:** Un punto  $x \in X$  verificante (3.5) si dice che è un **punto fisso** di  $T$  (Fig.3.1).

Se  $f$  è differenziabile in  $a$ , si dice *differenziale di  $f$  calcolato in  $a$*  la funzione lineare  $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$df(a) : h \rightarrow \mathcal{J}_f(a) \cdot h \tag{3.6}$$

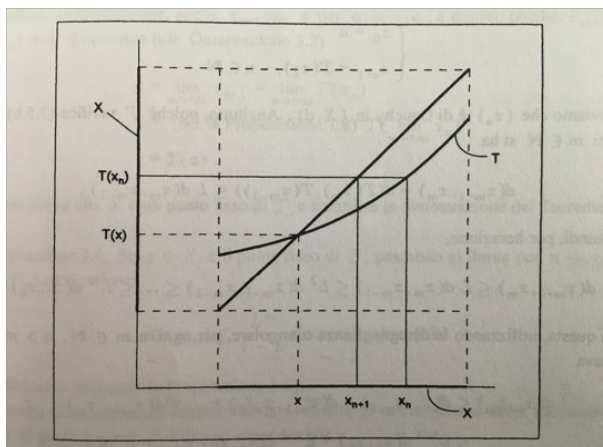


Figura 3.1:

Il differenziale del differenziale di  $df(a)$  calcolato in  $a$  è la funzione:

$$d(df(a))(a) : h' \rightarrow \mathcal{J}_{df(a)}(a) \cdot h' \quad (3.7)$$

Se  $df(a)(h) = \mathcal{J}_f(a) \cdot h$ , allora  $d(df(a))(a)(h') = \mathcal{J}_f(a) \cdot h'$ . Quindi  $\mathcal{J}_{df(a)}(a) \cdot h' = \mathcal{J}_f(a) \cdot h'$  e la funzione diventa:

$$d(df(a))(a) : h' \rightarrow \mathcal{J}_f(a) \cdot h' \quad (3.8)$$

Questo dimostra che  $df(a) = d(df(a))(a)$ .

**22 Teorema** (composizione dei differenziali). *Siano  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $O$  un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ,  $f : A \rightarrow O$  e  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Sia poi  $a \in A$ . Supponiamo  $f$  differenziabile in  $a$  e  $g$  differenziabile in  $f(a)$ . Allora  $g \circ f$  è differenziabile in  $a$  e si ha:*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \quad (3.9)$$

*6 Osservazione.* Se  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  e se  $B = (b_{ij})$ , con  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , è la matrice associata a  $T$  allora:

$$\|T\| \leq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_{ij})^2 \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

dove  $\|T\| = \max \{ |T(\alpha)| : \alpha \in \mathbb{R}^n, |\alpha| = 1 \}$ .

In algebra lineare si può introdurre un concetto primitivo di segmento, costruito in un ambiente generico e astratto quale uno spazio vettoriale: si

definisce “segmento” un sottoinsieme  $S$  di uno spazio vettoriale reale  $A$  che può essere descritto come

$$S = \{x(1-t) + ty : x, y \in A, t \in [0, 1]\}$$

Gli estremi di  $S$  sono poi definiti come i vettori  $x$  e  $y$ . Un segmento (chiuso) di estremi  $x$  e  $y$  può essere indicato con la scrittura  $[x, y]$ , analoga alla notazione utilizzata nel caso unidimensionale per gli intervalli di  $\mathbb{R}$ .

**23 Teorema** (derivazione delle funzioni composte).

1. Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che la funzione composta  $h(x) = g(f(x))$  sia definita almeno in un intorno  $U$  di  $\bar{x} \in A$ . Se  $f$  è differenziabile in  $\bar{x}$  e  $g$  è derivabile in  $f(\bar{x})$ , allora la funzione composta:

$$h = g \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile in  $\bar{x}$  e

$$\nabla h(\bar{x}) = g'(f(\bar{x}))\nabla f(\bar{x}) \quad (3.11)$$

2. Siano  $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che la funzione composta  $g(t) = f(r(t))$  sia definita almeno in un intorno  $J$  di  $t_0 \in I$ . Se  $r$  è derivabile in  $t_0$  e  $f$  è differenziabile in  $r(t_0)$ , allora la funzione composta

$$g = f \circ r : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è derivabile in  $t_0$  e

$$g'(t_0) = \nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(r(t_0))r'_i(t_0) \quad (3.12)$$

$L \in \mathbb{R}^*$  significa che  $L \in \mathbb{R}$  oppure  $L = \pm\infty$ .

**24 Teorema** (di permanenza del segno). Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita almeno in un intorno sferico di  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  (salvo al più  $\bar{x}$  stesso). Supponiamo che esista

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \in \mathbb{R}^*.$$

1. Se  $L > 0$ , allora  $f(x)$  si mantiene positiva almeno in un intorno di  $\bar{x}$ , cioè esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > 0$  purchè  $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ .
2. Se  $f(x) \geq 0$  in un intorno di  $\bar{x}$  (salvo al più  $\bar{x}$  stesso) allora  $L \geq 0$ . Notiamo che non si può affermare che  $L > 0$ , anche se  $f(x) > 0$ ! Dal punto 1 segue anche che:



3. Se  $f$  è continua in  $\bar{x}$  e  $f(\bar{x}) > 0$ , allora  $f(x)$  si mantiene positiva almeno in un intorno di  $\bar{x}$ , cioè esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > 0$  purchè  $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ .

Analoghi enunciati valgono ovviamente sostituendo il segno  $>$  con  $<$  e il segno  $\geq$  con  $\leq$ .

**25 Teorema** (degli zeri: caso n-dimensionale). *Sia  $E$  un insieme connesso per archi di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sia continua. Se  $x, y$  sono due punti di  $E$  tali che  $f(x) > 0$  e  $f(y) < 0$ , allora esiste un terzo punto  $z \in E$  in cui  $f$  si annulla. In particolare, lungo ogni arco di curva continua (contenuto in  $E$ ) che congiunge  $x$  e  $y$ , c'è almeno un punto in cui  $f$  si annulla.*

In questa versione multidimensionale, quindi, il concetto di *insieme connesso per archi* si rivela essere una generalizzazione opportuna del concetto unidimensionale di *intervallo*.

**26 Teorema** (del valor medio). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in ogni punto di  $A$ . Siano poi  $x, y \in A$  tali che  $[x, y] \subseteq A$ . Esiste allora  $z \in [x, y]$  tale che:*

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot |y - x|$$

In particolare:

$$|f(y) - f(x)| \leq |\nabla f(z)| |y - x| \quad (3.13)$$

**27 Teorema** (del valor medio: caso generale). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenziabile in ogni punto di  $A$ . Siano poi  $x, y \in A$  tali che  $[x, y] \subseteq A$ . Esiste allora  $z \in [x, y]$  tale che:*

$$|f(y) - f(x)| \leq \|\mathcal{J}_f(z)\| |y - x| \quad (3.14)$$

## 3.2 Invertibilità locale

In questa sezione ci occuperemo del problema della risolubilità *locale* dei seguenti sistemi non lineari:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases} \quad (3.15)$$

dove  $f_1, \dots, f_n$  sono funzioni di classe almeno  $C^1$ , tutte definite su uno stesso aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Indicherò con  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  la funzione  $(f_1, \dots, f_n)$ ,

con  $x$  il punto  $(x_1, \dots, x_n)$  e con  $y$  il punto  $(y_1, \dots, y_n)$ . Di conseguenza la (4.34) si scriverà nella forma seguente:

$$f(x) = y \quad (3.16)$$

Conveniamo di dire che (3.16) è **localmente risolubile** se, fissato ad arbitrio un punto  $\bar{x} \in A$  e posto  $\bar{y} = f(\bar{x})$ , esistono un intorno  $V$  di  $\bar{x}$  e un intorno  $W$  di  $\bar{y}$  tali che l'equazione (il sistema) (3.16) ha una sola soluzione  $x \in V$  per ogni fissato  $y \in W$ . Pretendiamo inoltre che la funzione che associa ad ogni  $y \in W$  l'unica soluzione  $x \in V$  di (3.16), abbia la stessa regolarità di  $f$ . Tutto questo si formalizza nella definizione di *diffeomorfismo locale*. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che una funzione  $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$ ,  $k \geq 1$ , è un **diffeomorfismo locale di classe  $C^k$**  se: per ogni  $\bar{x} \in A$  esiste un intorno aperto  $V$  di  $\bar{x}$ ,  $V \subseteq A$ , tale che:

- (i)  $f|_V$  è iniettiva
- (ii)  $f(V) = W$  è aperto
- (iii)  $(f|_V)^{-1} \in C^k(f(V), \mathbb{R}^n)$

Osserviamo esplicitamente che  $W$ , grazie alla (ii), è un intorno aperto di  $\bar{y} := f(\bar{x})$ . Inoltre, per (i),  $f|_V : V \rightarrow W$  è *biettiva* (iniettiva e suriettiva), e quindi  $f|_V$  è *invertibile* e la sua inversa  $(f|_V)^{-1}$  ha dominio  $W$ . Possiamo inoltre formulare la biettività di  $f$  nei termini seguenti:

$$\forall y \in W \exists! x \in V : f(x) = y \quad (3.17)$$

Risulta poi  $f(x) = y$ , con  $x \in V$  e  $y \in W$ , se e solo se  $x = (f|_V)^{-1}(y)$ . Il teorema seguente è il principale risultato di questo paragrafo.

**28 Teorema** (dell'invertibilità locale). *Sia  $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $k \geq 1$ .  $f$  è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$  se e solo se:*

$$\det \mathcal{J}_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A \quad (3.18)$$

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo due lemmi e una proposizione.

**2 Lemma.** *Se  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  è invertibile allora:*

$$|T(h)| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} |h| \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad (3.19)$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che, per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ , risulta  $T^{-1}(T(h)) = h$ , e quindi:

$$|h| = |T^{-1}(T(h))| \leq \|T^{-1}\| |T(h)| \quad (3.20)$$

□

**3 Lemma.** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f \in C^k(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $k \geq 1$ . Allora la funzione  $x \rightarrow \|df(x)\|$  è continua in  $A$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{x}$  un arbitrario punto di  $A$  e sia  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Allora:

$$\begin{aligned} & | \|df(x)\| - \|df(\bar{x})\| | \leq \|df(x) - df(\bar{x})\| \leq \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \bar{x} \end{aligned} \quad (3.21)$$

in quanto  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$  è continua in  $A$  per ogni  $i = 1, \dots, m$  e per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Ciò, per l'arbitrarietà di  $\bar{x} \in A$ , prova il Lemma. La prima disuguaglianza è la (3.4), mentre l'ultima è valida per l'osservazione 6.  $\square$

La proposizione seguente è la parte cruciale del Teorema 28. Grosso modo, essa afferma che una *piccola* perturbazione lipschitziana di una trasformazione lineare invertibile è invertibile, con inversa anch'essa lipschitziana.

**3 Proposizione.** *Siano  $V$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = T + E$ , ove  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una trasformazione lineare invertibile e  $E : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz  $L > 0$ , i.e.:*

$$|E(x) - E(x')| \leq L|x - x'| \quad \forall x, x' \in V \quad (3.22)$$

*Supponiamo:*

$$L\|T^{-1}\| < 1 \quad (3.23)$$

*Allora:*

(i)  $f$  è iniettiva

(ii)  $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$  è lipschitziana, i.e. esiste  $m > 0$  tale che:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leq m|y - y'| \quad \forall y, y' \in f(V) \quad (3.24)$$

(iii)  $f(V)$  è aperto

*Dimostrazione (i).* Per la (3.22), il Lemma 2 e la (3.23)

$$|E(x) - E(x')| \leq L|x - x'| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}|x - x'| \leq |T(x - x')|,$$

allora

$$|T(x - x')| - |E(x) - E(x')| > 0.$$

Sempre per il lemma 2

$$|T(x - x')| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}|x - x'|,$$

mentre per la (3.22)

$$-|E(x) - E(x')| \geq -L|x - x'|.$$

Quindi per ogni  $x, x' \in V$  si ha:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(T(x) + E(x)) - (T(x') + E(x'))| = \\ &= |(T(x) - T(x')) - (E(x') - E(x))| \stackrel{\text{per la (3.4)}}{\geq} \\ &\geq \left| |T(x) - T(x')| - |E(x') - E(x)| \right| = \\ &\stackrel{\text{per la linearità di } T}{=} \left| |T(x - x')| - |E(x) - E(x')| \right| = \\ &= |T(x - x')| - |E(x) - E(x')| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} |x - x'| - L|x - x'| = \left( \frac{1}{\|T^{-1}\|} - L \right) |x - x'|. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Posto  $m_0 := \frac{1}{\|T^{-1}\|} - L = \frac{1 - L\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|} > 0$  (per la (3.23)), otteniamo:

$$|f(x) - f(x')| \geq m_0|x - x'| \tag{3.26}$$

Di conseguenza, essendo  $m_0 > 0$ , se  $f(x) = f(x')$  risulta  $x = x'$ . Dunque  $f$  è iniettiva.  $\square$

*Dimostrazione (ii).* Definisco  $f(V) = W$ , quindi  $f|_V : V \rightarrow W$  è suriettiva per costruzione e iniettiva per (i). Di conseguenza  $f|_V$  è invertibile con inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$ . Pertanto dalla (13) si ottiene:

$$|y - y'| \geq m_0|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \quad \forall y, y' \in f(V) \tag{3.27}$$

Vale quindi la (3.24) con  $m = \frac{1}{m_0} = \frac{\|T^{-1}\|}{1 - L\|T^{-1}\|}$ .  $\square$

*Dimostrazione (iii).* Occorre dimostrare che per ogni  $a \in V$  esiste  $\sigma > 0$  tale che:

$$D(f(a), \sigma) \subseteq f(V) \tag{3.28}$$

dove  $D(f(a), \sigma)$  è un disco aperto di centro  $f(a)$  e raggio  $\sigma$ . Sia dunque  $a \in V$ . Poichè  $V$  è aperto esiste  $r > 0$  tale che  $\overline{D(a, r)} \subseteq V$ , dove  $\overline{D(a, r)}$  è il disco chiuso di centro  $a$  e raggio  $r$ . Poniamo:

$$\sigma = m_0 r = \left( \frac{1 - L\|T^{-1}\|}{\|T^{-1}\|} \right) r \stackrel{\text{per la (3.23)}}{>} 0. \tag{3.29}$$

Dimostriamo che:

$$D(f(a), \sigma) \subseteq \overline{f(D(a, r))} \quad (3.30)$$

Da questa seguirà la (3.28), e quindi l'asserto. Per dimostrare l'inclusione (3.30) occorre provare quanto segue:

$$\forall y \in D(f(a), \sigma), \exists x \in \overline{D(a, r)} : f(x) = y.$$

Ora, poichè  $f = T + E$  e poichè  $T$  è invertibile

$$f(x) = y = T(x) + E(x) \Leftrightarrow T(x) = y - E(x) \Leftrightarrow y = T^{-1}(y - E(x)).$$

Pertanto, fissato  $y \in D(f(a), \sigma)$  e posto

$$K : \overline{D(a, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad K(x) = T^{-1}(y - E(x)),$$

occorre provare che esiste  $x \in \overline{D(a, r)}$  tale che  $K(x) = x$ . In altri termini occorre dimostrare che  $K$  ha un *punto fisso*. Per questo, utilizziamo il Teorema di Banach.

Osserviamo anzitutto che  $\overline{D(a, r)}$  munito della distanza euclidea, è uno spazio metrico completo (è un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{R}^n$ , e  $\mathbb{R}^n$  è completo). Allora, se:

a)  $K\overline{D(a, r)} \subseteq \overline{D(a, r)}$

b)  $K$  è una contrazione

per il Teorema di Banach,  $K$  avrà un punto fisso, e la Proposizione sarà dimostrata.

Sappiamo che  $f(a) = T(a) + E(a)$  e quindi  $a = T^{-1}(f(a) - E(a))$ , inoltre  $\sigma = \left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} - L\right)r \Leftrightarrow \|T^{-1}\|\sigma = r - L\|T^{-1}\|r \Leftrightarrow r = \|T^{-1}\|(\sigma + Lr)$ .

Ora, se  $x \in \overline{D(a, r)}$ , risulta:

$$\begin{aligned} |K(x) - a| &= |T^{-1}(y - E(x)) - T^{-1}(f(a) - E(a))| \stackrel{\text{per la linearità di } T}{=} \\ &= |T^{-1}(y - f(a) + E(a) - E(x))| \stackrel{\text{per la compatibilità}}{\leq} \\ &\leq \|T^{-1}\| |y - f(a) + E(a) - E(x)| \stackrel{\text{per la (3.3)}}{\leq} \\ &\leq \|T^{-1}\| (|y - f(a)| + |E(a) - E(x)|) = \\ &= \|T^{-1}\| (|y - f(a)| + |E(x) - E(a)|) \stackrel{\text{per la (3.22)}}{\leq} \\ &\leq \|T^{-1}\| (\sigma + L|x - a|) \leq \|T^{-1}\| (\sigma + Lr) = r. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Questo dimostra che  $|K(x) - a| \leq r$  se  $|x - a| \leq r$ . Quindi **a)** è vera. Dimostriamo infine **b)**. Per ogni  $x, x' \in D(a, r)$  risulta:

$$\begin{aligned} |K(x) - K(x')| &= |T^{-1}(y - E(x)) - T^{-1}(y - E(x'))| \stackrel{\text{per la linearità di } T}{=} \\ &= |T^{-1}(E(x') - E(x))| \leq \|T^{-1}\| |E(x') - E(x)| = \|T^{-1}\| |E(x) - E(x')| \leq \\ &\leq \|T^{-1}\| L |x - x'| \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ma per l'ipotesi (3.23),  $\|T^{-1}\|L < 1$ . Quindi  $K$  è una contrazione. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 28.* Dimostriamo dapprima la necessità della condizione (3.18). Se  $f$  è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$ , per ogni  $a \in A$  esiste un disco aperto  $V$  centrato in  $a$  (e quindi convesso),  $V \subseteq A$ , tale che  $g := f|_V$  è iniettiva,  $g(V)$  è aperto e  $g^{-1} \in C^k(g(V), \mathbb{R}^n)$ . Poichè, per definizione di funzione inversa:

$$g^{-1} \circ g = i_V \quad (\text{funzione identità su } V \rightarrow i_V(x) = x \quad \forall x \in V) \tag{3.33}$$

per il Teorema 22 ( $g$  e  $g^{-1}$  sono differenziabili in ogni punto, perchè sono di classe almeno  $C^1$ ) si ha:

$$dg^{-1}(g(a)) \circ dg(a) = d(g^{-1} \circ g)(a) = di_V(a) = i_V(a) = i_{\mathbb{R}^n} \tag{3.34}$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_{g^{-1}}(g(a)) \cdot \mathcal{J}_g(a) = I_n \quad (\text{matrice identità } n \times n) \tag{3.35}$$

Allora:

$$\det \mathcal{J}_{g^{-1}}(g(a)) \cdot \det \mathcal{J}_g(a) = \det I_n = 1 \tag{3.36}$$

e quindi  $\det \mathcal{J}_g(a) \neq 0$ . Ma  $\mathcal{J}_g(a) = \mathcal{J}_f(a)$ . In definitiva:

$$\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0 \quad \forall a \in A \tag{3.37}$$

e la necessità della (3.18) è dimostrata.

Dimostriamone ora la sufficienza.

Sia  $a \in A$ . Poichè  $f$  è di classe  $C^k$  e  $k \geq 1$ ,  $f$  è differenziabile in  $a$ . Poniamo  $T = df(a)$ ,  $E : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $E = f - T$ . La trasformazione lineare  $T$  è invertibile, perchè  $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$ . Inoltre  $E$  è di classe  $C^k$  e

$$dE(a) = df(a) - dT = df(a) - d(df(a)) = df(a) - df(a) = 0.$$

Per il Lemma 3:

$$\lim_{x \rightarrow a} \|dE(x)\| = \|dE(a)\| = 0 \tag{3.38}$$

e quindi, posto  $L = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$ , eventualmente restringendo  $V$  si trova che:

$$\left| \|dE(x)\| - \|dE(a)\| \right| = \|dE(x)\| < L \quad \forall x \in V \quad (3.39)$$

Ora, per il Corollario 27, per ogni  $x, x' \in V$  esiste  $z \in [x, x']$  ( $\subseteq V$ , perchè  $V$  è convesso) tale che:

$$|E(x) - E(x')| \leq \|dE(z)\| |x - x'| \leq L|x - x'| \quad (\text{per la 3.39}) \quad (3.40)$$

Questo prova che  $E$  è lipschitziana su  $V$ , con costante di Lipschitz  $L$ . Poichè  $L\|T^{-1}\| = 1/2 (< 1)$  possiamo quindi applicare la Proposizione 3 e concludere che  $f|_V$  è iniettiva,  $f(V)$  è aperto e  $g := (f|_V)^{-1}$  è lipschitziana su  $f(V)$ . Esiste allora una costante positiva  $m$  tale che:

$$|g(y) - g(y')| \leq m|y - y'| \quad \forall y, y' \in W := f(V) \quad (3.41)$$

Ciò prova, anzitutto, che  $g$  è continua; dimostriamo che è anche differenziabile in ogni punto di  $W$ . Per ogni  $\bar{x}, x \in V$ , per la differenziabilità di  $f$  in  $\bar{x}$  risulta:

$$f(x) - f(\bar{x}) = df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \omega(x)|x - \bar{x}| \quad (3.42)$$

dove  $\omega(x)$  è continua e  $\omega(\bar{x}) = 0$ . Di qui, posto  $y = f(x)$  e  $\bar{y} = f(\bar{x})$ , si trae:

$$y - \bar{y} = df(\bar{x})(g(y) - g(\bar{y})) + \omega(g(y))|g(y) - g(\bar{y})|. \quad (3.43)$$

$$y - \bar{y} - \omega(g(y))|g(y) - g(\bar{y})| = df(\bar{x})(g(y) - g(\bar{y}))$$

Applico  $(df(\bar{x}))^{-1}$  da entrambe le parti:

$$g(y) - g(\bar{y}) = (df(\bar{x}))^{-1}(y - \bar{y}) - (df(\bar{x}))^{-1}(\omega(g(y))|g(y) - g(\bar{y})|)$$

Moltiplico e divido  $-(df(\bar{x}))^{-1}(\omega(g(y))|g(y) - g(\bar{y})|)$  per  $|y - \bar{y}|$  quindi viene:

$$g(y) - g(\bar{y}) = (df(\bar{x}))^{-1}(y - \bar{y}) + \omega_1(y)|y - \bar{y}|$$

dove, per  $y \neq \bar{y}$ :

$$\omega_1(y) = \frac{-(df(\bar{x}))^{-1}(\omega(g(y))|g(y) - g(\bar{y})|)}{|y - \bar{y}|} \xrightarrow{y \rightarrow \bar{y}} 0 \quad (\text{per la (3.41)}) \quad (3.44)$$

Ciò prova che  $g$  è differenziabile in  $\bar{y}$ , con differenziale:

$$dg(\bar{y}) = (df(\bar{x}))^{-1} \quad (3.45)$$

Dalla (3.45), data l'arbitrarietà di  $\bar{y}$  in  $W$ , si trae:

$$\mathcal{J}_g(y) = (\mathcal{J}_f(g(y)))^{-1} \quad \forall y \in W \quad (3.46)$$

Quindi, per la continuità di  $g$  e per la continuità delle derivate prime di  $f$ , le derivate prime di  $g$  sono continue in  $W$ . Pertanto  $g \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ . Se poi,  $f$  è di classe  $C^2$ , le derivate prime di  $g$  sono di classe  $C^1$ , sempre per la (3.45), in quanto composizioni di funzioni di classe  $C^1$ . Pertanto  $g \in C^2(W, \mathbb{R}^n)$ . Iterando il ragionamento si prova che  $g \in C^k(W, \mathbb{R}^n)$  se  $f$  è di classe  $C^k$ . Con questo il Teorema 28 è completamente provato.  $\square$

**1 Corollario.** *Sia  $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $k \geq 1$ . Se:*

$$\det \mathcal{J}_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A \quad (3.47)$$

*allora  $f$  è aperta, i.e.  $f(U)$  è aperto, per ogni aperto  $U \subseteq A$ .*

### 3.3 Funzioni definite implicitamente

#### 3.3.1 Funzione implicita di una variabile

Gli insiemi definiti nel piano da un'equazione  $f(x, y) = \text{cost.}$  sono solitamente delle curve, dette linee di livello della funzione  $z = f(x, y)$ . Questa affermazione va presa con una certa cautela, infatti anche con  $f$  molto regolare, l'insieme di livello definito da  $f(x, y) = \text{cost.}$  non è necessariamente una curva, nè una curva regolare.

Poniamoci il problema di specificare sotto quali condizioni l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce una curva regolare. Più precisamente, ci poniamo un problema più ristretto (e locale):

*Data una funzione  $f(x, y)$ ,  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in un aperto del piano e in esso regolare (almeno  $C^1$ ), precisare le condizioni sotto le quali l'equazione  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente una funzione  $y = g(x)$ .*

Precisiamo: una funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo) tale che:

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

si dice “definita implicitamente dall'equazione  $f(x, y) = 0$ ”, o più brevemente **funzione implicita**.

Affinchè una tale funzione  $g$  esista, è necessario che l'equazione  $f(x, y) = 0$  sia soddisfatta almeno in un punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ . In tal caso sarà  $g(\bar{x}) = \bar{y}$  e il problema è capire se una tale  $g$  può essere definita in tutto un intorno  $I$  di  $\bar{x}$ . Inoltre, vorremmo che  $g(x)$  fosse abbastanza regolare (almeno derivabile).

Ragioniamo a ritroso: se una tale funzione  $g(x)$  esiste ed è derivabile in  $I$ , essendo anche  $f(x, y)$  differenziabile per ipotesi, possiamo derivare rispetto ad  $x$  l'identità:

$$f(x, g(x)) = 0$$



ottenendo, per il teorema 23:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0$$

da cui si ricava che

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

per ogni  $x \in I$  in cui il denominatore non si annulla. In particolare,

$$g'(\bar{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})}$$

purchè sia  $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ . Sotto ipotesi ragionevoli, l'esistenza e la derivabilità di  $g$  possono essere effettivamente dimostrate. Precisamente, abbiamo:

**29 Teorema** (di Dini, della funzione implicita). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1(A)$ . Supponiamo che in un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  sia:*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

*Allora esiste un intorno  $I$  di  $\bar{x}$  in  $\mathbb{R}$  e un'unica funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $\bar{y} = g(\bar{x})$  e*

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

*Inoltre,  $g \in C^1(I)$  e*

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in I. \quad (3.48)$$

Notiamo anche che, se  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , ma in compenso  $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , si può applicare il teorema scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$ , ossia affermare che esiste un intorno  $J$  di  $\bar{y}$  e un'unica funzione  $x = h(y)$  definita in  $J$ , tale che  $\bar{x} = h(\bar{y})$  e

$$f(h(y), y) = 0 \quad \forall y \in J.$$

Inoltre,  $h \in C^1(J)$  e

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y)} \quad \forall y \in J \quad (3.49)$$

In sostanza, i punti in cui il teorema del Dini *non* è applicabile sono quelli in cui il gradiente di  $f$  si annulla, ossia i punti critici di  $f$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione si articola in vari passi.

1. *Esistenza e unicità della funzione implicita.* Per ipotesi  $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , supponiamo per fissare le idee che sia  $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ . Poichè per ipotesi  $\frac{\partial f}{\partial y}$  è continua in  $A$ , per il teorema 24 esiste un rettangolo

$$R = [\bar{x} - a, \bar{x} + a] \times [\bar{y} - b, \bar{y} + b]$$

in cui  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ . Allora la funzione di una variabile

$$y \rightarrow f(\bar{x}, y)$$

è continua e strettamente crescente in  $[\bar{y} - b, \bar{y} + b]$ . In particolare, poichè per ipotesi  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , questo implica che

$$f(\bar{x}, \bar{y} - b) < 0 \quad \text{e} \quad f(\bar{x}, \bar{y} + b) > 0.$$

Ancora per il teorema 24, esiste allora un intervallo

$$I = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \subset [\bar{x} - a, \bar{x} + a]$$

tale che

$$f(x, \bar{y} - b) < 0 \quad \text{e} \quad f(x, \bar{y} + b) > 0 \quad \forall x \in I.$$

Se ora fissiamo un punto qualsiasi  $\bar{x} \in I$ , la funzione di una variabile

$$y \rightarrow f(\bar{x}, y)$$

è continua su  $[\bar{y} - b, \bar{y} + b]$ , negativa in  $\bar{y} - b$ , positiva in  $\bar{y} + b$  e strettamente crescente.

Per il teorema 25 (per funzioni di una variabile) esiste uno e un sol punto  $\bar{y} \in (\bar{y} - b, \bar{y} + b)$  tale che  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Ponendo  $g(\bar{x}) = \bar{y}$  abbiamo dimostato esistenza e unicità della funzione implicita, sull'intervallo  $I$ .

2. *Continuità di  $g$ .* Mostriamo prima che  $g$  è continua in  $\bar{x}$ . Fissato  $\epsilon > 0$ , ripetiamo la dimostrazione precedente con  $\epsilon$  al posto di  $b$ ; troveremo un  $\delta_\epsilon$  tale che per ogni  $\bar{x} \in (\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon)$  esiste uno e un sol punto  $\bar{y} \in (\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon)$  tale che  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Per l'unicità della funzione implicita dev'essere  $\bar{y} = g(\bar{x})$ , da cui l'implicazione

$$\bar{x} \in (\bar{x} - \delta_\epsilon, \bar{x} + \delta_\epsilon) \implies g(\bar{x}) \in (\bar{y} - \epsilon, \bar{y} + \epsilon),$$

che esprime la continuità di  $g$  in  $\bar{x}$ . D'altro canto, la condizione

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0 \quad \text{in} \quad I \times [\bar{y} - b, \bar{y} + b]$$

consente di ripetere lo stesso ragionamento in qualsiasi punto  $x \in I$ , perciò  $g$  è continua in  $I$ .

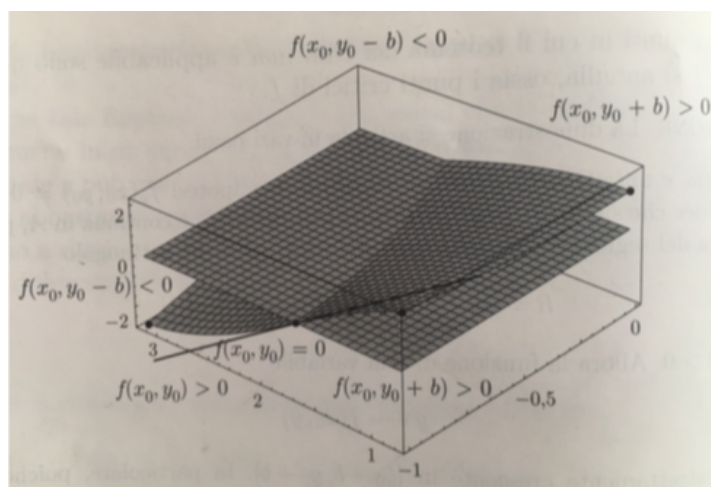


Figura 3.2: Esistenza della funzione implicita.

3. *Derivabilità di g.* Applichiamo il teorema 26 a  $f$  in due punti qualsiasi

$$(x, y), (x_1, y_1) \in I \times [\bar{y} - b, \bar{y} + b]$$

Esisterà dunque un punto  $(x^*, y^*)$ , sul segmento di estremi  $(x, y), (x_1, y_1)$ , tale che

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y_1 - y).$$

Scegliendo ora  $y_1 = g(x_1)$  e  $y = g(x)$ , avremo  $f(x_1, y_1) = f(x, y) = 0$  e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x_1 - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(g(x_1) - g(x)) = 0$$

da cui

$$\frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)}.$$

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \geq \min_{(x, y) \in R} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) > 0,$$

l'ultimo denominatore scritto non si annulla mai.

Se ora  $(x, y)$  è fissato e  $(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$ , si avrà anche  $(x^*, y^*) \rightarrow (x, y) = (x, g(x))$  e, per la continuità delle derivate prime,

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)} \rightarrow -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

da cui si ricava che esiste

$$g'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))},$$

che è la formula desiderata per la derivata di  $g$ .

4. *Continuità di  $g'$ .* La (3.48) esprime  $g'$  come funzione composta di funzioni continue, per cui essa stessa è continua.

□

### Linee di livello

Torniamo ora al problema da cui siamo partiti all'inizio di questa sezione: descrivere gli insiemi di livello di una funzione  $z = f(x, y)$ , regolare. Sia

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}.$$

Calcoliamo  $\nabla f(x, y)$  e cerchiamo i *punti critici* di  $f$ , ossia i punti in cui il gradiente si annulla. Supponiamo che questi siano in numero finito, o per lo meno che ogni insieme  $E_c$  contenga solo un numero finito di questi. Allora, salvo un numero finito di eccezioni, in ogni punto di  $E_c$  risulterà applicabile il teorema di Dini, ossia l'insieme  $E_c$  si potrà rappresentare, in un intorno di quei punti, come grafico di una funzione  $C^1$  del tipo  $y = g(x)$  oppure del tipo  $x = h(y)$ . I valori di  $c$  per cui  $E_c$  contiene almeno un punto critico di  $f$  si dicono *valori critici*. Se  $c$  non è un valore critico, nell'intorno di ogni suo punto l'insieme  $E_c$  è effettivamente una curva regolare. Questa è una giustificazione precisa del motivo per cui gli insiemi  $E_c$  sono generalmente delle linee (linee di livello).

### 3.3.2 Funzione implicita di $n$ variabili

Tutti i discorsi fatti sulle funzioni definite implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$  si possono generalizzare al caso di funzioni di  $n$  variabili. Per esempio, consideriamo l'equazione

$$f(x, y, z) = 0, \tag{3.50}$$

con  $f$  di classe  $C^1$  e supponiamo che sia soddisfatta in un certo punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Ci chiediamo se esistono un intorno  $U$  di  $(\bar{x}, \bar{y})$  nel piano e una funzione  $z = g(x, y)$ , definita e regolare in  $U$ , per cui risulti

$$f(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Diremo che  $g$  è definita implicitamente dalla (3.50). Se questo è vero, dovrà essere (derivando rispetto a  $x$  l'identità precedente):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

da cui

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (3.51)$$

Analogamente

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (3.52)$$

purchè sia  $\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ . Si capisce allora come si generalizzi il teorema di Dini: se  $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ , esistono un intorno di  $(\bar{x}, \bar{y})$  e un'unica funzione  $z = g(x, y)$  definita implicitamente dall'equazione  $f(x, y, z) = 0$ , per cui valgono le (3.51)-(3.52). Se la derivata  $\frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  si annulla, ma in compenso un'altra delle due non si annulla, si potrà esplicitare la variabile corrispondente, rispetto alle rimanenti due e si otterranno formule analoghe. L'enunciato preciso che vale in generale è il seguente e si può dimostrare sulla falsariga del teorema 29:

**30 Teorema** (di Dini: caso n-dimensionale). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(A)$  e supponiamo che*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

*per un certo punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  (dove  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ). Allora esistono un intorno  $U \subset \mathbb{R}^n$  di  $\bar{x}$  e un'unica funzione  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^1(U)$ , tale che*

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in U, j = 1, 2, \dots, n.$$

### 3.3.3 Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni

Abbiamo visto che un'equazione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$$

sotto ipotesi ragionevoli definisce implicitamente una funzione

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Più in generale, potremmo avere un sistema di  $m$  equazioni in  $n + m$  variabili e la domanda naturale è se in questo caso riusciamo a “risolvere il sistema” esplicitando  $m$  variabili (ossia tante quante sono le equazioni a nostra disposizione) in funzione delle rimanenti  $n$ . Nel caso di un sistema di equazioni lineari, questo problema è ben noto in algebra lineare e la sua soluzione è fornita dal teorema di Rouchè-Capelli: se la matrice del sistema ha rango massimo (cioè  $m$ ) si riescono effettivamente a esplicitare  $m$  variabili in funzione delle altre  $n$ . Nel caso non lineare, il meglio che si può sperare, in generale, è che sia possibile far questo *localmente*, ossia nell’intorno di un punto in cui si sa che il sistema è soddisfatto; l’analogo dell’ipotesi di rango massimo della matrice del sistema lineare sarà un’ipotesi di rango massimo *sulla matrice del sistema linearizzato*, ossia *sulla matrice Jacobiana del sistema non lineare*.

Arriviamo così a formulare una versione del teorema di Dini per sistemi di equazioni. Fissiamo anzitutto un pò di notazioni compatte. Scriviamo un sistema di  $m$  equazioni in  $n + m$  variabili nella forma vettoriale:

$$f(x, y) = 0$$

dove  $f : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Denotiamo con  $\mathcal{J}_F^y(\bar{x}, \bar{y})$  la matrice Jacobiana della funzione

$$y \rightarrow f(\bar{x}, y),$$

calcolata nel punto  $\bar{y}$ , ossia la matrice  $m \times m$  di elementi  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) e con  $\mathcal{J}_F^x(\bar{x}, \bar{y})$  la matrice Jacobiana della funzione

$$x \rightarrow f(x, \bar{y}),$$

calcolata nel punto  $\bar{x}$ , ossia la matrice di  $m \times n$  di elementi  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{y})$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ).

**31 Teorema** (di Dini: caso generale). *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^1(A)$  e supponiamo che nel punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  sia*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad ; \quad \det \mathcal{J}_F^y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0.$$

*Allora esistono un intorno  $U \subset \mathbb{R}^n$  di  $\bar{x}$  e un’unica funzione  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g \in C^1(U)$ , tale che, per ogni  $x \in U$ ,*

$$f(x, g(x)) = 0 \tag{3.53}$$

$$\mathcal{J}_g(x) = -\mathcal{J}_F^y(x, g(x))^{-1} \mathcal{J}_F^x(x, g(x)).$$

Si noti che il calcolo della matrice Jacobiana della funzione implicita richiede il calcolo della matrice inversa della Jacobiana  $\mathcal{J}_F^y$ , è quindi più laborioso rispetto al caso scalare. Anche questo teorema, come il suo analogo scalare, ha un significato soprattutto teorico: non aiuta a scrivere esplicitamente la funzione implicita, ma a dimostrare che essa esiste, è unica e ha una certa regolarità.

# Capitolo 4

## Varietà

In questo capitolo tratteremo in maniera approfondita le varietà, dandone prima una definizione generale e poi mostrando che le possiamo vedere sia in forma implicita, mediante un sistema di  $n-k$  equazioni in  $n$  variabili (varietà grafico), sia in forma parametrica, mediante un'opportuna funzione  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  (parametrizzazione locale della varietà  $M$ ). Faremo anche diversi esempi per dare una visione chiara di questo concetto e concluderemo il capitolo definendo lo spazio tangente ad una varietà.

### 4.1 Varietà $k$ -dimensionali in $\mathbb{R}^n$

**10 Definizione.** Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$  e  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $1 \leq k < n$ . Diremo che  $M$  è una **varietà  $k$ -dimensionale** se, per ogni  $\bar{x} \in M$ , si possono determinare un intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$  e una trasformazione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$ , tali che:

- (i) la matrice jacobiana  $\mathcal{J}_F(x)$  ha rango massimo per ogni  $x \in A$
- (ii)  $M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\}$

Dato che la matrice jacobiana  $\mathcal{J}_F(x)$  ha  $n-k$  righe e  $n$  colonne, la (i) equivale a richiedere che il suo rango sia  $n-k$ . Inoltre, se  $\mathcal{J}_F(\bar{x})$  ha rango  $n-k$  in  $\bar{x} \in M$ , per la continuità delle derivate parziali prime di  $F$ , segue che  $\mathcal{J}_F(x)$  ha rango  $n-k$  in tutto un intorno di  $\bar{x}$ . In definitiva la (i) equivale a dire che la matrice jacobiana  $\mathcal{J}_F(x)$  ha rango  $n-k$  in  $\bar{x}$ . Con la (ii) si richiede che, in un opportuno intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$ , la funzione  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  si annulli solo sull'insieme  $M$ . Se per ogni  $\bar{x} \in M$  è possibile determinare  $F$  in modo che sia di classe  $C^r$ , con  $r = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , diremo che la varietà  $M$  è di classe  $C^r$ . A volte si usa il termine di superficie  $k$ -dimensionale in luogo di quello di varietà  $k$ -dimensionale. Tuttavia è opportuno far notare che i concetti di *superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$*  e di *varietà bidimensionale di  $\mathbb{R}^3$*

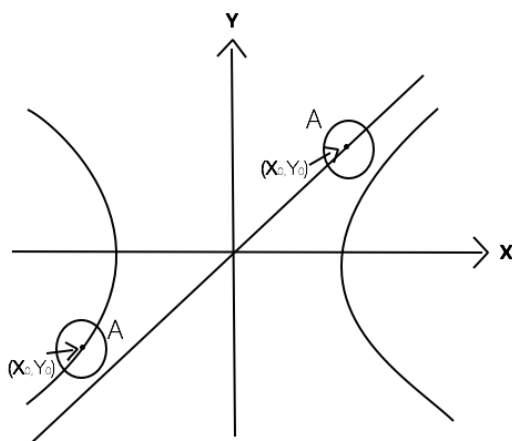


Figura 4.1:

sono distinti (si veda l'osservazione (7)).

Adesso sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una trasformazione definita in  $A$ . Se  $F \in C^1(A)$ , l'insieme:

$$M = \{x \in A : F(x) = 0 \text{ e } \mathcal{J}_F(x) \text{ ha rango } n - k\} \quad (4.1)$$

dove  $1 \leq k < n$ , è una varietà  $k$ -dimensionale. Infatti, se  $\bar{x} \in M$ ,  $\mathcal{J}_F(\bar{x})$  ha rango  $n - k$  per la definizione di  $M$ ; dalla continuità delle derivate di  $F$  segue che  $\mathcal{J}_F(x)$  ha rango  $n - k$  in tutto un intorno di  $\bar{x}$ . In tale intorno sono quindi verificate le condizioni (i) e (ii). La varietà  $M$  definita dalla (4.1) si chiama anche **varietà determinata dalla trasformazione  $F$** , cioè posso trovare un'unica  $F$  che valga per ogni  $x \in M$ . Un caso particolare è quello in cui  $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e quindi  $k=n-1$ , e:

$$M = \{x \in A : F(x) = 0, \mathcal{J}_F(x) \neq 0\} \quad (4.2)$$

in tal caso  $M$  è una varietà  $(n-1)$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ , come negli esempi 3 e 4.

*3 Esempio.* Consideriamo un esempio con  $n=2$  e  $k=1$ . Con riferimento alla Figura 4.1, sia:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \quad (4.3)$$

$M$  è una varietà unidimensionale. Infatti  $M$  è costituita dall'unione della retta  $r$ , di equazione  $y = x$ , e dell'iperbole  $\gamma$ , di equazione  $x^2 - y^2 = 1$ . Se  $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$  è un punto di  $r$ , detto  $A$  un intorno circolare del punto che non interseca  $\gamma$ , posto  $F(x, y) = x - y$ , risultano verificate (i) e (ii). Se invece  $(\bar{x}, \bar{y}) \in (M \cap \gamma)$ ,  $A$  è un suo intorno circolare che non interseca  $r$ , le condizioni (i) e (ii) si ottengono ponendo  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$ .



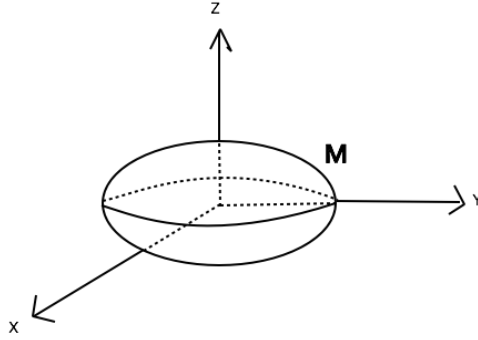


Figura 4.2:

4 *Esempio.* Consideriamo un caso con  $n=3$  e  $k=2$ . Con riferimento alla Figura 4.2, sia:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz = 4\} \quad (4.4)$$

$M$  è una varietà bidimensionale; infatti per ogni punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in M$ , la funzione  $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz - 4$  verifica le proprietà richieste. In particolare, se  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in M$ , allora:

$$\mathcal{J}_F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (4\bar{x} - 8\bar{z}, 2\bar{y}, 16\bar{z} - 8\bar{x}) \quad (4.5)$$

è un vettore (matrice  $1 \times 3$ ) non nullo e quindi  $\mathcal{J}_F(x, y, z)$  è diverso da zero in un opportuno intorno aperto  $A$  del punto.

5 *Esempio.* In questo caso è  $n=3$  e  $k=1$ . Sia:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - 2z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 6z = 1\} \quad (4.6)$$

Verifichiamo che  $M$  è una varietà unidimensionale. Per quanto detto nell'esempio precedente, basta provare che  $M$  è la varietà determinata dalla trasformazione  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definita da:

$$F(x, y, z) = (y^2 - 2z, x^2 + y^2 - 6z - 1) \quad (4.7)$$

e che la matrice jacobiana  $\mathcal{J}_F$  di  $F$  ha rango 2 in ogni punto di  $M$ . Si ha infatti:

$$\mathcal{J}_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2 \\ 2x & 2y & -6 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

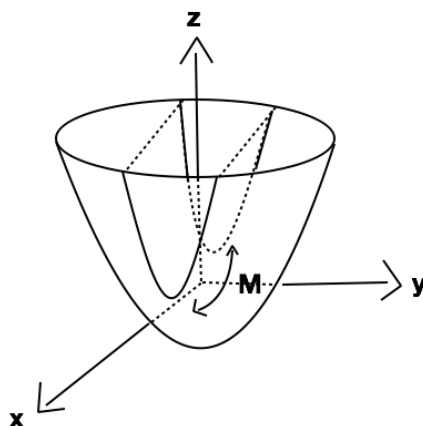


Figura 4.3:

Si noti che il minore:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & -6 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

è nullo se e solo se  $x = 0$ , mentre il minore:

$$\begin{vmatrix} 2y & -2 \\ 2y & -6 \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

è nullo se e solo se  $y = 0$ . Poichè non esiste alcun punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  di M per cui si abbia contemporaneamente  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , almeno uno dei due minori è diverso da zero e quindi  $\mathcal{J}_F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  ha rango 2. I due insiemi di cui M è intersezione sono a loro volta due varietà bidimensionali (si veda la Figura 4.3).

Sia  $U$  aperto di  $\mathbb{R}^k$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  una trasformazione di classe  $C^1$  definita nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ . La **varietà grafico di  $f$**  è definita da:

$$M = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\} \quad (4.11)$$

dove  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ . M è una varietà  $k$ -dimensionale; infatti risulta  $M = \{x \in U \times \mathbb{R}^{n-k} : F(x) = 0\}$ , dove  $F : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  è la trasformazione le cui componenti sono:

$$F_i(x) = x_{k+i} - f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad i = 1, 2, \dots, n-k \quad (4.12)$$

e la cui matrice jacobiana  $\mathcal{J}_F(x)$  ha rango costantemente uguale a  $n-k$ , essendo:

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)} = 1 \quad \text{in } U \times \mathbb{R}^{n-k} \quad (4.13)$$

Il determinante viene proprio uguale a 1, perchè la matrice  $\mathcal{J}_F(x)$  è uguale a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial f_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Una definizione alternativa di varietà è fornita dal risultato seguente, che è una conseguenza del teorema di Dini sui sistemi di funzioni implicite e di quanto osservato nell'esempio precedente.

**32 Teorema.** *Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ .  $M$  è una varietà  $k$ -dimensionale se e solo se, per ogni  $\bar{x} \in M$ , esiste un intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$  in  $\mathbb{R}^n$  e un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$  tale che  $M \cap A$  coincide con il grafico di una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale e  $\bar{x}$  un punto di essa. Per definizione esistono un intorno aperto  $A'$  di  $\bar{x}$  e una trasformazione  $F : A' \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  tale che:

$$M \cap A' = \{x \in A' : F(x) = 0\} \quad (4.15)$$

con  $\mathcal{J}_F(x)$  di rango  $n - k$  in  $A'$ . Non è restrittivo supporre che si abbia, per esempio:

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)} \neq 0 \quad (4.16)$$

Per il teorema di Dini sui sistemi di funzioni implicite, esistono un intorno aperto  $A$  di  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ , con  $A \subseteq A'$ , un intorno aperto  $U$  del punto  $\bar{x}$  di  $\mathbb{R}^k$  e una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  tali che:

$$M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\} \quad (4.17)$$

dove  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ .

Viceversa, dato  $\bar{x} \in M$ , supponiamo che esista un intorno aperto  $A'$  di  $\bar{x}$  tale che  $M \cap A'$  coincida con il grafico di una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ . Non è restrittivo supporre che  $f$  sia funzione delle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Si ha allora:

$$M \cap A' = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\} \quad (4.18)$$

Posto  $A = U \times \mathbb{R}^{n-k} \cap A'$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  la trasformazione di componenti  $F_i(x) = x_{k+i} - f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - k$ , risulta:

$$M \cap A = \{x \in A : F(x) = 0\} \quad (4.19)$$

il che prova la tesi.  $\square$

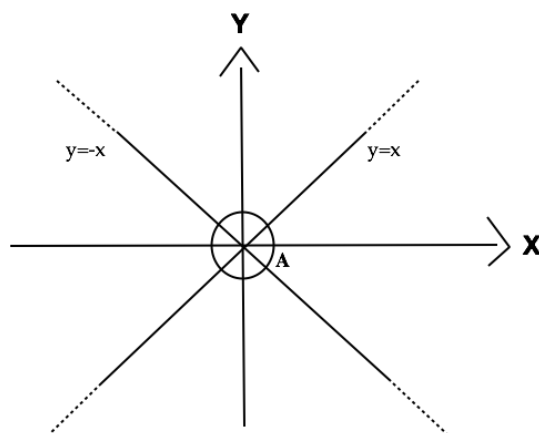


Figura 4.4: Preso l'intorno  $A$  dell'origine non riesco a scrivere nè  $y = f(x)$  nè  $x = f(y)$ , quindi  $m$  non è una varietà.

*6 Esempio.* Sia  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 0\}$ .  $M$  è l'unione di due rette di equazione  $y = x$  e  $y = -x$ ; quindi l'origine è un punto di  $M$ . Tuttavia, preso un qualunque intorno dell'origine,  $M$  non coincide in tale intorno nè con il grafico di una funzione della variabile  $x$ , nè con il grafico di una funzione della  $y$ . Per il teorema appena provato  $M$  non è dunque una varietà unidimensionale (guardare Figura 4.4).

Diretta conseguenza del teorema precedente è la seguente proposizione.

**4 Proposizione.** *Sia  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $\bar{x} \in M$  esistono un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ , un intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$  e una trasformazione  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$ , iniettiva e tale che:*

$$(j) \phi(U) = M \cap A$$

$$(jj) \phi \text{ ha rango } K \text{ in } U$$

La trasformazione  $\phi$ , la cui esistenza è provata dalla proposizione 1, viene detta **parametrizzazione locale della varietà  $M$** .

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{x} \in M$ ; per il teorema visto sopra esistono un intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$  e una trasformazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , tale che  $M \cap A$  coincide con il grafico di  $f$ . Supponiamo, per semplicità, che  $f$  dipenda dalle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

$$M \cap A = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in U, x'' = f(x')\} \quad (4.20)$$

con  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  e  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Posto, per ogni  $x' \in U$ ,

$$\phi(x') = (x_1, x_2, \dots, x_k, f_1(x'), f_2(x'), \dots, f_{n-k}(x')) \quad (4.21)$$

$\phi$  è chiaramente iniettiva,  $\phi(U) = M \cap A$  e la (jj) è verificata, in quanto, per ogni  $x' \in U$ ,

$$\det \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}(x') = 1 \quad (4.22)$$

□

In definitiva, si può riguardare una varietà  $M$  o come luogo di zeri di una opportuna trasformazione, o come immagine di un aperto di  $\mathbb{R}^k$  mediante una certa parametrizzazione, o come grafico di una trasformazione definita in un aperto di  $\mathbb{R}^k$ . Nel seguito, nello studiare le proprietà delle varietà, ci avvarremo di volta in volta del punto di vista più conveniente ai fini della trattazione.

La Proposizione 4 non si può invertire: se  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  e soddisfa (jj)  $\phi(U)$  non è sempre una varietà  $k$ -dimensionale in senso classico. Vedremo che però  $\phi(U)$  è una *varietà immersed*, vedi Definizione 15 nel prossimo capitolo.

*7 Esempio.* Sia  $\phi : (0, \frac{3}{2}\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva di equazione:

$$\phi(t) = (\cos(t), \cos(t) \sin(t)), \quad t \in (0, \frac{3\pi}{2}) \quad (4.23)$$

il cui sostegno  $M = \phi(0, \frac{3\pi}{2})$  è rappresentato nella Figura 4.5. Essendo  $\phi'(t) \neq 0$  per ogni  $t$ ,  $\phi$  verifica la (jj). Però l'insieme  $M$  non è una varietà unidimensionale in quanto, in un intorno dell'origine,  $M$  non è grafico né di una funzione della variabile  $x$  né della variabile  $y$ . Vedremo in seguito che  $M$  è una varietà *immersed*, vedi Definizione 15.

Si osservi però che, nell'esempio 7 basta restringere opportunamente il dominio di  $\phi$  e otterremo delle varietà in senso classico.

*8 Esempio.* Siano  $0 < a < \frac{3}{2}\pi$ , e  $\phi_a : (0, \frac{3}{2}\pi - a) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva di equazione:

$$\phi(t) = (\cos(t), \cos(t) \sin(t)), \quad t \in (0, \frac{3\pi}{2} - a) \quad (4.24)$$

Allora  $M_a = \{\phi_a(t) \mid t \in (0, \frac{3\pi}{2} - a)\}$  è una varietà per ogni  $a > 0$ .

Vale infatti il seguente risultato solo in apparente contraddizione con quanto affermato nell'esempio 7.

**5 Proposizione.** *Sia  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione di classe  $C^1$  nell'aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^k$ , iniettiva e verificante la (jj). Per ogni  $\bar{y} \in U$ , esiste un intorno aperto  $V \subseteq U$  di  $\bar{y}$  tale che  $\phi(V)$  è una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ .*

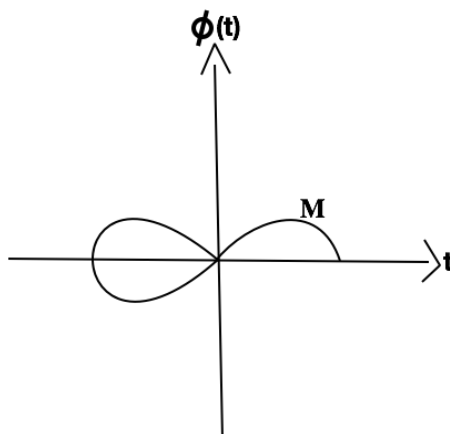


Figura 4.5:

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{y} \in U$ . Non è restrittivo supporre che:

$$\det \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)}(\bar{y}) \neq 0 \quad (4.25)$$

Sia  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  la trasformazione  $\Phi = \Pi \circ \phi$ , dove  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la proiezione sulle prime  $k$  coordinate, definita da:

$$\Pi(x) = x' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.26)$$

$\Pi$  è l'applicazione che manda le  $n$  componenti di una variabile nelle sue prime  $k$  componenti; allora  $\Phi = \Pi(\phi) = \phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)$  e  $\det \mathcal{J}_\Phi(\bar{y}) \neq 0$  (lo jacobiano di  $\Phi$  è diverso da zero in  $\bar{y}$ ) grazie a (4.25). Quindi, per il teorema di invertibilità locale (sezione 1) esistono un intorno aperto  $V$  di  $\bar{y}$  ed un aperto  $W$  di  $\mathbb{R}^k$  tali che  $\Phi(V) = W$ .  $\Phi$  ristretta a  $V$  è invertibile e la sua inversa  $\Psi : W \rightarrow V$  è anch'essa una trasformazione di classe  $C^1$  (si veda la Figura 4.6). Definiamo allora  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  ponendo, per ogni  $i=1,2,\dots,n-k$  e per  $x' \in W$ ,

$$f_i(x') = \phi_{k+i}(\Psi(x')) \quad (4.27)$$

Ovviamente  $f$  è di classe  $C^1$  in  $W$  e dalla definizione segue subito che  $\phi(V)$  coincide con la varietà grafico:

$$\{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n : x' \in W, x'' = f(x')\} \quad (4.28)$$

dove  $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ .  $\square$

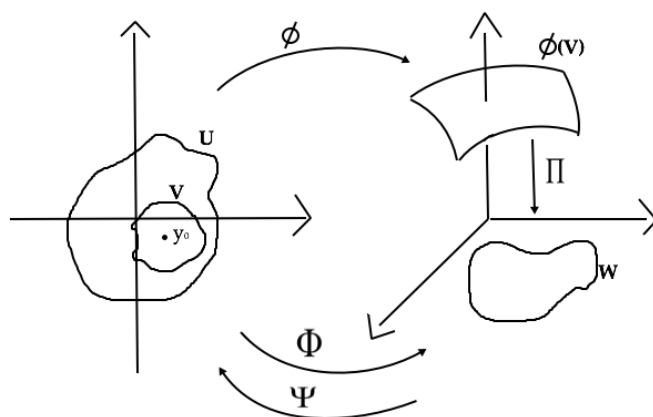


Figura 4.6:

7 Osservazione. Dall'esempio 1, è chiaro che, se  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva regolare,  $\phi(I)$  non è in genere una varietà unidimensionale, neanche se la curva  $\phi$  è semplice. La proposizione 2 implica comunque che, se  $\phi$  è regolare e semplice, per ogni  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  esiste un intorno aperto  $J \subseteq \overset{\circ}{I}$  di  $t_0$  tale che  $\phi(J)$  è una varietà unidimensionale. Analoghe considerazioni valgono nel caso delle superfici dello spazio. Se  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare, non necessariamente  $\phi(D)$  è una varietà bidimensionale. Tuttavia, per la proposizione 2, se  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , esiste un intorno aperto  $U \subseteq \overset{\circ}{D}$  del punto tale che  $\phi(U)$  è una varietà.

Adesso proporremo un esempio significativo di una varietà che non può essere vista come un'unica varietà grafico.

9 Esempio (2-Sfera). Un esempio di varietà bidimensionale è la 2-Sfera (in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Si può vedere come *varietà grafico*, scrivendo  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , solo la semisfera al di sopra dell'equatore. La stessa cosa si può dire per la semisfera al di sotto dell'equatore. Questo non ci permette di scrivere l'equatore come varietà grafico, di conseguenza dovremo prendere una semisfera con il polo in  $(1, 0, 0)$  e una semisfera con il polo in  $(-1, 0, 0)$ , che sono varietà grafico. Questo esempio ci mostra come esistano varietà esprimibili soltanto come unione di altre varietà grafico.  $S^2$  può anche essere descritta attraverso la

mappa polare:

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases}$$

che è una parametrizzazione locale della varietà  $S^2$ , da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ . Questa mappa, definita nell'insieme

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < \phi < 2\pi$$

non copre tutta la varietà. Esiste quindi una semicirconferenza massima in cui la mappa non è definita. Per ricoprire la sfera servono due mappe; si può prendere un'altra mappa polare con le coordinate  $\theta', \phi'$  definite in modo che le semicirconferenze in cui le due mappe non sono definite non si intersechino. Ad esempio, la seconda mappa polare può essere:

$$\begin{cases} x = \cos(\theta') \\ y = \sin(\theta') \sin(\phi') \\ z = \sin(\theta') \cos(\phi') \end{cases}$$

definita nell'insieme

$$0 < \theta' < \pi$$

$$-\pi < \phi' < \pi.$$

## 4.2 Spazio tangente ad una varietà

Siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$  e  $\bar{x}$  un punto di  $M$ . Diremo che un vettore  $h \in \mathbb{R}^n$  è *tangente* alla varietà in  $\bar{x}$  se, per qualche  $\delta > 0$ , esiste una curva regolare  $\gamma : [-\delta; \delta] \rightarrow M$  tale che:

$$\gamma(0) = \bar{x} \quad e \quad \gamma'(0) = h \tag{4.29}$$

L'insieme di tutti i vettori tangenti a  $M$  in  $\bar{x}$  è detto *spazio tangente* alla varietà nel punto  $\bar{x}$  e sarà denotato con  $T_M(\bar{x})$ . Si osservi che la definizione appena data di spazio tangente generalizza in modo naturale quello di piano tangente ad una superficie regolare  $S$ . In entrambi i casi, infatti, si considera l'insieme dei vettori tangenti in  $\bar{x}$  a tutte le possibili curve regolari passanti per  $\bar{x}$  e contenute rispettivamente in  $M$  ed in  $S$ . Supponiamo



ora che  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  sia una trasformazione di classe  $C^1$ , definita nell'intorno aperto  $A$  di  $\bar{x}$ , verificante le condizioni (i) e (ii) della Definizione 10. Mediante  $F$  possiamo caratterizzare esplicitamente lo spazio  $T_M(\bar{x})$ .

**33 Teorema.** *Lo spazio  $T_M(\bar{x})$  coincide con il nucleo della trasformazione lineare  $\mathcal{J}_F(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , cioè:*

$$T_M(\bar{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n : \mathcal{J}_F(\bar{x}) \cdot h = 0\} \quad (4.30)$$

quindi  $T_M(\bar{x})$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$ .

*Dimostrazione.* Sia  $T_M(\bar{x})$  e sia  $\gamma : [-\delta; \delta] \rightarrow M$  una curva regolare tale che  $\gamma(0) = \bar{x}$ ,  $\gamma'(0) = h$ . Allora, per ogni  $t \in [-\delta; \delta]$ , si ha:

$$F(\gamma(t)) = 0 \quad (4.31)$$

Si ottiene:

$$\mathcal{J}_F(\bar{x}) \cdot h = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))|_{t=0} = 0 \quad (4.32)$$

e quindi  $h$  appartiene al nucleo della trasformazione lineare  $\mathcal{J}_F(\bar{x})$ .

Supponiamo viceversa che  $\mathcal{J}_F(\bar{x}) \cdot h = 0$ . Poiché  $\mathcal{J}_F(\bar{x})$  è una matrice di rango  $n - k$ , essa avrà  $n - k$  colonne linearmente indipendenti. Non è restrittivo supporre che siano linearmente indipendenti i vettori colonna:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_{k+2}}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{x}) \quad (4.33)$$

Sia ora  $\Phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la trasformazione le cui componenti sono:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \dots \\ y_k = x_k \\ y_{k+1} = F_1(x) \\ \dots \\ y_n = F_{n-k}(x) \end{cases} \quad (4.34)$$

La matrice jacobiana  $\mathcal{J}_\Phi(\bar{x})$  è allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_k}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

e quindi il determinante della matrice jacobiana:

$$\det J_{\Phi}(\bar{x}) = \det \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)}(\bar{x}) \quad (4.36)$$

è diverso da zero. Esistono allora un aperto  $A' \subseteq A$  contenente  $\bar{x}$  ed un intorno aperto  $U$  di  $\bar{y} = \Phi(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ , tali che  $\Phi(A') = U$ ,  $\Phi$  ristretta ad  $A'$  è invertibile e la sua inversa  $\Psi : U \rightarrow A'$  è anch'essa di classe  $C^1$ . Inoltre, la matrice jacobiana  $\mathcal{J}_{\Psi}(\bar{y})$  è uguale all'inversa della matrice  $\mathcal{J}_{\Phi}(\bar{x})$ . Sia  $\bar{h}$  il vettore di  $\mathbb{R}^n$  le cui prime  $k$  componenti coincidano con quelle di  $h$  e le cui rimanenti componenti siano tutte nulle, cioè:

$$\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_k, 0, 0, \dots, 0) \quad (4.37)$$

allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $\bar{y} + t\bar{h} \in U$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ . La curva di equazioni  $\gamma(t) = \Psi(\bar{y} + t\bar{h})$ , con  $t \in [-\delta, \delta]$ , è una curva regolare il cui sostegno è contenuto nella varietà  $M$ . Infatti  $\gamma(t) \in A'$  e quindi  $\gamma(t) \in A$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ . Sappiamo per la definizione (4.34) di  $\Phi$  che  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k, F_1(\bar{x}), \dots, F_{n-k}(\bar{x}))$ , con  $(F_1(\bar{x}), \dots, F_{n-k}(\bar{x})) = (0, \dots, 0)$ , di conseguenza per la scelta di  $\bar{h}$  (4.37) il vettore  $\bar{y} + t\bar{h}$  ha le ultime  $n-k$  componenti nulle. Grazie a questo:

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= F(\Psi(\bar{y} + t\bar{h})) = (F_1(\Psi(\bar{y} + t\bar{h})), \dots, F_{n-k}(\Psi(\bar{y} + t\bar{h}))) = \\ &= (\phi(\Psi(\bar{y}_{k+1} + t\bar{h}_{k+1})), \dots, \phi(\Psi(\bar{y}_n + t\bar{h}_n))) = (\bar{y}_{k+1} + t\bar{h}_{k+1}, \dots, \bar{y}_n + t\bar{h}_n) = \\ &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\gamma(0) = \bar{x} \quad e \quad \gamma'(0) = \mathcal{J}_{\Psi}(\bar{y}) \cdot \bar{h} = [\mathcal{J}_{\Phi}(\bar{x})]^{-1} \cdot \bar{h} \quad (4.38)$$

Poichè:

$$\mathcal{J}_{\Phi}(\bar{x}) \cdot h = (h_1, \dots, h_k, \nabla F_1(\bar{x}) \cdot h, \dots, \nabla F_{n-k}(\bar{x}) \cdot h) = \bar{h} \quad (4.39)$$

se moltiplico da entrambe le parti per  $[\mathcal{J}_{\Phi}(\bar{x})]^{-1}$  si ottiene  $h = [\mathcal{J}_{\Phi}(\bar{x})]^{-1} \cdot \bar{h} = \gamma'(0)$ , e quindi risulta provato che  $h \in T_M(\bar{x})$ .  $\square$

*10 Esempio.* Sia  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0$ , con:

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 8z^2 - 8xz - 4 \quad (4.40)$$

la varietà considerata nell'esempio 4, e rappresentata in Figura 4.2. Il punto  $(2, 2, 1)$  appartiene a  $M$ . Poichè  $\mathcal{J}_F(2, 2, 1) = (0, 4, 0)$ , un vettore  $h \in \mathbb{R}^3$  è tangente a  $M$  nel punto considerato se e solo se il prodotto scalare  $(0, 4, 0) \cdot h$  è nullo. Quindi lo spazio tangente a  $M$  in  $(2, 2, 1)$  è il sottospazio costituito dai vettori del piano  $Oxz$ , perchè la componente  $y$  di  $h$  deve essere nulla.

Con la proposizione 4 abbiamo mostrato come una varietà  $k$ -dimensionale possa essere sempre rappresentata, nell'intorno di ogni suo punto, mediante una parametrizzazione locale. È utile quindi saper descrivere lo spazio tangente in termini di quest'ultime.

**6 Proposizione.** *Siano  $M$  una varietà  $k$ -dimensionale,  $\bar{x} \in M$  e  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione locale di  $M$  in un intorno di  $\bar{x}$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^k$ . Detto  $\bar{y}$  il punto di  $U$  tale che  $\phi(\bar{y}) = \bar{x}$ , lo spazio  $T_M(\bar{x})$  coincide con lo spazio vettoriale generato dai  $k$  vettori colonna:*

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1}(\bar{y}), \frac{\partial \phi}{\partial y_2}(\bar{y}), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(\bar{y}) \quad (4.41)$$

*Dimostrazione.* Per la (jj) della proposizione 4, i vettori della (4.41) sono linearmente indipendenti e quindi generano un sottospazio vettoriale di dimensione  $k$ . Basterà quindi provare solo che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(\bar{y}) \in T_M(\bar{x}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad (4.42)$$

Fissato dunque  $i \in 1, 2, \dots, k$ , sia  $\delta > 0$  tale che  $\bar{y} + te_i \in U$  per ogni  $t \in [-\delta, \delta]$ . La curva regolare  $\gamma(t) = \phi(\bar{y} + te_i)$ ,  $t \in [-\delta, \delta]$ , è allora contenuta in  $M$  e risulta:

$$\gamma(0) = \bar{x} \quad e \quad \gamma'(0) = \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(\bar{y}) \cdot e_i \in T_M(\bar{x}) \quad (4.43)$$

$\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(\bar{y}) \cdot e_i$  è un vettore tangente alla varietà in  $\bar{x}$ , che quindi appartiene allo spazio tangente  $T_M(\bar{x})$ . La combinazione lineare di tutti i  $k$  vettori tangenti genera uno spazio vettoriale coincidente con  $T_M(\bar{x})$ .  $\square$

*8 Osservazione.* Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare e semplice. Nell'osservazione 7 abbiamo visto che, se  $t_0 \in (a, b)$ , allora esiste un intervallo aperto  $I \subseteq (a, b)$ , con  $t_0 \in I$ , tale che  $\gamma(I)$  è una varietà unidimensionale. La proposizione appena provata mostra allora che lo spazio tangente a  $\gamma(I)$  in  $\gamma(t_0)$  coincide con lo spazio lineare generato dal vettore tangente  $\gamma'(t_0)$  alla curva in  $\gamma(t_0)$ . Analogamente, se  $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare e se  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$ , esiste un intorno aperto  $V \subseteq \overset{\circ}{D}$  di  $(u_0, v_0)$ , tale che  $\phi(V)$  è una varietà  $M$  bidimensionale. Di nuovo, la proposizione provata sopra, mostra che il piano tangente alla superficie  $\phi(V)$  in  $P_0 = \phi(u_0, v_0)$  coincide con il sottospazio affine  $P_0 + T_M(P_0)$ .

**11 Definizione.** Se  $M$  è una varietà  $k$ -dimensionale e  $\bar{x} \in M$ , chiameremo **spazio normale** a  $M$  nel punto  $\bar{x}$  lo spazio vettoriale ortogonale allo spazio tangente  $T_M(\bar{x})$ , cioè lo spazio:

$$T_M^\perp(\bar{x}) = \{k \in \mathbb{R}^n : h \cdot k = 0 \quad \forall h \in T_M(\bar{x})\} \quad (4.44)$$

Poichè la dimensione di  $T_M(\bar{x})$  è  $k$ , lo spazio normale  $T_M^\perp$  ha dimensione  $n-k$ .



# Capitolo 5

## Teorema di Hartman

Sicuramente questo è il capitolo centrale di tutta la nostra trattazione. Inizialmente definiremo il flusso  $\phi(t)$  con tutte le sue proprietà e daremo le definizioni di insieme invariante e localmente invariante. In seguito, dopo aver presentato lo spazio stabile ed instabile, grazie al Teorema di Hartman, mostreremo che nei dintorni di un punto critico (nel nostro caso l'origine) esistono una varietà locale stabile e una instabile. Inoltre vedremo come le varietà viste in precedenza siano del tipo “embedded”, differenti dalle varietà del tipo “immersed”, che non sono varietà nel senso classico del termine. Concluderemo il capitolo facendo una panoramica sui cicli limite ed enunciando senza dimostrare il Teorema di Poincarè-Bendixon.

### 5.1 Varietà invarianti

Sia:

$$y' = f(y) \tag{5.1}$$

un'equazione differenziale autonoma, con  $y \in A$  (aperto di  $\mathbb{R}^n$ ). La funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **campo vettoriale su  $A$**  e sarà sempre supposta di classe  $C^1$ . Per ciascuna  $y \in A$  c'è un'unica soluzione  $\phi(t)$  con  $\phi(0) = y$ , definita su un intervallo aperto massimale  $T(y) \subseteq \mathbb{R}$ , cioè una funzione  $\phi : T(y) \rightarrow A$  di classe  $C^1$  e tale che  $\phi'(t) = f(\phi(t))$ . Per indicare la dipendenza di  $\phi(t)$  da  $y$ , scriviamo:

$$\phi(t) = \phi(t, y) \tag{5.2}$$

Quindi  $\phi(0, y) = y$ . Sia  $E \subseteq \mathbb{R} \times A$  il seguente insieme:

$$E = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times A : t \in T(y)\} \tag{5.3}$$

L'applicazione  $(t, y) \rightarrow \phi(t, y)$  è quindi una funzione:

$$\phi : E \rightarrow A \tag{5.4}$$

Chiamiamo  $\phi$  **flusso** dell'equazione (5.1). Spesso verrà usata questa notazione:

$$\phi(t, y) = \phi_t(y)$$

Inoltre sappiamo che  $\phi_t(0) = 0$ . Enunciamo quattro proprietà del flusso:

(i)

$$\phi_{s+t}(y) = \phi_s(\phi_t(y)) \quad (5.5)$$

nel senso che se un membro della (5.5) è definito, allora è definito anche l'altro e sono uguali.

(ii)  $E$  è un intorno aperto di  $\mathbb{R} \times A$  e  $\phi : E \rightarrow A$  è una mappa continua.

Sia  $(t, \bar{x}) \in E$ , allora  $\exists U \subseteq A$  intorno di  $\bar{x}$  tale che  $\{t\} \times U \subseteq E$  ( $U$  esiste, perchè  $E$  è un aperto di  $\mathbb{R} \times W$ ). La funzione  $y \rightarrow \phi_t(y)$  definisce una mappa:

$$\phi_t : U \rightarrow V \subseteq A,$$

dove  $V$  è l'immagine di  $\phi_t$ . In tal modo  $\phi_t$  è suriettiva; è inoltre iniettiva per il teorema di esistenza e unicità delle equazioni differenziali.

(iii) Quindi  $\phi_t$  è invertibile con inversa  $\phi_{-t}$ , cioè  $\phi_t \circ \phi_{-t} = Id_V$  e  $\phi_{-t} \circ \phi_t = Id_U$ .

(iv)  $\phi_t(y)$  è di classe  $C^k$  in  $y$  se  $f$  è di classe  $C^k$  in  $y$  per ogni  $t \in T(y)$ .

**12 Definizione.** Un insieme  $S$  è chiamato **invariante** rispetto alla famiglia di mappe  $\phi_t$  se e solo se, per ogni  $y \in S$ ,  $\phi_t(y) \in S$  per ogni  $t \in T(y)$ .

**13 Definizione.** Un insieme  $S$  è chiamato **localmente invariante** rispetto a  $\phi_t$  se e solo se, per ogni  $y \in S$ , esistono  $\epsilon > 0$  (dipendente da  $y$ ) e  $t_0 > 0$  tale che  $\phi_t(y) \in S$  se  $t \in [-t_0, t_0]$  e  $\|\phi(t, y) - \phi(0, y)\| < \epsilon$ .

Ogni insieme invariante è quindi localmente invariante ma non è detto che valga il viceversa. Il problema del comportamento delle soluzioni di un sistema autonomo di classe  $C^1$  vicino a un punto critico (per semplicità supponiamo che sia l'origine) può, in alcuni casi, essere visto confrontando le soluzioni di un sistema lineare a coefficienti costanti:

$$y' = L \cdot y \quad (5.6)$$

con le soluzioni di un sistema perturbato:

$$y' = L \cdot y + F(y) \quad (5.7)$$

Sia  $L \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  la matrice dei coefficienti delle equazioni (5.6) e (5.7) e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $L$  contati con molteplicità algebrica. Inoltre supponiamo che valga:

$$\Re(\lambda_1) \leq \Re(\lambda_2) \leq \dots \leq \Re(\lambda_k) = \alpha \leq 0 \leq \Re(\lambda_{k+1}) = \beta \leq \Re(\lambda_{k+2}) \leq \dots \leq \Re(\lambda_n),$$

dove  $\Re(\lambda)$  indica la parte reale di  $\lambda \in \mathbb{C}$ . A meno che non venga affermato il contrario, sarà supposto che  $F(y)$  è di classe  $C^1$  per  $\|y\|$  piccole e che:

$$F(y) = o(\|y\|) \quad \text{quando } y \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

o, in modo equivalente, che:

$$F(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_F(0) = 0 \quad (5.9)$$

dove  $\mathcal{J}_F(y)$  è la matrice Jacobiana di  $F$  rispetto a  $y$ . Sia  $\phi(t, y_0)$  la soluzione della (5.7) che soddisfa la condizione iniziale  $\phi(0, y_0) = y_0$ . Per un  $t$  fissato, consideriamo  $\phi(t, y_0)$  come una mappa  $\phi_t : y_0 \rightarrow \phi(t, y_0)$ . La mappa  $\phi_t$  è definita nell'insieme  $U$  dei punti  $y_0$  per i quali la soluzione  $\phi(t, y_0)$  è definita sull'intervallo di tempo  $t \in [-\tau, \tau]$ .

Un insieme  $S$  (localmente) invariante rispetto alla famiglia di mappe  $\phi_t$  sarà chiamato (localmente) invariante rispetto all'equazione (5.7).  $S$  è invariante rispetto alla (5.7) se e solo se la definizione 12 vale per ogni  $y_0 \in S$ .

$S$  è localmente invariante rispetto alla (5.7) se e solo se la definizione 13 vale per ogni  $y_0 \in S$ .

*9 Osservazione.* Se  $S$  è un insieme invariante, allora l'intersezione di  $S$  con una qualsiasi sfera è localmente invariante. Invece, se  $S$  è localmente invariante, allora  $S_0 = \{\phi(t, y) : y \in S, t \in T(y)\}$ , è un insieme invariante.

Quindi lo studio degli insiemi invarianti può essere ridotto allo studio degli insiemi localmente invarianti e viceversa. Questo è conveniente in virtù della seguente osservazione, nella quale si utilizza una particolare sfera, centrata nell'origine, perchè è la stessa usata nella dimostrazione del Teorema 1:

*10 Osservazione.* Se  $F(y)$  è alterato fuori dalla piccola sfera,  $\|y\| < \epsilon$ , e l'insieme  $S_0$  invariante è determinato per la nuova equazione differenziale, allora l'intersezione di  $S_0$  con la sfera  $\|y\| < \epsilon$  è un insieme localmente invariante per l'equazione differenziale originaria (5.7).

Gli insiemi localmente invarianti sono convenienti per un'altra ragione. Le condizioni imposte su  $F$  sono di natura "locale" ed è ragionevole aspettarsi che insiemi invarianti, coinvolti in nozioni "globali", risentano anche dell'effetto di altri fenomeni di natura non "locale".

Per esempio, supponiamo  $n = 2$  e che (5.7) ammetta una coppia di soluzioni  $\phi(t, y_1), \phi(t, y_2)$  per  $-\infty < t < +\infty$ , tali che  $\phi(t, y_1), \phi(t, y_2) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$  come in Figura 5.1. Allora  $S_0 = S_1 \cup S_2$ , dove:

$$S_1 = \{\phi(t, y_1) : t \in T(y_1)\} \cup \{\phi(0, 0)\}$$

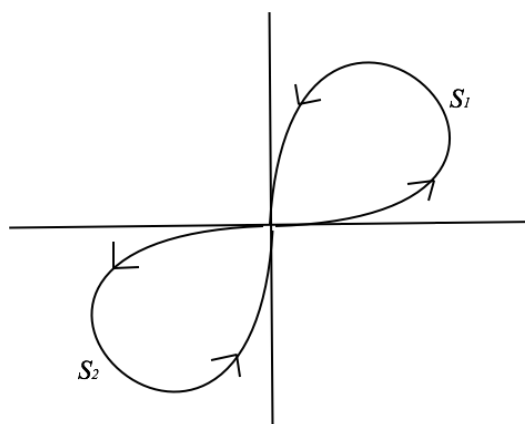


Figura 5.1:

$$S_2 = \{\phi(t, y_2) : t \in T(y_2)\} \cup \{\phi(0, 0)\}.$$

$S_0$  è una curva con una *autointersezione*.

Dopo un cambio di variabili lineare, con una matrice costante  $N$

$$y = Nx \quad , \quad \det N \neq 0 \quad (5.10)$$

l'equazione (5.7) diventa:

$$x' = N^{-1}LNx + N^{-1}F(Nx) \quad (5.11)$$

Supponiamo che  $N$  sia scelta in modo che:

$$N^{-1}LN = \text{diag}[P, Q] \quad (5.12)$$

Quindi la matrice  $L$  è diagonalizzabile a blocchi e la matrice diagonale a blocchi simile ad essa, ha sulla diagonale principale le matrici  $P \in M(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  e  $Q \in M(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^{n-k})$  con autovalori  $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ .

Scritto  $x = (g, h)$ , dove  $g \in \mathbb{R}^k$  e  $h \in \mathbb{R}^{n-k}$ , allora si ottiene:

$$(N^{-1}LN)x = (\text{diag}[P, Q])x = (\text{diag}[P, Q])(g, h) = (Pg, Qh).$$

Così, nelle coordinate di  $x$ , l'equazione (5.6) diventa  $x' = (Pg, Qh)$ , quindi:

$$g' = Pg \quad , \quad h' = Qh \quad (5.13)$$

La soluzione  $(\xi(t, g), \eta(t, h)) = \gamma(t, x_0)$  della (5.13) con punto iniziale  $x_0 = (g, 0)$  soddisfa

$$\eta(t, h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\xi(t, g)\| = 0.$$



Inoltre

$$\|\xi(t, g)\| \leq ct^i e^{\alpha t} \leq ce^{(\alpha+\delta)t}$$

per un qualche intero  $i$ , per una  $\delta > 0$  arbitraria e per una generica costante  $c$  dipendente da  $g$  e da  $\delta$ , e per  $t > 0$ .

L'insieme  $S^S$  di tutti e soli i punti di  $\mathbb{R}^n$  tali che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\gamma(t, x_0)\| = 0$ , che qui coincide con i punti della forma

$$S^S = \{x_0 = (g, 0) : g \in \mathbb{R}^k\}$$

viene detto **spazio stabile** ed è uno spazio vettoriale di dimensione  $k$ .

Osserviamo che lo spazio stabile  $S^S$  è *invariante* rispetto alla (5.13) e quindi anche *localmente invariante*.

La prima domanda che viene da chiedersi è se ci sia una situazione analoga a quella appena descritta, anche per la (5.7). Più precisamente riscriviamo il sistema (5.7) o (5.11), come:

$$g' = Pg + F_1(g, h) \quad , \quad h' = Qh + F_2(g, h) \quad (5.14)$$

dove  $F_1, F_2$  sono di classe  $C^1$  per  $\|g\|$  e  $\|h\|$  piccole e

$$F_1, F_2 = o(\|g\| + \|h\|) \quad \text{quando} \quad x = (g, h) \rightarrow 0.$$

Ci chiediamo se esista un *insieme localmente invariante stabile*  $S$  per la (5.14), cioè tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t, x)\| = 0$$

se e solo se  $x \in S$ . Nel successivo Teorema 34 daremo risposta affermativa alla domanda che ci siamo posti, cioè questo insieme esiste, è della forma  $S : h = f(g)$  ed è chiamato varietà locale stabile. L'aggettivo stabile è legato al fatto che la varietà contiene tutte le soluzioni che convergono all'origine nel "futuro". Un discorso analogo si può fare per le varietà locali instabili.

## 5.2 Teorema di Hartman

**34 Teorema** (sull'esistenza delle varietà invarianti). [5] *Nell'equazione differenziale (5.7) sia  $F(y)$  di classe  $C^1$  e  $F(0) = 0$ ,  $\mathcal{J}_F(0) = 0$ . Allora  $\exists \epsilon > 0$  tale che gli insiemi  $M_{loc}^S$  e  $M_{loc}^I$*

$$M_{loc}^S = \left\{ y : \|\phi(t, y)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \|\phi(t, y)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \right\} \quad (5.15)$$

$$M_{loc}^I = \left\{ y : \|\phi(t, y)\| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0, \|\phi(t, y)\| < \epsilon \quad \forall t \leq 0 \right\} \quad (5.16)$$

sono varietà differenziabili di classe  $C^1$ , localmente invarianti.

Esse vengono dette rispettivamente **varietà locale stabile** e **varietà locale instabile**.

Inoltre  $M_{loc}^S$  è **positivamente invariante**, cioè

$$\text{se } y \in M_{loc}^S \implies \phi(t, y) \in M_{loc}^S \quad \forall t \geq 0 \quad (5.17)$$

e  $M_{loc}^I$  è **negativamente invariante**, cioè

$$\text{se } y \in M_{loc}^I \implies \phi(t, y) \in M_{loc}^I \quad \forall t \leq 0 \quad (5.18)$$

Infine  $\dim(M_{loc}^S) = k$ ,  $\dim(M_{loc}^I) = n - k$  e gli spazi tangenti a  $M_{loc}^S$  e  $M_{loc}^I$  nell'origine sono gli spazi **stabili** e **instabili** di (5.6).

## 2 Corollario.

$$\text{Se } y \in M_{loc}^S \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|\phi(t, y)\|}{t} \leq \alpha \quad (5.19)$$

$$\text{Se } y \in M_{loc}^I \implies \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log \|\phi(t, y)\|}{t} \geq \beta \quad (5.20)$$

In altre parole  $\forall \delta > 0$  piccola a piacere se  $y \in M_{loc}^S$ :

$$\|\phi(t, y)\| e^{(-\alpha - \delta)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (5.21)$$

invece se  $y \in M_{loc}^I$ :

$$\|\phi(t, y)\| e^{(-\beta + \delta)t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \quad (5.22)$$

## 5.3 Varietà immerse

Ora daremo la definizione di varietà immersa  $M^I$ , che non è una varietà in senso proprio (come è stata definita nella sezione 4.1) ma è definita in questo modo.

**14 Definizione.** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^k$  e

$$\mathfrak{J} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione differenziabile (almeno  $C^1$ ). La funzione  $\mathfrak{J}$  è chiamata **immersione** se e solo se il differenziale

$$d\mathfrak{J}(a) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è iniettivo per ogni  $a \in A$ .

**15 Definizione.** Sia  $M$  un insieme, diciamo che è una varietà *immersa* (*immersed submanifold*) di dimensione  $k$  se e solo se esiste un'immersione  $\mathfrak{J} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ , tale che

$$M = \text{Im}(\mathfrak{J})$$

Questo cosa significa?

*11 Esempio.* Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) \in C^1$  e  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $\gamma$  sia iniettiva (quindi che  $\gamma$  sia semplice), allora

$$M = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

è una varietà immersa di dimensione 1.

Sappiamo che le immersioni non sono necessariamente iniettive *globalmente*, ma lo sono *localmente*.

Sia  $\phi(t, Q)$  il *flusso* valutato al tempo  $t$  e

$$B(P, \delta) = \{Q : \|Q - P\| < \delta\}.$$

Grazie al Teorema 34 sappiamo che se  $\delta > 0$  è sufficientemente piccolo

$$M_{loc}^I(\delta) = \left\{ Q : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, Q) = P, \phi(t, Q) \in B(P, \delta) \quad \forall t < 0 \right\} \quad (5.23)$$

è una varietà  $k$ -dimensionale locale instabile (*embedded submanifold*), *sottovarietà* di  $\mathbb{R}^n$  ( $M_{loc}^I(\delta) \subset \mathbb{R}^n$ ).

*11 Osservazione.* Eventualmente restringendo  $\delta > 0$  possiamo supporre che  $M_{loc}^I(\delta)$  sia un grafico su  $T_M(P)$  (spazio tangente in  $P$ ).

Vogliamo ora passare ad esaminare seguente insieme

$$M^I = \left\{ Q : \phi(t, Q) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} P \right\}. \quad (5.24)$$

che è fatto da tutti i punti che provengono dall'origine per  $t \rightarrow -\infty$ , ed esaminarne le proprietà geometriche.

Posto  $\tau \geq 0$  e

$$M_\tau = \{\phi(\tau, Q) : Q \in M_{loc}^I(\delta)\}$$

avremo

*12 Osservazione.* Se  $\tau_2 > \tau_1$  allora  $M_{\tau_2} \supset M_{\tau_1}$  e sono entrambe varietà  $k$ -dimensionali (ma non sono necessariamente grafici sullo spazio tangente), perchè il flusso è un *diffeomorfismo locale* e l'immagine di una varietà è una varietà.

Ora possiamo passare da  $M_{loc}^I(\delta)$  che è una varietà (vera) ad  $M^I$  con una successione di diffeomorfismi, cioè vale la seguente identità

$$M^I = \bigcup_{\tau \geq 0} M_\tau = \{ \phi(\tau, Q) : Q \in M_{loc}^I(\delta) \quad \forall \tau \geq 0 \}. \quad (5.25)$$

Utilizzando (5.25) si vede che  $M^I$  è una **varietà immersa** e viene detta **varietà instabile**. Infatti per ogni punto  $P \in M^I$  posso trovare  $\bar{\tau} > 0$  tale che  $P \in M_{\bar{\tau}} \subset M^I$  che è una varietà vera (embedded). Da questa osservazione segue facilmente che  $M^I$  è una **varietà immersa**. Un discorso analogo può essere fatto per le varietà stabili.

## 5.4 Cicli limite

Introduciamo il concetto di ciclo limite a partire da un esempio:

*12 Esempio.* Consideriamo l'equazione:

$$x'' + (x^2 + (x')^2 - 1)x' + x = 0 \quad (5.26)$$

Nell'equazione considerata il termine non lineare

$$h(x, x') = x^2 + (x')^2 - 1;$$

verifica

$$i) \quad h(x, x') > 0, \quad \forall x, x' : x^2 + (x')^2 > 1;$$

$$ii) \quad h(x, x') < 0, \quad \forall x, x' : x^2 + (x')^2 < 1;$$

Inoltre l'orbita  $x^2 + (x')^2 = 1$  (la circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario nel piano delle fasi) rappresenta le soluzioni che hanno condizioni iniziali  $x_0$  e  $x'_0$ , tali che  $x_0^2 + (x'_0)^2 = 1$ , come si può vedere sostituendo nell'equazione (5.26); tale orbita è, inoltre, *isolata*. Questo significa che non ci sono altre orbite chiuse nel suo intorno.

Possiamo trasformare la (5.26) in un sistema di equazioni di primo ordine, passando a coordinate polari nel piano delle fasi:

$$x = r \cos(\theta) \quad , \quad x' = r \sin(\theta), \quad (5.27)$$

il che conduce alle uguaglianze:

$$r^2 = x^2 + (x')^2, \quad (5.28)$$

$$\tan(\theta) = \frac{x'}{x}; \quad (5.29)$$

derivando la (5.28), si ha:

$$2rr' = 2xx' + 2x'x'' \quad , \quad \text{ovvero } r' = \frac{x'(x + x'')}{r}.$$

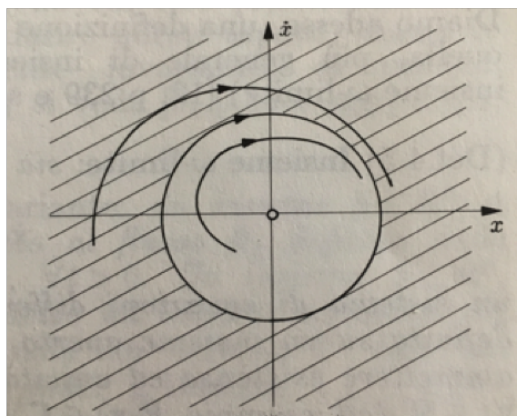


Figura 5.2:

Dall'equazione (5.26) si ottiene:

$$x'(x + x'') = (x')^2(1 - x^2 - (x')^2) = r^2 \sin^2(\theta)(1 - r^2),$$

che sostituito nell'espressione di  $r'$ , fornisce la prima equazione del sistema:

$$r' = r \sin^2(\theta)(1 - r^2). \quad (5.30)$$

Procedendo in modo analogo, a partire dalla derivazione della (5.29) si ottiene:

$$\theta' = \frac{x''x - (x')^2}{x^2(1 + \tan^2(\theta))} = \frac{x''x - (x')^2}{x^2 + (x')^2} = \frac{x''x - (x')^2}{r^2},$$

ed infine:

$$\theta' = -1 - (r^2 - 1) \sin(\theta)\cos(\theta), \quad (5.31)$$

che insieme alla (5.30) costituisce il sistema del primo ordine, in coordinate polari, equivalente all'equazione (5.26). Dalla (5.30) notiamo che  $r' > 0, \forall r < 1$ , e  $r' < 0, \forall r > 1$ . Quindi le orbite nella regione interna alla circonferenza unitaria si allontanano "spiraleggiando" dall'origine e tendono asintoticamente alla circonferenza stessa; comportamento opposto (spiralì percorse verso l'origine) si ha partendo dalla regione esterna alla circonferenza unitaria (Fig.5.2). L'orbita  $x^2 + (x')^2 = 1$  rappresenta un **ciclo limite** per le orbite dell'equazione (5.26).

Diamo adesso una definizione rigorosa di ciclo limite premettendo quella più generale di insieme  $\omega$ -limite:

**16 Definizione. Insieme  $\omega$ -limite:** sia

$$x' = F(x) \quad (5.32)$$

un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, con  $F(x)$  definita su un insieme aperto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , abbastanza regolare da ammettere esistenza ed unicità della soluzione per il Problema di Cauchy  $\forall x_0 \in D, \forall t \in \mathbb{R}$  (ad esempio  $F(x) \in C^1(D)$ ). Si dice che  $y \in D$  è un  $\omega$ -limite di  $x$  se esiste una successione  $t_n \rightarrow +\infty$  tale che il **flusso**  $\phi_t(x)$ , definito dalla (5.32), ammetta per limite  $y$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y.$$

L'insieme di tutti i punti  $\omega$ -limite di  $x \in D$  costituisce l'insieme  $\omega$ -limite,  $L_\omega(x)$ .

Nel caso dell'oscillatore armonico smorzato (di cui parleremo nel prossimo capitolo) l'origine  $(0,0)$  è l'unico  $\omega$ -limite per tutte le soluzioni, mentre in (5.26) tutte le orbite, tranne l'origine, sono "attratte" dalla circonferenza unitaria, che costituisce l'insieme  $\omega$ -limite per le soluzioni.

**17 Definizione. Ciclo limite:** un ciclo limite è un'orbita chiusa  $C$ , tale che  $C \subset L_\omega(x)$  per qualche  $x \notin C$ .

Questa definizione mostra chiaramente che un ciclo limite corrisponde ad una soluzione periodica isolata, rappresentata nel piano delle fasi (nel caso  $n=2$ ) da una curva chiusa semplice. Le orbite "vicine" sono spirali che tendono asintoticamente a  $C$ . Gli insiemi  $\omega$ -limite costituiscono dei sottoinsiemi di particolare interesse dello spazio delle fasi, perchè rappresentano il possibile comportamento asintotico di ogni soluzione del sistema considerato; costituiscono il "futuro" delle risposte del sistema. Dalle definizioni date emerge che l'insieme  $\omega$ -limite può essere composto da più insiemi, che descrivono comportamenti asintotici diversi, e che è molto importante poter individuare. In generale, per i sistemi non lineari, possiamo avere più punti critici (asintoticamente stabili) e più cicli limite (asintoticamente stabili) che "attragono" le soluzioni, a seconda della regione dello spazio delle fasi da cui esse provengono. Per chiarire meglio questi concetti darò alcune definizioni (la Def.18 viene citata nel capitolo precedente).

**18 Definizione. Insieme positivamente (negativamente) invariante:** un insieme  $S \subset \mathbb{R}^n$  si dice positivamente (o negativamente) invariante rispetto al flusso  $\phi_t$  definito dalla (5.32) se, per ogni  $x \in S$ ,  $\phi_t(x) \in S$ ,  $\forall t > 0$  (rispettivamente  $\forall t < 0$ ).

Un insieme sia positivamente invariante che negativamente invariante si dice invariante.

**19 Definizione. Insieme attrattivo:** un insieme  $S \subset \mathbb{R}^n$ , chiuso, positivamente invariante, è detto insieme attrattivo se, per ogni insieme aperto  $V \supset S$ , esiste un intorno  $U$  tale che  $\phi_t(U) \in V$  per  $t$  sufficientemente grande.

**20 Definizione (caso generale). Bacino di attrazione:** L'insieme  $\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U)$  viene detto bacino di attrazione dell'insieme  $S$ .

**7 Proposizione.** *L'insieme  $\omega$ -limite di una traiettoria definita  $\forall t \geq 0$  è un insieme chiuso e invariante sia positivamente che negativamente.*

Ogni singola orbita, come risulta evidente dalla definizione, è un insieme invariante, mentre la proprietà di attrattività caratterizza solo alcuni insiemi particolari nello spazio delle fasi. Il bacino di attrazione è il “*passato*” dell'insieme  $A$ , composto da quei punti dello spazio delle fasi la cui immagine, secondo il flusso  $\phi_t$ , appartiene ad  $A$ , a partire da un qualche istante  $t$ .

Riportiamo adesso, senza dimostrazione, il famoso teorema di Poincarè-Bendixon, che fornisce un criterio per individuare cicli limite per sistemi a dimensione 2. Questo teorema non presenta, tuttavia, generalizzazioni possibili per dimensioni superiori.

**35 Teorema (di Poincarè-Bendixon).** [7] *Un insieme  $\omega$ -limite, non-vuoto e compatto, di un sistema dinamico piano ( $n = 2$ ), che non contiene punti critici, è un'orbita chiusa.*

**3 Corollario.** *Sia (5.32) un sistema di dimensione 2, con  $F(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , e sia  $S \subset \mathbb{R}^2$  una regione chiusa e limitata, tale che una qualche semiorbita positiva del sistema,  $\gamma$ , giaccia interamente in  $S$ . Allora, o  $\gamma$  è essa stessa un'orbita chiusa, o tende asintoticamente ad un'orbita chiusa (ciclo limite) o tende asintoticamente ad un punto critico.*

**Nota:** per un'analisi completa dei sottoinsiemi dello spazio delle fasi significativi per la comprensione del comportamento globale di un sistema dinamico definito  $\forall t \in \mathbb{R}$ , dovremmo introdurre definizioni analoghe alle precedenti, per  $t \leq 0$  (insieme  $\alpha$ -limite, insieme repulsore, etc...). Ci siamo limitati a considerare le proprietà dei sistemi e delle loro soluzioni “nel futuro”, che dal punto di vista applicativo sono di maggiore interesse.





# Capitolo 6

## Applicazioni

In questo capitolo conclusivo parleremo inizialmente dell'oscillatore armonico, osservando anche il caso con smorzamento lineare, ed in seguito faremo agire una forzante esterna sull'oscillatore armonico smorzato. Quando questa forzante è una funzione armonica del tempo, può avere luogo, sotto determinate condizioni, il fenomeno della risonanza. Dopo aver fatto una breve introduzione sugli oscillatori non lineari mostreremo l'equazione di Duffing (proposta nel 1918), che nasce nell'ambito della Meccanica dei Solidi, quando si introducono in equazioni del tipo (6.2) o (6.10) termini di elasticità non lineare, per descrivere in modo più accurato il comportamento del sistema preso in esame.

### 6.1 Oscillatore armonico

Consideriamo il modello matematico più semplice che sia utilizzabile per descrivere fenomeni di tipo periodico; si tratta di un sistema unidimensionale, lineare e conservativo. Questo sistema idealizzato può essere rappresentato da un sistema meccanico costituito da una massa  $m$  che si muove orizzontalmente su una guida liscia sotto l'azione di una molla di costante elastica  $k$  (Figura 6.1). Per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio la molla approssima una forza elastica di richiamo, proporzionale allo spostamento. Se trascuriamo la resistenza dell'aria e l'attrito interno della molla l'equazione di moto della massa è:

$$mx'' = -kx , \tag{6.1}$$

dove  $x$  rappresenta lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Ponendo  $k/m = \omega^2$  si ottiene *l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico*:

$$x'' + \omega^2 x = 0 ; \tag{6.2}$$

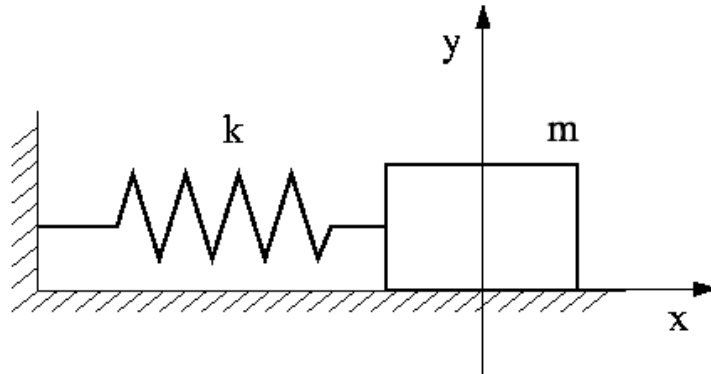


Figura 6.1:

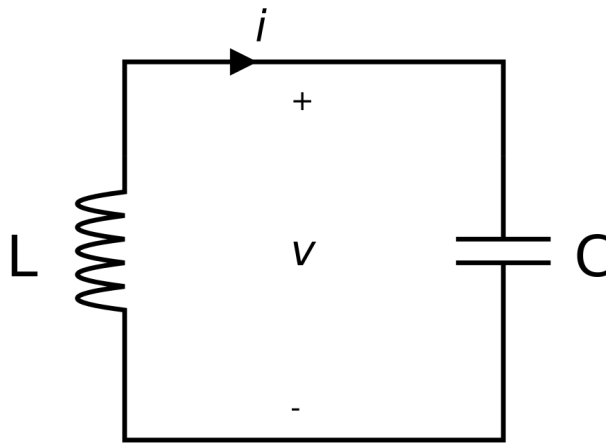


Figura 6.2:

L'equazione costituisce un caso particolarmente semplice di *equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti* (e quindi si tratta di un'equazione *autonoma*), *omogenea*.

Il corrispondente modello elettrico è costituito da un semplice circuito di capacità  $C$  ed induttanza  $L$ , in cui viene trascurata l'energia dissipata, la non linearità degli elementi ed il fatto che induttanza e capacità siano caratteristiche distribuite (Figura 6.2).

In questo caso l'equazione di “*evoluzione*” per la carica  $Q$  presente sul condensatore è:

$$LQ'' + \frac{Q}{C} = 0, \quad (6.3)$$

e, con  $1/LC = \omega^2$ ,  $Q = x$ , si ottiene ancora la (6.2).

### 6.1.1 Soluzione esatta

La forma generale della soluzione può essere scritta nei seguenti modi:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) ; \quad (6.4)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \gamma_1) ; \quad (6.5)$$

dove:

$$A_1 \cos(\gamma_1) = A ,$$

$$-A_1 \sin(\gamma_1) = B .$$

$|A_1| = \sqrt{A^2 + B^2}$  è detta **ampiezza dell'oscillazione**,  $\gamma_1$  è la **fase iniziale**.  $\omega$  è la **pulsazione** e costituisce la caratteristica fondamentale del sistema oscillante, non dipendendo dalle condizioni iniziali. Il **periodo**  $T$  è legato alla pulsazione dalla relazione  $T = 2\pi/\omega$  e  $\nu = \omega/2\pi$  è la **frequenza**. Osserviamo anche che la funzione che rappresenta la soluzione  $x$  ha lo stesso periodo di quella che rappresenta  $x'$ , ma che  $x$  ed  $x'$  risultano fra loro in quadratura di fase (cioè con uno sfasamento di  $\pi/2$ ). Ad esempio, utilizzando la (6.5), si ha:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \gamma_1) \quad , \quad x'(t) = -A_1 \omega \sin(\omega t + \gamma_1) \quad (6.6)$$

La soluzione generale di (6.2) può essere scritta per mezzo delle funzioni esponenziali complesse, in accordo con il metodo descritto nel Capitolo 1 per ottenere l'espressione analitica delle soluzioni di equazioni ordinarie, lineari, omogenee, a coefficienti costanti:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} , \quad (6.7)$$

dove:

$$C_1 = \frac{A - iB}{2} \quad , \quad C_2 = \frac{A + iB}{2} .$$

L'introduzione delle condizioni iniziali:

$$x(0) = A = x_0 \quad , \quad x'(0) = B\omega = v_0 \quad (6.8)$$

permette di formulare il problema di Cauchy (6.2)+(6.8) che ammette come unica soluzione:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (6.9)$$

### 6.1.2 Analisi qualitativa dell'oscillatore armonico

Consideriamo adesso la rappresentazione delle orbite nel piano delle fasi  $(x, x')$ . La forma delle orbite può essere ottenuta eliminando il tempo fra le funzioni che descrivono le soluzioni, oppure, integrando direttamente per

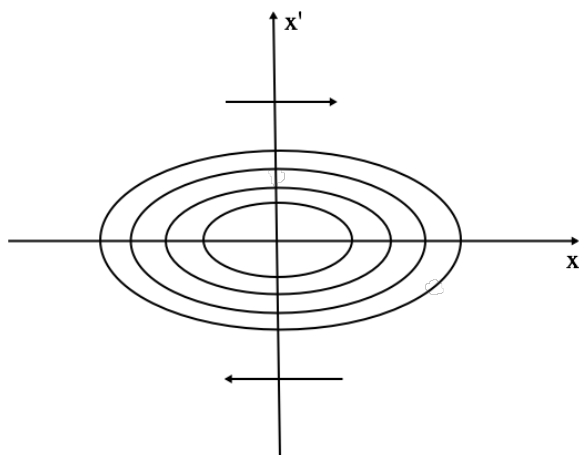


Figura 6.3: L'origine  $(0,0)$  nel piano delle fasi è l'unico punto critico per l'equazione (1). Inoltre tale soluzione è stabile. Il punto  $(0,0)$  è un *centro*.

quadrature l'equazione (6.2). Moltiplichiamo entrambi i membri di (6.2) per  $x'$ :

$$x'x'' + \omega^2 x'x = 0$$

e, successivamente, integriamo:

$$(x')^2 + \omega^2 x^2 = C \tag{6.10}$$

Introducendo le condizioni iniziali si ricava  $C = x_0'^2 + \omega^2 x_0^2$ , che è una costante proporzionale all'energia totale del sistema. Variando le condizioni iniziali in modo da variare  $C$ , si ottiene una famiglia di *ellissi* omotetiche (Figura 6.3), che riempiono tutto il piano. Scrivendo in forma canonica la (6.10):

$$\frac{(x')^2}{C} + \frac{x^2}{C/\omega^2} = 1,$$

si ottengono le lunghezze dei semiassi sugli assi  $x$  e  $x'$  (rispettivamente  $\sqrt{C/\omega^2}$  e  $\sqrt{C}$ ) e si può notare come la forma delle ellissi sia unicamente determinata da  $\omega$ .

Le orbite in figura sono percorse secondo il verso imposto dalla “freccia temporale”:  $x$  è crescente nel semipiano  $x' > 0$ , decrescente nel semipiano  $x' < 0$ .

### 6.1.3 Oscillatore armonico con smorzamento lineare

Nel modello che presentiamo si tiene conto della presenza di un effetto dissipativo sull'oscillatore armonico, durante l'evoluzione del sistema, dovuto

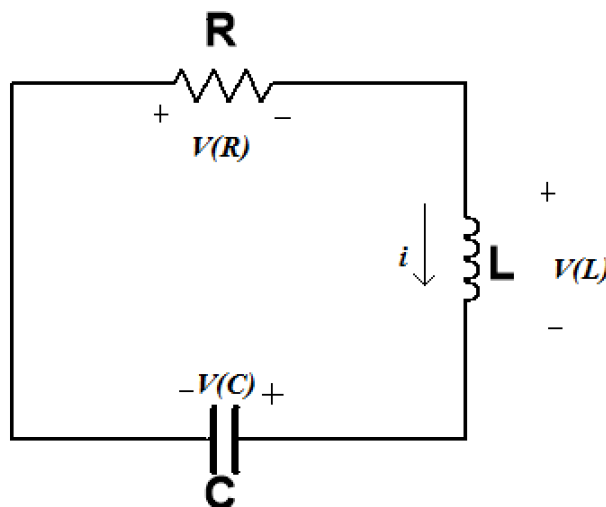


Figura 6.4:

ad un termine di tipo lineare. L'esempio meccanico più semplice è quello di una massa  $m$  in moto traslatorio, sottoposta ad un campo di forze elastiche (Figura 6.1) e ad una forza di resistenza viscosa dovuta al mezzo attraversato (ad esempio l'aria). In questo caso l'equazione di moto assume la forma:

$$ma = -kr - bv$$

dove  $r, v, a$  sono, rispettivamente, i vettori posizione, velocità ed accelerazione e  $k, b$ , rispettivamente, la costante elastica ed il coefficiente di viscosità. Scomponendo l'equazione vettoriale in un riferimento cartesiano ortogonale si ottengono tre equazioni scalari indipendenti del tipo:

$$mx'' = -kx - bx'. \quad (6.11)$$

La (6.11) rappresenta la componente lungo l'asse  $x$  dell'equazione vettoriale; le altre componenti possono essere ottenute semplicemente sostituendo alla  $x$  le coordinate  $y$  e  $z$ . Ponendo  $2h = b/m$  e  $\omega^2 = k/m$  si ottiene la forma:

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = 0. \quad (6.12)$$

Un esempio elettrico è fornito da un circuito di tipo RLC, a componenti lineari concentrate (Figura 6.4), in cui l'equazione di evoluzione per la carica  $Q$  è:

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = 0,$$

dove, con  $Q = x$ ,  $R/L = 2h$ ,  $1/LC = \omega^2$  si ottiene ancora la (6.12). In ogni caso la (6.12) può rappresentare l'approssimazione lineare per un qualunque sistema vibrante in modo unidimensionale rispetto ad una configurazione di equilibrio stabile, in cui si deve tenere conto anche degli effetti dissipativi.

### 6.1.4 Soluzione esatta

Consideriamo l'equazione per il polinomio caratteristico associato alla (6.12):

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0,$$

che ha soluzioni :

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Per  $h \neq \omega$ , la forma generale della soluzione della (6.12) è:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad (6.13)$$

dove  $A$  e  $B$  sono costanti reali o complesse coniugate arbitrarie e  $\lambda_1, \lambda_2$  assumono valori reali o complessi coniugati a secondo che sia  $h > \omega$  oppure  $h < \omega$ . Se  $h = \omega$ , la forma generale della soluzione è:

$$x(t) = Ce^{-ht} + Dte^{-ht}, \quad (6.14)$$

dove  $C$  e  $D$  sono costanti reali arbitrarie. Quando  $h < \omega$  il termine elastico “prevale” sullo smorzamento e siamo in presenza di un oscillatore armonico *debolmente* smorzato. Quando  $h > \omega$  il termine di smorzamento “prevale” su quello elastico e siamo in presenza di un oscillatore armonico *fortemente* smorzato. Il comportamento qualitativo della soluzione (6.14) è simile a quello della soluzione in cui  $h > \omega$ .

In Figura 6.5 osserviamo nel caso *a*) oscillazioni non smorzate in cui la fase iniziale è nulla, governate dall'equazione

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t),$$

mentre nel caso *b*) oscillazioni *debolmente* smorzate in cui la fase iniziale è nulla, governate dall'equazione

$$x(t) = A_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t).$$

La pulsazione dell'oscillatore debolmente smorzato è:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Si noti che  $\omega_1 < \omega$  e quindi  $T_1$  risulta maggiore del corrispondente periodo dell'oscillatore armonico conservativo. Nel caso mostrato in Figura 6.5, essendo  $h$  piccolo,  $\omega_1 \simeq \omega$ .

## 6.2 Oscillazioni forzate e risonanza lineare

Consideriamo adesso un sistema che sia caratterizzabile come un oscillatore armonico smorzato, la cui evoluzione sia quindi guidata da un'equazione

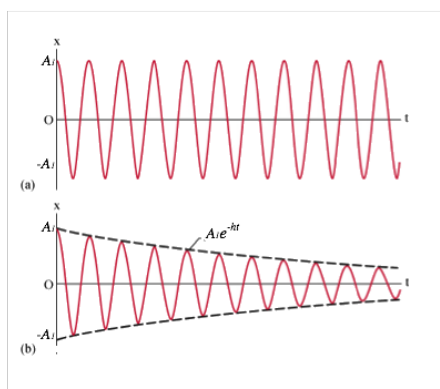


Figura 6.5:

come la (6.12). Supponiamo che sul sistema sia applicata un'azione esterna, indipendente dallo stato del sistema stesso, rappresentabile attraverso una funzione nota del tempo  $f(t)$ . L'equazione di evoluzione assume la forma:

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = f(t) \quad (6.15)$$

Se il problema è di carattere meccanico, si può pensare all'azione di una forza esterna elastica, in cui si tenga conto anche di dissipazioni dovute alla viscosità del mezzo circostante.

Per problemi di natura elettrica, si può pensare di applicare a due estremi di un circuito RLC un generatore di forza elettromotrice, in generale variabile in modo noto al variare del tempo (Figura 6.6).

**Nota:** nella terminologia della teoria dei sistemi  $f(t)$  viene definita come ingresso o “input” e la soluzione  $x(t)$  prende il nome di risposta del sistema o uscita, oppure “output”.

La soluzione generale della (6.15) è la somma della soluzione  $x_{om}(t)$  (data dalla (6.13), se  $h \neq \omega$ ) più una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea (6.15),  $x^*(t)$ :

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t) \quad (6.16)$$

$$x'(t) = x'_{om}(t) + (x^*)'(t) \quad (6.17)$$

Dal comportamento asintotico della soluzione dell'equazione omogenea:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{om}(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x'_{om}(t) = 0$$

si deduce che  $x_{om}$  influenza  $x$  solo per un periodo transitorio e che il comportamento asintotico di  $x$  (e di  $x'$ ) coincide con quello di  $x^*$  (e di  $(x^*)'$ ).

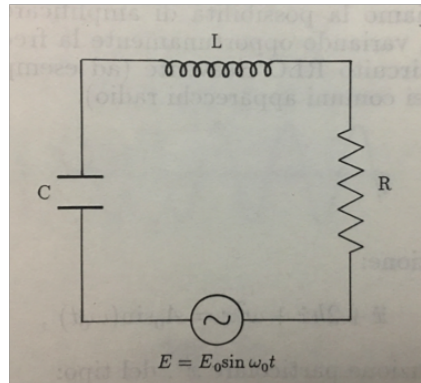


Figura 6.6:

Ci limiteremo a studiare il comportamento di  $x^*(t)$  nel caso particolarmente interessante in cui  $f(t)$  sia una funzione armonica del tempo, caso in cui può aver luogo, per particolari valori dei parametri presenti nell'equazione, il fenomeno della risonanza.

### 6.2.1 Risonanza

Studiamo l'equazione :

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t), \quad (6.18)$$

cercando una soluzione particolare  $x^*$ , del tipo:

$$x^*(t) = C \sin(\omega_0 t - \gamma), \quad C > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (6.19)$$

**Nota:** lo studio dell'equazione (6.18), con il termine forzante di tipo armonico, è di interesse generale, in quanto ci si può ricondurre ad equazioni di questo tipo se si sviluppa in serie di Fourier la  $f(t)$  nella (6.15).

Sostituendo nell'equazione (6.18) l'identità:

$$\begin{aligned} A_0 \sin(\omega_0 t) &= A_0 \sin[(\omega_0 t - \gamma) + \gamma] = \\ &= A_0 \sin(\omega_0 t - \gamma) \cos(\gamma) + A_0 \cos(\omega_0 t - \gamma) \sin(\gamma), \end{aligned}$$

si ottengono le seguenti equazioni, che devono essere soddisfatte dai parametri  $C$  e  $\gamma$ :

$$\begin{cases} 2C\omega_0 h = A_0 \sin(\gamma) \\ C(\omega^2 - \omega_0^2) = A_0 \cos(\gamma) \end{cases} ;$$



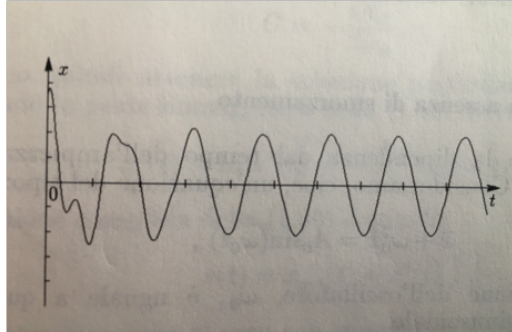


Figura 6.7:

la soluzione  $x^*$  ha quindi ampiezza:

$$C = \frac{|A_0|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2}}, \quad (6.20)$$

e fase  $\gamma$ , tale che :

$$\tan(\gamma) = \frac{2\omega_0 h}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (6.21)$$

Per valori di  $\omega_0$  lontani da  $\omega$ , la soluzione del problema ha un comportamento abbastanza complesso nel transitorio, per tendere poi, per tempi grandi, alla soluzione asintotica sinusoidale di periodo  $2\pi/\omega_0$  (vedi Fig.6.7).

Valori della frequenza di oscillazione del termine forzante molto vicini alla frequenza di oscillazione propria del sistema ( $\omega_0 \simeq \omega$ ) producono una soluzione asintotica in quadratura di fase con l'ingresso stesso ( $\tan \gamma \rightarrow \infty$ ) (Fig.6.8).

L'ampiezza  $C$ , al variare di  $\omega_0$  e fissati  $\omega$  ed  $h$ , è massima per  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - 2h^2}$  ed il suo valore cresce al diminuire del coefficiente di smorzamento  $h$  (Fig.6.9). La situazione limite, in cui  $\omega_0 = \omega$ , prende il nome di **risonanza** ed in questo caso:

$$\lim_{h \rightarrow 0} C = +\infty.$$

Si può notare che il massimo dell'ampiezza  $C$ , al variare di  $\omega$  e fissati  $\omega_0$  ed  $h$ , viene raggiunto per il valore  $\omega = \omega_0$ . Questo rappresenta il caso dei circuiti lineari costruiti con caratteristiche L e C variabili.

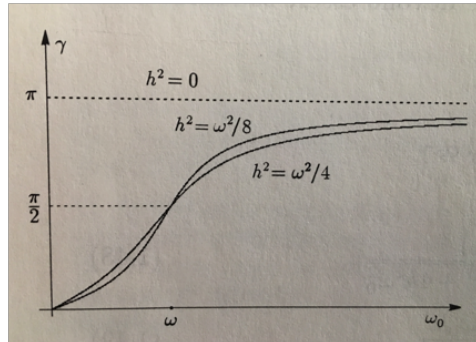


Figura 6.8:

### 6.2.2 Risonanza in assenza di smorzamento

Valutiamo adesso la dipendenza dal tempo dell'ampiezza  $C$  nel caso in cui  $h = 0$ . Consideriamo, cioè, un'equazione del tipo:

$$x'' + \omega_0^2 x = A_0 \sin(\omega_0 t), \quad (6.22)$$

in cui la pulsazione dell'oscillatore,  $\omega_0$ , è uguale a quella del termine forzante sinusoidale.

Per calcolare la soluzione della (6.22) ricorreremo all'equazione complessa:

$$z'' + \omega_0^2 z = A_0 e^{i\omega_0 t}, \quad z = y + ix, \quad (6.23)$$

di cui la (6.22) costituisce la parte immaginaria. Per la linearità delle equazioni otterremo quindi la soluzione  $x(t)$  come:

$$x(t) = \text{Im}(z(t)). \quad (6.24)$$

**Nota:** lo stesso risultato è facilmente ottenibile anche lavorando direttamente sulla sola equazione reale (6.22), cercando una soluzione particolare del tipo  $x^*(t) = \mathcal{A}t \cos(\omega_0 t)$ , ma si preferisce usare qui la tecnica delle equazioni complesse, molto utilizzata nell'analisi dei circuiti oscillanti per la sua maggiore semplicità formale.

Tornando alla (6.23), cerchiamo una soluzione particolare  $z^*(t)$  per l'equazione non-omogenea; poichè la funzione complessa  $\exp(i\omega_0 t)$  è soluzione dell'equazione omogenea associata alla (6.23), proviamo la forma:

$$z^*(t) = Cte^{i\omega_0 t}; \quad (6.25)$$

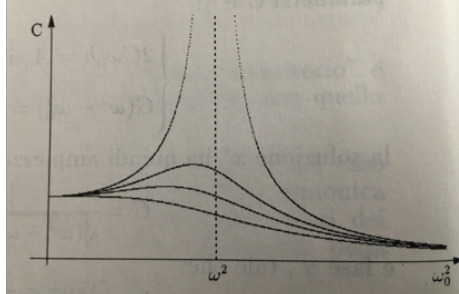


Figura 6.9:

calcolata la derivata seconda:

$$(z^*)''(t) = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 C t e^{i\omega_0 t},$$

si ottiene facilmente:

$$(z^*)'' + \omega_0^2 z^* = 2i\omega_0 C e^{i\omega_0 t}. \quad (6.26)$$

Confrontando la (6.26) con la (6.23), si ottiene il valore di  $C$  da introdurre nella (6.25):

$$C = -\frac{iA_0}{2\omega_0}.$$

Possiamo quindi ottenere la soluzione particolare  $x^*$  della (6.22), prendendo la parte immaginaria della (6.25), ovvero:

$$x^*(t) = \text{Im}(z^*(t)) = -\frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (6.27)$$

La soluzione completa della (6.22) è quindi :

$$x(t) = x_{om}(t) + x^*(t),$$

dove, contrariamente al caso con smorzamento, la  $x_{om}(t)$  non è più un termine transitorio, ma rappresenta un'oscillazione armonica (limitata) permanente del sistema, in cui si sovrappone il termine di oscillazione (in quadratura di fase con l'ingresso) di ampiezza linearmente crescente nel tempo, dovuto alla risonanza con il termine forzante. In conclusione, ricordando la (6.4), avremo:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) - \frac{A_0 t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (6.28)$$

### 6.2.3 Analisi qualitativa

Facciamo alcune considerazioni sulle dimensioni dello spazio delle fasi per un'equazione del tipo della (6.18). La (6.18) è un'equazione non autonoma, ma il termine in cui compare la dipendenza dal tempo,  $\sin(\omega_0 t)$ , è una funzione analitica del tempo e quindi soddisfa le ipotesi richieste dal Teorema di esistenza ed unicità. La (6.18) può essere, quindi, ricondotta ad un sistema autonomo di tre equazioni differenziali del primo ordine, nelle incognite:

$$x = x_1 \quad , \quad x' = x_2 \quad , \quad t = x_3$$

e che prende la forma :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2hx_2 - \omega^2 x_1 + A_0 \sin(\omega_0 x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = 1 \end{cases} \quad (6.29)$$

Lo spazio delle fasi della (6.29) ha dimensione 3 e le proiezioni delle orbite sul piano  $(x, x')$  non danno un'informazione completa sul comportamento delle soluzioni. In particolare, tali proiezioni possono intersecarsi, contrariamente ai casi autonomi a dimensione 2. Tali intersezioni non contraddicono il teorema di unicità, perchè gli stessi valori di  $x$  ed  $x'$ , sono assunti in tempi diversi da soluzioni provenienti da differenti condizioni iniziali, come si vedrebbe nella rappresentazione tridimensionale nello spazio  $(x, x', t)$ . Si osservi in Fig.6.10 la proiezione sul piano  $(x, x')$  di un oscillatore lineare forzato che mostra l'orbita corrispondente al transitorio portarsi successivamente su una soluzione asintotica periodica.

## 6.3 Oscillatori non lineari

### 6.3.1 Introduzione

Esistono modelli non lineari che presentano caratteristiche interessanti. Riguardano circuiti e sistemi di tipo meccanico, ma possono descrivere sistemi di tipo fisiologico (il modello per il battito cardiaco dell'equazione di Van der Pol) o nell'ambito della dinamica dei fluidi (il modello dell'equazione di Lorenz per i moti convettivi dell'atmosfera), etc... .

Come già detto in precedenza analizzeremo nello specifico solo il modello che genera l'equazione di Duffing.

La dimensione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine ha una

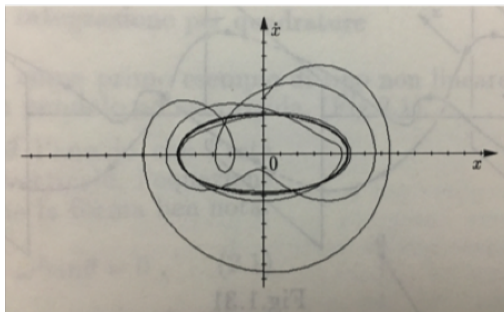


Figura 6.10:

grande influenza sul tipo di soluzione (la risposta del sistema) che si può ottenere. La caratteristica generale dei sistemi non lineari, di dimensione 2, è quella di consentire soluzioni periodiche asintotiche (*cicli limite*) anche senza la presenza di un termine forzante di tipo periodico. L'equazione considerata è un'equazione differenziale autonoma, del secondo ordine, trasformabile in un sistema del primo ordine, autonomo, di dimensione 2. L'insieme delle soluzioni è rappresentabile mediante il *ritratto di fase* nel consueto piano delle fasi bidimensionale  $(x, y)$ .

Un modello generale, e di particolare interesse applicativo, è rappresentato dall'*equazione di Liénard*:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad (6.30)$$

che ammette soluzioni globali nel tempo per il Problema di Cauchy ad essa associato, se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni continue  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Quando  $g(x)$  è una funzione dispari, l'equazione:

$$x'' + g(x) = 0 \quad (6.31)$$

rappresenta un sistema oscillante, conservativo, come nel caso del pendolo. L'energia totale del sistema descritto da (6.31) è, a meno di costanti arbitrarie e di fattori di proporzionalità dimensionali:

$$E(x, x') = \frac{(x')^2}{2} + G(x) \quad , \quad G(x) = \int g(x) dx. \quad (6.32)$$

Il termine  $f(x)x'$  introdotto nella (6.30) è un termine non conservativo, che accresce o diminuisce l'energia dell'oscillatore, a seconda del segno della  $f(x)$ . In particolare, se  $f(x) < 0$  per valori di  $x$  in un intervallo limitato

contenente 0 e  $f(x) > 0$  al di fuori, l'equazione (6.30) descrive un sistema che aumenta la propria energia (e quindi l'ampiezza delle proprie oscillazioni) intorno all'origine (punto critico instabile), mentre la dissipa per valori grandi di  $x$ . Questi due fenomeni si bilanciano asintoticamente, dando luogo ad una soluzione periodica asintotica.

### 6.3.2 Equazione di Duffing

Consideriamo ora un sistema conservativo, la cui energia sia data dall'equazione (6.32) in cui, per comodità, cambiamo variabile, indicando con  $y$  lo spostamento. Quindi  $y'$  sarà la velocità e  $y''$  l'accelerazione, mentre  $g(y)$  sarà la forza per unità di massa. Se  $\bar{y}$  è un punto critico,  $g(\bar{y}) = 0$  e grazie ad uno sviluppo della  $g$  attorno ad  $\bar{y}$  otteniamo

$$y'' + k_1(y - \bar{y}) + k_2(y - \bar{y})^2 + k_3(y - \bar{y})^3 + O((y - \bar{y})^4) = 0$$

ovvero, introducendo  $u = y - \bar{y}$ ,

$$u'' + k_1u + k_2u^2 + k_3u^3 + \dots = 0.$$

Il termine  $k_1u$  è la forza elastica (con  $k_1 > 0$ ), gli altri termini sono correzioni di ordine superiore. L'equazione di Duffing si ottiene con  $k_2 = 0$  e  $k_4 = k_5 = \dots = 0$ , cioè considerando correzioni cubiche alla forza elastica,

$$u'' + k_1u + k_3u^3 = 0. \quad (6.33)$$

Per rendere l'equazione adimensionale, introduco le variabili  $x = u/x_0$  e  $t' = \sqrt{k_1}t$ . Usando la regola della catena, avrò

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \sqrt{k_1} \frac{d}{dt'} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= k_1 \frac{d^2}{d(t')^2} \end{aligned}$$

Allora la (6.33) diventa

$$\frac{d^2x}{d(t')^2} + x + \frac{k_3u_0^2}{k_1}x^3 = 0.$$

Con  $d^2x/d(t')^2 = x''$  e  $k_3u_0^2/k_1 = \epsilon$  otteniamo

$$x'' + x + \epsilon x^3 = 0 \quad (6.34)$$

chiamata *equazione di Duffing in forma universale*. Le condizioni iniziali sono

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Il parametro  $\epsilon$  (costante reale) dà l'intensità della correzione non lineare alla forza elastica.

Ora consideriamo l'equazione (6.34) introducendo le variabili  $x_1 = x$  e  $x_2 = x'$ . Essa è equivalente al sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\x_2' &= f_2(x_1, x_2) = -x_1 - \epsilon x_1^3\end{aligned}$$

Per  $\epsilon > 0$ , l'origine del piano delle fasi,  $Q_1 = (0, 0)$ , è l'unico punto critico, mentre per  $\epsilon < 0$  i punti critici sono tre:  $Q_1 = (0, 0)$ ,  $Q_2 = (-\sqrt{-1/\epsilon}, 0, 0)$  e  $Q_3 = (\sqrt{-1/\epsilon}, 0)$ . Per la matrice jacobiana abbiamo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 3\epsilon x_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per  $\epsilon > 0$ , la matrice jacobiana nell'unico punto critico diventa

$$J(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i cui autovalori sono  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .  $Q_1$  è dunque un *centro*. Per  $\epsilon < 0$  abbiamo invece

$$\begin{aligned}J(Q_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \\J(Q_2) &= J(Q_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il punto critico  $Q_1$  è ancora un centro, mentre  $Q_2$  e  $Q_3$  sono *punti di sella*, essendo gli autovalori  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$  (si veda la Fig.6.11).

Osserviamo che  $Q_2$  e  $Q_3$  hanno globalmente una varietà stabile e instabile *embedded*, quindi anche localmente. Inoltre la varietà stabile di  $Q_2$  coincide con l'instabile di  $Q_3$ , mentre la varietà stabile di  $Q_3$  coincide con l'instabile di  $Q_2$ . Le traiettorie  $\phi^+(t)$  e  $\phi^-(t)$  sono **connessioni eterocline**, cioè tali che

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^+(t) &= Q_2 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^+(t) = Q_3 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^-(t) &= Q_3 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^-(t) = Q_2.\end{aligned}$$

Le due connessioni eterocline insieme formano un **ciclo eteroclino**.

Adesso descriviamo un'applicazione di questa equazione. Se consideriamo, ad esempio, una sottile sbarretta di acciaio di cui possiamo trascurare il peso e con gli estremi fissati (Figura 6.12) soggetta ad una forza esterna verticale, avremo che il modello dell'oscillatore armonico smorzato e forzato fornisce una buona descrizione del fenomeno per piccoli spostamenti verticali,  $x$ , del centro della sbarra dalla sua posizione di equilibrio, ma

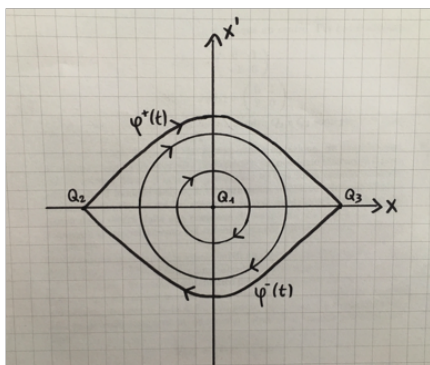


Figura 6.11:

non spiega in maniera adeguata il comportamento del sistema, quando  $x$  diventa sufficientemente grande. Questo sistema è descritto da equazioni differenziali alle derivate parziali, tuttavia se consideriamo un solo punto della sbarretta rigida possiamo descrivere il suo moto approssimativamente mediante equazioni differenziali ordinarie.

In generale consideriamo un sistema dotato di un'energia potenziale del tipo:

$$U(u) = \frac{1}{2}k_1u^2 + \frac{1}{4}k_3u^4,$$

che si trova integrando la  $g(u)$  dell'equazione (6.33), dove  $k_1, k_3$  sono parametri che possono essere sia positivi che negativi.

Esamino adesso un paio di casi significativi, sia nel caso conservativo che in presenza di dissipatività lineare:

*13 Esempio.*  $k_1 = -1, k_3 = 1$  (caso conservativo):

l'equazione di moto è:

$$u'' - u + u^3 = 0;$$

i punti critici corrispondono ai valori  $Q_1 = (0, 0)$  (instabile),  $Q_2 = (1, 0)$  e  $Q_3 = (-1, 0)$  (stabili). Questo è il modello per tutti i casi in cui  $k_1$  è negativo e  $k_3$  è positivo. Si veda in Fig.6.13 il ritratto nel piano di fase.

In questo caso le traiettorie si muovono lungo curve di livello di  $U$ .

Questo ci permette di scrivere un'equazione implicita per la varietà stabile e instabile globale *immersed* data da  $U = U(Q_1) = 0$ .

Osservo che la varietà stabile e instabile globale coincidono quindi sono formate dall'origine e da due traiettorie **omocline**, cioè tali che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^+(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^-(t) = Q_1$$



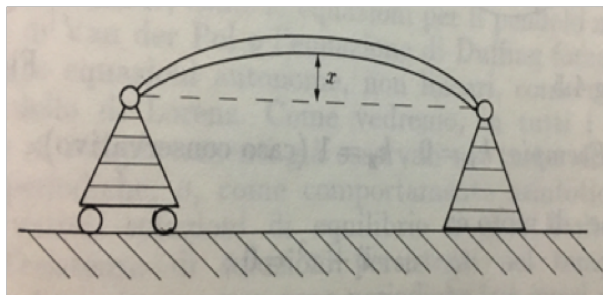


Figura 6.12:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^-(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^-(t) = Q_1$$

Dunque la varietà stabile locale è *embedded*, mentre la varietà stabile globale è *immersed* e lo stesso vale per l'instabile.

14 Esempio.  $k_1 = -1, k_3 = 1$  (caso dissipativo):

l'equazione di moto è:

$$u'' + \lambda u' - u + u^3 = 0, \quad \lambda > 0;$$

il ritratto nel piano di fase viene modificato (vedere Fig.6.14). I punti critici stabili diventano attrattivi ed il piano delle fasi risulta separato in due diversi bacini di attrazione, "finemente intrecciati" fra loro.

L'origine  $Q_1$  è una sella quindi ammette una varietà locale stabile e instabile *embedded*. La varietà instabile globale  $M^I$  è formata dal grafico di due traiettorie  $\phi^+(t)$  e  $\phi^-(t)$  simmetriche rispetto all'origine e dall'origine stessa. Dalla teoria sappiamo a priori che  $M^I$  è solo una varietà *immersed*. Utilizzando il fatto che il sistema è dissipativo si deduce che tali traiettorie sono *eterocline*, cioè tali che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^+(t) = Q_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^+(t) = Q_3$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^-(t) = Q_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^-(t) = Q_2$$

Un'analisi grafica ci permette di dire che la varietà instabile globale  $M^I$  è anche *embedded*. Si osserva che i punti critici  $Q_2$  e  $Q_3$  non fanno parte di  $M^I$ . Inoltre si osserva che l'insieme  $M^I \cup \{Q_2, Q_3\}$  è invece una varietà *immersed*.

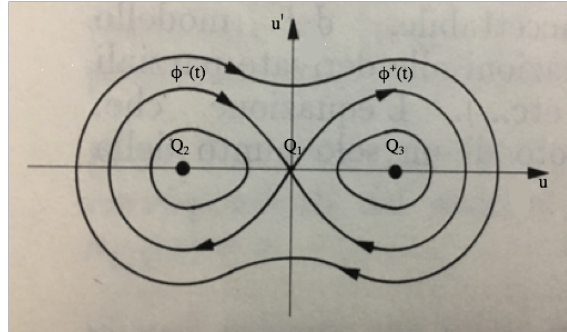


Figura 6.13:

15 Esempio.  $k_1 = 0, k_3 = 1$  (caso conservativo):  
l'equazione di moto è:

$$u'' + u^3 = 0;$$

l'unico punto critico corrisponde a  $Q_1$  (stabile). Si noti la forma non ellittica delle orbite. Riportiamo in Fig.6.15 il ritratto nel piano di fase.

16 Esempio.  $k_1 = 0, k_3 = 1$  (caso dissipativo):  
l'equazione di moto è:

$$u'' + \lambda u' + u^3 = 0, \quad \lambda > 0;$$

il ritratto nel piano di fase viene modificato. Il punto critico stabile diventa attrattivo (asintoticamente stabile) e per  $\lambda$  non troppo grande le orbite chiuse si trasformano in spirali (vedere Fig.6.16).

### Sviluppo perturbativo diretto dell'equazione di Duffing

Non mostreremo tutta l'analisi sulla soluzione esatta della (6.34), tuttavia faremo vedere un approccio perturbativo.

Quando  $\epsilon = 0$ , la (6.34) si riduce a

$$x'' + x = 0$$

la cui soluzione generale è

$$x_0 = a_0 \cos(t + \beta_0) \tag{6.36}$$

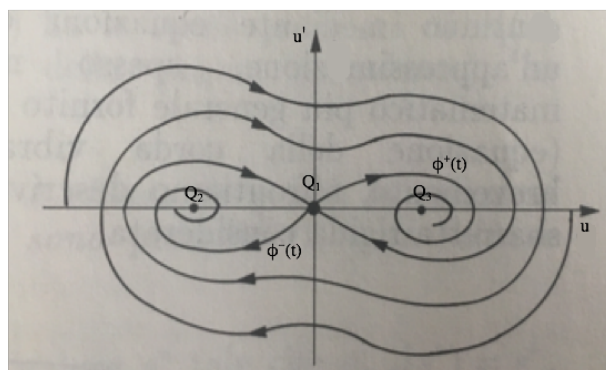


Figura 6.14:

dove  $a_0$  e  $\beta_0$  sono costanti arbitrarie. Quando  $\epsilon$  è piccola ma diversa da zero, la soluzione generale della (6.34) non è più data dalla (6.36), e deve essere aggiunta una correzione. Scriviamo la correzione nella forma di una serie di potenze in  $\epsilon$  (*serie perturbativa*), cioè avremo

$$x(t; \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \dots$$

Restringeremo la nostra discussione al primo termine nella serie perturbativa. Quindi, cerchiamo una soluzione approssimata nella forma

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \quad (6.37)$$

Dato che abbiamo tenuto solo il primo termine nella serie perturbativa, chiameremo la (6.37) sviluppo al primo ordine.

Sostituiamo la (6.37) nella (6.34) e otteniamo

$$x_0'' + \epsilon x_1'' + O(\epsilon^2) + x_0 + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2) + \epsilon [x_0 + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2)]^3 = 0 \quad (6.38)$$

Usando il teorema binomiale per sviluppare l'ultimo termine, abbiamo

$$\begin{aligned} [x_0 + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2)]^3 &= x_0^3 + 3x_0^2[\epsilon x_1 + O(\epsilon^2)] + 3x_0[\epsilon x_1 + O(\epsilon^2)]^2 + \\ &+ [\epsilon x_1 + O(\epsilon^2)]^3 = x_0^3 + 3\epsilon x_0^2 x_1 + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Sostituendo la (6.39) nella (6.38) e raggruppando i coefficienti con le stesse potenze di  $\epsilon$ , otteniamo

$$x_0'' + x_0 + \epsilon(x_1'' + x_1 + x_0^3) + O(\epsilon^2) = 0 \quad (6.40)$$

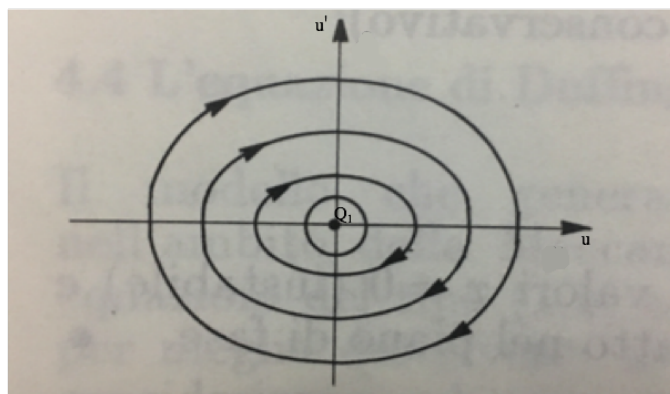


Figura 6.15:

Uguagliando separatamente a zero ciascuno dei coefficienti della  $\epsilon$  otteniamo la seguente **gerarchia di equazioni**:

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad (6.41)$$

$$x_1'' + x_1 + x_0^3 = 0 \quad (6.42)$$

In questo modo si trovano le equazioni che governano  $x_0$  e  $x_1$ .

Viene chiamata gerarchia, perchè la (6.41) e la (6.42) devono essere risolte in successione. Prima si risolve la (6.41) per trovare  $x_0$ , si sostituisce il risultato nella (6.42), poi la si risolve per trovare  $x_1$ . Ovviamente il discorso può essere generalizzato per tutte le  $x_n$ , con  $n = 0, 1, \dots, +\infty$ . La soluzione generale della (6.41) può essere scritta come

$$x_0 = a_0 \cos(t + \beta_0) \quad (6.43)$$

dove  $a_0$  e  $\beta_0$  sono costanti arbitrarie. Sostituendo  $x_0$  nella (6.42) si ottiene

$$x_1'' + x_1 = -a_0^3 \cos^3(t + \beta_0) \quad (6.44)$$

L'equazione (6.44) è un'equazione non-omogenea la cui soluzione generale è la somma della soluzione omogenea e di una soluzione particolare. Per determinare una soluzione particolare esprimiamo il termine non omogeneo con una serie di Fourier usando la seguente identità trigonometrica

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta)$$

e riscriviamo la (6.44)

$$x_1'' + x_1 = -\frac{3}{4}a_0^3 \cos(t + \beta_0) - \frac{1}{4}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (6.45)$$

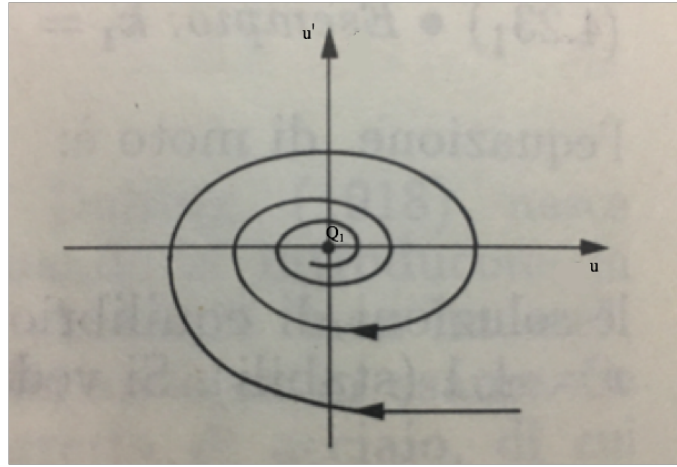


Figura 6.16:

La soluzione omogenea della (6.45) è

$$x_1^o = a_1 \cos(t + \beta_1) \quad (6.46)$$

dove  $a_1$  e  $\beta_1$  sono costanti arbitrarie. Dato che la (6.45) è lineare, si può utilizzare il principio della sovrapposizione e determinare la soluzione particolare come la somma di due soluzioni particolari corrispondenti a due termini non omogenei. Quindi, possiamo determinare una soluzione particolare sommando due soluzioni particolari delle due equazioni

$$x_1'' + x_1 = -\frac{3}{4}a_0^3 \cos(t + \beta_0) \quad (6.47)$$

$$x_1'' + x_1 = -\frac{1}{4}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (6.48)$$

Una soluzione particolare della (6.47) è

$$x_1^{p1} = -\frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0). \quad (6.49)$$

Una soluzione particolare della (6.48) è

$$x_1^{p2} = \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (6.50)$$

Quindi, grazie al principio di sovrapposizione, una soluzione particolare della (6.45) è

$$x_1^p = -\frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (6.51)$$

Perciò, la soluzione generale della (6.45) è

$$x_1 = a_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0). \quad (6.52)$$

Sostituendo  $x_0$  e  $x_1$  dalla (6.43) e (6.52), rispettivamente, nella (6.37) si trova il seguente sviluppo al primo ordine per la soluzione generale della (6.34):

$$x = a_0 \cos(t + \beta_0) + \epsilon \left[ a_1 \cos(t + \beta_1) - \frac{3}{8}a_0^3 t \sin(t + \beta_0) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3t + 3\beta_0) \right] + \dots \quad (6.53)$$

dove  $a_0, a_1, \beta_0$  e  $\beta_1$  non sono costanti arbitrarie. Per determinarle sono sufficienti le due condizioni iniziali (6.35). Per vederlo, sostituiamo la (6.53) nella (6.35) e otteniamo

$$x_0 = a_0 \cos(\beta_0) + \epsilon (a_1 \cos(\beta_1) + \frac{1}{32}a_0^3 \cos(3\beta_0)) + \dots \quad (6.54)$$

$$v_0 = -a_0 \sin(\beta_0) - \epsilon (a_1 \sin(\beta_1) + \frac{3}{8}a_0^3 \sin(\beta_0) + \frac{3}{32}a_0^3 \sin(3\beta_0)) + \dots \quad (6.55)$$

Portare tutti termini da un lato dell'equazione ed uguagliare i coefficienti delle potenze di  $\epsilon$  a zero nella (6.54) e (6.55) è equivalente a uguagliare i coefficienti delle stesse potenze di  $\epsilon$  su entrambi i lati di queste equazioni. I risultati sono:

*Ordine  $\epsilon^0$ :*

$$x_0 = a_0 \cos(\beta_0) \quad (6.56)$$

$$v_0 = -a_0 \sin(\beta_0) \quad (6.57)$$

*Ordine  $\epsilon^1$ :*

$$a_1 \cos(\beta_1) = -\frac{1}{32}a_0^3 \cos(3\beta_0) \quad (6.58)$$

$$a_1 \sin(\beta_1) = -\frac{3}{8}a_0^3 \sin(\beta_0) - \frac{3}{32}a_0^3 \sin(3\beta_0). \quad (6.59)$$

Elevando al quadrato e sommando la (6.56) e la (6.57) otteniamo

$$x_0^2 + v_0^2 = a_0^2 \cos^2(\beta_0) + a_0^2 \sin^2(\beta_0) = a_0^2$$

oppure

$$a_0 = (x_0^2 + v_0^2)^{1/2}. \quad (6.60)$$

Quindi, risolvendo la (6.56) e la (6.57) per  $\beta_0$  otteniamo

$$\beta_0 = -\sin^{-1} \left[ \frac{v_0}{(x_0^2 + v_0^2)^{1/2}} \right] = \cos^{-1} \left[ \frac{x_0}{(x_0^2 + v_0^2)^{1/2}} \right]. \quad (6.61)$$

In modo analogo risolvendo la (6.58) e la (6.59) otteniamo

$$a_1 = \frac{1}{32} a_0^3 [\cos^2(3\beta_0) + 9(\sin(3\beta_0) + 4\sin(\beta_0))^2]^{1/2} \quad (6.62)$$

$$\beta_1 = -\sin^{-1} \left[ \frac{3a_0^3(4\sin(\beta_0) + \sin(3\beta_0))}{32a_1} \right] = \cos^{-1} \left[ -\frac{a_0^3 \cos(3\beta_0)}{32a_1} \right]. \quad (6.63)$$

Una volta trovati  $a_0$  e  $\beta_0$  dalla (6.60) e (6.61),  $a_1$  e  $\beta_1$  possono essere calcolati dalla (6.62) e (6.63).

Ritorniamo alla (6.53) e notiamo che

$$a_0 \cos(t + \beta_0) + \epsilon a_1 \cos(t + \beta_1) = a \cos(t + \beta) \quad (6.64)$$

dove

$$a \cos(\beta) = a_0 \cos(\beta_0) + \epsilon a_1 \cos(\beta_1) \quad (6.65)$$

$$a \sin(\beta) = a_0 \sin(\beta_0) + \epsilon a_1 \sin(\beta_1). \quad (6.66)$$

Dalla (6.65) e (6.66) segue che

$$a_0 = a + O(\epsilon) \quad , \quad \beta_0 = \beta + O(\epsilon). \quad (6.67)$$

Usando la (6.64) e la (6.67), riscriviamo la (6.53) in questo modo

$$x = a \cos(t + \beta) + \epsilon \left\{ -\frac{3}{8} [a + O(\epsilon)]^3 t \sin[t + \beta + O(\epsilon)] \right. \\ \left. + \frac{1}{32} [a + O(\epsilon)]^3 \cos[3t + 3\beta + O(\epsilon)] \right\} + \dots$$

Quindi,

$$x = a \cos(t + \beta) + \epsilon a^3 \left[ -\frac{3}{8} t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} \cos(3t + 3\beta) \right] + \dots \quad (6.68)$$

Dalla (6.68) troviamo che la prima approssimazione è

$$x = a \cos(t + \beta)$$

e la sua prima correzione è

$$-\frac{3}{8} a^3 \epsilon t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} a^3 \epsilon \cos(3t + 3\beta).$$

Notiamo che questa correzione è piccola (come dovrebbe essere) solo quando  $\epsilon t$  è piccolo rispetto a 1. Quando  $\epsilon t$  è  $O(1)$ , il termine che rappresenta la piccola correzione diventa dello stesso ordine del termine principale. Inoltre, quando  $\epsilon t > O(1)$ , la “piccola correzione” diventa più grande del termine principale. Quindi, lo sviluppo diretto (6.68) è valido solo per tempi tali che  $\epsilon t < O(1)$ , cioè,  $t < O(\epsilon^{-1})$ . Conseguentemente, diciamo che

gli sviluppi sono *non uniformi*. La ragione della non uniformità di questo sviluppo è la presenza del termine  $t \sin(t + \beta)$ . Questi termini sono chiamati ***termini secolari***. Questo termine nasce in ambito astronomico, perchè  $\epsilon$  è veramente piccola nelle applicazioni astronomiche e quindi  $\epsilon t$  diventa apprezzabile dopo tempi molto lunghi, circa un secolo.

Concludendo, per avere uno sviluppo uniforme, le correzioni *non* devono contenere termini secolari.



# Bibliografia

- [1] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, “*Analisi matematica 2*”, Zanichelli (2009)
- [2] Ermanno Lanconelli, “*Lezioni di analisi matematica 2*”, Pitagora Editrice Bologna (2000)
- [3] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, “*Analisi matematica due*”, Liguori Editore (1996)
- [4] M.W. Hirsch, S. Smale, “*Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*”, Academic Press, Pure and Applied Mathematics (1974)
- [5] P. Hartman, “*Ordinary Differential Equations*”, John Wiley and Sons (1964)
- [6] L. Demeio, “*Elementi di meccanica classica per l'ingegneria*”, Città Studi (2016)
- [7] G. Borgioli, “*Modelli matematici di evoluzione ed equazioni differenziali*”, Celid (1996)
- [8] A. H. Nayfeh, “*Introduction to Perturbation Techniques*”, Wiley Classics Library (1993)