



Università Politecnica delle Marche
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Implementazione numerica di modelli di plasticità

Implementation of numerical plasticity model

Relatore: Professor
Giovanni Lancioni

Tesi di Laurea di:
Nico Stortini

A.A. 2018/2019

Sommario

1	CLS AD ALTE PRESTAZIONI E FIBRORINFORZATI	4
1.1.	CALCESTRUZZI FIBRORINFORZATI	4
1.2.	CALCESTRUZZI AD ALTISSIME PRESTAZIONI	7
2	MODELLI DI PLASTICITÀ.....	9
2.1.	PLASTICITÀ DI MISES-HILL.....	9
2.1.1.	Introduzione	9
2.1.2.	Analisi dell'incrudimento.....	11
2.1.3.	Superficie di snervamento e inversione.....	12
2.2.	PLASTICITÀ DI AIFANTIS	15
2.2.1.	Introduzione.....	15
2.2.2.	Equazioni di bilancio	16
2.2.3.	Condizioni al contorno	18
3	MODELLO VARIAZIONALE 1-D	19
3.1.	DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO	19
3.1.1.	Introduzione.....	19
3.1.2.	Equilibrio	20
3.1.3.	Evoluzione	22
3.1.4.	Ricerca della soluzioni.....	24
3.1.5.	Soluzione in condizioni di stress-hardening	29
3.1.6.	Soluzione in regime di stress-softening.....	33
3.2.	DISCRETIZZAZIONE AD ELEMENTI FINITI DEL MODELLO VARIAZIONALE 1-D	36
3.2.1.	Introduzione funzioni di forma	36
3.2.2.	Problema variazionale discreto.....	38
3.3.	SIMULAZIONI 1-D.....	42
3.3.1.	Introduzione.....	42
3.3.2.	Hardening	45
3.3.3.	Softening.....	49
3.3.4.	Plasticità perfetta	Error! Bookmark not defined.
3.3.5.	Hardening e softening.....	53
4	MODELLO VARIAZIONALE 2-D	56
4.1.	FORMULAZIONE CONTINUA.....	56
4.1.1.	Funzionale energetico.....	56
4.1.2.	Stato piano di tensione e di deformazione	57
4.1.3.	Minimizzazione alternata - introduzione	60

4.2.	DISCRETIZZAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI DEL MODELLO 2-D	61
4.2.1.	Geometria	61
4.2.2.	Funzioni di forma	62
4.2.3.	Calcolo elementi notevoli	65
4.2.4.	Discretizzazione dei funzionali energetici	67
4.3.	SIMULAZIONI	69
4.3.1.	Bande di Lüders	69
4.3.2.	Plasticità di Mises – hardening e softening	71
4.3.3.	Plasticità simmetrica – hardening e softening	78
4.3.4.	Plasticità di simmetrica con cambio graduale di energia	85
5	POSSIBILI SVILUPPI E CONCLUSIONI	91
5.1.	MODELLO VARIAZIONALE DI DANNO	91
5.1.1.	Introduzione	91
5.1.2.	Equilibrio	91
5.1.3.	Problema evolutivo	92
5.1.4.	Soluzioni	94
5.1.5.	Proposte $E(\alpha)$; $w_p(\alpha)$	96
5.2.	MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ	99
5.2.1.	Criticità del modello di danno	99
5.2.2.	Formulazione ed equilibrio	100
5.2.3.	Evoluzione	101
5.2.4.	Annullamento della componente di accoppiamento	103
5.2.5.	Accoppiamento lineare in “p”	104
5.3.	ALTRE FORME DI ENERGIA PLASTICA	106
5.3.1.	Introduzione	106
5.3.2.	Per punti	106
5.3.3.	Cubica	109
5.3.4.	Arcotangente	111
6	BIBLIOGRAFIA	117

1 CLS AD ALTE PRESTAZIONI E FIBRORINFORZATI

1.1. CALCESTRUZZI FIBRORINFORZATI

I calcestruzzi fibrorinforzati sono materiali compositi composti da calcestruzzo usato come matrice e delle fibre di altro materiale usate come rinforzo. Una prima distinzione importante da fare riguarda il modulo elastico delle fibre adottate. Le fibre a basso modulo elastico (normalmente polimeriche) sono spesso usate al fine di evitare fessurazioni in calcestruzzi, intonaci o malte, nei primi giorni dopo la posa in opera. La fessurazione, in questo caso è dovuta alla bassa resistenza dell'elemento nei primi giorni e alla forte evaporazione. In questa sede non verranno trattati materiali con fibre a basso modulo, si cercherà, invece, di interpretare il comportamento dei calcestruzzi con fibre ad alto modulo tramite un modello di plasticità di gradiente che possa riprodurre il comportamento con una approssimazione adeguata. Le fibre ad alto modulo utilizzate maggiormente sono le fibre metalliche. Tuttavia si possono avere anche fibre in carbonio (che però presentano problemi di aderenza con la matrice cementizia) o in vetro (in cui va tenuto sufficientemente alto il contenuto di zirconia). Il motivo iniziale per il quale sono state inizialmente aggiunte queste fibre, riguarda ovviamente la scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo, tuttavia, l'aggiunta di fibre, modifica il comportamento della matrice anche in altri modi. In particolare, tramite le macrofibre si ha:

- Aumento della resistenza a compressione (per effetto confinamento)
- Aumento della resistenza a flessione
- Aumento della resistenza a trazione
- Miglioramento del comportamento post-fessurativo (duttilità)
- Aumento della tenacità
- Miglioramento della resistenza ad urti e scoppi
- Miglioramento della resistenza all'abrasione
- Leggero aumento del modulo elastico
- Leggero aumento della tensione di prima fessurazione

Durante il mix design di questi materiali vanno tenuti d'occhio principalmente due parametri. Il primo parametro è rappresentato dal volume critico delle fibre, e rappresenta il quantitativo minimo di fibre per cui, il sistema, riesce a tenere il carico di prima fessurazione, anche dopo che la prima fessurazione è avvenuta. Se non si supera questo quantitativo di fibre si avrà un comportamento degradante del materiale, mentre se si vuole ottenere un ramo di hardening (incrudimento positivo) va inserito un volume di fibre maggiore del volume critico. Si riporta un esempio grafico (fig. 1.1):

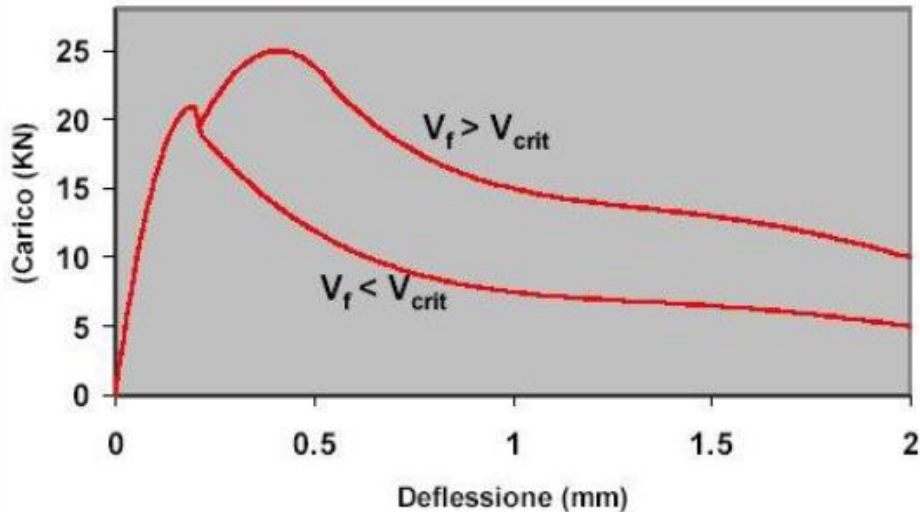


FIGURA 1.1 IMPORTANZA DEL VOLUME CRITICO

L'altro parametro importante durante il mix design riguarda il rapporto d'aspetto, ovvero il rapporto tra la lunghezza delle fibre e il diametro della sezione circolare equivalente della fibra stessa. Questo parametro è molto importante per quanto riguarda la lavorabilità del composto fluido. La lavorabilità influenza indirettamente le caratteristiche meccaniche dell'elemento finale, in quanto, se non ho buona lavorabilità del sistema fluido, potrei non possedere un metodo efficace e sicuro per compattarlo. In questo caso potrebbero crearsi dei macropori dovuti alla scarsa costipazione, che penalizzano molto le caratteristiche meccaniche dell'elemento. Maggiore è il rapporto d'aspetto, minore sarà la lavorabilità dell'elemento, tuttavia, aumentandolo, si migliora anche l'efficacia delle fibre sulle caratteristiche meccaniche sopra citate. Per dare un esempio della penalizzazione sulla lavorabilità dovuta all'alto rapporto d'aspetto, si riporta il seguente grafico (fig. 1.2):

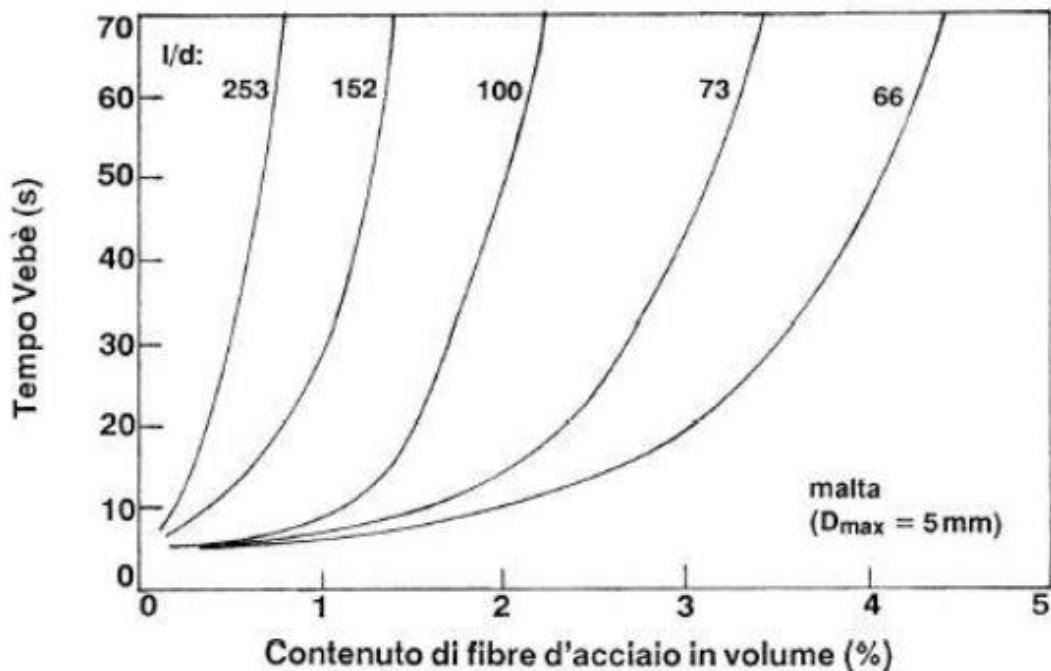


FIGURA 1.2 INFLUENZA DEL VOLUME DI FIBRE SULLA LAVORABILITÀ

Il metodo principale con il quale si va ad ottimizzare il compromesso tra lavorabilità e lunghezza prestazioni meccaniche riguarda la forma delle fibre. Si riporta alcuni esempi (fig. 1.3):

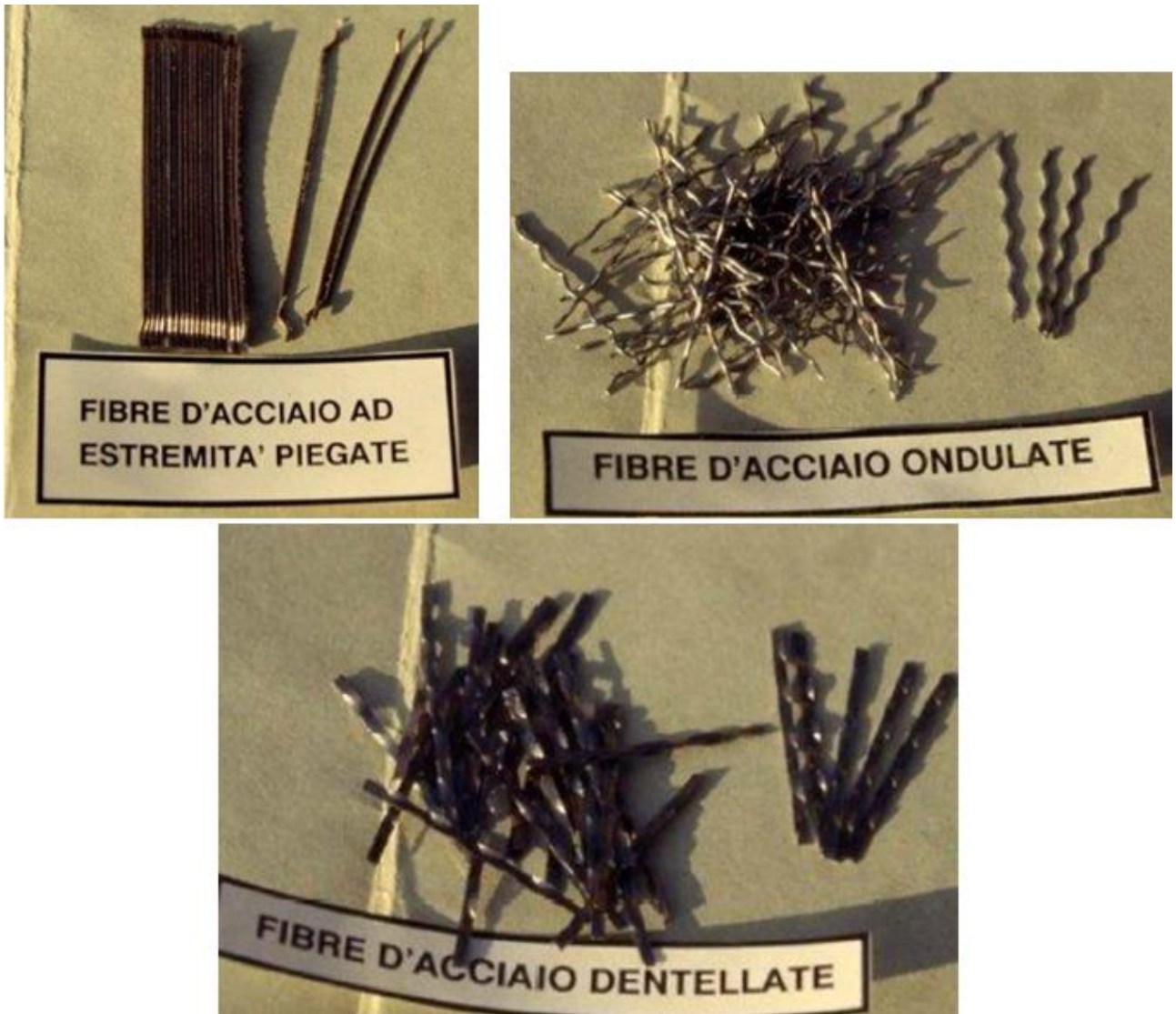


FIGURA 1.3 DIVERSI TIPI DI FIBRE

In seguito se ne riporteranno altri esempi.

1.2. CALCESTRUZZI AD ALTISSIME PRESTAZIONI

Lo sviluppo della tecnologia chimica, insieme alla ricerca nel campo dell'ingegneria dei materiali, ha permesso lo sviluppo di matrici di calcestruzzo ad altissime prestazioni. In particolare l'innovazione che ha permesso di aumentare di gran lunga le prestazioni dei calcestruzzi è l'aggiunta di fumi di silice (o silice amorfa in altre forme, ma comunque molto fine). Le particelle di cemento sono di dimensioni medie tipicamente intorno ai 10 μ m, mentre le forme di silice amorfa utilizzate nei calcestruzzi ad altissime prestazioni possono essere anche più piccole del μ m. Questa enorme finezza riesce a garantire una grande compattezza all'elemento finito e, in presenza di calce, la silice amorfa reagisce, formando prodotti di idratazione che andranno a comporre la stessa matrice cementizia. In particolare il mix design di questi materiali viene eseguito con le seguenti regole base:

- elevato contenuto di cemento a basso tenore di C₃A (oltre 700kg/m³) es. cemento ferrico
- aggiunta di fumo di silice (a basso contenuto di incombusti)
- rapporto acqua/cemento inferiore a 0,25
- alto impiego di additivo iperfluidificante (anche 10% sul peso di cemento più tre volte il peso del fumo di silice)
- impiego di inerte siliceo fine ($D_{max} \approx 1\text{mm}$)
- impiego di fibre (microfibre) ad alto dosaggio (>2% in volume)

Si riporta dunque un confronto tra il calcestruzzo ad altissime prestazioni (UHPC) con altri materiali:

	CA	Legno lamellare	Acciaio	RPC 200
Modulo elastico [GPa]	25	12	210	60
Resistenza a compressione [MPa]	30	32	360	200
Resistenza a trazione [MPa]	3	15	360	45
Resistenza a flessione [MPa]	5	32	360	60
Massa volumica [kN/m³]	25	5	78.5	23
Elasticità specifica [10⁶ m]	1.0	2.4	2.7	2.6
Resistenza specifica [10³ m]	1.2	6.4	4.6	8.7
Deformazione elastica [%]	0.15	0.25	0.18	0.33
Deformazione ultima [%]	0.30	0.25	14	2
Duttilità [%]	2.0	1.0	77	6.1
Energia di frattura [J/m²]	300-400	-	-	20000-40000

I campi di utilizzo sono molteplici. Dato che sono praticamente assenti porosità, sono utilizzati in tutti gli ambiti in cui la durabilità gioca un ruolo fondamentale sulla scelta del materiale (in pratica per vite utili molto elevate), ma anche in ambiti in cui è richiesta una notevole capacità isolante sia da radiazioni (come nei reattori nucleari), che da fluidi aggressivi, tossici o infiammabili (impianti di stoccaggio, serbatoi e condotte particolari). Sono anche usati in opere di ingegneria civile in cui sia richiesta una certa duttilità, come ad esempio nei ponti, in cui possono spesso esser posti in opera con i soli cavi di precompressione, data la loro resistenza a trazione (ma anche in compressione in fase di tesatura) e alla loro duttilità. È da citare anche il loro possibile impiego nell'industria meccanica per la produzione di manufatti resistenti ad urti, scoppi, o ad elevata durabilità. Un esempio di elemento in cui la durabilità gioca un ruolo fondamentale riguarda gli stampi per elementi in acciaio o in lega metallica. In questo caso il maggior costo dello stampo in UHPC viene ampiamente ripagato dalla sua durabilità. In ultimo si riporta l'utilizzo di questo materiale in ambito architettonico e di design, infatti le resistenze offerte da questo materiale permette di ottenere spessori molto sottili (intorno al centimetro) pur mantenendo la resistenza necessaria. Questi elementi non potrebbero esser ottenuti usando solo il calcestruzzo (a causa della bassa resistenza e durabilità) o il cemento armato (a causa degli spessori di armature e copriferri). Si riportano alcuni esempi interessanti in ambito architettonico(fig. 1.4):



FIGURA 1.4 UTILIZZO DEL UHPC IN ARCHITETTURA

E alcuni in ambito di design:



FIGURA 1.5 UTILIZZO DELL' UHPC NEL DESIGN

2 MODELLI DI PLASTICITÀ

2.1. PLASTICITÀ DI MISES-HILL

2.1.1. Introduzione

Si inizia l'interpretazione del comportamento di questi materiali con l'introduzione delle principali formulazioni d'interesse relative alla plasticità. Per introdurre le conoscenze di base che serviranno per fare ciò, ci si baserà su [1].

Una prova di trazione effettuata su un materiale duttile, restituisce un diagramma sforzo-deformazione in cui è distinguibile una prima fase elastica (ovvero una fase in cui la deformazione può essere ragionevolmente recuperata) ed una successiva fase plastica. Questi due contributi alla deformazione vengono, nelle principali teorie separati. In particolare, considerato il vettore degli spostamenti $\underline{\mathbf{u}} = [u_x, u_y, u_z]^T$, si vanno a distinguere i contributi:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^p$$

Per poi considerarne solo le parti simmetriche (usando l'apice "e" per il contributo elastico e "p" per il contributo plastico):

$$\mathbf{E}^e = \text{sym } \mathbf{H}^e \quad \mathbf{E}^p = \text{sym } \mathbf{H}^p$$

In questo modo, usando le proprietà delle matrici simmetriche, avremo il tensore delle deformazioni totale come :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$$

Si considera inoltre, il tensore delle deformazioni plastiche, deviatorico (tensore a traccia nulla).

Dall'elasticità lineare si ottiene una formulazione rispettivamente di energia elastica (Ψ) e tensore delle tensioni (\mathbf{T}) come segue:

$$\Psi = \mu |\mathbf{E}^e|^2 + \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{E}^e)^2$$

$$\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda (\text{tr } \mathbf{E}^e) \mathbf{1}$$

Con il tensore $\mathbf{1}$ il tensore identità 3x3.

Essendo il tensore \mathbf{E}^p deviatorico, la potenza plastica dissipata, può esser scritta come:

$$\delta = \mathbf{T}_0 : \dot{\mathbf{E}}^p \geq 0$$

In cui, con il pedice “0” si intende la componente deviatorica del tensore citato, in quanto un tensore deviatorico, moltiplicato alla parte sferica di un altro tensore, restituisce “0” come risultato. In questo caso:

$$\mathbf{T}_0 = 2\mu \mathbf{E}_0^e$$

Considerando ora la velocità di deformazione plastica direttamente proporzionale alla componente deviatorica del tensore delle tensioni ed introducendo un certo parametro di snervamento “k” dipendente dalla superficie di snervamento considerata, avremo:

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{T}_0 \quad \text{ed} \quad |\mathbf{T}_0| = \sqrt{2}k \quad \text{per ogni} \quad \dot{\lambda} \neq 0$$

Da cui si ricavano (esplicitando λ):

$$\mathbf{T}_0 = \sqrt{2}k \frac{\dot{\mathbf{E}}^P}{|\dot{\mathbf{E}}^P|} \quad \text{per ogni} \quad \dot{\mathbf{E}}^P \neq \mathbf{0}$$

Si definisce inoltre la deformazione plastica cumulata (e^p) tramite:

$$\dot{e}^p = |\dot{\mathbf{E}}^P|.$$

Ed il tensore della direzione della deformazione come:

$$\mathbf{N}^P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{\mathbf{E}}^P}{|\dot{\mathbf{E}}^P|}$$

Definito solo nel momento in cui il tensore di deformazione plastica è diverso dal tensore nullo (solo quando la deformazione plastica è realmente presente).

In definitiva si riportano le condizioni della teoria sulla plasticità di Mises:

$$\mathbf{T}_0 = Y(S) \mathbf{N}^P \quad \text{per} \quad \dot{\mathbf{E}}^P \neq \mathbf{0}$$

$$\dot{S} = h(S) |\dot{\mathbf{E}}^P|$$

$$|\mathbf{T}_0| \leq Y(S)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \mathbf{0} \quad \text{per} \quad |\mathbf{T}_0| < Y(S)$$

In cui la prima eguaglianza rappresenta la fase plastica, mentre l’ultima è verificata quando il tensore delle tensioni rimane all’interno del dominio di snervamento (fase elastica). La funzione “Y(S)” rappresenta la superficie di snervamento del materiale considerato (in una prova monoassiale rappresenterebbe semplicemente la tensione di snervamento, spesso indicata con σ_s).

La dipendenza di “Y” dalla funzione “S” rappresenta l’incrudimento del materiale. Se, dalle prove in laboratorio risulta “Y” costante, il materiale è definito “plastico perfetto”, altrimenti presenterà un certo incrudimento.

Dalla definizione di \mathbf{N}^p come tensore simmetrico e deviatorico, cerchiamo una sua forma tramite i suoi invarianti ortogonali (traccia, traccia del cofattore e determinante) ottenendo:

$$I_1(\mathbf{N}^p) = 0, \quad I_2(\mathbf{N}^p) = -\frac{1}{2}, \quad I_3(\mathbf{N}^p) = \det \mathbf{N}^p.$$

Essendo note a priori la traccia (I_1), la traccia del cofattore (I_2) e considerando i legami costitutivi isotropi, si può far dipendere ogni funzione solo dal determinante di \mathbf{N}^p , in particolare:

$$\hat{\mathbf{T}}_0(\mathbf{N}^p, S) = \alpha_1(\det \mathbf{N}^p, S) \mathbf{N}^p + \alpha_2(\det \mathbf{N}^p, S) [\mathbf{N}^{p2} - \frac{1}{3} \mathbf{1}]$$

$$h(\mathbf{N}^p, S) = h(\det \mathbf{N}^p, S).$$

Dalle deduzioni sovraesposte, si può andare a considerare la dissipazione di energia plastica come:

$$\delta = Y(e^p) |\dot{\mathbf{E}}^p| = Y(e^p) \dot{e}^p$$

2.1.2. Analisi dell’incrudimento

Analizziamo ora in maniera analitica le funzioni sopra esposte al fine di caratterizzare i diversi comportamenti possibili dei materiali. Esplicitiamo prima le condizioni iniziali sul tempo (“t”) per i vari elementi d’interesse:

$$\dot{e}^p = |\dot{\mathbf{E}}^p|, \quad e^p(\mathbf{X}, 0) = 0.$$

$$\dot{S} = h(S) |\dot{\mathbf{E}}^p| \quad \text{per } t \geq 0,$$

$$S(0) = 0.$$

Osserviamo anche che:

$$\dot{S} = \frac{d\hat{S}}{de^p} \dot{e}^p = h(S) |\dot{\mathbf{E}}^p|,$$

Passiamo ora all’analisi vera e propria della seguente funzione:

$$\frac{d\hat{Y}(e^p)}{de^p} = Y'(\hat{S}(e^p)) \frac{d\hat{S}(e^p)}{de^p}$$

$$= Y'(S) h(S) \Big|_{S=\hat{S}(e^p)}$$

$$= \hat{H}(e^p).$$

La funzione risultante determina il comportamento incrudente positivo o negativo (hardening o softening) del materiale studiato. In particolare, nei punti in cui la funzione “H” sarà positiva, avremo una fase di hardening, mentre ove essa è negativa softening (ovviamente nei punti di passaggio “H” sarà nulla).

2.1.3. Superficie di snervamento e inversione

Ricordando la deduzione:

$$\delta = Y(e^P)|\dot{\mathbf{E}}^P| = Y(e^P) \dot{e}^P$$

Si avrà anche:

$$\frac{\partial \delta(\dot{\mathbf{E}}^P, e^P)}{\partial \dot{\mathbf{E}}^P} = Y(e^P) \mathbf{N}^P$$

E dunque, in condizioni di snervamento, in analogia con la teoria dell’elasticità:

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial \delta(\dot{\mathbf{E}}^P, e^P)}{\partial \dot{\mathbf{E}}^P}$$

Dopo questa deduzione si passa a definire la vera e propria superficie di snervamento (“f”) tramite:

$$f = |\mathbf{T}_0| - Y(e^P)$$

La condizione per cui lo stato di tensione del corpo è plastico sarà la seguente:

$$f = 0 \quad \dot{\mathbf{E}}^P \neq \mathbf{0}$$

Mentre, per la fase elastica:

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \mathbf{0} \quad f < 0$$

Queste relazioni, dunque, rappresentano un set di equazioni di Kuhn-Tucker, riassumibili con:

$$\dot{e}^P f = 0$$

(tenendo presente che la funzione f è, per come è stata definita in questa fase, non positiva e la deformazione plastica cumulata è non negativa).

Passiamo ora allo sviluppo del problema evolutivo calcolando l'evoluzione della superficie di snervamento nel tempo:

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \overline{|\dot{\mathbf{T}}_0|} - \overline{Y(e^P)} \\
 &= \frac{\mathbf{T}_0}{|\mathbf{T}_0|} : \dot{\mathbf{T}}_0 - H(e^P) |\dot{\mathbf{E}}^P| \\
 &= \mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{T}}_0 - H(e^P) |\dot{\mathbf{E}}^P| \\
 &= 2\mu \mathbf{N}^P : (\dot{\mathbf{E}}_0 - \dot{\mathbf{E}}^P) - H(e^P) |\dot{\mathbf{E}}^P|,
 \end{aligned}$$

Considerando \mathbf{N}^P deviatorico ed $\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}}^P = |\dot{\mathbf{E}}^P|$

$$\dot{f} = 2\mu \mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} - [2\mu + H(e^P)] |\dot{\mathbf{E}}^P|$$

Si passa ora alla definizione del seguente parametro di rigidità:

$$\beta(e^P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\mu}{2\mu + H(e^P)}$$

Tramite queste considerazioni si vanno a definire le fasi in cui il materiale si può trovare, partendo dalla superficie di snervamento:

1- Scarico elastico

In cui è verificata la condizione

$$\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} < 0$$

In questa, al fine di mantenere le condizioni:

$$|\dot{\mathbf{E}}^P| \geq 0 \quad \text{ed} \quad \dot{e}^P f = 0$$

Si avrà necessariamente:

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \mathbf{0} \quad \text{ed} \quad \dot{f} < 0$$

2- Carico neutro

Questo caso è definito mediante

$$\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} = 0.$$

In questo caso avremo, come sopra

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \mathbf{0} \quad \text{ed} \quad \dot{f} < 0$$

3- Carico plastico

Definito mediante

$$\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} = 0$$

In cui la funzione “f” non può essere negativa e, siccome non può essere positiva per definizione, rimane nulla, restituendo una velocità di deformazione plastica non nulla, ed in particolare, come dedotto sopra:

$$|\dot{\mathbf{E}}^P| = \beta(e^P) \mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \beta(e^P) (\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{N}^P \neq \mathbf{0}$$

Definendo ora il seguente coefficiente

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{se } f < 0, \quad \text{oppure } f = 0 \text{ ed } \mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} \leq 0, \\ 1 & \text{se } f = 0 \text{ ed } \mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}} > 0, \end{cases}$$

Possiamo andare a riassumere i tre casi di carico tramite la formula

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \chi \beta(e^P) (\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{N}^P$$

Definendo il tensore della velocità di deformazione plastica in questo modo e definendo il tensore di deformazione elastica come differenza tra la deformazione totale e quella plastica, si arriva a

$$\mathbf{T} = 2\mu(\mathbf{E} - \mathbf{E}^P) + \lambda \text{tr} \mathbf{E}$$

$$\dot{\mathbf{T}} = 2\mu \dot{\mathbf{E}} + \lambda (\text{tr} \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{1} - 2\mu \chi \beta(e^P) (\mathbf{N}^P : \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{N}^P$$

Con cui, aggiungendo le condizioni di equilibrio e le condizioni iniziali (a t=0), si può procedere al calcolo con elementi finiti.

2.2. PLASTICITÀ DI AIFANTIS

2.2.1. Introduzione

Dalle evidenze sperimentali e dalle simulazioni effettuate in letteratura (un esempio verrà riportato in seguito) risulta necessario modificare la teoria di Mises con l'aggiunta di un termine non locale, direttamente proporzionale al laplaciano della plasticità cumulata, come segue:

$$\mathbf{T}_0 = (Y(e^P) - \beta \Delta e^P) \mathbf{N}^P$$

In questa formula “ β ” (strettamente positivo) rappresenta il peso del termine non locale (a differenza del capitolo precedente, in cui veniva usato diversamente).

Risulta utile, inoltre, definire la tensione:

$$\tau = \mathbf{T}_0 : \mathbf{N}^P$$

$$\tau = Y(e^P) - \beta \Delta e^P$$

Questa nuova formulazione rappresenta una forma di equilibrio microscopico. Le teorie che ricavano le proprie relazioni costitutive tramite il gradiente della plasticità cumulata sono dette appunto “gradienttheory” o plasticità di gradiente.

La teoria che viene citata in questa tesi è la teoria di Aifantis basata sulle forze virtuali ed è tratta da [1]. In queste trattazioni all'energia interna elastica del materiale, viene aggiunta sia la componente plastica puntuale che il termine plastico non locale, ottenendo la seguente formulazione dell'energia interna:

$$\mathcal{I}(P) = \int_P (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e + \tau^P \dot{e}^P + \xi^P \cdot \nabla \dot{e}^P) dv$$

Le potenze virtuali risultano dunque:

$$\boxed{\underbrace{\int_{\partial P} (\mathbf{t}(\mathbf{n}) \dot{\mathbf{u}} + \chi(\mathbf{n}) \dot{e}^P) da + \int_P \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv}_{\mathcal{W}(P)} = \underbrace{\int_P (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}^e + \tau^P \dot{e}^P + \xi^P \cdot \nabla \dot{e}^P) dv}_{\mathcal{I}(P)}}.$$

2.2.2. Equazioni di bilancio

Andando ora a perturbare il sistema con le perturbazioni:

$$\mathcal{V} = (\bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{E}}^e, \bar{e}^P)$$

E, data la simmetria della matrice \mathbf{T} , si hanno, andando a considerare la sola perturbazione di spostamento, le condizioni di equilibrio macroscopico classiche:

$$\int_{\partial P} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \bar{\mathbf{u}} \, da + \int_P \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dv = \int_P \mathbf{T} : \nabla \bar{\mathbf{u}} \, dv.$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$$

$$\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Mentre, tenendo gli spostamenti nulli e perturbando solo mediante la plasticità cumulata, si ha:

$$\int_{\partial P} \chi(\mathbf{n}) \bar{e}^P \, da = \int_P [(\tau^P - \tau) \bar{e}^P + \xi^P \cdot \nabla \bar{e}^P] \, dv$$

Che, per il teorema della divergenza diventa:

$$\int_{\partial P} (\chi(\mathbf{n}) - \xi^P \cdot \mathbf{n}) \bar{e}^P \, da + \int_P (\tau - \tau^P + \text{Div} \xi^P) \bar{e}^P \, dv = 0.$$

Da cui si ottengono le seguenti conclusioni:

$$\chi(\mathbf{n}) = \xi^P \cdot \mathbf{n} \qquad \tau = \tau^P - \text{Div} \xi^P.$$

Si osserva ora il problema evolutivo incrementando la plasticità come:

$$e^P(0) = 0 \qquad \dot{e}^P(t) \geq 0$$

Ricordiamo che il parametro e^P può rappresentare ad esempio il livello di dislocazioni immagazzinato da un materiale metallico, il livello di fessurazione di un calcestruzzo fibrorinforzato o, più in generale, una modifica di qualunque genere che il materiale in questione ha subito a seguito del suo superamento della fase elastica di deformazione. L'energia interna del corpo (Ψ) può esser divisa nella componente elastica e plastica (Ψ^P e Ψ^e). Per la parte elastica si assume che il materiale sia elastico lineare e isotropo, con la classica formulazione di energia e legame costitutivo già citata, mentre l'energia plastica dipenderà dal termine non locale e dal termine locale relativi alla plasticità cumulata:

$$\Psi^P = \hat{\Psi}^P(e^P, \mathbf{g}^P) \quad \text{in cui} \quad \mathbf{g}^P \stackrel{\text{def}}{=} \nabla e^P$$

Vengono introdotti ora i termini relativi all'energia plastica:

$$\tau_{\text{cn}}^P = \hat{\tau}_{\text{cn}}^P(e^P, \mathbf{g}^P) = \frac{\partial \hat{\Psi}^P(e^P, \mathbf{g}^P)}{\partial e^P}$$

$$\xi_{\text{cn}}^P = \hat{\xi}_{\text{cn}}^P(e^P, \mathbf{g}^P) = \frac{\partial \hat{\Psi}^P(e^P, \mathbf{g}^P)}{\partial \mathbf{g}^P}$$

Questi termini sono stati definiti in modo tale che, nel problema evolutivo, si ottenga:

$$\dot{\Psi}^P = \tau_{\text{cn}}^P \dot{e}^P + \xi_{\text{cn}}^P \cdot \dot{\mathbf{g}}^P$$

In questo modo si ha la seguente dissipazione (δ):

$$\delta = (\tau^P - \tau_{\text{cn}}^P) \dot{e}^P + (\xi^P - \xi_{\text{cn}}^P) \cdot \dot{\mathbf{g}}^P \geq 0$$

Riscrivendo ora il termine dissipativo si ottiene:

$$\delta = \tau_{\text{dis}}^P \dot{e}^P + \xi_{\text{dis}}^P \cdot \dot{\mathbf{g}}^P \geq 0$$

In cui sono stati definiti implicitamente:

$$\tau_{\text{dis}}^P = \tau^P - \tau_{\text{cn}}^P \quad \text{ed} \quad \xi_{\text{dis}}^P = \xi^P - \xi_{\text{cn}}^P$$

Ambedue dipendenti dalla plasticità cumulata e dal gradiente della stessa. Ricordando ora la definizione:

$$\tau = \tau^P - \text{Div} \xi^P$$

Avremo che la parte plastica della tensione può esser riscritta come:

$$\tau = \tau_{\text{cn}}^P + \tau_{\text{dis}}^P - \text{Div}(\xi_{\text{cn}}^P + \xi_{\text{dis}}^P)$$

$$\tau = \hat{\tau}_{\text{dis}}^P(e^P, \mathbf{g}^P) + \frac{\partial \hat{\Psi}^P(e^P, \mathbf{g}^P)}{\partial e^P} - \text{Div} \left(\hat{\xi}_{\text{dis}}^P(e^P, \mathbf{g}^P) + \frac{\partial \hat{\Psi}^P(e^P, \mathbf{g}^P)}{\partial \mathbf{g}^P} \right)$$

Aifantis fa due ulteriori assunzioni:

$$1- \quad \Psi^P = \frac{1}{2} \beta |\mathbf{g}^P|^2 \quad (\beta \geq 0)$$

$$2- \quad \tau_{\text{dis}}^P = Y(e^P) \quad \text{e} \quad \xi_{\text{dis}}^P \equiv 0$$

Da cui si ottiene:

$$1- \quad \xi_{cn}^P = \beta \mathbf{g}^P \quad \text{e} \quad \tau_{cn}^P \equiv 0$$

$$2- \quad \text{Div} \xi_{cn}^P = \beta \Delta e^P$$

Tramite queste ultime assunzioni e relative deduzioni si ottiene:

$$\tau = Y(e^P) - \beta \Delta e^P.$$

In cui il termine locale è dissipativo e il termine non locale energetico.

2.2.3. Condizioni al contorno

Nel precedente sottocapitolo è stata ottenuta la condizione di minimo energetico da soddisfare sulla frontiera del corpo:

$$\int_{\partial B} (\xi^P \cdot \mathbf{n}) \dot{e}^P da \quad \text{ovvero} \quad (\xi^P \cdot \mathbf{n}) \dot{e}^P = 0 \quad \text{su} \quad \partial B$$

Si avranno porzioni di frontiera che, in generale, potranno soddisfare tale condizione in due diversi modi:

$$\dot{e}^P = 0 \quad \text{on} \quad S_{\text{hard}} \quad \text{ed} \quad \xi^P \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on} \quad S_{\text{free}}$$

In pratica nelle regioni in cui le condizioni al contorno sono di tipo “hard”, le deformazioni plastiche sono impedito o trascurabili (magari tramite un forte incremento di sezione), mentre nelle regioni in cui le condizioni al contorno sono di tipo “free” o “soft”, le deformazioni plastiche sono appunto libere. Nel capitolo seguente queste condizioni verranno considerate con un approccio più pratico.

3 MODELLO VARIAZIONALE 1-D

3.1. DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

3.1.1. Introduzione

L'analisi di un modello iniziale 1-D abbastanza elaborato risulta essenziale per quanto riguarda la calibrazione del modello globale a più dimensioni (definendo i parametri caratteristici del materiale). È molto importante, quindi, costruire un modello matematico che descriva, nel dettaglio, una prova di trazione. Per la costruzione di questo modello specifico, ci si baserà su [2]. Si parte, dunque, dalla specializzazione dell'energia interna della teoria di Aifantis come segue:

$$\Psi(u_t, \gamma_t, e_t) = \int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - \gamma_t)^2 + Aw(e_t) + \frac{1}{2} A\alpha(e_t)e_t'^2 dx$$

In cui la dipendenza dal parametro evolutivo “t” (che per semplicità chiameremo tempo, in quanto non si considerano effetti viscosi) viene espresso con il pedice, mentre la derivata di un elemento, rispetto al parametro da cui dipende con un apostrofo. I termini usati nella formula sono i seguenti:

x = posizione all'interno della linea d'asse della barra

$u_t = u_t(x)$ = spostamento del punto

$\gamma_t = \gamma_t(x)$ = parte plastica della deformazione

$e_t = e_t(x) = \int_0^t |\dot{\gamma}| dt$ = plasticità cumulata

E = modulo di Young

$A = A(x)$ = area della sezione (normalmente costante)

$w = w(e_t)$ = energia elastica locale

$\alpha = \alpha(e_t)$ = coefficiente del termine energetico non locale (costante in questa trattazione)

Si richiede (in accordo con la teoria di Aifantis) che la funzione dell'energia elastica locale sia dissipativa, cioè:

$$\dot{w} = w' \dot{e}_t \geq 0$$

Ma, vista la definizione di plasticità cumulata, ciò si riduce a:

$$w' \geq 0$$

Si ricordano, infine, le definizioni di tensione di trazione e forza normale:

$$\sigma_t(x) = E(u_t'(x) - \gamma_t(x)) \quad ; \quad f_t(x) = A(x)\sigma_t(x)$$

3.1.2. Equilibrio

La condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio corrisponde alla condizione di minimo del funzionale energetico. Si procede dunque con il calcolo della variazione prima dello stesso:

$$\Psi(u_t, \gamma_t, e_t) = \int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - \gamma_t)^2 + Aw(e_t) + \frac{1}{2} A\alpha(e_t)e_t'^2 dx$$

$$\delta\Psi(u_t, \gamma_t, |\gamma_t|, \delta u_t, \delta\gamma_t, |\delta\gamma_t|) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(u_t + h\delta u_t, \gamma_t + h\delta\gamma_t, |\gamma_t| + h|\delta\gamma_t|) - \Psi(u_t, \gamma_t, |\gamma_t|)}{h}$$

In cui la plasticità cumulata è stata specializzata tramite la deformazione plastica in valore assoluto. Per semplicità verranno ora trattati separatamente il termine elastico (pedice "el"), plastico locale (pedice "loc") e plastico non locale (pedice "nloc"). Si inizia con il termine elastico:

$$\delta\Psi_{el} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - h\delta u_t' - \gamma_t + h\delta\gamma_t)^2 dx - \int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - \gamma_t)^2 dx}{h}$$

$$\delta\Psi_{el} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l \frac{1}{2} EA[(u_t' - \gamma_t)^2 + h^2(\delta u_t' - \delta\gamma_t)^2 + 2h(u_t' - \gamma_t)(\delta u_t' - \delta\gamma_t)] dx - \int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - \gamma_t)^2 dx}{h}$$

$$\delta\Psi_{el} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l \frac{1}{2} EA[h(\delta u_t' - \delta\gamma_t)^2 + 2(u_t' - \gamma_t)(\delta u_t' - \delta\gamma_t)] dx}{1} = \int_0^l EA(u_t' - \gamma_t)(\delta u_t' - \delta\gamma_t) dx = \int_0^l f \delta u_t' - f \delta\gamma_t dx$$

considero:

$$(f \delta u_t)' = f' \delta u_t + f \delta u_t' \quad \rightarrow \quad f \delta u_t' = (f \delta u_t)' - f' \delta u_t$$

$$\delta\Psi_{el} = \int_0^l -f' \delta u_t - f \delta\gamma_t dx + [f \delta u_t]_0^l = \int_0^l -f' \delta u_t - f \delta\gamma_t dx$$

Si passa ora all'analisi del termine locale:

$$\delta\Psi_{loc} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l Aw(|\gamma_t| + h|\delta\gamma_t|) dx - \int_0^l Aw(|\gamma_t|) dx}{h} = \int_0^l A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(|\gamma_t| + h|\delta\gamma_t|) - w(|\gamma_t|)}{h} dx$$

$$\delta\Psi_{loc} = \int_0^l A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(|\gamma_t|) + h|\delta\gamma_t| w'(|\gamma_t|) + o(h) - w(|\gamma_t|)}{h} dx = \int_0^l Aw' |\delta\gamma_t| dx$$

Ed, infine, a quello non locale

$$\delta\Psi_{nloc} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l \frac{1}{2} A\alpha(|\gamma_t| + h|\delta\gamma_t|)(|\gamma_t| + h|\delta\gamma_t|)'^2 dx - \int_0^l \frac{1}{2} A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t'|^2 dx}{h}$$

$$\delta\Psi_{nloc} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^l \frac{1}{2} A[\alpha(|\gamma_t|) + h|\delta\gamma_t|\alpha'(|\gamma_t|) + o(h)](|\gamma_t'|^2 + h^2|\delta\gamma_t'|^2 + 2h|\delta\gamma_t'|\gamma_t') dx - \int_0^l \frac{1}{2} A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t'|^2 dx}{h}$$

$$\delta\Psi_{nloc} = \int_0^l A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t'| + \frac{1}{2} A|\delta\gamma_t|\alpha'(|\gamma_t|)|\gamma_t'|^2 dx$$

considerando:

$$(A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t')' = A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t'| + |\delta\gamma_t| \frac{d}{dx}(A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t')$$

$$A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t' = (A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t')' - |\delta\gamma_t| \frac{d}{dx}(A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t')$$

sostituendo:

$$\delta\Psi_{nloc} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} A\alpha'(|\gamma_t|)|\gamma_t'|^2 - \frac{d}{dx}(A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t') \right) |\delta\gamma_t| dx + [A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t']_0^l$$

Ricomponendo le varie parti della variazione prima si ottiene:

$$\delta\Psi = \int_0^l -f' \delta u_t - f \delta\gamma_t + \left(Aw' + \frac{1}{2} A\alpha'(|\gamma_t|)|\gamma_t'|^2 - \frac{d}{dx}(A\alpha(|\gamma_t|)|\gamma_t') \right) |\delta\gamma_t| dx + [A\alpha(|\gamma_t|)|\delta\gamma_t'|\gamma_t']_0^l$$

Da notare:

- 1- Se considero nulla la deformazione plastica e non nulla quella totale, ottengo che la forza di trazione (f), deve essere costante lungo la barra (soluzione statica standard)
- 2- I termini alla frontiera possono essere annullati in due modi diversi. Avremo dunque, come trattato nel precedente capitolo, condizioni al contorno hard ($e_t = 0$ su $x=0$ e $x=l$) oppure soft ($e_t' = 0$ su $x=0$ e $x=l$).

Definendo ora la superficie di snervamento come:

$$f_c = Aw' + \frac{1}{2} A\alpha'(e_t)e_t'^2 - \frac{d}{dx}(A\alpha(e_t)e_t')$$

Avremo le condizioni di equilibrio:

$$f' = 0 \rightarrow f(x) = \text{costante}$$

$$|f| \leq f_c \rightarrow \text{condizione di plasticità}$$

Si passa ora alla risoluzione del problema evolutivo, considerando nota la soluzione al tempo “t” ed andando a determinare la soluzione al tempo “t+τ”.

3.1.3. Evoluzione

Si inizia l’analisi dell’evoluzione del problema precisando che le derivate rispetto al tempo delle funzioni verranno indicate con un punto sopra la lettera relativa alla funzione stessa.

Va innanzi tutto calcolata la derivata dell’energia interna rispetto al tempo, tenendo in conto le conclusioni necessarie all’equilibrio, ottenendo:

$$\dot{\Psi} = \int_0^l (-\text{sgn}(\dot{\gamma}_t) f_t + f_{tc}) \dot{e} dx$$

Con $\text{sgn}(x)$ = funzione “segno”.

Considerando ora lo sviluppo dell’energia elastica nel tempo, ne va calcolata la variazione prima per poi imporre l’equilibrio. Considerando l’istante “t” equilibrato, potremo considerare l’istante “t+τ” come:

$$\delta\Psi_{t+\tau} = \delta\Psi_t + \tau\delta\dot{\Psi}_t = \delta\Psi_t + \tau\delta\dot{\Psi}_t$$

Detto questo, imponendo la non negatività della variazione prima dell’energia elastica nel tempo, si ottiene:

$$(-\text{sgn}(\dot{\gamma}_t) f_t + f_{ct}) \delta\dot{e}_t \geq 0$$

Osserviamo che, per definizione, la perturbazione sulla plasticità cumulata, deve essere ammissibile, dunque va rispettata la condizione:

$$\dot{e} + \delta\dot{e} \geq 0 \quad \forall x \in (0, l)$$

Avremo dunque punti in cui la plasticità sarà nulla. In questi punti varrà:

$$-\text{sgn}(\dot{\gamma}) f + f_c \geq 0 \quad \text{con} \quad \dot{e} = 0$$

Per gli altri punti invece:

$$-\text{sgn}(\dot{\gamma}) f + f_c = 0 \quad \text{con} \quad \dot{e} \geq 0$$

Questi due ultimi enunciati possono esser riassunte nelle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$-\text{sgn}(\dot{\gamma}) f + f_c \geq 0 \quad \dot{e} \geq 0 \quad (-\text{sgn}(\dot{\gamma}) f + f_c) \dot{e} = 0$$

Oltre a questa deduzione risulta interessante notare che, sostituendo $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon} \text{sgn}(\dot{\gamma})$, si ottiene, in condizione di plasticizzazione:

$$\dot{\gamma} = \frac{f}{f_c} \dot{\epsilon}$$

Che si ritrova nella precedente trattazione 3D.

Da ciò si può risalire già ad una possibile procedura di calcolo, considerando:

$$\delta\Psi_{t+\tau} = \delta\Psi_t + \tau\delta\dot{\Psi}_t + \frac{1}{2}\tau^2\delta\ddot{\Psi}_t = \delta\Psi_t + \tau F_t(u_t, \gamma_t, \dot{u}_t, \dot{\gamma}_t) \geq 0$$

Che diventa (data la soluzione al tempo “t” nota, e la non negatività di “τ”):

$$F(u_t, \gamma_t, \dot{u}_t, \dot{\gamma}_t) \geq 0$$

Applicando le condizioni al contorno (soft e/o hard) si può procedere con la costruzione di un algoritmo step-by-step (al passo) che, in ogni passo, prevede la minimizzazione della funzione “F” tramite una procedura valida (es. generalizzazione dell’algoritmo di Newton-Raphson per l’ottimizzazione vincolata o altro).

Al fine di trovare una soluzione al continuo si procede con il calcolo della variazione prima della funzione “F” come segue:

$$\delta F_t(u_t, \gamma_t, \dot{u}_t, \dot{\gamma}_t, \delta\dot{u}_t, \delta\dot{\gamma}_t) = \delta F_t$$

$$\delta F_t = \int_0^l [-(f_t + \tau \dot{f}_t)' \delta\dot{u}_t + (f_{ct} + \tau \dot{f}_{ct} - (f_t + \tau \dot{f}_t)) \delta\dot{\gamma}_t] dx + [(f_t + \tau \dot{f}_t) \delta\dot{u}_t + (g_t + \tau \dot{g}_t) \delta\dot{\gamma}_t]_0^l$$

$$\delta F_t = \int_0^l [-(f_t + \tau \dot{f}_t)' \delta\dot{u}_t + (f_{ct} + \tau \dot{f}_{ct} - (f_t + \tau \dot{f}_t)) \delta\dot{\gamma}_t] dx + [(g_t + \tau \dot{g}_t) \delta\dot{\gamma}_t]_0^l$$

$$\text{con } g = A(x)\alpha_t(\gamma_t(x))\gamma'(x)$$

In analogia a quanto precedente detto, si ritrovano la condizione di equilibrio e le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$(f_t + \tau \dot{f}_t)' = 0$$

$$f_{ct} + \tau \dot{f}_{ct} - (f_t + \tau \dot{f}_t) \geq 0$$

$$\dot{\gamma}_t \geq 0$$

$$[f_{ct} + \tau \dot{f}_{ct} - (f_t + \tau \dot{f}_t)] \dot{\gamma}_t \geq 0$$

Per quanto riguarda il termine ai due estremi, esso restituisce (come in precedenza) condizioni al contorno di tipo “hard” o “soft”.

3.1.4. Ricerca della soluzioni

Consideriamo ora la barra a sezione costante con deformazione crescente rispetto al tempo. In campo plastico, nota la soluzione al tempo "t" (sempre in campo plastico, o sul punto di passaggio tra fase elastica e fase plastica) si avrà:

$$\dot{\gamma}_t > 0 \rightarrow f_{ct} + \tau \dot{f}_{ct} - (f_t + \tau \dot{f}_t) = 0$$

Considerando ciò che è stato precedentemente detto, si può semplificare, ottenendo:

$$\dot{f}_{ct} = \dot{f}_t$$

Semplificando ora per l'area (costante), ricordando le definizioni delle due forze e considerando il parametro "α" costante, si ha:

$$w'' \dot{\gamma}_t - \alpha \dot{\gamma}_t'' = \dot{\sigma}_t$$

$$\dot{\gamma}_t'' - \frac{w''}{\alpha} \dot{\gamma}_t = -\frac{\dot{\sigma}_t}{\alpha}$$

In questo modo si ottiene un problema differenziale che può essere risolto con le condizioni al contorno adeguate (soft o hard). Definiamo ora il seguente parametro:

$$k = \sqrt{\frac{|w''|}{\alpha}}$$

Si osserva, inoltre che, dato che la tensione è costante, essa sarà anche uguale alla tensione media. Dalle definizioni risulta dunque:

$$\dot{\sigma}_t = E(\dot{u}_t' - \bar{\dot{\gamma}}_t) \quad \text{con} \quad \bar{\dot{\gamma}}_t = \frac{1}{l} \int_0^l \dot{\gamma}_t dx$$

Dopodiché si passa alla risoluzione dell'equazione nei casi in cui l'energia sia convessa ($w'' > 0$), concava ($w'' < 0$), o lineare ($w'' = 0$) a seconda delle condizioni al contorno (hard o soft).

Iniziamo con il caso di energia convessa, $w'' > 0$:

$$\dot{\gamma}_t'' - k^2 \dot{\gamma}_t = -\frac{\dot{\sigma}_t}{\alpha}$$

1. -c.c. HARD

Le due soluzioni dell'omogenea sono:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{t1} &= B e^{kx} & ; & & \dot{\gamma}_{t1}'' &= B k^2 e^{kx} \\ \dot{\gamma}_{t2} &= C e^{-kx} & ; & & \dot{\gamma}_{t1}'' &= C k^2 e^{-kx} \end{aligned}$$

Mentre per la particolare basterà sommare:

$$\dot{\gamma}_{tp} = \frac{\dot{\sigma}_t}{\alpha} k^{-2} = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad ; \quad \dot{\gamma}_{tp}'' = 0$$

Ottenendo:

$$\dot{\gamma}_t = B e^{kx} + C e^{-kx} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad ; \quad \dot{\gamma}_{t1}'' = B k^2 e^{kx} + C k^2 e^{-kx}$$

Data la simmetria del problema, si riscrive come:

$$\dot{\gamma}_t = \frac{B}{e^{-kl/2}} e^{k(x-l/2)} + \frac{C}{e^{kl/2}} e^{-k(x-l/2)} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''}$$

$$\dot{\gamma}_t = B_1 e^{k(x-l/2)} + C_1 e^{-k(x-l/2)} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''}$$

Per la determinazione delle costanti si applicano le condizioni al contorno, si procede come segue:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t(0) = B_1 e^{-kl/2} + C_1 e^{kl/2} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \\ \dot{\gamma}_t(1) = B_1 e^{kl/2} + C_1 e^{-kl/2} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \end{cases} \quad \text{sottraendo la prima con la seconda:}$$

$$\begin{cases} B_1(e^{-kl/2} - e^{kl/2}) + C_1(e^{kl/2} - e^{-kl/2}) = 0 \rightarrow B_1 = C_1 = D \\ D(e^{kl/2} + e^{-kl/2}) = -\frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \end{cases}$$

$$D = -\frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \frac{1}{(e^{kl/2} + e^{-kl/2})} = -\frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \frac{1}{2 \cosh(kl/2)}$$

Sostituendo ora nella soluzione principale:

$$\dot{\gamma}_t = (e^{kx} + e^{-kx}) \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \frac{-1}{2 \cosh(kl/2)} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \left(1 - \frac{\cosh(k(x-l/2))}{\cosh(kl/2)} \right) \text{ mentre}$$

$$\dot{\sigma}_t = w'' \dot{u}_t \left(1 - \frac{2 \tanh(kl/2)}{kl} + \frac{w''}{E} \right)^{-1}$$

2. - c.c. SOFT

Partiamo da

$$\dot{\gamma}_t = B e^{kx} + C e^{-kx} + \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad ; \quad \dot{\gamma}_{t1}' = B k e^{kx} - C k e^{-kx}$$

Applichiamo dunque le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_t'(0) = Bk - Ck = 0 \\ \dot{\gamma}_t'(l) = Bke^{kx} - Cke^{-kx} = 0 \\ B = C \\ B(e^{kx} - e^{-kx}) = 0 \\ B = C = 0 \end{cases}$$

Da cui, banalmente:

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad ; \quad \dot{\sigma}_t = w'' \dot{u}_t' \left(1 + \frac{w''}{E}\right)^{-1}$$

Si può notare che, in ambo i casi, al crescere dello spostamento ($\dot{u}_t' > 0$), si ottiene una deformazione crescente nel tempo ($\dot{\sigma}_t > 0$). Per $w'' > 0$ si ha dunque una fase di hardening (incrudimento positivo).

Si prosegue ora con il caso lineare, senza riportare i conti, usando $w'' = 0$:

1. - c.c. HARD

$$\dot{\sigma}_t = \frac{12E\alpha}{12\alpha + l^2E} \dot{u}_t' \quad ; \quad \dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{2\alpha} x(l-x)$$

2. - c.c. SOFT

$$\dot{\sigma}_t = 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}_t = \dot{u}_t'$$

Da notare che, nel caso di condizioni al contorno soft, in questo caso non abbiamo incrudimento ($\dot{\sigma}_t = 0$). Il materiale presenta dunque una fase plastica perfetta.

Si conclude con il caso di energia concava (sempre omettendo i calcoli), $w'' < 0$:

1. - c.c. HARD

Essendo la soluzione in forma trigonometrica (soluzione ellittica), vanno distinti i casi di barra "lunga" e barra "corta", questo al fine di soddisfare la condizione $\dot{\gamma}_t \geq 0$. Si procede dunque come segue:

BARRA CORTA:

$$kl \leq 2\pi$$

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \left(1 - \frac{\cos[k((l/2) - x)]}{\cos(kl/2)}\right)$$

BARRA LUNGA

$$kl > 2\pi$$

$$\dot{\gamma}_t = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases} \quad \text{con} \quad \hat{l} = 2\pi / k$$

Al fine di rendere, in seguito, più compatta la soluzione può essere definita la seguente funzione:

$$\psi(kl) = \begin{cases} 1 - \frac{2 \tan(kl/2)}{kl} & 0 < kl \leq 2\pi \\ \frac{2\pi}{kl} & kl > 2\pi \end{cases}$$

2. - c.c. SOFT

Si distinguono di nuovo i due casi:

BARRA CORTA:

$$kl \leq \pi$$

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''}$$

BARRA LUNGA:

$$\dot{\gamma}_t = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases} \quad \text{con} \quad \hat{l} = \pi / k$$

Anche in questo caso si definisce:

$$\psi(kl) = \begin{cases} 1 & 0 < kl \leq \pi \\ \frac{\pi}{kl} & kl > \pi \end{cases}$$

Avendo ora analizzato i casi di condizioni al contorno soft ed hard, tramite la funzione “ ψ ”, il tutto può essere riscritto come:

$$\bar{\dot{\gamma}}_t = \frac{\psi}{\psi + (w''/E)} \dot{\gamma}_t' \quad ; \quad \dot{\sigma}_t = \frac{w''}{\psi + (w''/E)} \dot{\sigma}_t'$$

Ciò vale per ambo le tipologie di condizioni al contorno, varierà naturalmente la funzione “ ψ ”.

Per comprendere l'effetto del segno e dell'entità della derivata seconda dell'energia plastica sul comportamento meccanico dell'elemento, si riportano alcuni esempi di soluzione contenuti in [2]. A tal fine si riscrive la tensione (con condizioni al contorno hard o soft) come:

$$\dot{\sigma}_{h,s} = c_{h,s}(kl, hl) \dot{u}_t' \quad \text{con} \quad h = \sqrt{E/\alpha}$$

Detto ciò, si riportano alcune forme grafiche per una più immediata visualizzazione in nelle seguenti figure (3.1 e 3.2):

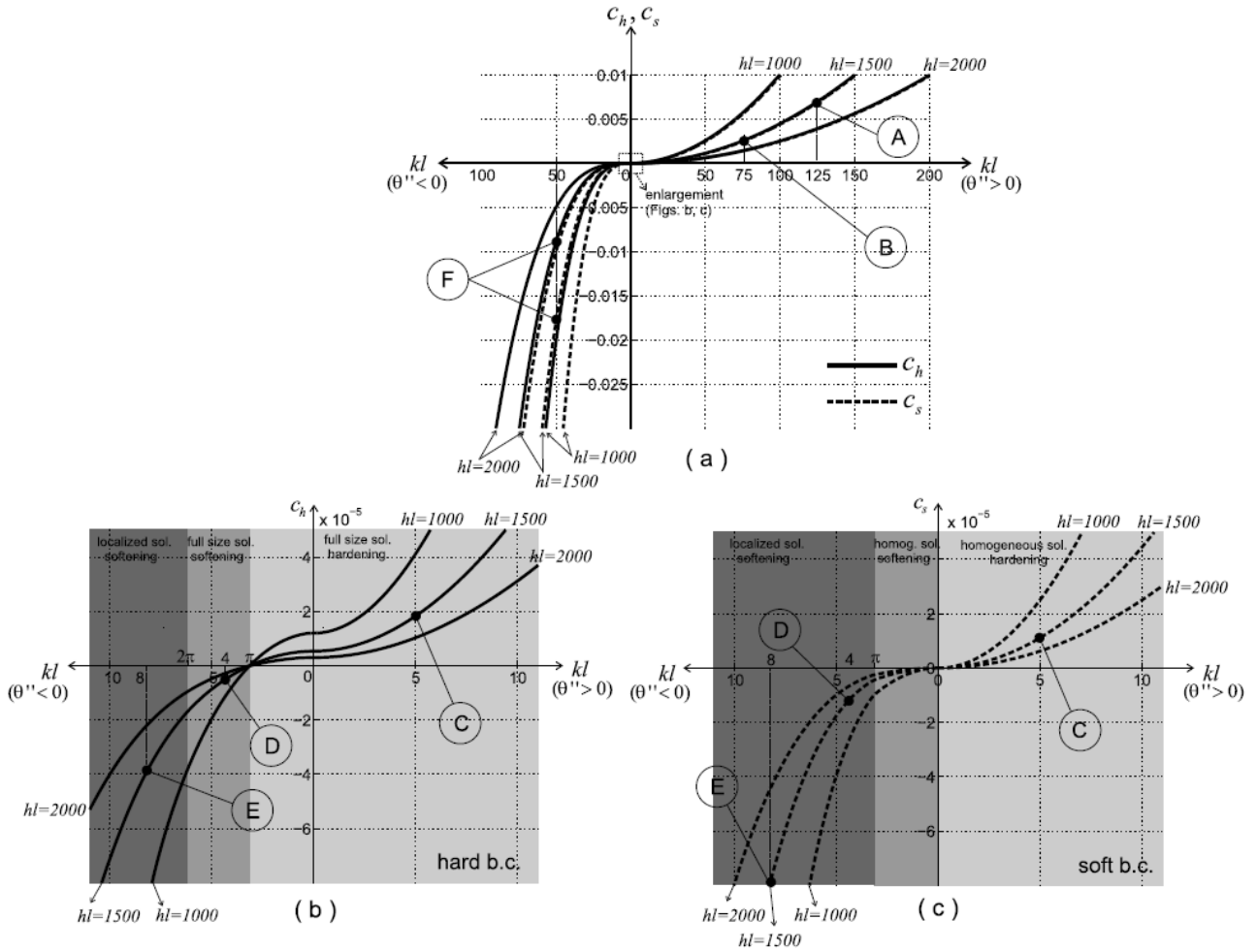


FIGURA 3.1 FORMA DELLA SOLUZIONE (HARDENING, SOFTENING, PLASTICO PERFETTO E SOLUZIONE FULL SIZE O MENO) CON NOMENCLATURA DEI CASI PER 3.2

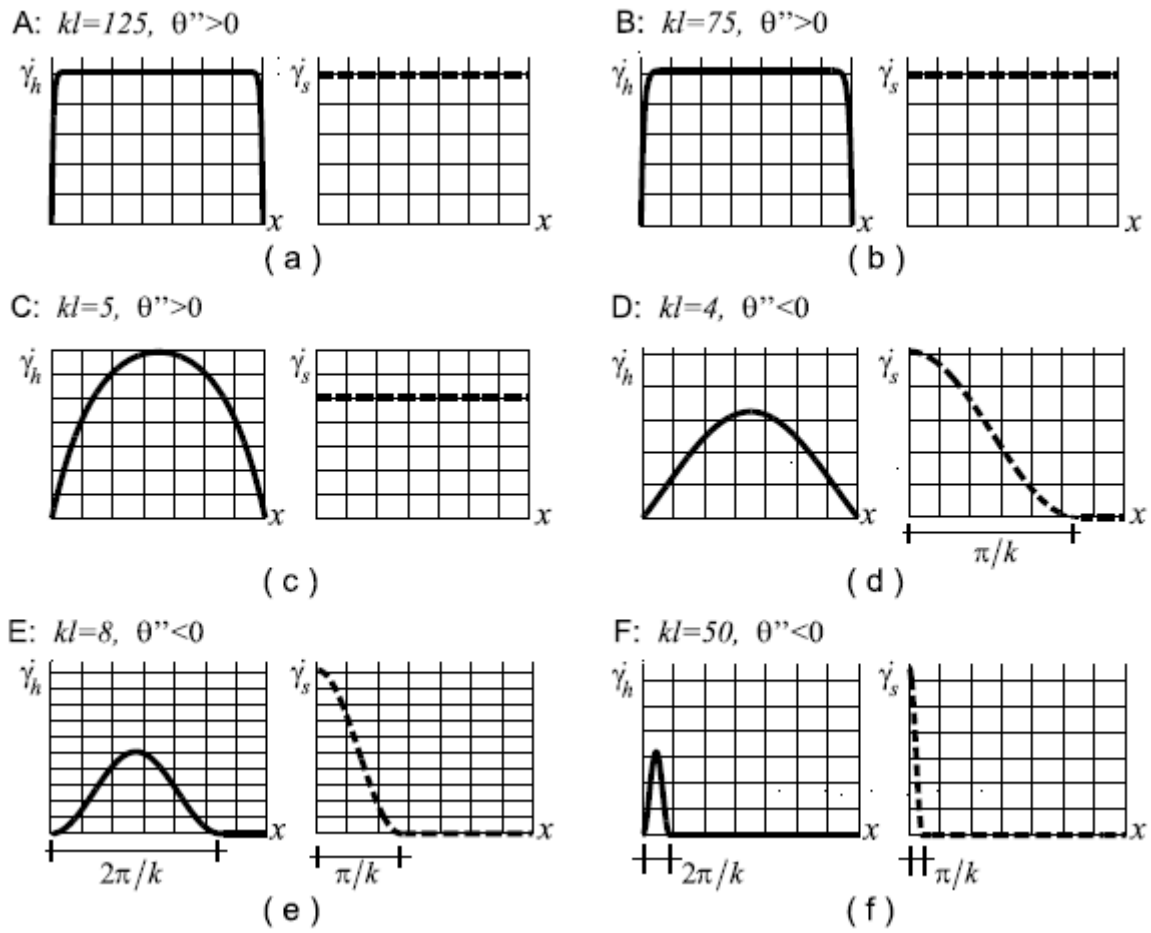


FIGURA 3.2 FORMA DELLE SOLUZIONI

3.1.5. Soluzione in condizioni di stress-hardening

Dati i risultati analitici, al fine di rappresentare il comportamento in fase di hardening di un calcestruzzo fibrorinforzato si deve utilizzare la soluzione:

C.C. HARD

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \left(1 - \frac{\cosh(k(x-l/2))}{\cosh(kl/2)} \right) \quad ; \quad \dot{\sigma}_t = w'' \dot{u}_t \left(1 - \frac{2 \tanh(kl/2)}{kl} + \frac{w''}{E} \right)^{-1}$$

C.C. SOFT

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad ; \quad \dot{\sigma}_t = w'' \dot{u}_t \left(1 + \frac{w''}{E} \right)^{-1}$$

Si sceglie di approssimare la funzione w ad una funzione quadratica (w'' costante), procedendo con la ricerca dei parametri che la caratterizzano. Si parte naturalmente dai risultati principali di una prova a trazione, ovvero la curva sforzo deformazione. I dati principali da utilizzare in questa fase saranno:

- E = modulo elastico
- σ_{el} = tensione elastica massima (oltre la σ_{el} parte la fase plastica)
- $\varepsilon_{el} = \dot{u}_t'(\sigma = \sigma_{el})$ = deformazione elastica totale
- σ_{max} = tensione massima raggiunta dal materiale
- $d_0 = \dot{u}_t'(\sigma = \sigma_{max})$ = deformazione totale corrispondente a σ_{max}

Definiti i parametri di partenza, dedotti dalla prova a trazione, si procede all'analisi dei risultati analitici, partendo dalla definizione delle costanti:

$$w = \frac{a_1}{2} \gamma_t^2 + a_2 \gamma_t$$

$$w' = a_1 \gamma_t + a_2$$

$$w'' = a_1$$

Partendo dalle formule relative alle condizioni al contorno soft, si osserva:

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \quad \rightarrow \quad \frac{d\gamma_t}{dt} = \frac{1}{w''} \frac{d\sigma_t}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\gamma_t}{d\sigma_t} = \frac{1}{w''}$$

$$d\gamma_t = \frac{1}{w''} d\sigma_t \quad \rightarrow \quad \int_0^{\gamma_t} d\gamma_t = \frac{1}{w''} \int_{\sigma_{el}}^{\sigma_t} d\sigma_t$$

$$\gamma_t = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{w''}$$

Notando che, essendo la tensione costante lungo la barra per l'equilibrio, ed essendo costanti anche w'' e σ_{el} , anche γ sarà costante lungo la barra, quindi uguale al suo valor medio. Utilizzo ora la definizione $\sigma_t = E(u_t' - \bar{\gamma}_t) = E(u_t' - \gamma_t)$, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \sigma_t = E(u_t' - \gamma_t) \\ \gamma_t = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{w''} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{w''} = u_t' - \frac{\sigma_t}{E}$$

Da notare che, considerando trascurabile la parte elastica della deformazione (rispetto alla parte plastica) si ottiene:

$$w'' = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{u_t'} \quad ; \quad \gamma_t = u_t' \quad \text{ovvero} \quad w'' = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{el}}{d_0} \quad ; \quad \gamma_0 = d_0$$

In cui γ_0 rappresenta la deformazione plastica per $\sigma_t = \sigma_{max}$.

Svolgendo ora i conti in modo più preciso si ottiene:

$$w'' = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{u_t' - (\sigma_t / E)} \quad ; \quad \gamma_t = u_t' - (\sigma_t / E) \quad \text{ovvero} \quad w'' = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{el}}{d_0 - (\sigma_{\max} / E)} \quad ; \quad \gamma_0 = d_0 - \frac{\sigma_{\max}}{E}$$

Abbiamo dunque determinato la prima costante ($w'' = a_1$). La seconda costante si ricerca applicando la condizione di Kuhn-Tucker per il punto di passaggio tra la fase elastica e quella di hardening come segue:

$$f_c = f \rightarrow Aw' + \frac{1}{2} A\alpha'(e_t)e_t'^2 - \frac{d}{dx}(A\alpha(e_t)e_t') = A\sigma_t$$

Si calcola ora per il punto specifico (e si semplifica per l'area della sezione):

$$w' + \frac{1}{2} \alpha'(e_t)e_t'^2 - \frac{d}{dx}(\alpha(e_t)e_t') = \sigma_{el} \quad \rightarrow \quad 0a_1 + a_2 = \sigma_{el} \quad \rightarrow \quad a_2 = \sigma_{el}$$

Si ottiene dunque che, per un ramo di hardening con condizioni al contorno di tipo soft, la funzione dell'energia plastica è la seguente:

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{el}}{d_0 - (\sigma_{\max} / E)} \right) \gamma_t^2 + \sigma_{el} \gamma \quad \text{con} \quad \gamma_0 = d_0 - \frac{\sigma_{\max}}{E}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno di tipo hard, si inizia determinando la costante a_2 come per le condizioni soft, ottenendo lo stesso risultato. Si procede poi con la ricerca di w'' e γ_0 come segue:

$$\dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} \left(1 - \frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} \right) \quad \rightarrow \quad d\gamma_t = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} \right) d\sigma_t$$

$$\int_0^{\gamma_t} d\gamma_t = \gamma_t = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} \right) \int_{\sigma_{el}}^{\sigma_t} d\sigma_t = \frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} \right) (\sigma_t - \sigma_{el})$$

Da questo punto in poi si possono applicare due metodi. Si può inizialmente andare a considerare la funzione:

$$\frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})}$$

Normalmente, per le fasi di hardening il parametro k è molto alto. Per valori dell'argomento alti la funzione coseno iperbolico tende ad infinito in modo molto veloce, mentre per valori bassi a 1. Si ha dunque che, trascurando le regioni di bordo (in cui il rapporto tende ad 1), il valore della funzione può essere trascurato:

$$\frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} \approx 0$$

Ottenendo la seguente espressione:

$$\gamma_t = \frac{(\sigma_t - \sigma_{el})}{a_1} \quad \rightarrow \quad a_1 = w'' = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{el})}{\gamma_0}$$

Alla quale, come prima, va aggiunta la condizione $\sigma_t = E(u_t' - \bar{\gamma}_t)$, nota l'espressione di w'' .

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\gamma_0(\sigma_t - \sigma_{el})}{l(\sigma_{max} - \sigma_{el})} \left(l - \frac{\int_0^l \frac{-k}{-k} \cosh(k(\frac{l}{2} - x)) dx}{\cosh(kl/2)} \right)$$

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\gamma_0(\sigma_t - \sigma_{el})}{l(\sigma_{max} - \sigma_{el})} \left(l - \frac{\sinh(kl/2) - \sinh(-kl/2)}{k \cosh(kl/2)} \right)$$

Essendo il seno iperbolico una funzione dispari, si ha:

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\gamma_0(\sigma_t - \sigma_{el})}{l(\sigma_{max} - \sigma_{el})} \left(l - \frac{2 \sinh(kl/2)}{\cosh(kl/2)} \right) = \frac{\gamma_0(\sigma_t - \sigma_{el})}{l(\sigma_{max} - \sigma_{el})} (l - 2 \tanh(kl/2))$$

Calcolando ora la funzione della deformazione plastica media per $\sigma_t = \sigma_{max}$, si ottiene:

$$\overline{\gamma_t(\sigma_{max})} = \frac{\gamma_0}{l} \left(l - \frac{2}{k} \tanh(kl/2) \right) = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{lk} \tanh(kl/2) \right)$$

Operando la stessa approssimazione di prima ($k \rightarrow \infty$), si osserva che, siccome il valore della tangente iperbolica tende ad 1 per valori dell'argomento tendenti ad infinito, si ottiene:

$$\overline{\gamma_t(\sigma_{max})} \approx \gamma_0$$

Si ottengono dunque gli stessi risultati approssimati, ottenuti nel caso di condizioni al contorno di tipo soft:

$$w'' = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{el}}{d_0} \quad ; \quad \gamma_0 = d_0$$

Da ciò si osserva che le condizioni al contorno imposte non influenzano sostanzialmente i risultati delle osservazioni.

Operando invece sempre nel caso di condizioni al contorno hard, ma con meno approssimazioni, si ha:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{a_1} \left(1 - \frac{2}{lk} \tanh\left(\frac{kl}{2}\right) \right) = u'_t - \frac{\sigma_t}{E} \rightarrow a_1 = \frac{\sigma_t - \sigma_{el}}{\varepsilon_{tot} - \frac{\sigma}{E}} \left(1 - \frac{2}{lk} \tanh\left(\frac{kl}{2}\right) \right)$$

Ricordando ora $k = \sqrt{\frac{a_1}{\alpha}}$, si ottiene:

$$a_1 = \frac{\sigma - \sigma_{el}}{\varepsilon_{tot} - \frac{\sigma}{E}} \left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{l\sqrt{a_1}} \tanh\left(\frac{l\sqrt{a_1}}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right)$$

Quest'ultima è una funzione implicita di a_1 , e può esser risolta tramite il metodo di bisezione, definendo la funzione:

$$f(a_1) = \frac{\sigma - \sigma_{el}}{\varepsilon_{tot} - \frac{\sigma}{E}} \left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{l\sqrt{a_1}} \tanh\left(\frac{l\sqrt{a_1}}{2\sqrt{\alpha}}\right) \right) - a_1$$

Ed imponendo $f(a_1) = 0$, magari partendo da due estremi definiti tramite il precedente metodo più approssimato.

3.1.6. Soluzione in regime di stress-softening

Per la fase di softening si considererà la sola soluzione relativa alla barra lunga, la cui soluzione è

$$\bar{\dot{\gamma}}_t = \frac{\psi}{\psi + (w''/E)} \dot{u}'_t \quad ; \quad \dot{\sigma}_t = \frac{w''}{\psi + (w''/E)} \dot{u}'_t$$

C.C. HARD	C.C. SOFT
$\psi(kl) = \frac{2\pi}{kl} \quad kl > 2\pi$	$\psi(kl) = \frac{\pi}{kl} \quad kl > \pi$
$\hat{l} = 2\pi / k$	$\hat{l} = \pi / k$
$\dot{\gamma}_t = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases}$	$\dot{\gamma}_t = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}_t}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases}$

Nel caso di barra lunga è possibile identificare la lunghezza “ \hat{l} ” che rappresenta la lunghezza interna, nella quale il danneggiamento si localizza. Anche se abbastanza approssimata, questa lunghezza può esser misurata dopo la prova di trazione, andando ad identificare la zona del provino che presenta una fessurazione maggiore.

Iniziamo definendo i parametri da ricercare:

$$w = \frac{b_1}{2}(\gamma_t - \gamma_0)^2 + b_2(\gamma_t - \gamma_0) + b_3$$

$$w' = b_1(\gamma_t - \gamma_0) + b_2$$

$$w'' = b_1$$

Definiamo ora il coefficiente angolare del ramo di softening “ m_s ”:

$$m_s = \frac{\dot{\sigma}_t}{\dot{u}_t'} = \frac{d\sigma_t}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d(u_t')} = \frac{d\sigma_t}{d(u_t')}$$

Il parametro appena definito è deducibile dalla curva sforzo-deformazione, ed è ovviamente negativo per il softening. Abbiamo dunque:

C.C. HARD: →
$$m_s = \frac{w''}{\frac{2\pi}{kl} + \frac{w''}{E}} = \frac{w''}{\frac{\hat{l}}{l} + \frac{w''}{E}} \rightarrow b_1 = \frac{\frac{\hat{l}}{l} m_s}{1 - \frac{m_s}{E}}$$

C.C. SOFT: →
$$m_s = \frac{w''}{\frac{\pi}{kl} + \frac{w''}{E}} = \frac{w''}{\frac{\hat{l}}{l} + \frac{w''}{E}} \rightarrow b_1 = \frac{\frac{\hat{l}}{l} m_s}{1 - \frac{m_s}{E}}$$

Si osserva dunque che, in ambo i casi, si ottiene lo stesso valore (negativo) di w'' :

$$w'' = \frac{\frac{\hat{l}}{l} m_s}{1 - \frac{m_s}{E}}$$

Mentre, invece, cambia il valore del coefficiente del termine non locale (che si considera costante), a seconda della prova svolta in condizioni al contorno hard o soft:

C.C. HARD: →
$$\alpha = \frac{|w''|}{4\pi^2}$$

C.C. SOFT: →
$$\alpha = \frac{|w''|}{\pi^2}$$

Passo ora all'imposizione delle condizioni di raccordo nel punto di inizio del softening.

$$\begin{cases} w(\gamma_0) = b_3 \\ w'(\gamma_0) = b_2 \end{cases}$$

Nel caso in cui fosse presente solo il ramo di softening, il problema sarebbe risolto con:

$$\begin{cases} w(\gamma_0) = b_3 = 0 \\ w'(\gamma_0) = b_2 = \sigma_{el} \end{cases}$$

Tuttavia questo caso non è ingegneristicamente interessante. Il caso interessante è quello in cui il ramo di hardening è presente con le funzioni:

$$w(\gamma_0) = \frac{a_1}{2} \gamma_0^2 + \sigma_{el} \gamma_0$$

$$w'(\gamma_0) = a_1 \gamma_0 + \sigma_{el}$$

Eseguendo il raccordo si ottiene dunque:

$$\begin{cases} w(\gamma_0) = b_3 = \frac{a_1}{2} \gamma_0^2 + \sigma_{el} \gamma_0 \\ w'(\gamma_0) = b_2 = a_1 \gamma_0 + \sigma_{el} \end{cases}$$

Con le costanti determinate si conclude la prima interpretazione che riguarda il modello 1D.

3.2. DISCRETIZZAZIONE AD ELEMENTI FINITI DEL MODELLO VARIAZIONALE 1-D

3.2.1. Introduzione funzioni di forma

Si parte ricordando la formula dell'energia:

$$\Psi(u_t, \gamma_t, e_t) = \int_0^l \frac{1}{2} EA(u_t' - \gamma_t)^2 + Aw(e_t) + \frac{1}{2} A\alpha(e_t)e_t'^2 dx$$

Calcolandone la variazione rispetto i due parametri separatamente si ottiene:

$$\Psi_u(u + \delta u) = \Psi_u(u) + \delta\Psi_u(u, \delta u) + \frac{1}{2} \delta^2\Psi_u(u, \delta u) = \Psi_u(u) + G_u(\delta u)$$

con

$$G_u(\delta u) = \int_0^l \frac{1}{2} EA\delta u'^2 + EA(u' - \gamma)\delta u' dx$$

$$\Psi_\gamma(\gamma + \delta\gamma) = \Psi_\gamma(\gamma) + \delta\Psi_\gamma(\gamma, \delta\gamma) + \frac{1}{2} \delta^2\Psi_\gamma(\gamma, \delta\gamma) = \Psi_\gamma(\gamma) + G_\gamma(\delta\gamma)$$

con

$$G_\gamma(\delta\gamma) = \int_0^l \frac{1}{2} EA\delta\gamma^2 + \frac{1}{2} Aw''\delta\gamma^2 + \frac{1}{2} Al^2\delta\gamma'^2 - EA(u' - \gamma)\delta\gamma + w'\delta\gamma + \alpha A\gamma\delta\gamma' dx$$

si passa ora alla discretizzazione della barra in n spezzoni di lunghezza $h_e = \frac{l}{n}$. Gli elementi si

prendono monoparametrici, e si scelgono funzioni di forma quadratiche per rappresentare lo spostamento (in modo che la deformazione sia lineare) e lineari per rappresentare la deformazione plastica.

Avremo dunque che ogni elemento sarà rappresentato dai seguenti parametri:

-plasticità:

$$\underline{\psi}_\gamma(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_{e+1} - x}{h_e} \\ \frac{x - x_e}{h_e} \end{bmatrix} = \text{funzione di forma nel sistema globale}$$

$x(\xi) = \frac{h_e}{2}(\xi + 1) + x_e \rightarrow$ trasformazione dal sistema globale a quello locale

$$\hat{\underline{\psi}}_\gamma(\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{bmatrix} = \text{funzione di forma nel sistema locale}$$

$$\underline{\psi}_\gamma'(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{derivata della funzione di forma nel sistema globale}$$

$$\hat{\underline{\psi}}_\gamma'(\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{derivata della funzione di forma nel sistema locale}$$

$$dx = \frac{h_e}{2} d\xi \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{h_e} dx \rightarrow \text{parametri per il cambio di variabili nell'integrale}$$

Possiamo dunque definire la matrice di connettività per la plasticità come:

$$Co_{11}^\gamma = 1 \quad ; \quad Co_{12}^\gamma = 2 \quad ; \quad Co_{ij}^\gamma = Co_{i(j-1)}^\gamma + 1 \quad \text{per } j \neq 1$$

In forma estesa: $Co^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \dots \end{bmatrix}$ (per il successivo assemblaggio)

In questo modo ottengo che, in ogni elemento, la plasticità può esser scritta come:

$$\gamma = \underline{\psi}_p \cdot \underline{\gamma} = \hat{\underline{\psi}}_p \cdot \underline{\gamma} \quad \text{con} \quad \underline{\gamma} = \underline{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_e \\ \gamma_{e+1} \end{bmatrix}$$

$$\gamma' = \underline{\psi}_\gamma' \cdot \underline{\gamma} = \frac{2}{h_e} \hat{\underline{\psi}}_p' \cdot \underline{\gamma}$$

Passiamo ora alla discretizzazione quadratica per lo spostamento. Nominando il punto centrale dell'elemento come "ee", si ottiene:

$$\underline{\psi}_u(x) = \begin{bmatrix} \frac{x-x_e}{h_e} \left(2 \frac{x-x_e}{h_e} - 1 \right) \\ 1 - 4 \frac{(x-x_e)^2}{h_e^2} \\ \frac{x-x_e}{h_e} \left(2 \frac{x-x_e}{h_e} + 1 \right) \end{bmatrix} = \text{funzione di forma nel sistema globale}$$

$$x(\xi) = (\xi + 1) \frac{h_e}{2} + x_e \rightarrow \text{trasformazione dal sistema globale a quello locale}$$

$$\hat{\underline{\psi}}_u(\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi(\xi - 1) \\ 2 - 2\xi^2 \\ \xi(\xi + 1) \end{bmatrix} = \text{funzione di forma nel sistema locale}$$

$$\underline{\psi}'_u(x) = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 4 \frac{x-x_e}{h_e} - 1 \\ -8 \frac{x-x_e}{h_e} \\ 4 \frac{x-x_e}{h_e} + 1 \end{bmatrix} = \text{derivata della funzione di forma nel sistema globale}$$

$$\hat{\underline{\psi}}'_u(\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\xi - 1 \\ -4\xi \\ 2\xi + 1 \end{bmatrix} = \text{derivata della funzione di forma nel sistema locale}$$

$$dx = \frac{h_e}{2} d\xi \quad ; \quad d\xi = \frac{2}{h_e} dx \rightarrow \text{parametri per il cambio di variabili nell'integrale}$$

Possiamo dunque definire la matrice di connettività per la plasticità come:

$$Co_{11}^u = 1 \quad ; \quad Co_{12}^u = 2 \quad ; \quad Co_{13}^u = 3 \quad ; \quad Co_{ij}^u = Co_{i(j-1)}^u + 2 \quad \text{per } j \neq 1$$

$$\text{In forma estesa: } Co^p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{per il successivo assemblaggio})$$

In questo modo ottengo che, in ogni elemento, lo spostamento può essere scritto come:

$$u = \underline{\psi}_u \bullet \underline{u} = \hat{\underline{\psi}}_u \bullet \underline{u} \quad \text{con} \quad \underline{u} = \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_e \\ u_{e+1} \end{bmatrix}$$

$$u' = \underline{\psi}'_u \bullet \underline{u} = \frac{2}{h_e} \hat{\underline{\psi}}'_u \bullet \underline{u}$$

3.2.2. Problema variazionale discreto

Con questa approssimazione di spostamenti e deformazioni plastiche, l'energia interna diventa:

$$\Psi(u_t, \gamma_t, e_t) = \Psi(\underline{u}_t, \underline{\gamma}_t, \underline{e}_t) = \sum_{e=1}^n \Psi^e = \sum_1^n \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{1}{2} EA \left(\frac{2}{h_e} \hat{\underline{\psi}}'_u \bullet \underline{u}_e - \hat{\underline{\psi}}_{\gamma} \bullet \underline{\gamma} \right)^2 + Aw(|\hat{\underline{\psi}}_{\gamma} \bullet \underline{\gamma}|) + \frac{1}{2} A\alpha \left(\frac{2}{h_e} \hat{\underline{\psi}}'_u \bullet \underline{\gamma} \right)^2 dx$$

Passiamo ora a riscrivere le funzioni $G_u(\delta u)$ e $G_{\gamma}(\delta \gamma)$ usando le funzioni di forma nel sistema locale, per ogni elemento:

$$G_u^e(\delta \underline{u}_e) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} EA (\psi_u'(x) \bullet \delta \underline{u}_e)^2 + EA (\psi_u'(x) \bullet \underline{u}_e - \psi_p \bullet \gamma_e) \psi_u'(x) \bullet \delta \underline{u}_e dx$$

$$G_u^e(\delta \underline{u}_e) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} EA \frac{2}{h_e} (\hat{\psi}_u'(\xi) \bullet \delta \underline{u}_e)^2 + EA \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_u'(\xi) \bullet \underline{u}_e - \hat{\psi}_p(\xi) \bullet \gamma_e \right) \hat{\psi}_u'(\xi) \bullet \delta \underline{u}_e d\xi$$

Usando ora la seguente definizione del prodotto diadico:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \underline{C} \quad | \quad C_{ij} = a_i b_j$$

Si può scrivere:

$$G_u^e(\delta \underline{u}_e) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} EA \frac{2}{h_e} (\hat{\psi}_u' \otimes \hat{\psi}_u') \delta \underline{u}_e \bullet \delta \underline{u}_e + EA \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_u' \bullet \underline{u}_e - \hat{\psi}_p \bullet \gamma_e \right) \hat{\psi}_u' \bullet \delta \underline{u}_e d\xi$$

Definisco ora:

$$\underline{K}_{\underline{u}}^e = EA \frac{2}{h_e} \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_u' \otimes \hat{\psi}_u') d\xi$$

$$\underline{f}_{\underline{u}}^e = EA \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_u' \bullet \underline{u}_e - \hat{\psi}_p \bullet \gamma_e \right) \hat{\psi}_u' d\xi$$

Ho, per ogni elemento:

$$G_u^e(\delta \underline{u}_e) = \frac{1}{2} \underline{K}_{\underline{u}}^e \delta \underline{u}_e \bullet \delta \underline{u}_e + \underline{f}_{\underline{u}}^e \bullet \delta \underline{u}_e$$

Allo stesso modo ottengo:

$$G_\gamma^e(\delta \underline{\gamma}_e) = \frac{1}{2} \underline{K}_{\underline{\gamma}}^e \delta \underline{\gamma}_e \bullet \delta \underline{\gamma}_e + \underline{f}_{\underline{\gamma}}^e \bullet \delta \underline{\gamma}_e \quad \text{con}$$

$$\underline{K}_{\underline{\gamma}}^e = A \int_{-1}^1 \frac{h_e}{4} (E + w''(\hat{\psi}_\gamma \bullet \gamma_e)) \hat{\psi}_\gamma \otimes \hat{\psi}_\gamma + \frac{1}{h_e} \alpha l^2 (\hat{\psi}_\gamma' \otimes \hat{\psi}_\gamma') d\xi$$

$$\underline{f}_{\underline{\gamma}}^e = A \int_{-1}^1 \frac{h_e}{2} \left[w'(\hat{\psi}_\gamma \bullet \gamma_e) - E \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_\gamma' \bullet \underline{u}_e - \hat{\psi}_\gamma \bullet \gamma_e \right) \hat{\psi}_\gamma + \frac{2}{h_e} \alpha l^2 (\hat{\psi}_\gamma' \bullet \gamma_e) \hat{\psi}_\gamma' \right] d\xi$$

Le matrici vengono, dunque, assemblate, con l'ausilio delle matrici di convoluzione.

Si procede poi per iterazioni, tenendo prima fisso lo spostamento e minimizzando il funzionale rispetto alla deformazione plastica, poi prendendo la deformazione plastica risultante e minimizzando il funzionale rispetto lo spostamento fino a convergenza dei risultati.

Per completezza si riporta anche la possibilità di una minimizzazione monolitica del funzionale, considerando:

$$\Psi(u + \delta u, \gamma + \delta \gamma) = \Psi(u, \gamma) + \int_0^l E(u' - \gamma) \delta u' + [w' - E(u' - \gamma)] \delta \gamma + \alpha l^2 \gamma' \delta \gamma' dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l E \delta u'^2 + [E + w''] \delta \gamma^2 + \alpha l^2 \delta \gamma'^2 - 2E \delta \gamma \delta u' dx$$

In cui sono state applicate:

$$(u' + \delta u' - \gamma - \delta \gamma)^2 = (u' - \gamma)^2 + 2(u' - \gamma) \delta u' - 2(u' - \gamma) \delta \gamma - 2\delta \gamma \delta u' + \delta \gamma^2 + \delta u'^2$$

$$w(\gamma + \delta \gamma) = w(\gamma) + w'(\gamma) \delta \gamma + \frac{1}{2} w''(\gamma) \delta \gamma^2$$

Per la discretizzazione si definiscono i seguenti vettori:

$$\underline{s}^e = \begin{bmatrix} u_e \\ u_{ee} \\ u_{e+1} \\ \gamma_e \\ \gamma_{e+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}^e \\ \underline{\gamma}^e \end{bmatrix} \quad \underline{s}^{globale} = \underline{s}^g = \begin{bmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \\ u_{12} \\ u_2 \\ \gamma_2 \\ u_{23} \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad \underline{u}^g = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_2 \\ u_{23} \\ \dots \end{bmatrix} \quad \underline{\gamma}^g = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$G^e = E \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_{\underline{u}}' \cdot \underline{u}_e - \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\gamma}_e \right) \hat{\psi}_{\underline{u}}' \cdot \delta \underline{u}_e dx + \\ + \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{h_e}{2} w' - E \left(\hat{\psi}_{\underline{u}}' \cdot \underline{u}_e - \frac{h_e}{2} \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} \cdot \underline{\gamma}_e \right) \right) \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} + \frac{2}{h_e} \alpha l^2 (\hat{\psi}_{\underline{\gamma}}' \cdot \underline{\gamma}_e) \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} \right] \cdot \delta \underline{\gamma}_e dx + \\ + \frac{1}{2} \frac{2}{h_e} E \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_{\underline{u}}' \otimes \hat{\psi}_{\underline{u}}') \delta \underline{u}_e \cdot \delta \underline{u}_e dx + \frac{1}{2} \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 \left[(E + w'') \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} \otimes \hat{\psi}_{\underline{\gamma}} + \frac{2}{h_e} \alpha l^2 \hat{\psi}_{\underline{\gamma}}' \otimes \hat{\psi}_{\underline{\gamma}}' \right] \delta \underline{\gamma}_e \cdot \delta \underline{\gamma}_e dx - \\ - \frac{1}{2} (2E) \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_{\underline{u}}' \otimes \hat{\psi}_{\underline{\gamma}}) \delta \underline{\gamma}_e \cdot \delta \underline{u}_e dx - \frac{1}{2} (2E) \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_{\underline{\gamma}} \otimes \hat{\psi}_{\underline{u}}') \delta \underline{u}_e \cdot \delta \underline{\gamma}_e dx$$

Vado ora a definire:

$$\underline{f}_u^e = E \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{h_e} \hat{\psi}_u' \cdot \underline{u}_e - \hat{\psi}_\gamma \cdot \underline{\gamma}_e \right) \hat{\psi}_u' dx$$

$$\underline{f}_\gamma^e = \int_{-1}^1 \left(\frac{h_e}{2} w' - E \left(\hat{\psi}_u' \cdot \underline{u}_e - \frac{h_e}{2} \hat{\psi}_\gamma \cdot \underline{\gamma}_e \right) \right) \hat{\psi}_\gamma + \frac{2}{h_e} \alpha l^2 (\hat{\psi}_\gamma' \cdot \underline{\gamma}_e) \hat{\psi}_\gamma dx$$

$$\underline{K}_{uu}^e = \frac{2}{h_e} E \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_u' \otimes \hat{\psi}_u') dx$$

$$\underline{K}_{\gamma\gamma}^e = \frac{h_e}{2} \int_{-1}^1 (E + w'') \hat{\psi}_\gamma \otimes \hat{\psi}_\gamma + \frac{2}{h_e} \alpha l^2 \hat{\psi}_\gamma' \otimes \hat{\psi}_\gamma' dx$$

$$\underline{K}_{u\gamma}^e = -(2E) \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_u' \otimes \hat{\psi}_\gamma) dx$$

$$\underline{K}_{\gamma u}^e = -(2E) \int_{-1}^1 (\hat{\psi}_\gamma \otimes \hat{\psi}_u') dx = (\underline{K}_{u\gamma}^e)^T$$

inoltre:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu}^e & \underline{K}_{u\gamma}^e \\ \underline{K}_{\gamma u}^e & \underline{K}_{\gamma\gamma}^e \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{f}^e = \begin{bmatrix} \underline{f}_u^e \\ \underline{f}_\gamma^e \end{bmatrix} \quad ; \quad \delta \underline{s}^e = \begin{bmatrix} \delta \underline{u}_e \\ \delta \underline{\gamma}_e \end{bmatrix}$$

Da ciò, si osserva che il funzionale diventa:

$$G^e = \frac{1}{2} \underline{K}^e \delta \underline{s}^e \cdot \delta \underline{s}^e + \underline{f}^e \cdot \delta \underline{s}^e$$

Dopodiché si procede all'assemblaggio e alla minimizzazione.

3.3.SIMULAZIONI 1-D

3.3.1. Introduzione

Al fine di eseguire le simulazioni si cita l'articolo [3]. I provini proposti in questo articolo hanno la seguente forma (fig. 3.3):

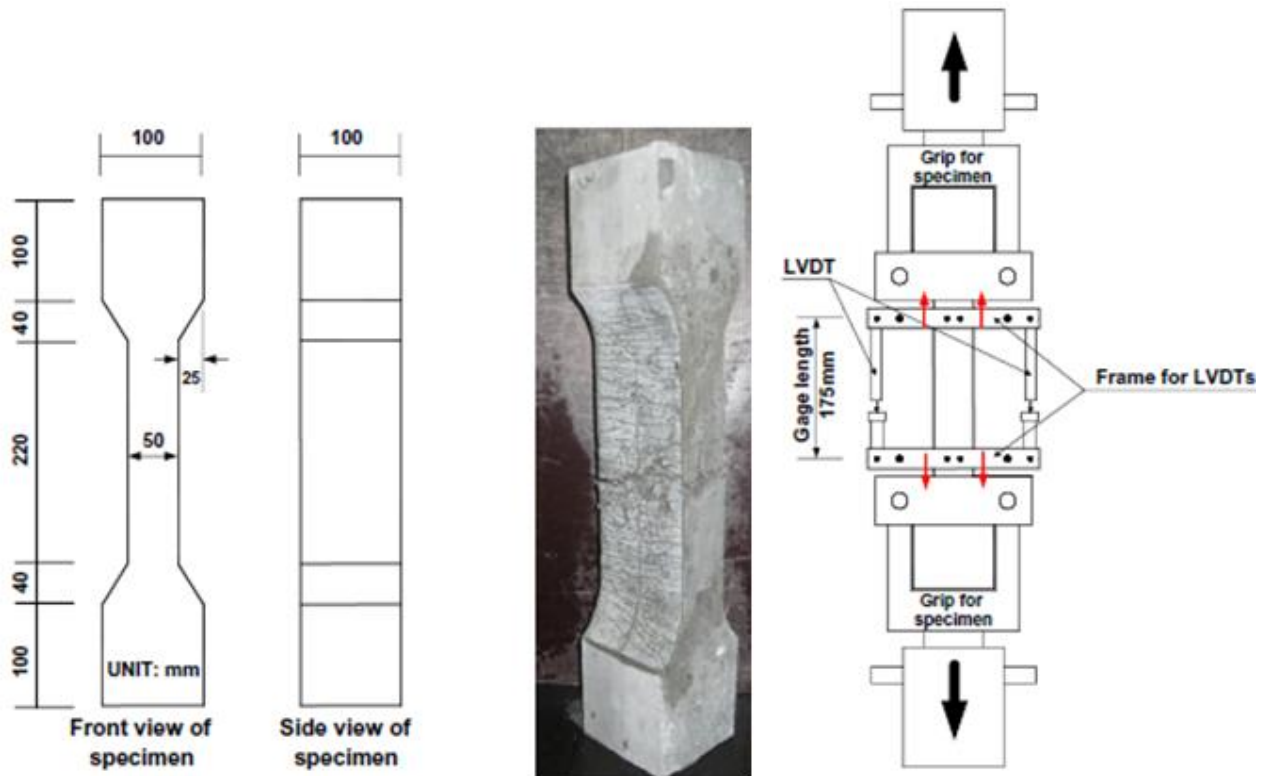


FIGURA 3.3 FORMA DEI PROVINI E TIPO DI PROVA

I provini sono in calcestruzzo con resistenza a compressione di 200MPa e sono state aggiunte le seguenti fibre (fig. 3.4):

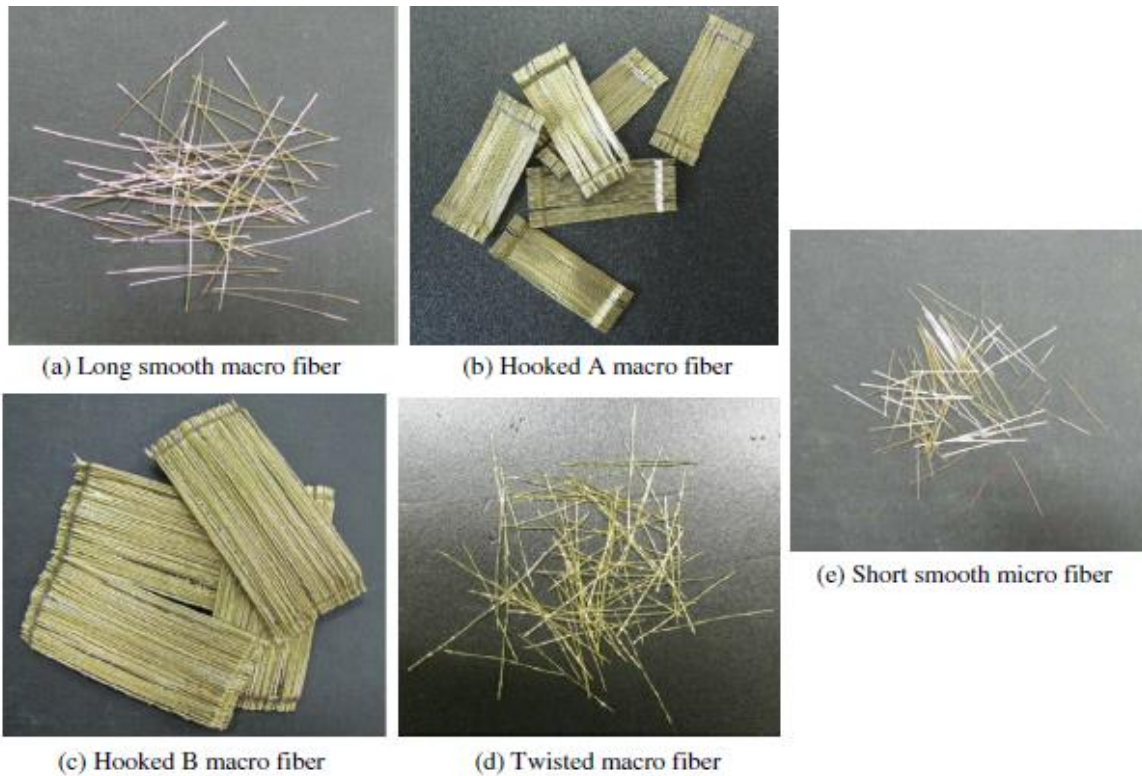


FIGURA 3.4 FIBRE UTILIZZATE

Rispettivamente:

- (a) → Macrofibre lunghe e lisce
- (b) → Macrofibre uncinata A
- (c) → Macrofibre uncinata B
- (d) → Macrofibre ondulate
- (e) → Microfibre corte

La nomenclatura dei provini è la seguente:

Tipologia ($V_f = 1.0\%$)	Contenuto in volume (%)	Nome
Long smooth (LS-)	0.0	LS1 0SS00
	0.5	LS1 0SS05
	1.0	LS1 0SS10
	1.5	LS1 0SS15
Hooked A (HA-)	0.0	HA10SS00
	0.5	HA10SS05
	1.0	HA10SS10
	1.5	HA10SS15
Hooked B (HB-)	0.0	HB10SS00
	0.5	HB10SS05
	1.0	HB10SS10
	1.5	HB10SS15
Twisted (T-)	0.0	T1 0SS00
	0.5	T1 0SS05
	1.0	T1 0SS10
	1.5	T1 0SS15

Si riportano, infine le curve sforzo deformazione ottenute (fig. 3.5):

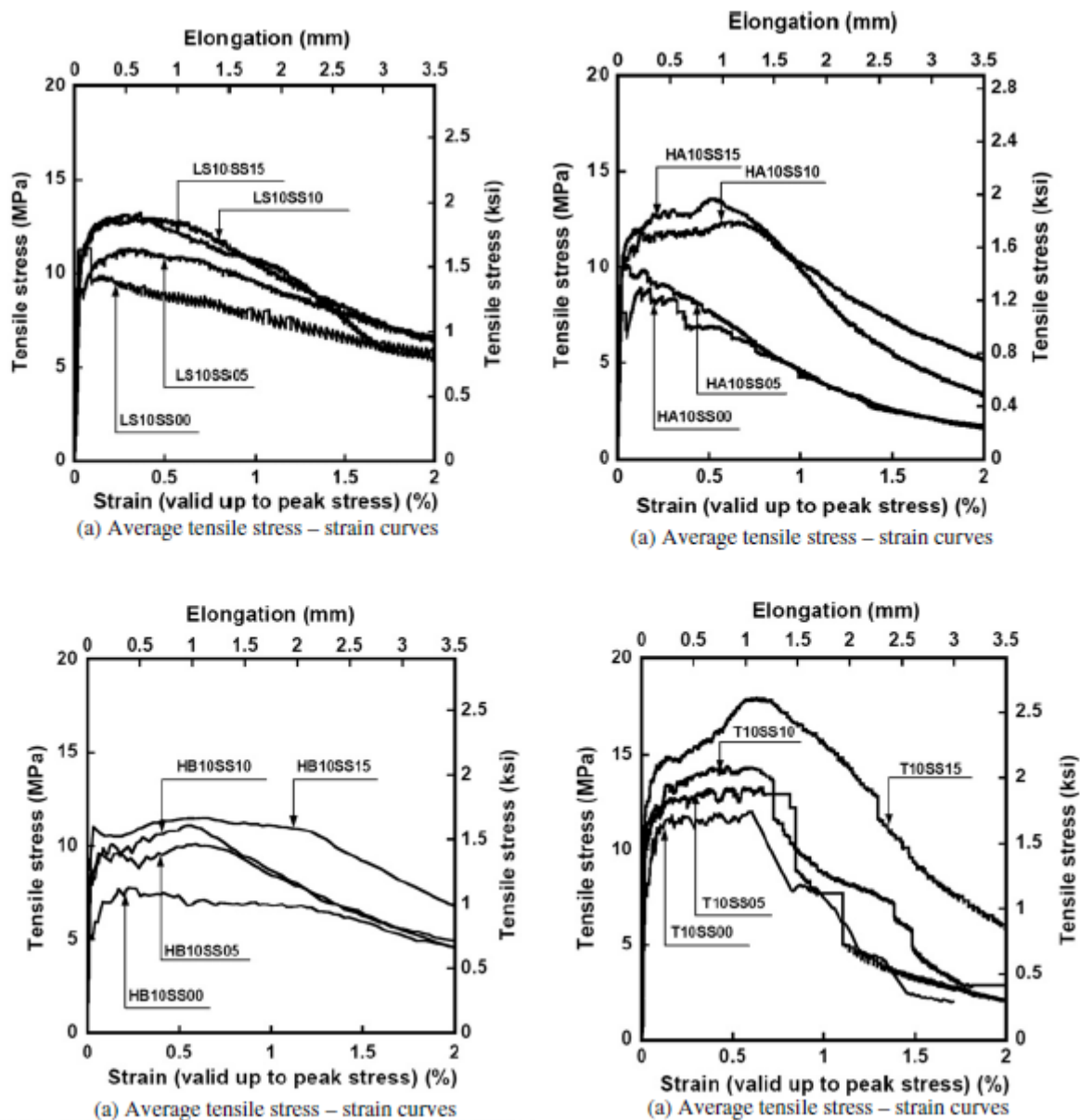


FIGURA 3.5 RISULTATI DELLE PROVE SPERIMENTALI

I parametri riguardanti le prove riportate nell'articolo sono riassunte come segue:

Notation	First cracking	Post cracking		Number of cracks (ea)	Average crack spacing (mm)	Number of specimens investigated
	Stress (MPa) Average (standard deviation)	Strain (%) Average (standard deviation)	Stress (MPa) Average (standard deviation)			
LS10SS00	10.090 (1.314)	0.088 (NA)	8.838 (1.952)	2.00 (NA)	87.50 (NA)	5 for σ_{cc} , σ_{pc} ; 1 for others
LS10SS05	9.137 (0.906)	0.322 (0.054)	11.419 (0.484)	4.67 (0.94)	38.89 (10.88)	3 for all
LS10SS10	9.616 (1.265)	0.468 (0.093)	13.305 (0.768)	15.33 (4.03)	12.13 (2.72)	3 for all
LS10SS15	9.880 (0.760)	0.365 (0.055)	13.217 (0.199)	26.67 (3.30)	6.66 (0.80)	3 for all
HA10SS00	7.633 (0.364)	0.182 (0.086)	9.112 (0.458)	2.50 (0.50)	71.92 (14.58)	2 for all
HA10SS05	10.752 (0.285)	0.144b (0.167)	10.895 (0.443)	6.00 (1.41)	30.63 (6.19)	3 for all
HA10SS10	10.056 (0.130)	0.590 (0.111)	12.249 (0.607)	27.00 (2.94)	6.56 (0.68)	3 for all
HA10SS15	10.516 (0.577)	0.562 (0.074)	13.842 (0.542)	34.00 (0.82)	5.15 (0.12)	3 for all
HB10SS00	7.094 (0.857)	0.272 (0.107)	8.054 (0.465)	20.33 (1.70)	8.67 (0.76)	3 for all
HB10SS05	11.350 (0.711)	0.445 (0.210)	10.310 (1.963)	21.50 (10.97)	11.00 (5.87)	4 for all
HB10SS10	9.139 (0.490)	0.594 (0.045)	11.331 (0.635)	31.33 (1.70)	5.60 (0.31)	3 for all
HB10SS15	10.646 (0.369)	0.611 (0.158)	12.014 (1.044)	39.00 (2.16)	4.50 (0.24)	3 for all
T10SS00	7.980 (0.287)	0.303 (0.174)	12.262 (0.341)	31.50 (1.50)	5.57 (0.27)	2 for all
T10SS05	9.707 (1.545)	0.362 (0.199)	13.498 (0.890)	36.67 (1.70)	4.78 (0.22)	3 for all
T10SS10	10.592 (1.575)	0.512 (0.038)	14.772 (0.841)	41.00 (2.94)	4.29 (0.30)	3 for all
T10SS15	10.698 (2.068)	0.636 (0.056)	18.560 (0.162)	46.33 (3.09)	3.80 (0.27)	3 for all

Della tabella riassuntiva i dati che verranno presi in considerazione sono:

- 1- Seconda colonna: σ_{el} = Frist cracking (tensione di prima fessurazione)
- 2- Terza colonna: d_0 (%) = Strain [Post cracking] (deformazione [post-fessurativa])
- 3- Quartacolonna: σ_{max} = Stress [Post cracking] (tensione [post-fessurativa])

Mentre per la lunghezza di fessurazione interna (\hat{l}) sarà necessaria una stima visiva tramite le foto dei provini riportati nell'articolo.

Ottenuti i dati si può passare alle simulazioni.

3.3.2. Hardening

Viene preso ad esempio per l'hardening il provino HA10SS15. Si esegue inizialmente la simulazione con il metodo approssimato, ottenendo il seguente grafico di w'' ; w' ; w (fig. 3.6):

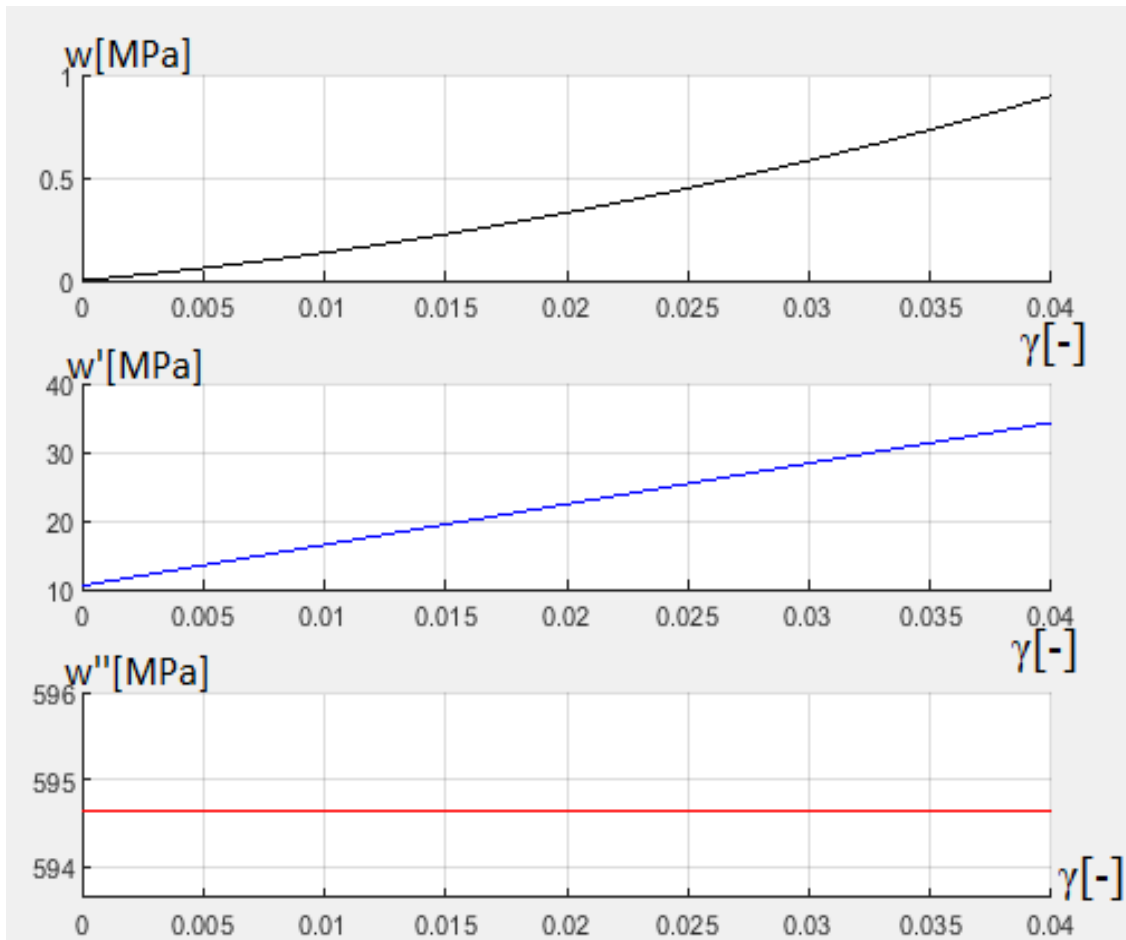


FIGURA 3.6 ANDAMENTO ENERGIA SIMULAZIONE HARDENING (METODO APPROSSIMATO)

Si riporta ora la curva sforzo deformazione, che viene affiancata a quella sperimentale per il confronto. Naturalmente il ramo del softening non è presente. Si riportano, infine le curve vicine per un confronto visivo (fig. 3.7):

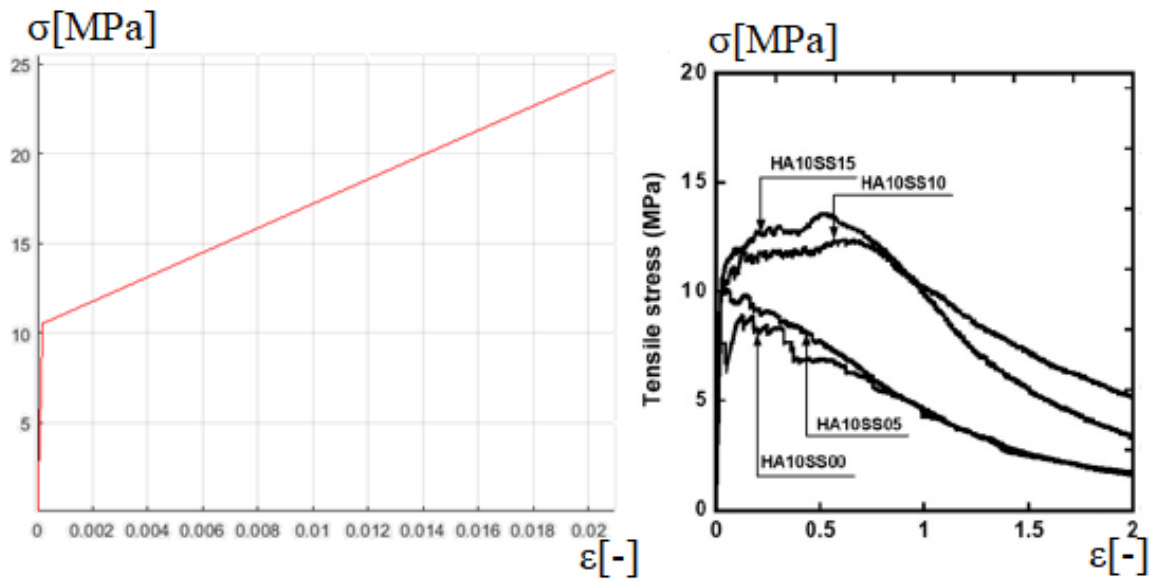


FIGURA 3.7 CURVA SFORZO-DEFORMAZIONE REALE (A DESTRA) E SIMULATA(SINISTRA)

Si riporta, invece, il calcolo con i parametri meno approssimati. In questo caso le finzioni relative all'energia plastica sono le seguenti (fig. 3.8):

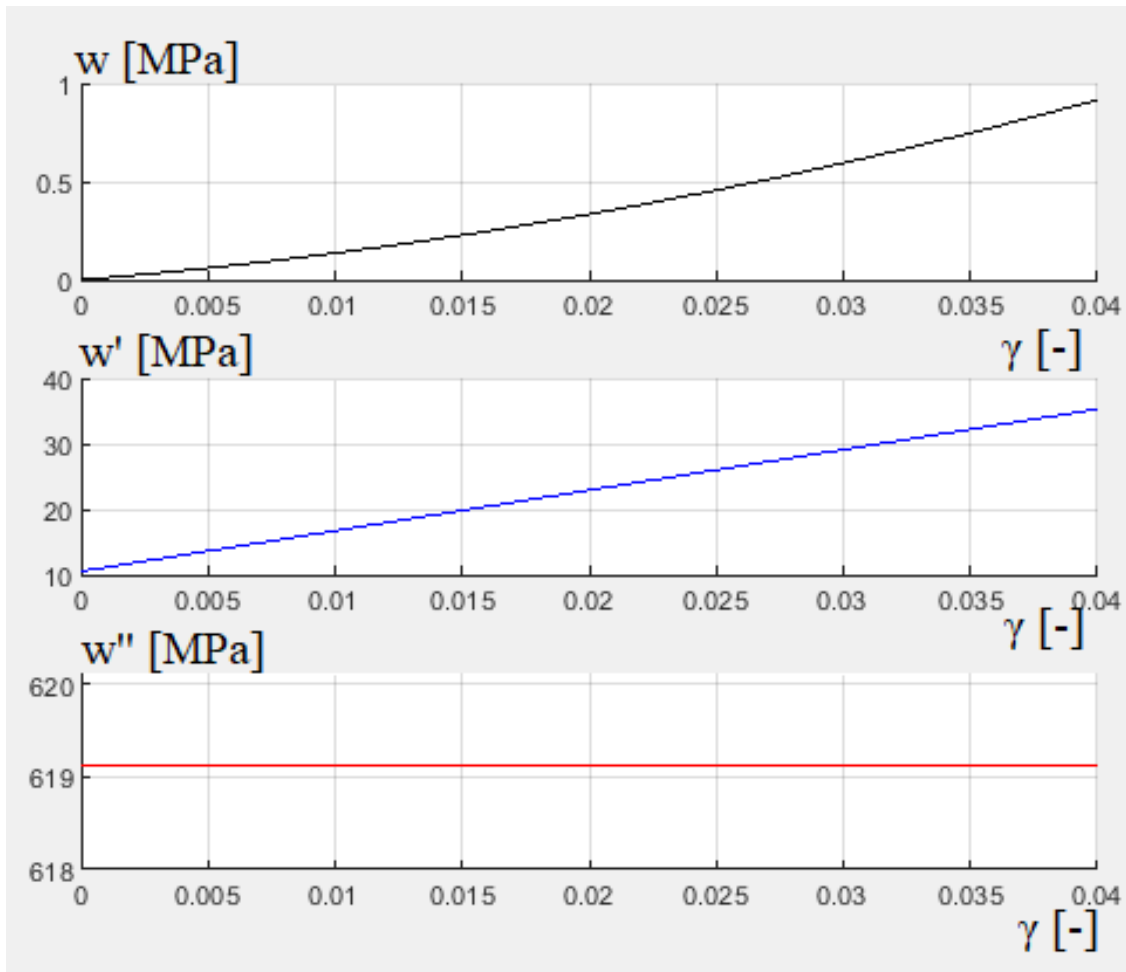


FIGURA 3.8 ANDAMENTO ENERGIA SIMULAZIONE HARDENING (METODO MENO APPROSSIMATO)

Mentre la curva sforzo-deformazione è (fig. 3.9):

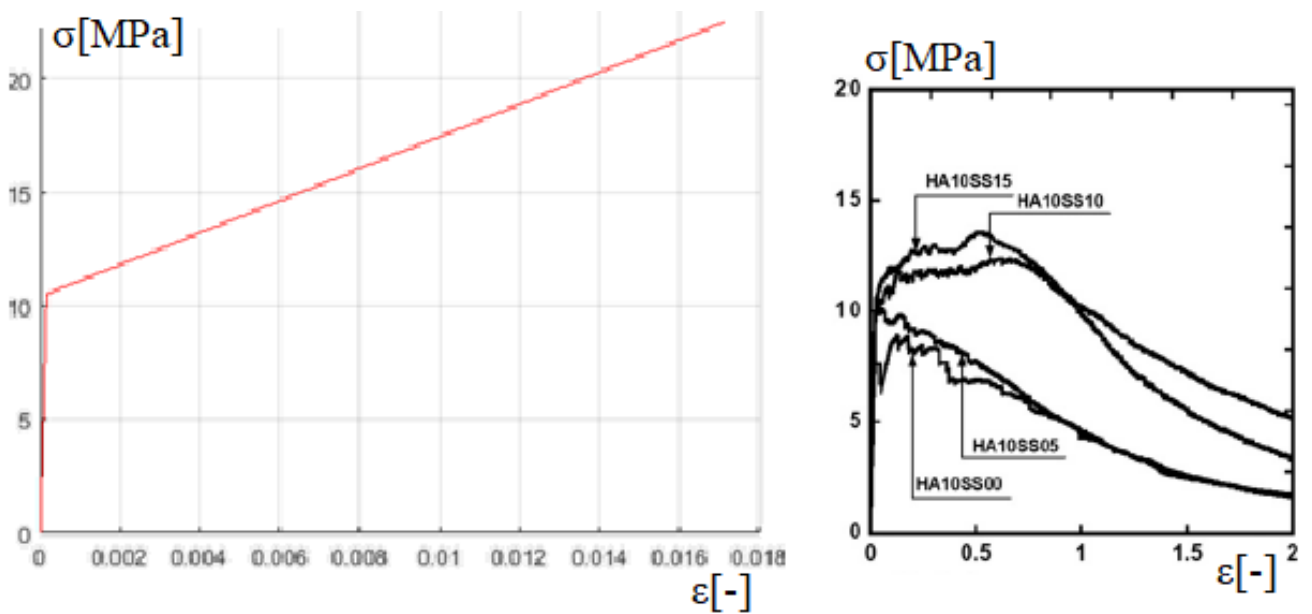


FIGURA 3.9 CURVA SFORZO-DEFORMAZIONE REALE (A DESTRA) E SIMULATA(SINISTRA)

Si osservi che, in ambo i casi, si ottiene una ottima approssimazione (lineare) della curva sperimentale, mentre la percentuale di differenza tra i due metodi è:

$$\frac{w''_1 - w''_2}{w''_2} = \frac{619,1 - 594,7}{594,7} = \frac{24,4}{594,7} = 0,041 = 4\%$$

Si conclude il report con il riportare l'evoluzione dei parametri di spostamento, deformazione plastica e tensione, per alcuni step nel solo caso meno approssimato (fig. 3.10 e 3.11).

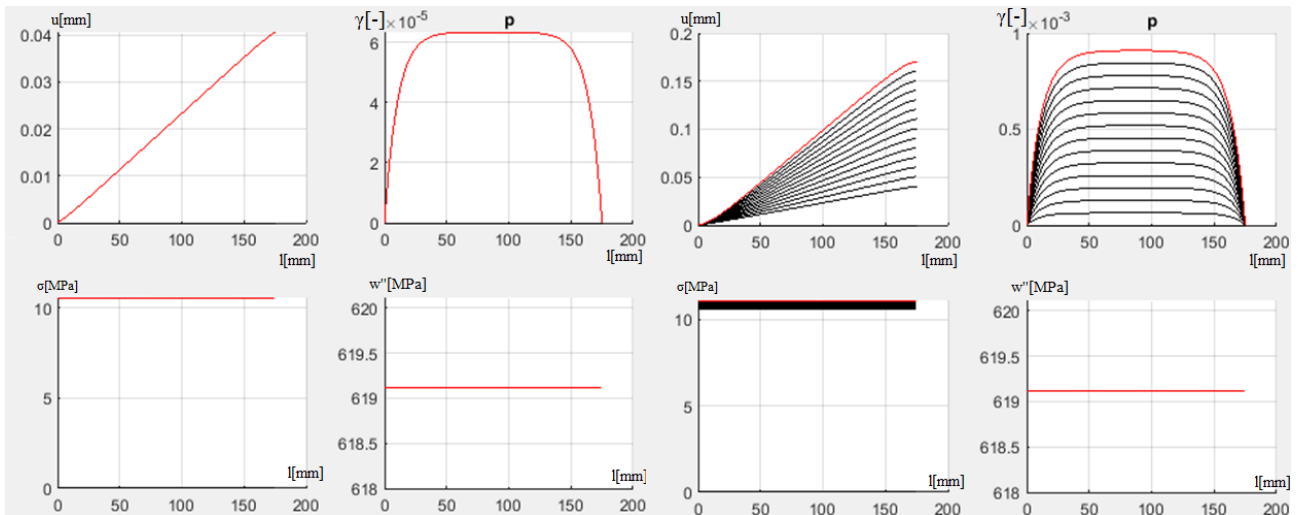


FIGURA 3.10 DATI NOTEVOLI PER T=0,04 A SINISTRA E T=0,17 A DESTRA

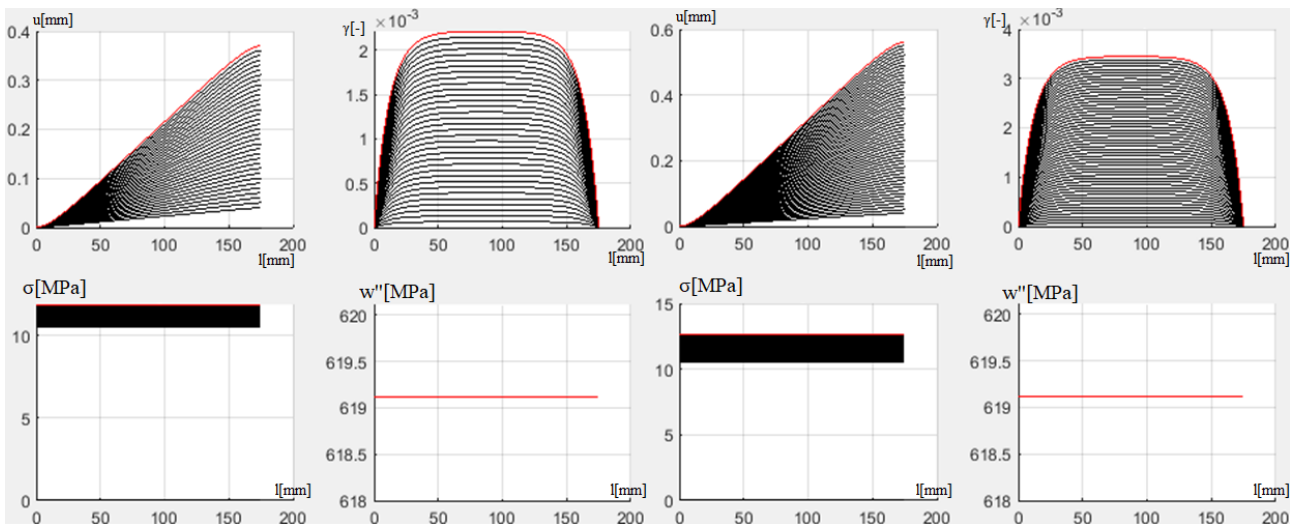


FIGURA 3.11 DATI NOTEVOLI PER T=0,37 A SINISTRA E T=0,48 A DESTRA

Da notare come, escludendo gli estremi della barra, la funzione che descrive la deformazione plastica sia circa costante. Questa osservazione risulta tanto più valida, quanto è alta la “w” , ovvero quanto più il ramo di hardening è a forte pendenza.

3.3.3. Softening

Si riporta ora un caso in cui è presente il solo ramo di softening, utilizzando il provino HA10SS05. La funzione energia plastica (w) viene riportata in forma grafica con le sue derivate (fig. 3.12):

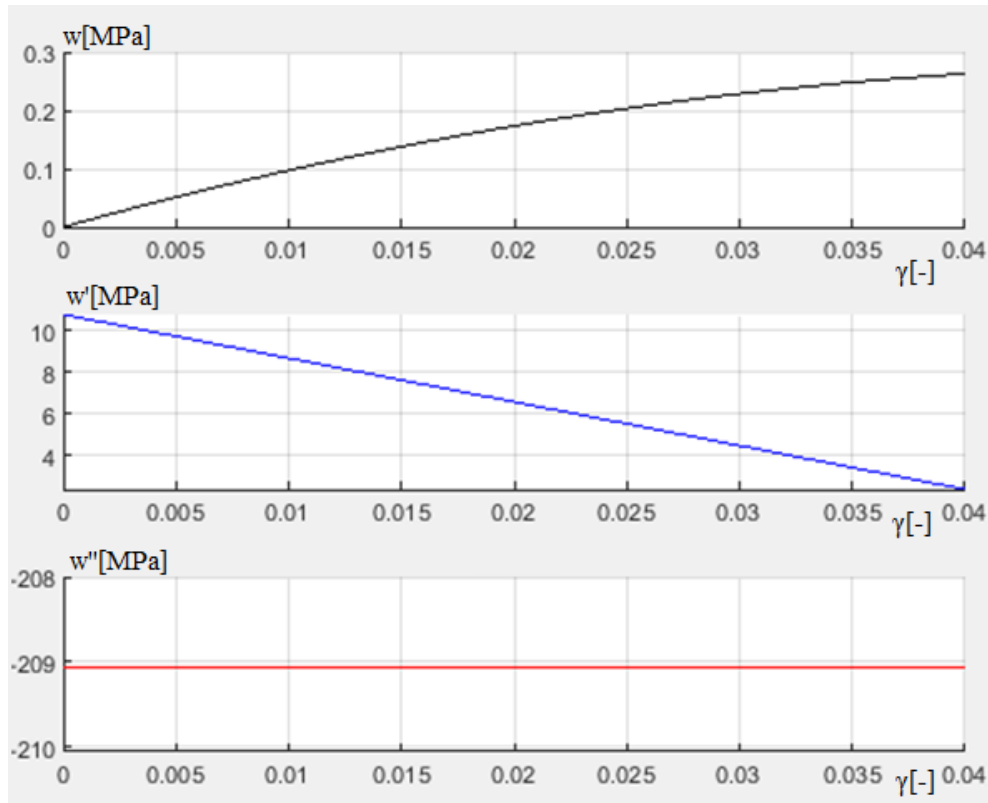


FIGURA 3.12 ANDAMENTO ENERGIA SIMULAZIONE SOFTENING

Come si può vedere la funzione è convessa. La sua derivata prima parte dalla tensione limite della fase elastica ed è lineare decrescente, mentre la derivata seconda è negativa e costante. La curva sforzo-deformazione risultante risulta (fig. 3.13):

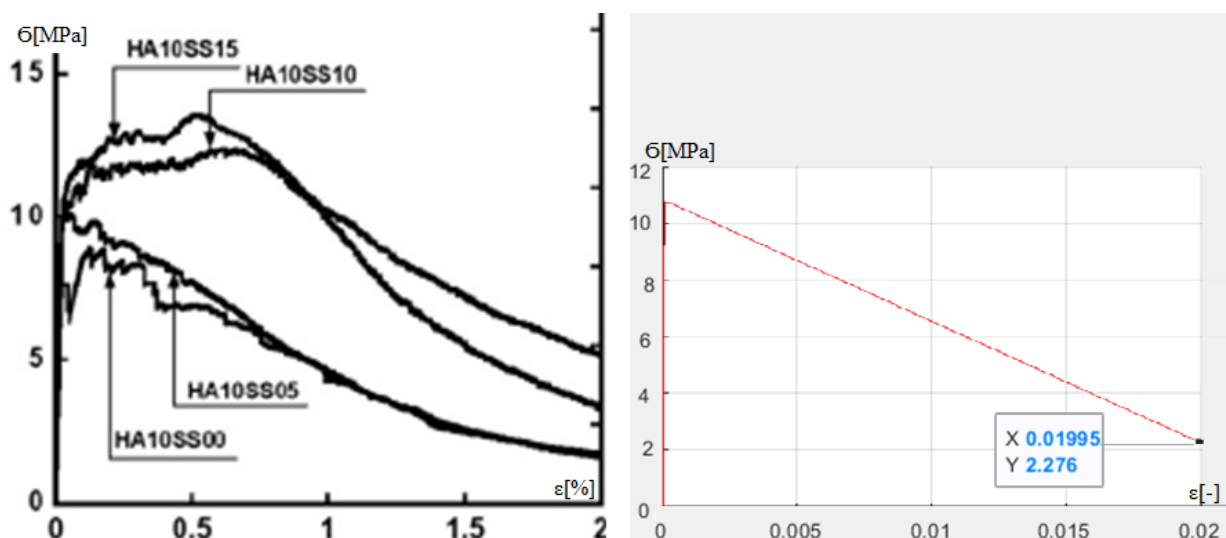


FIGURA 3.13 CONFRONTO CURVE SFORZO DEFORMAZIONE SOFTENING

Che, scala a parte, approssima abbastanza bene la curva.

Si passa ora ad analizzare come evolve lo spostamento e la plasticità in alcuni step. L'evoluzione è la seguente (figure 3.14-3.15-3.16):

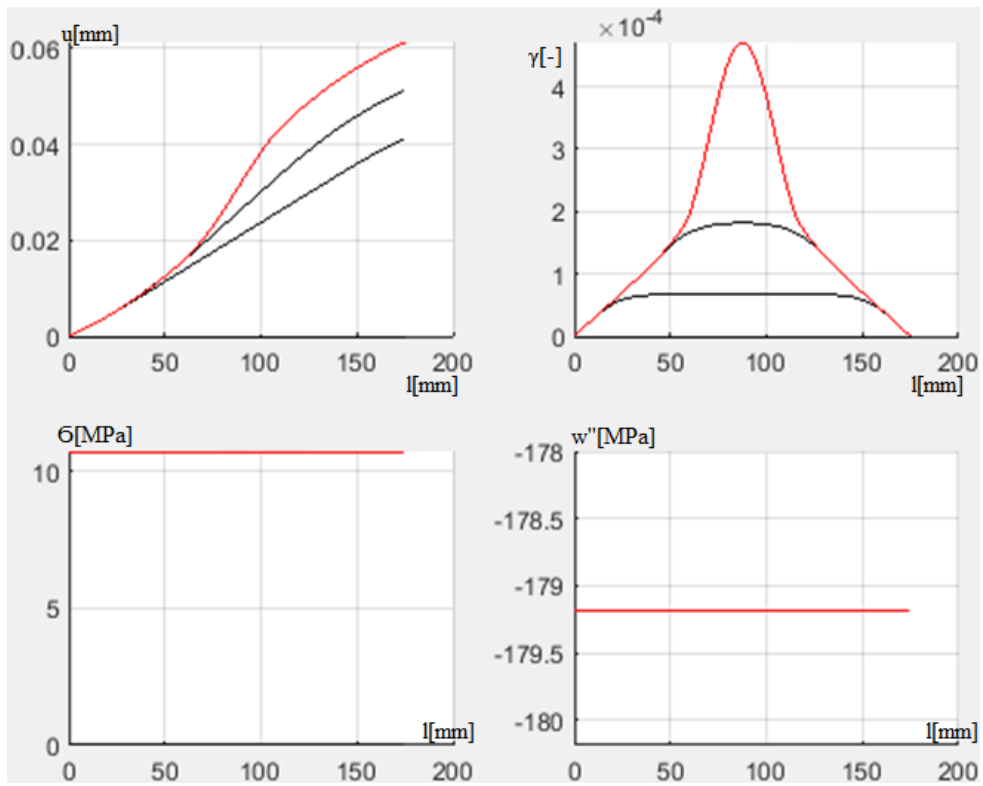


FIGURA 3.14 STEP SOFTENING T=0,6

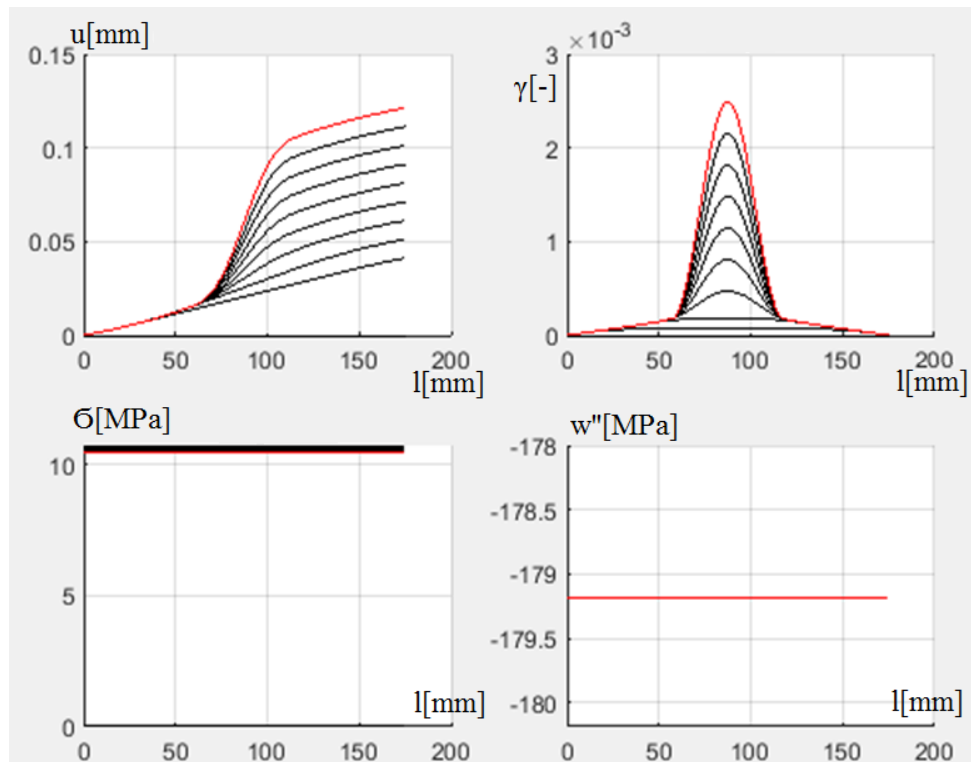


FIGURA 3.15 STEP SOFTENING T=0,121

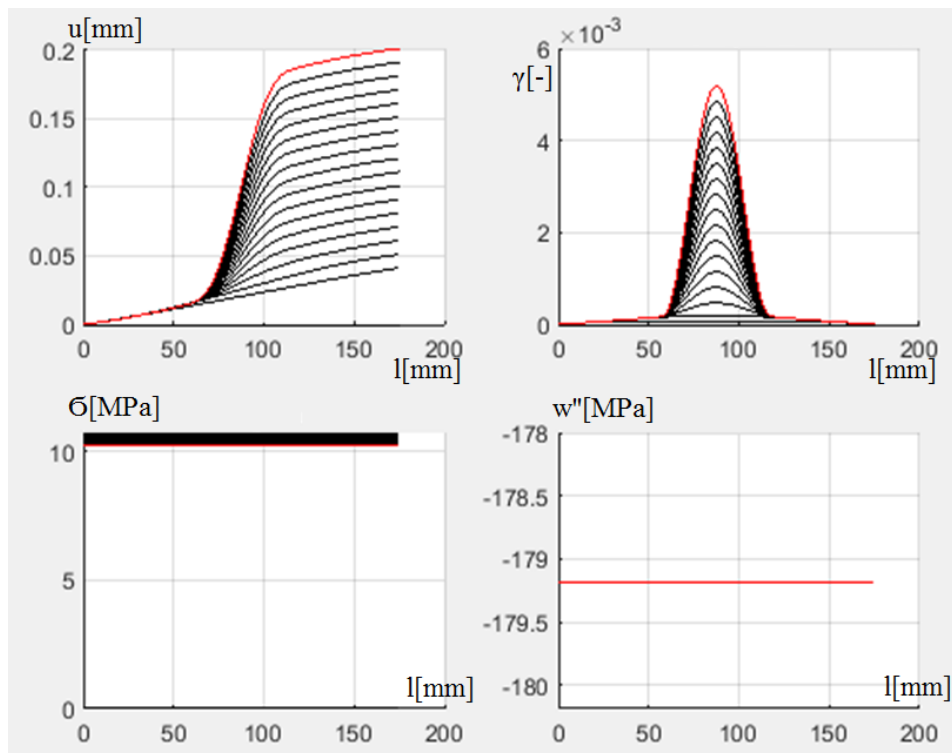


FIGURA 3.16 STEP SOFTENING T=0,2

Come risulta dal modello continuo, la plasticità nel softening risulta localizzata. Ciò corrisponde, nella prova reale, all'apertura di una macro fessura all'interno del provino, che evolve fino alla rottura. In questa fase si vede anche che le micro fessure presenti nel resto del provino non variano sostanzialmente la loro condizione. È, inoltre, molto interessante notare come la zona di massima fessurazione sia proprio corrispondente alla $\hat{l} \approx 70\text{mm}$ inizialmente stimata (fig. 3.17).

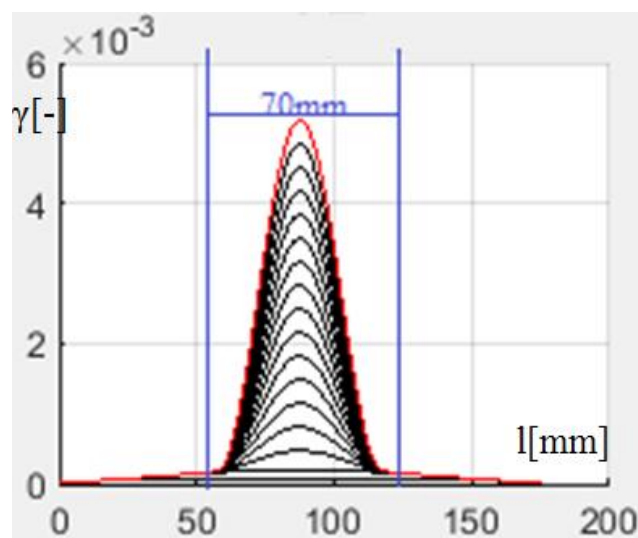


FIGURA 3.17 LUNGHEZZA DI FESSURAZIONE INTERNA

3.3.4. Annullamento della derivata seconda dell'energia plastica

Per completezza si riporta anche una simulazione per un materiale in cui la derivata seconda dell'energia plastica è nulla. Avendo imposto le condizioni al contorno di tipo hard, il materiale presenterà, tuttavia, un leggerissimo incrudimento (si prende ad esempio il provino HB10SS15), in cui:

- $w'' = 0$
- $w' = \sigma_{el} = 10,65 MPa$
- $w = \gamma \sigma_{el}$

Si riporta dunque la curva sforzo-deformazione (fig.3.18):

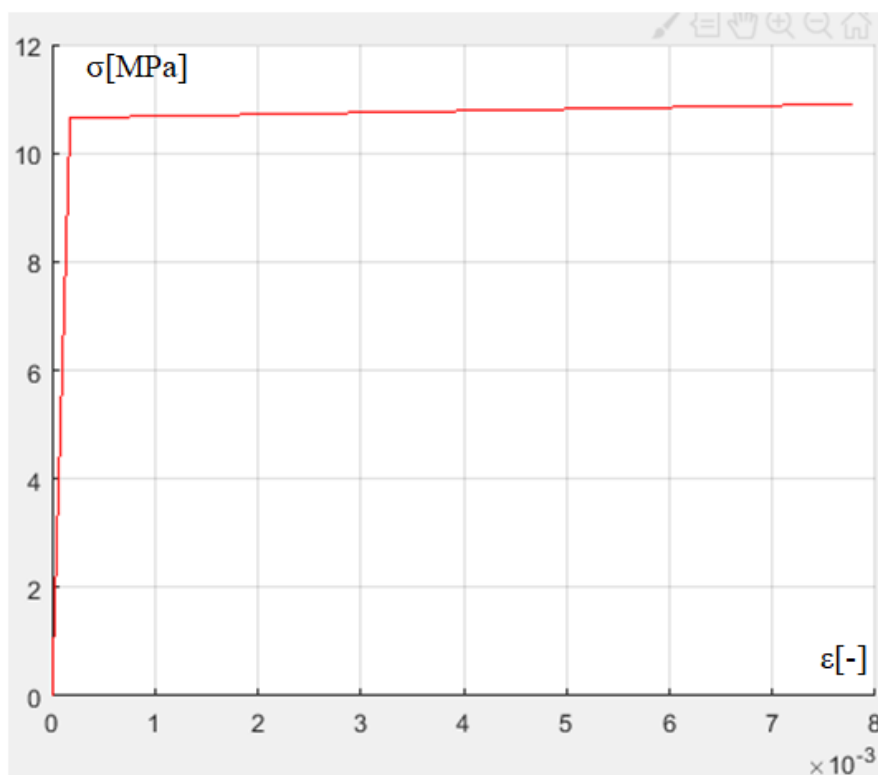


FIGURA 3.18 CURVA SFORZO DEFORMAZIONE PER $w''=0$

Mentre, per quanto riguarda l'evoluzione (fig. 3.19):

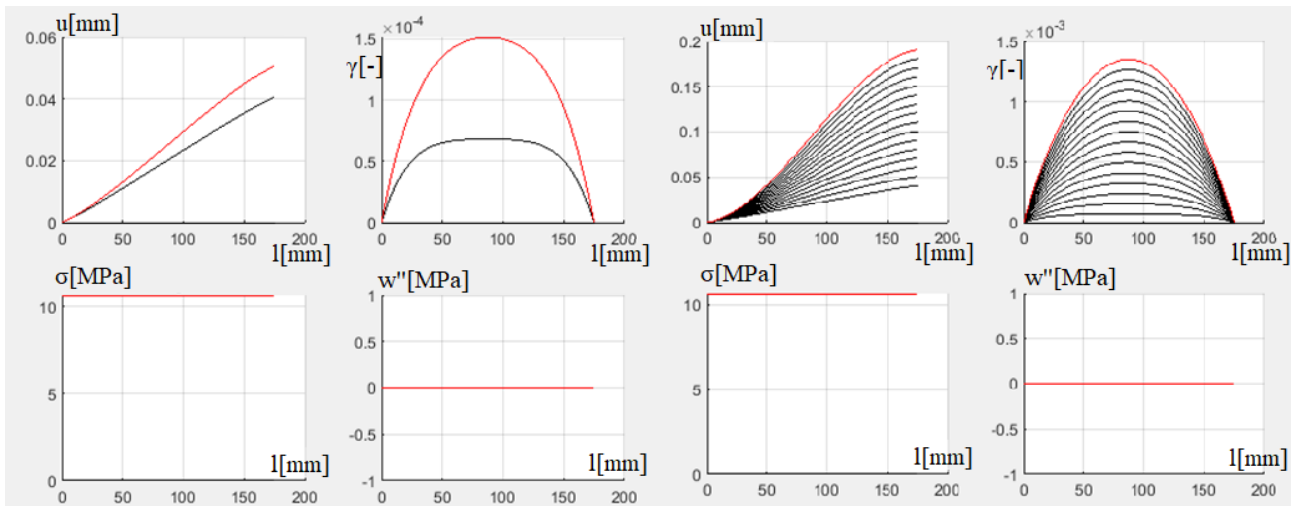


FIGURA 3.19 EVOLUZIONE PER $w''=0$ A $T=0,05$ E $T=0,19$

Ricordiamo che, dal modello al continuo si aveva:

$$\dot{\sigma}_t = \frac{12E\alpha}{12\alpha + l^2 E} \dot{u}_t' \quad ; \quad \dot{\gamma}_t = \frac{\dot{\sigma}_t}{2\alpha} x(l-x) \text{ (parabolico)}$$

3.3.5. Hardening e softening

In questa fase si passa all'esecuzione delle simulazioni complete con i due rami di hardening e softening. Il materiale preso in considerazione è LS10SS15, e si vuole andare a variare la lunghezza della zona di massima fessurazione per osservare gli effetti di questo parametro (fig. 3.20-3.21-3.22):

- $\hat{l} = 30\text{mm}$

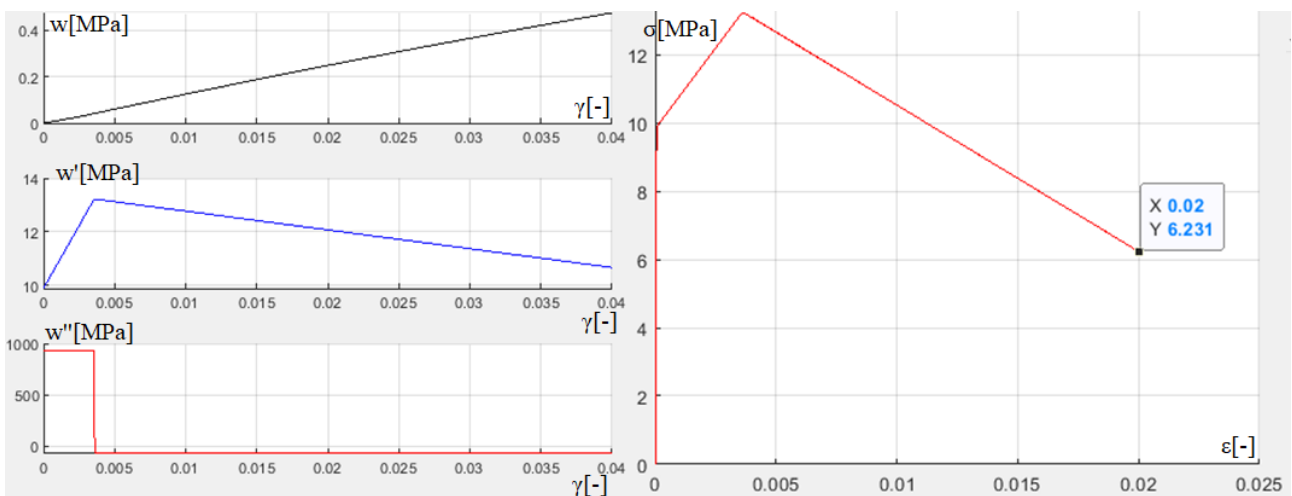


FIGURA 3.20 SOFTENING (1)

- $\hat{l} = 40mm$

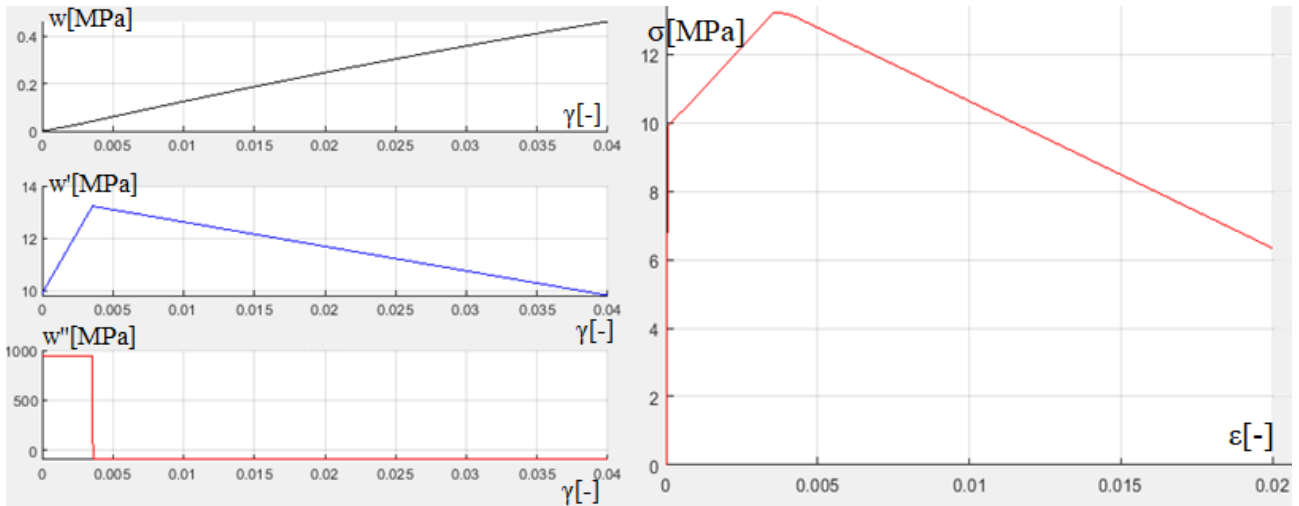


FIGURA 3.21 SOFTENING (2)

- $\hat{l} = 50mm$

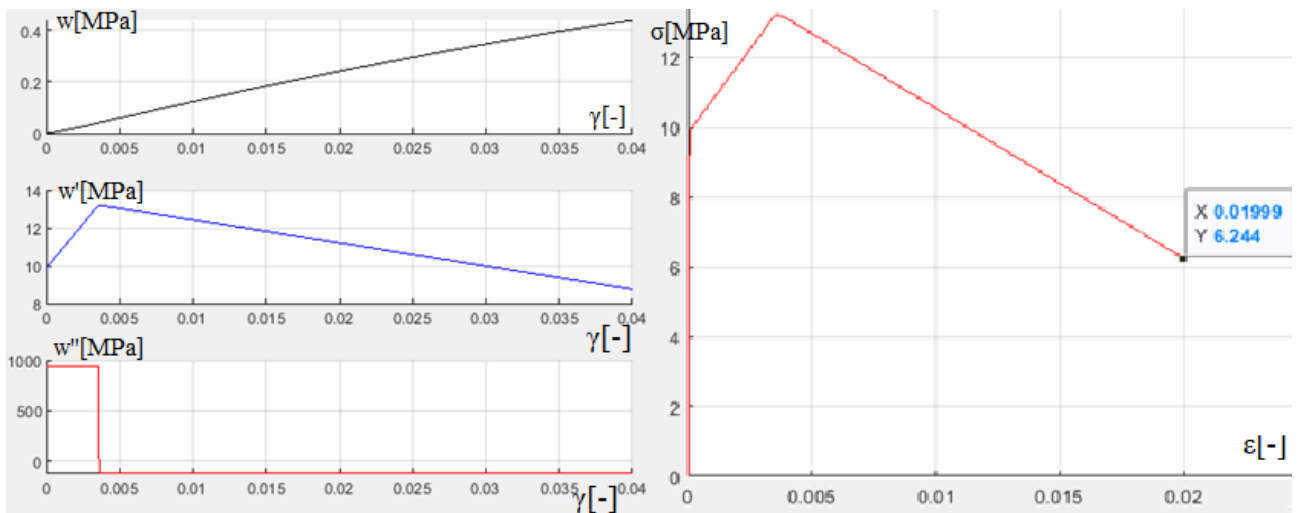


FIGURA 3.22 SOFTENING (3)

Come si osserva, aumentando la zona di massima fessurazione, ma ricavando la w'' da quest'ultima, la curva sforzo-deformazione non presenta alcun tipo di variazione apprezzabile. Non si può dunque, tramite una simulazione che riproduce la prova a trazione dello stesso provino, ottenere un controllo sull'affidabilità dei dati misurati. Sarebbe più opportuno, dunque, eseguire prove su almeno due forme di provino, per ottenere una possibilità di verifica. La curva globale non cambia, ma varierà la distribuzione della plasticità cumulata all'interno del provino e il bilancio tra tensione data dalla plasticità locale e tensione data dal contributo non locale. Dalle osservazioni dell'articolo prima citato, stimo una lunghezza interna di fessurazione di circa 3cm, e se ne riporta la curva relativa in seguito (fig. 3.23):

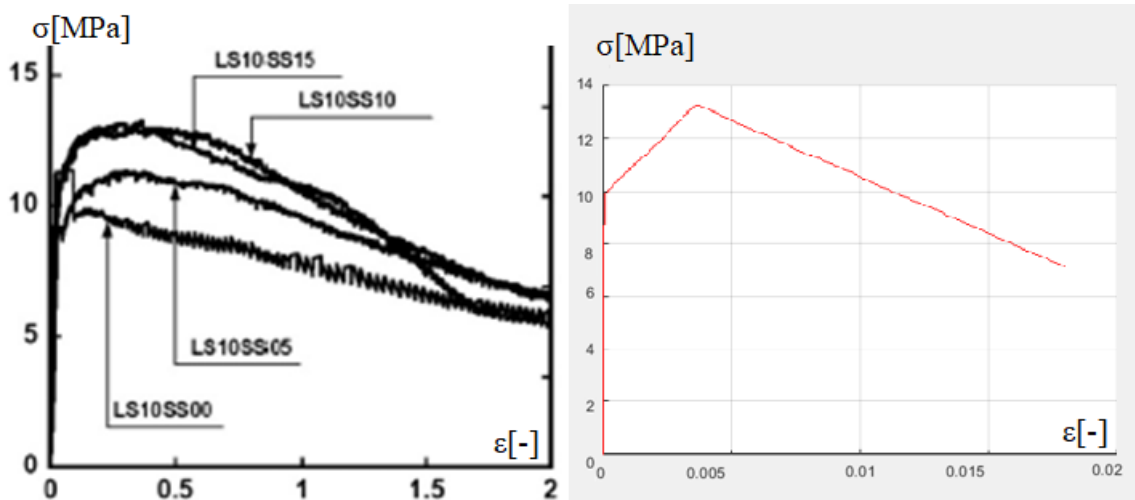


FIGURA 3.23 CONFRONTO CURVE SFORZO DEFORMAZIONE COMPLETA

Si riporta inoltre uno step notevole per l'evoluzione dei parametri di spostamento, deformazione plastica ed energia per la simulazione del provino con lunghezza di fessurazione da 3cm e da 7cm per un confronto (fig. 3.24):

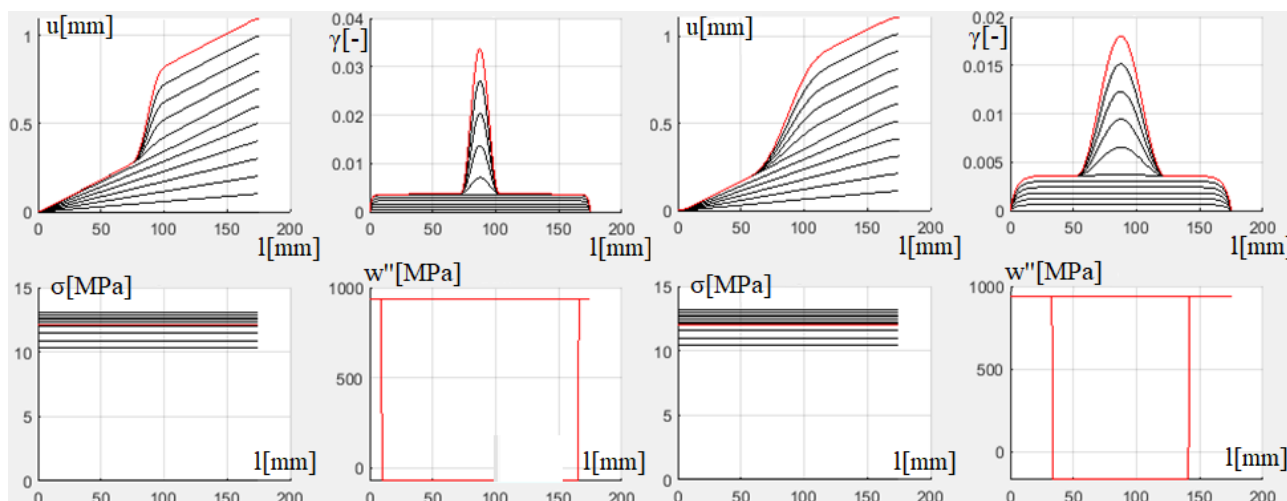


FIGURA 3.24 CONFRONTO DIVERSE LUNGHEZZE DI FESSURAZIONE INTERNA A T=1,1

In queste due ultime immagini risulta molto evidente il ruolo giocato dalla lunghezza di fessurazione interna. A questo punto si può considerare il modello 1-D compreso e i parametri costitutivi delle relazioni ottenuti. Si può passare dunque ad un'analisi 2-D più esaustiva.

4 MODELLO VARIAZIONALE 2-D

4.1.FORMULAZIONE CONTINUA

4.1.1. Funzionale energetico

Si procede ora con l'analisi di un modello in due dimensioni. Il fine dell'analisi del modello continuo (a differenza della parte 1-D) riguarda principalmente la comprensione e la facilitazione dell'implementazione numerica. Si parte dunque dalla formulazione energetica in una regione del corpo “ Ω ”:

$$\Psi(\underline{u}, e) = \int_{\Omega} \varphi(\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) + w(e) + \frac{1}{2} A \Delta e dx$$

In cui il termine “ $A(e)$ ” rappresenta il coefficiente del termine non locale (nel capitolo precedente era stato nominato “ $\alpha(e)$ ”), $\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p = \underline{\underline{E}}_e$ rappresenta la parte elastica della deformazione e l'energia elastica è stata scritta come “ $\varphi(\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p)$ ” ($\underline{\underline{E}}_{tot} = sym(\nabla \underline{u})$). Si riportano le derivate dell'energia elastica:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) &= \frac{1}{2} \left(\alpha (\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p)^2 + \beta \text{tr}^2(\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) \right) \\ \frac{d\varphi}{d\underline{\underline{E}}_e} (\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) &= \underline{\underline{T}} = \alpha (\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) + \beta \text{tr}(\underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p) \underline{\underline{I}} \\ \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\underline{\underline{H}}) &= \alpha \underline{\underline{H}} + \beta \text{tr}(\underline{\underline{H}}) \underline{\underline{I}} \end{aligned}$$

In cui i parametri (α, β) derivano dalle relazioni costitutive e dallo stato di tensione del corpo descritto nel prossimo sotto capitolo.

Si passa ora allo sviluppo nel tempo della funzione che rappresenta l'energia interna dell'elemento:

$$\Psi(\underline{u} + \tau \underline{\dot{u}}, e + \tau \dot{e}) = \Psi(\underline{u}, e) + \tau \dot{\Psi}(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e}) + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{\Psi}(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e}) = \Psi(\underline{u}, e) + \tau F(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e})$$

In cui:

$$F(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e}) = \dot{\Psi}(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e}) + \frac{1}{2} \tau \ddot{\Psi}(\underline{u}, e, \underline{\dot{u}}, \dot{e})$$

$$\dot{\Psi} = \int_{\Omega} \frac{d\varphi}{d\underline{\underline{E}}_e} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_{tot} - \frac{d\varphi}{d\underline{\underline{E}}_e} \cdot \underline{\underline{E}}_p + w' \dot{e} + A \nabla e \cdot \nabla \dot{e} dx = \int_0^l \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_{tot} - \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{E}}_p + w' \dot{e} + A \nabla e \cdot \nabla \dot{e} dx$$

$$\ddot{\Psi} = \int_{\Omega} \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\dot{\underline{\underline{E}}}_{tot})^2 - \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\underline{\underline{E}}_p)^2 - 2 \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\dot{\underline{\underline{E}}}_{tot} \cdot \underline{\underline{E}}_p) + w'' \ddot{e} + A \nabla \dot{e}^2 + o(\tau^2) dx$$

In cui, nota la soluzione all'istante "t", per conoscere la soluzione all'istante "t+τ" risulterà sufficiente la minimizzazione di:

$$F = \int_{\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}_{tot} - \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{E}}_p + w' \dot{e} + A \nabla e \cdot \nabla \dot{e} dx + \frac{1}{2} \tau \int_{\Omega} \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\dot{\underline{\underline{E}}}_{tot})^2 - \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\underline{\underline{E}}_p)^2 - 2 \frac{d^2\varphi}{d^2\underline{\underline{E}}_e} (\dot{\underline{\underline{E}}}_{tot} \cdot \underline{\underline{E}}_p) + w'' \ddot{e} + A \nabla \dot{e}^2 dx$$

4.1.2. Stato piano di tensione e di deformazione

In questo sotto capitolo si va ad analizzare la forma della matrice degli sforzi, nei due casi particolari si "stato piano di tensione" e "stato piano di deformazione" ricordando la simmetria delle matrici " $\underline{\underline{T}}$ " ed " $\underline{\underline{E}}$ ", si definiscono questi due stati rispettivamente tramite:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si inizia analizzando lo stato piano di tensione, in cui, definita la sottomatrice:

$$\hat{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Si ottiene una forma della parte deviatorica della matrice delle tensioni come segue:

$$\bar{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\underline{T}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2} & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & -\frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \end{bmatrix}$$

Da ciò discende, utilizzando la superficie di snervamento di Von Mises, una matrice " $\underline{\underline{N}}$ " con la seguente forma:

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\bar{\underline{\underline{T}}}\|} \bar{\underline{\underline{T}}} = n \bar{\underline{\underline{T}}} = n \left(\underline{\underline{T}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{3 \times 3} \right) \quad \text{con } n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\bar{\underline{\underline{T}}}\|}$$

Usando ora la definizione di quest'ultima matrice, si può scrivere:

$$\underline{\underline{E}}_p = e\underline{\underline{N}} = en\underline{\underline{T}} = en \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{T}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2} & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{T}}}) \end{bmatrix}$$

Definendo ora la sottomatrice 2x2:

$$\underline{\underline{\hat{N}}} = \underline{\underline{\hat{T}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2}$$

Si ha:

$$\underline{\underline{E}}_p = e\underline{\underline{N}} = en\underline{\underline{T}} = en \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{N}}} & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{T}}}) \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3$$

Si osserva ora che:

$$\underline{\underline{E}}_e = \underline{\underline{E}}_{tot} - \underline{\underline{E}}_p = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}_p = \text{sym} \nabla \underline{\underline{u}} - en \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{N}}} & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} - \frac{en}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{T}}}) \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3$$

Si utilizzano ora le seguenti relazioni costitutive standard al fine di determinare E_{tot33} :

$$\underline{\underline{T}} = 2\mu \underline{\underline{E}}_e + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{E}}_e) \underline{\underline{I}}_{3 \times 3}$$

$$T_{33} = 2\mu \left(E_{33} - en \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \right) + \lambda (\text{div}(\underline{\underline{u}}) + E_{33})$$

Da cui: $E_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} - \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{N}}})$

Si passa ora all'analisi dello stato piano di deformazione, caratterizzato dalla forma:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo come sopra:

$$\underline{\underline{N}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\underline{\underline{T}}\|} \underline{\underline{T}} = n\underline{\underline{T}} = n \left(\underline{\underline{T}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \underline{\underline{I}}_{3 \times 3} \right)$$

Tuttavia, applicando la definizione del tensore “ $\underline{\underline{N}}$ ”, otteniamo che la componente dello stesso nella terza riga e nella terza colonna deve essere nullo ($E_{p33} = eN_{33} = 0$). Da ciò si ha:

$$T_{33} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) = 0 \rightarrow T_{33} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \rightarrow T_{11} + T_{22} = \frac{2}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) = \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \rightarrow \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}})$$

Da ciò si ottiene:

$$\underline{\underline{E}}_p = eN = en\underline{\underline{T}} = en \begin{bmatrix} \hat{\underline{\underline{T}}} - \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2} & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \text{ con } n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\underline{\underline{T}}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\hat{\underline{\underline{T}}} - \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2}\|}$$

Invertendo ora la relazione costitutiva classica si ha:

$$\underline{\underline{E}}_e = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\underline{T}}} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (\text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) + T_{33}) & \underline{\underline{0}}_{2 \times 1} \\ \underline{\underline{0}}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\mu} \left[T_{33} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (\text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) + T_{33}) \right] \hat{\underline{\underline{e}}}_3 \otimes \hat{\underline{\underline{e}}}_3$$

Dovendo annullare anche la parte elastica della deformazione, sarà necessario che:

$$T_{33} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (\text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) + T_{33}) = 0 \rightarrow T_{33} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}})$$

Si passa ora alla fase finale di questo sotto capitolo in cui si vanno a trasformare le relazioni costitutive in tre dimensioni in relazioni costitutive valide per le sole due dimensioni. Data dunque la formula per l'energia elastica interna e le relazioni costitutive seguenti:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(\alpha (\hat{\underline{\underline{E}}}_e)^2 + \beta \text{tr}^2(\hat{\underline{\underline{E}}}_e) \right)$$

$$\frac{d\varphi}{d\hat{\underline{\underline{E}}}_e}(\hat{\underline{\underline{E}}}_e) = \hat{\underline{\underline{T}}} = \alpha(\hat{\underline{\underline{E}}}_e) + \beta \text{tr}(\hat{\underline{\underline{E}}}_e) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2}$$

Si osservano i valori delle costanti “ α ” e “ β ” e degli altri parametri:

- Stato piano di sforzo

$$\alpha = 2\mu$$

$$\beta = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}$$

$$\hat{\underline{\underline{N}}} = n[\hat{\underline{\underline{T}}} - (N_coeff) \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2}]$$

$$N_coeff = \frac{1}{3}$$

$$n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\hat{\underline{\underline{T}}} - (N_coeff) \text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}}_{2 \times 2}\|}$$

- Stato piano di deformazione

$$\alpha = 2\mu$$

$$\beta = \lambda$$

$$\hat{\underline{\underline{N}}} = n[\hat{\underline{\underline{T}}} - (N_coeff)\text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}})\underline{\underline{I}}_{2 \times 2}]$$

$$N_coeff = \frac{1}{2}$$

$$n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\hat{\underline{\underline{T}}} - (N_coeff)\text{tr}(\hat{\underline{\underline{T}}})\underline{\underline{I}}_{2 \times 2}\|}$$

Si può procedere dunque con la risoluzione del problema ridotto in due dimensioni.

4.1.3. Minimizzazione alternata - introduzione

La procedura di minimizzazione alternata consente di determinare il punto di minimo del funzionale in esame, minimizzandolo prima rispetto ad una delle funzioni (ad esempio la plasticità cumulata), poi rispetto all'altra (ad esempio lo spostamento) ripetendo il procedimento di minimizzazione in modo iterativo.

In pratica i passaggi, per ogni step di carico, saranno:

- Si parte dai dati di partenza: $\underline{\underline{u}}_i; \underline{\underline{p}}_i; \underline{\underline{E}}_{pti}; \underline{\underline{E}}_{elti} = \text{sym}(\nabla \underline{\underline{u}}_i) - \underline{\underline{E}}_{pti} = \underline{\underline{E}}_{tot,ti} - \underline{\underline{E}}_{pti}$

In cui il pedice “t” indica lo step “temporale” (la fase di carico), il pedice “i”, invece, il numero dell'iterazione che si sta effettuando. Per la prima iterazione si prendono i valori dello step temporale precedente.

- Si minimizza il funzionale energetico rispetto a $\Delta \underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{u}}_{i+1} - \underline{\underline{u}}_i$;

$$F_u = \int_{\Omega} \underline{\underline{T}} \bullet (\Delta \underline{\underline{E}}_{tot}) + \frac{d^2 \varphi}{d^2 \underline{\underline{E}}_e} (\underline{\underline{E}}_{tot})^2 d\Omega$$

- Si aggiornano i dati, ottenendo: $\underline{\underline{u}}_i; \underline{\underline{p}}_i; \underline{\underline{E}}_{pti}; \underline{\underline{E}}_{elti} = \text{sym}(\nabla \underline{\underline{u}}_i) - \underline{\underline{E}}_{pti} = \underline{\underline{E}}_{tot,ti} - \underline{\underline{E}}_{pti}; \underline{\underline{N}}_i$
- Si minimizza il funzionale relativo alla deformazione plastica cumulata:

$$F_\gamma = \int_{\Omega} (w'_i - \underline{\underline{T}}_i \bullet \underline{\underline{N}}_i) \delta \gamma_i + A \nabla e_i \bullet \nabla \delta e_i + \frac{1}{2} (\alpha \underline{\underline{N}}_i \bullet \underline{\underline{N}}_i + \beta \text{tr}^2(\underline{\underline{N}}_i) + w''_i) \delta e_i^2 + \frac{1}{2} A \nabla \delta e_i \bullet \nabla \delta e_i d\Omega$$

- Dopodiché si riaggiornano i valori e si passa all'iterazione “i+1” finché non si ottiene che:

$$\|\underline{\underline{u}}_i\| < \text{tolleranza}(\underline{\underline{u}}_i) \quad e \quad \|\underline{\underline{\gamma}}_i\| < \text{tolleranza}(\underline{\underline{\gamma}}_i)$$

Con tolleranze assegnate compatibili con i risultati richiesti.

4.2.DISCRETIZZAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI DEL MODELLO 2-D

4.2.1. Geometria

La geometria del modello viene sintetizzata tramite alcune matrici. Gli elementi saranno costituiti da mesh triangolari in cui, oltre ai vertici principali, verranno inseriti tre punti, al centro di ogni segmento per ottenere uno spostamento di forma quadratica e una conseguente deformazione totale lineare, mentre la deformazione plastica verrà considerata da subito lineare. La prima matrice che descriverà la geometria andrà a raccogliere la posizione nello spazio di tutti i nodi (punti) generati. Per gli estremi degli elementi triangolari, questa matrice è la seguente:

$$p_lin = \begin{bmatrix} \dots & x_i & \dots \\ \dots & y_i & \dots \end{bmatrix}$$

Mentre i punti aggiuntivi, intermedi ai vari segmenti, verranno aggiunti in successione nella prossima matrice:

$$p_quad = \begin{bmatrix} p_lin & \dots & x_j & \dots \\ \dots & \dots & y_j & \dots \end{bmatrix}$$

Ed il “nome” dei vari punti viene dato dalla colonna in cui viene riportata la posizione all’interno di dette matrici. Per quanto riguarda gli elementi triangolari che andranno a comporre il corpo studiato, essi saranno raccolti in una matrice in cui, ogni colonna, rappresenterà uno dei triangoli componenti il corpo. Si utilizza, dunque, la seguente matrice:

$$t_lin = \begin{bmatrix} \dots & n_{e1} & \dots \\ \dots & n_{e2} & \dots \\ \dots & n_{e3} & \dots \\ \dots & dom & \dots \end{bmatrix}$$

In cui i primi tre numeri di ogni colonna rappresentano i punti estremi dei triangoli, presi in senso antiorario, mentre l’ultimo numero (“dom”) rappresenta il dominio di appartenenza (per il nostro problema il dominio è uno solo, oltre al dominio esterno). L’inserimento dei punti intermedi avviene nella seguente matrice:

$$t_quad = \begin{bmatrix} \dots & n_{e1} & \dots \\ \dots & n_{e2} & \dots \\ \dots & n_{e3} & \dots \\ \dots & n_{e4} & \dots \\ \dots & n_{e5} & \dots \\ \dots & n_{e6} & \dots \\ \dots & dom & \dots \end{bmatrix}$$

In cui i primi tre numeri della colonna sono gli stessi del caso lineare, mentre i successivi tre rappresentano i punti aggiunti, presi sempre in senso antiorario (come nell'immagine). Come per i punti, gli elementi triangolari vengono denominati con la posizione degli stessi all'interno delle due precedenti matrici. L'ultimo numero identifica, come prima, il dominio di appartenenza.

Si passa ora alla definizione delle matrici contenenti i dati dei segmenti di bordo. Dette matrici conterranno un segmento per ogni colonna e avranno, in ogni colonna, i primi due numeri (tre nel caso della matrice che considera anche i punti intermedi) la denominazione dei nodi di estremità, mentre la seconda coppia di numeri (tripla nel caso della matrice che considera anche i punti intermedi) riporterà la posizione del relativo punto in un sistema di riferimento normalizzato (numeri compresi tra 0 ed 1), il numero successivo riporterà la denominazione del dominio di appartenenza del segmento, mentre i restanti due numeri riporteranno, rispettivamente, il nome dei domini a sinistra e destra del segmento. Si aggiunge, come ultimo numero la denominazione del triangolo di appartenenza del segmento. Secondo ciò che è stato detto, risulteranno le seguenti due matrici:

$$e_{lin} = \begin{bmatrix} \dots & n_{h1} & \dots \\ \dots & n_{h2} & \dots \\ \dots & y_1 & \dots \\ \dots & y_2 & \dots \\ \dots & dom_appartenenza & \dots \\ \dots & dom_sinistra & \dots \\ \dots & dom_destra & \dots \\ \dots & n_{triangolo} & \dots \end{bmatrix}$$

$$e_{quad} = \begin{bmatrix} \dots & n_{h1} & \dots \\ \dots & n_{h_intermedio} & \dots \\ \dots & n_{h2} & \dots \\ \dots & y_1 & \dots \\ \dots & y_{intermedio} & \dots \\ \dots & y_2 & \dots \\ \dots & dom_appartenenza & \dots \\ \dots & dom_sinistra & \dots \\ \dots & dom_destra & \dots \\ \dots & n_{triangolo} & \dots \end{bmatrix}$$

4.2.2. Funzioni di forma

Si passa ora a descrivere gli elementi triangolari isoparametrici (si useranno infatti le stesse funzioni di interpolazioni sia per la forma che per gli spostamenti) che verranno usati nelle simulazioni.

Per ogni triangolo si utilizzerà il seguente sistema di riferimento locale (fig. 4.1):

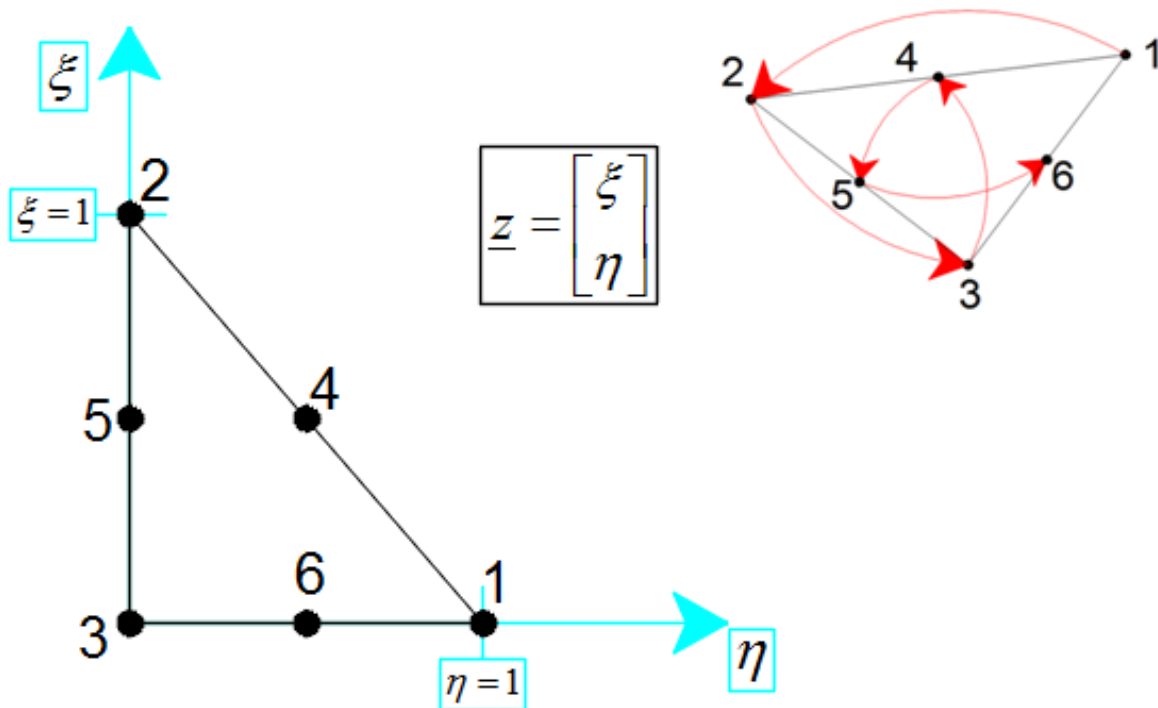


FIGURA 4.1 SISTEMA DI RIFETRIMENTO LOCALE (SINISTRA) E NOMENCLATURA PUNTI LOCALE (DESTRA)

Il sistema di riferimento varrà sia per le funzioni di forma quadratiche, sia per quelle lineari. Si inizia con il riportare i vettori delle funzioni di forma:

$$\underline{\psi}_u = \begin{bmatrix} \xi(2\xi-1) \\ \eta(2\eta-1) \\ \zeta(2\zeta-1) \\ 4\xi\eta \\ 4\eta\zeta \\ 4\zeta\xi \end{bmatrix} \quad \underline{\psi}_e = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \zeta = 1 - \xi - \eta$$

Si definiscono ora i seguenti gradienti per semplicità di notazione successiva:

$$\nabla_z = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta\xi} \\ \frac{\delta}{\delta\eta} \end{bmatrix} \quad \nabla_x = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \\ \frac{\delta}{\delta x_2} \end{bmatrix}$$

In pratica tramite il pedice si indicherà il sistema di riferimento (locale o globale) rispetto al quale si calcola il gradiente della funzione scelta. Si passa ora al cambio di variabili vero e proprio. Date le

funzioni di forma $\underline{\Psi}\left(\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ (nel riferimento globale) e $\underline{\psi}\left(\underline{z} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}\right)$ (nel riferimento locale), si

ha:

$$\nabla_z \psi_i(\underline{z})[\underline{h}] = \nabla_z \psi_i(\underline{z}) \cdot \underline{h} = \nabla_x \Psi_i(\underline{x}) \cdot [(\nabla_z \underline{x}) \underline{h}]$$

Da cui:

$$\nabla_z \psi_i(\underline{z}) = (\nabla_z \underline{x})^T \nabla_x \Psi_i(\underline{x}) = \underline{\underline{J}} \nabla_x \Psi_i(\underline{x})$$

in cui $\underline{\underline{J}} = (\nabla_z \underline{x})^T$ rappresenta la matrice Jacobiana relativa al cambio di variabile. Si passa dunque al calcolo della matrice Jacobiana, approssimando il vettore “ $\underline{x}(\underline{z})$ ” con le sue funzioni di forma (lineari):

$$\underline{\underline{J}} = (\nabla_z \underline{x})^T = \left(\sum_{i=1}^3 \nabla_z \psi_{ei} \underline{x}_i \right)^T = \sum_{i=1}^3 (\underline{x}_i \otimes \nabla_z \psi_{ei})^T = \sum_{i=1}^3 (\nabla_z \psi_{ei} \otimes \underline{x}_i)$$

Andando a svolgere i conti si ottiene:

$$\underline{\underline{J}} = \sum_{i=1}^3 (\nabla_z \psi_{ei} \otimes \underline{x}_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \underline{x}_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} (x_1 - x_3) & (y_1 - y_3) \\ (x_2 - x_3) & (y_2 - y_3) \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{J}}) = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)$$

Si omette il calcolo per quanto riguarda le funzioni di forma quadratiche in quanto si ottiene lo stesso Jacobiano. Si passa ora alla discretizzazione vera e propria. Il vettore degli spostamenti globale sarà composto nel seguente modo:

$$\underline{u}_g = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots]^T$$

In cui la lettera “ u ” indica lo spostamento del punto considerato in direzione parallela all’applicazione del carico, mentre “ v ” nella direzione ortogonale. Il pedice indica il nome del nodo considerato. Per quanto riguarda la plasticità cumulata, il vettore globale si otterrà semplicemente ordinando le plasticità cumulate dei vari nodi con il pedice in ordine crescente. I vettori delle incognite locali sono presi come:

$$\underline{u}_e = [u_1^e, u_2^e, u_3^e, u_4^e, u_5^e, u_6^e, v_1^e, v_2^e, v_3^e, v_4^e, v_5^e, v_6^e]^T$$

$$\underline{p}_e = [p_1^e, p_2^e, p_3^e]^T$$

Da ora in poi la plasticità cumulata verrà identificata con la lettera “ p ”, anziché con la “ e ” come fatto fin ora, per evitare confusione. In questi due ultimi vettori, i pedici che descrivono il nodo di riferimento sono presi naturalmente nel sistema di nomenclatura locale. I due spostamenti considerati e la plasticità cumulata possono dunque esser scritti, localmente, come:

$$\underline{u}_{2 \times 1}^e = \begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix} = \underline{\underline{\psi}}_u \underline{u}_{6 \times 1}^e \quad p_e = \underline{\underline{\psi}}_p p_e$$

In cui “ $\underline{u}_{6 \times 1}^e$ ” è lo spostamento appena descritto, mentre le matrici delle funzioni di forma saranno:

$$\underline{\underline{\psi}}_u = \begin{bmatrix} \underline{\psi}_u^T & \underline{0}_{1 \times 6} \\ \underline{0}_{1 \times 6} & \underline{\psi}_u^T \end{bmatrix} \quad \underline{\psi}_u = \begin{bmatrix} \xi(2\xi - 1) \\ \eta(2\eta - 1) \\ \zeta(2\zeta - 1) \\ 4\xi\eta \\ 4\eta\zeta \\ 4\zeta\xi \end{bmatrix} \quad \underline{\psi}_p = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^T \quad \zeta = 1 - \xi - \eta$$

La matrice di connettività per la plasticità cumulata sarà data dai seguenti vettori riga:

$$Co_p_i = [t_lin(1,i) \quad t_lin(2,i) \quad t_lin(3,i)]$$

Mentre, per quanto riguarda lo spostamento, ogni 1-esimo gruppo di quattro righe della matrice di connettività sarà composto come segue:

$$Co_u_i = \begin{bmatrix} 2(t_quad(1,i))+1 & 2(t_quad(2,i))+1 & 2(t_quad(3,i))+1 \\ 2(t_quad(4,i))+1 & 2(t_quad(5,i))+1 & 2(t_quad(6,i))+1 \\ 2(t_quad(1,i))+1 & 2(t_quad(2,i))+1 & 2(t_quad(3,i))+1 \\ 2(t_quad(4,i))+1 & 2(t_quad(5,i))+1 & 2(t_quad(6,i))+1 \end{bmatrix}$$

4.2.3. Calcolo elementi notevoli

Al fine di migliorare l'esposizione del successivo sottocapitolo, si definiscono ora alcune quantità notevoli, utili successivamente.

- Gradiente dello spostamento:

$$\nabla_x \underline{u} = \underline{\underline{G}}(\underline{z}) \underline{u}^e \quad \text{con} \quad \underline{\underline{G}}(\underline{z}) = \begin{bmatrix} \underline{F}(\underline{z}) & \underline{0}_{2 \times 6} \\ \underline{0}_{2 \times 6} & \underline{F}(\underline{z}) \end{bmatrix}$$

In cui:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{z}) = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{J}})} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{u1,\xi} & \psi_{u2,\xi} & \psi_{u3,\xi} & \psi_{u4,\xi} & \psi_{u5,\xi} & \psi_{u6,\xi} \\ \psi_{u1,\eta} & \psi_{u2,\eta} & \psi_{u3,\eta} & \psi_{u4,\eta} & \psi_{u5,\eta} & \psi_{u6,\eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{z}) = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} 4\xi - 1 & 0 & 1 - 4\zeta & 4\eta & -4\eta & 4(\zeta - \xi) \\ 0 & 4\eta - 1 & 1 - 4\zeta & 4\xi & 4(\zeta - \eta) & -4\xi \end{bmatrix}$$

- Deformazione totale (parte simmetrica dello spostamento):

$$\underline{\underline{E}}_{tot} = sym(\nabla_x \underline{u}) = \underline{\underline{S}}(\underline{z}) \underline{u}^e \quad con \quad \underline{\underline{S}}(\underline{z}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 + \underline{G}_3 \\ \underline{G}_2 + \underline{G}_3 \\ 2\underline{G}_4 \end{bmatrix}$$

In cui il pedice indica il numero della riga della relativa matrice

- Deformazione volumetrica totale (traccia della deformazione totale precedentemente vista):

$$tr(sym(\nabla_x \underline{u})) = tr(\nabla_x \underline{u}) = \underline{D}(\underline{z}) \underline{u}^e \quad con \quad \underline{D}(\underline{z}) = \underline{G}_1 + \underline{G}_4$$

- Gradiente della plasticità cumulata:

$$\nabla_x p = \underline{\underline{B}}(\underline{z}) \underline{p}^e \quad con \quad \underline{\underline{B}}(\underline{z}) = \frac{1}{\det(\underline{J})} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Si passa ora alla definizione del tensore delle tensioni, definendo, inizialmente l'applicazione:

$$\Delta f_i := f_i - f_t$$

In cui il pedice “i” rappresenta il numero dell'iterazione che si sta eseguendo, mentre il pedice “t” indica l'istante temporale nel quale è noto sia lo stato di tensione che di deformazione del corpo.

Usando ciò si ha:

$$\underline{\underline{T}}_i = \alpha \left(\nabla_x \underline{u}_i + \nabla_x (\Delta \underline{u}_i) - \underline{\underline{E}}_{pr} - \Delta p_i \underline{\underline{N}}_i \right) + \beta \left(tr(\nabla_x \underline{u}_i) + tr(\nabla_x \Delta \underline{u}_i) - tr(\underline{\underline{E}}_{pr}) - tr(\Delta p_i \underline{\underline{N}}_i) \right)$$

In questa formula si riconoscono:

$$\underline{\underline{T}}_i = \alpha \left(\nabla_x \underline{u}_i - \underline{\underline{E}}_{pr} \right) + \beta \left(tr(\nabla_x \underline{u}_i) - tr(\underline{\underline{E}}_{pr}) \right) \quad \Delta \underline{\underline{T}}_i = \alpha \left(\nabla_x (\Delta \underline{u}_i) - \Delta p_i \underline{\underline{N}}_i \right) + \beta \left(tr(\nabla_x \Delta \underline{u}_i) - tr(\Delta p_i \underline{\underline{N}}_i) \right)$$

E si ottiene:

$$\underline{\underline{T}}_i = \underline{\underline{T}}_i + \Delta \underline{\underline{T}}_i$$

Si passa ora al cambio di coordinate che esprimerà la matrice delle tensioni nel sistema di riferimento locale. Ciò viene fatto esprimendo la matrice con un vettore colonna come segue:

$$\underline{T} = [T_{11} \quad T_{12} \quad T_{21} \quad T_{22}]^T$$

A livello di nomenclatura si differenzia dalla matrice delle tensioni classica solo grazie alla sottolineatura singola anziché doppia (come la matrice).

4.2.4. Discretizzazione dei funzionali energetici

Definiti i termini notevoli che si andranno ad usare, si procede con il calcolo delle variazioni del funzionale da minimizzare (tramite minimizzazione alternata). Si parte dunque esplicitando " F_u " nel sistema discreto:

$$F_u = \int_{\Omega} (\underline{T}_i + \Delta \underline{T}_i) \bullet (\delta \underline{E}_{tot}) + \frac{1}{2} (\alpha \delta \underline{E}_{tot}^2 + \beta \text{tr}^2(\delta \underline{E}_{tot})) d\Omega$$

Si passa dunque al sistema discreto, ottenendo:

$$F_u^e = \int_{\Omega_e} \det(\underline{J}) \left[(\underline{T}_i + \Delta \underline{T}_i) \bullet (\underline{S}(\underline{z}) \delta \underline{u}^e) + \frac{1}{2} (\alpha (\underline{S}(\underline{z}) \delta \underline{u}^e)^2 + \beta (\underline{D}(\underline{z}) \delta \underline{u}^e)^2) \right] d\Omega$$

Con i vettori delle tensioni precedentemente descritti ed opportunamente ordinati, mentre il determinante della matrice " \underline{J} " viene inserito per effettuare il cambiamento di variabile. Andando a svolgere i conti si ha:

$$F_u^e = \left[\int_{\Omega_e} \det(\underline{J}) \underline{S}^T (\underline{T}_i + \Delta \underline{T}_i) d\Omega \right] \bullet \delta \underline{u}^e + \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_e} \det(\underline{J}) (\alpha \underline{S}^T \underline{S} + \beta \underline{D}^T \underline{D}) d\Omega \right] \delta \underline{u}^e \bullet \delta \underline{u}^e$$

Riconoscendo ora le quantità tra parentesi quadre rispettivamente come " \underline{f}_u^e " e " \underline{K}_u^e ", la variazione del funzionale si può riscrivere come:

$$F_u^e = \underline{f}_u^e \bullet \delta \underline{u}^e + \frac{1}{2} \underline{K}_u^e \delta \underline{u}^e \bullet \delta \underline{u}^e$$

Resta, dunque, solo da assemblare la soluzione relativa ai vari elementi per ottenere la soluzione globale che minimizza il funzionale energetico rispetto lo spostamento. Si procede dunque con la minimizzazione rispetto la plasticità cumulata:

$$F_p = \int_{\Omega} (w'_i - (\underline{T}_i + \Delta \underline{T}_i) \bullet \underline{N}_i) \delta p_i + A \nabla p_i \bullet \nabla \delta p_i + \frac{1}{2} (\alpha \underline{N}_i \bullet \underline{N}_i + \beta \text{tr}^2(\underline{N}_i) + w''_i) \delta p_i^2 + \frac{1}{2} A \nabla \delta p_i \bullet \nabla \delta p_i d\Omega$$

Seguendo lo stesso ragionamento precedente, si ricerca una variazione sul solo elemento e-esimo:

$$F_p^e = \int_{\Omega_e} \det(\underline{J}) \left[(w'_i - \underline{T}_i \bullet \underline{N}_i) \underline{\psi}_e \bullet \delta \underline{p}_e + A \underline{B}(\underline{z}) \underline{p}_e \bullet \underline{B}(\underline{z}) \delta \underline{p}_e \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega_e} \det(\underline{J}) \frac{1}{2} (\alpha \underline{N}_i \bullet \underline{N}_i + \beta \text{tr}^2(\underline{N}_i) + w''_i) (\underline{\psi}_e \bullet \delta \underline{p}_e) \bullet (\underline{\psi}_e \bullet \delta \underline{p}_e) + \frac{1}{2} \det(\underline{J}) A (\underline{B}(\underline{z}) \delta \underline{p}_e) \bullet (\underline{B}(\underline{z}) \delta \underline{p}_e) d\Omega$$

Accorpendo i termini quadratici e lineari:

$$F_p^e = \int_{\Omega_e} \det(\underline{\underline{J}}) \left[(w'_i - \underline{\underline{T}}_i \cdot \underline{\underline{N}}_i) \underline{\underline{\psi}}_e + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{p}}_e \right] d\Omega \cdot \delta \underline{\underline{p}}_e +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \det(\underline{\underline{J}}) \left[(\alpha \underline{\underline{N}}_i^2 + \beta \text{tr}^2(\underline{\underline{N}}_i) + w''_i) (\underline{\underline{\psi}}_e^T \underline{\underline{\psi}}_e) + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \right] d\Omega \delta \underline{\underline{p}}_e \cdot \delta \underline{\underline{p}}_e$$

Ridefinendo i termini in maniera analoga a quanto fatto con lo spostamento si ha:

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{\Omega_e} \det(\underline{\underline{J}}) \left[(w'_i - \underline{\underline{T}}_i \cdot \underline{\underline{N}}_i) \underline{\underline{\psi}}_e + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{p}}_e \right] d\Omega$$

$$\underline{\underline{K}}_p^e = \int_{\Omega_e} \det(\underline{\underline{J}}) \left[(\alpha \underline{\underline{N}}_i^2 + \beta \text{tr}^2(\underline{\underline{N}}_i) + w''_i) (\underline{\underline{\psi}}_e^T \underline{\underline{\psi}}_e) + \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \right] d\Omega$$

$$F_p^e = \underline{\underline{f}}_p^e \cdot \delta \underline{\underline{p}}_e + \frac{1}{2} \underline{\underline{K}}_p^e \delta \underline{\underline{p}}_e \cdot \delta \underline{\underline{p}}_e$$

Ottenuto l'equilibrio del singolo elemento, tramite l'assemblaggio si ottiene la matrice di rigidezza e il vettore delle forze a livello globale.

Applicando ora la procedura esposta nel sotto capitolo precedente (la minimizzazione alternata), è possibile arrivare alla soluzione con l'approssimazione richiesta.

4.3. SIMULAZIONI

4.3.1. Bande di Lüders

Prima di descrivere le simulazioni, è opportuno definire le bande di Lüders. Esse sono molto evidenti nelle prove a trazione (ma anche a torsione) nei metalli. In concomitanza con la plasticizzazione si osservano nei provini metallici delle “linee” o bande, inclinate tra i 30° e i 45°. Queste linee sono indice della plasticizzazione in atto lungo la sezione, a livello teorico, dunque, vanno ad individuare luoghi geometrici ad egual plasticità cumulata all’interno del provino. Data quest’ultima proprietà di dette bande, esse possono esser facilmente individuate e studiate nelle simulazioni delle prove sperimentali in due dimensioni. Si riporta, dunque, un esempio in cui proprio l’osservazione delle bande di Lüders ha messo in luce l’importanza del termine non locale all’interno dell’espressione dell’energia interna. Queste simulazioni sono contenute in [4]. In questo articolo si riportano inizialmente due simulazioni in provini metallici, considerando nullo il coefficiente non locale. La forma della derivata dell’energia plastica locale proposta è la seguente:

$$\begin{aligned} R(p) &= \sigma_m + H_1(p - p_m) - \sigma_M & \text{if } 0 \leq p \leq p_m \\ R(p) &= \sigma_m + H_2(p - p_m) - \sigma_M & \text{if } p \geq p_m \end{aligned}$$

con

$$\sigma_m = 990 \text{ MPa}, p_m = 0.01, H_1 = -1000 \text{ MPa}, H_2 = 1000 \text{ MPa}$$

Mentre σ_M viene ricavato dalla seguente condizione:

$$R(p = 0) = 0$$

In questo modo si ottiene la seguente curva (fig. 4.2):

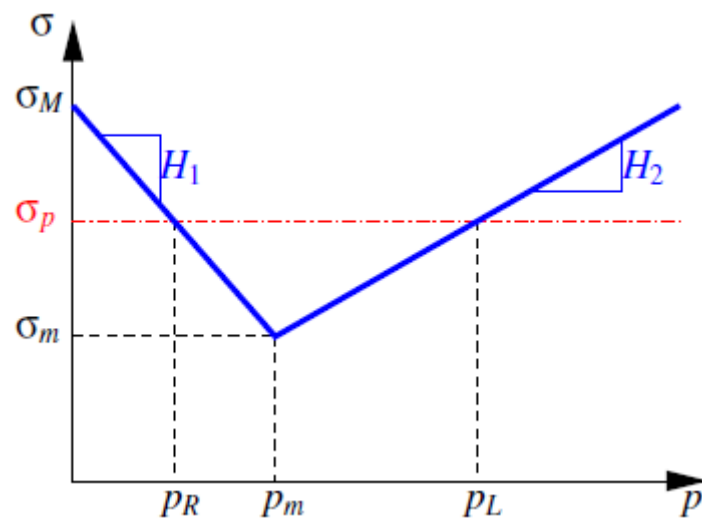


FIGURA 4.2 ANDAMENTO QUALITATIVO DELLA SUPERFICIE DI SNERVAMENTO

Il provino in esame viene poi diviso in elementi finiti in due mesh differenti come nella seguente figura (fig. 4.3):

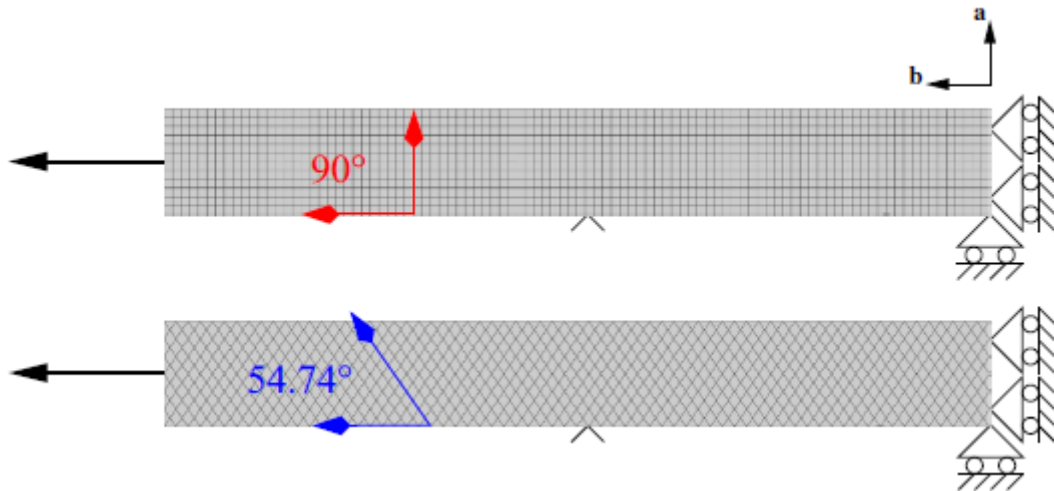


FIGURA 4.3 GEOMETRIA DELLE DUE MESH

Con un piccolo intaglio a metà della lunghezza per far sì che inizi la plasticizzazione. Il risultato sulla propagazione delle bande di Lüders nei due provini simulati è stata la seguente (fig. 4.4):

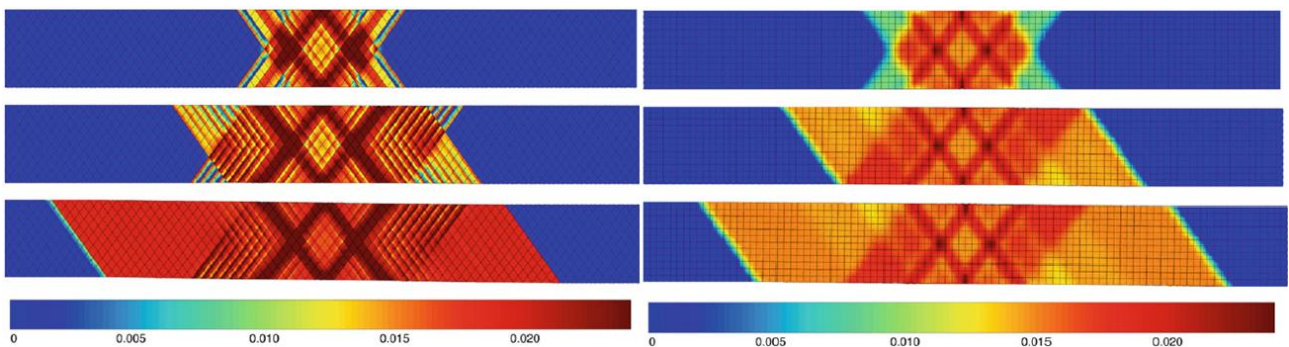


FIGURA 4.4 BANDE DI LUDERS IN RELAZIONE ALLE DUE MESH DIVERSE, SENZA COEFFICIENTE NON LOCALE

Risulta dunque evidente una forte dipendenza della propagazione delle bande di Lüders dalla mesh. Ciò risulta irrealistico, mentre, tramite l'introduzione del termine non locale nell'espressione dell'energia interna si ottiene:

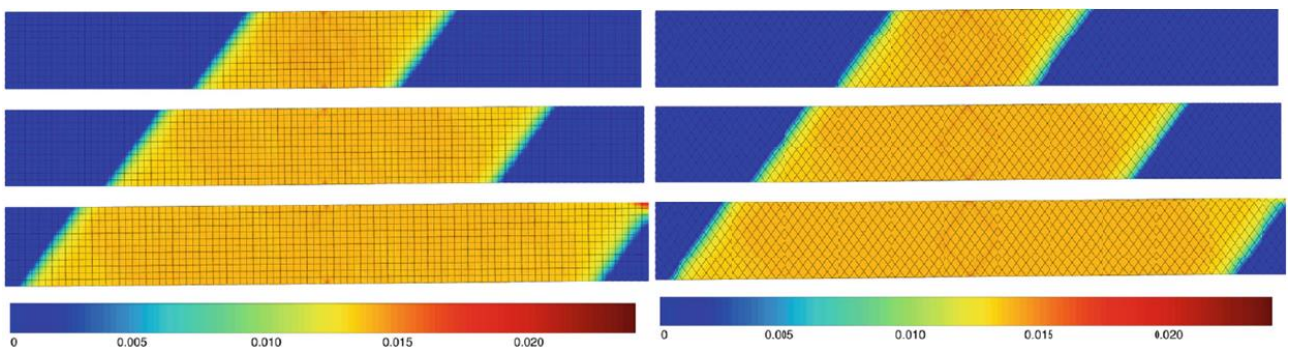


FIGURA 4.5 BANDE DI LUDERS IN RELAZIONE ALLE DUE MESH DIVERSE, CON COEFFICIENTE NON LOCALE

Osservata l'importanza del termine non locale e dell'osservazione delle bande di Lüders, si può passare all'osservazione delle simulazioni.

4.3.2. Plasticità di Mises – hardening e softening

Si utilizza in questa sezione la formulazione della plasticità di Von Mises e di Aifantis, descritte nei capitoli precedenti) per tentare la descrizione sia del ramo di hardening che quello di softening. Il provino scelto come spunto è LS10SS15. Si inizia con il riportare la curva sforzo deformazione risultante (fig. 4.6):

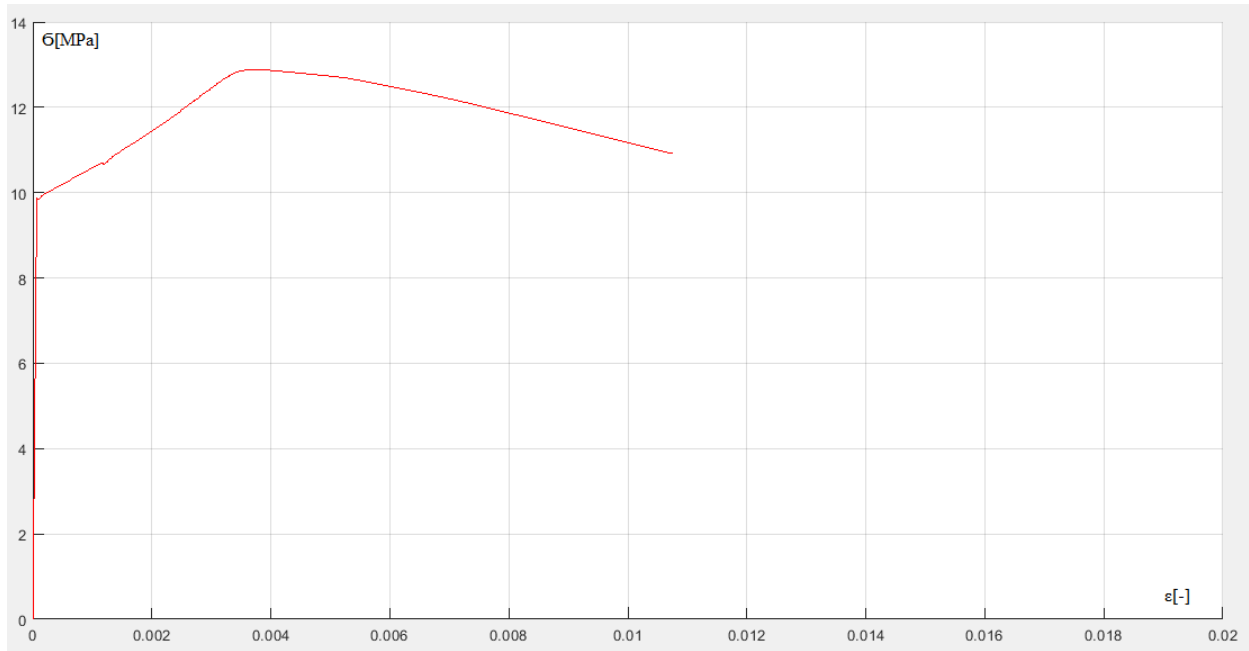


FIGURA 4.6 PLASTICITÀ DI MISES- CURVA SFORZO DEFORMAZIONE

Nelle prossime figure (da 4.7 a 4.19) si mostra l'andamento della plasticità cumulata sulla barra, durante i vari step di carico:

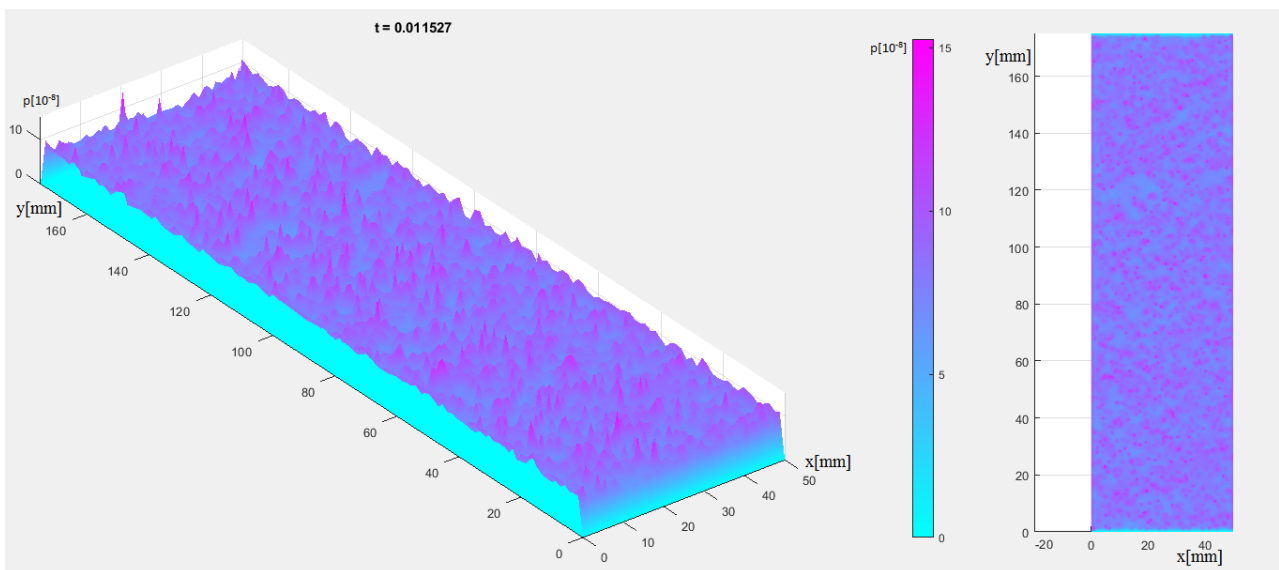


FIGURA 4.7 FINE FASE ELASTICA

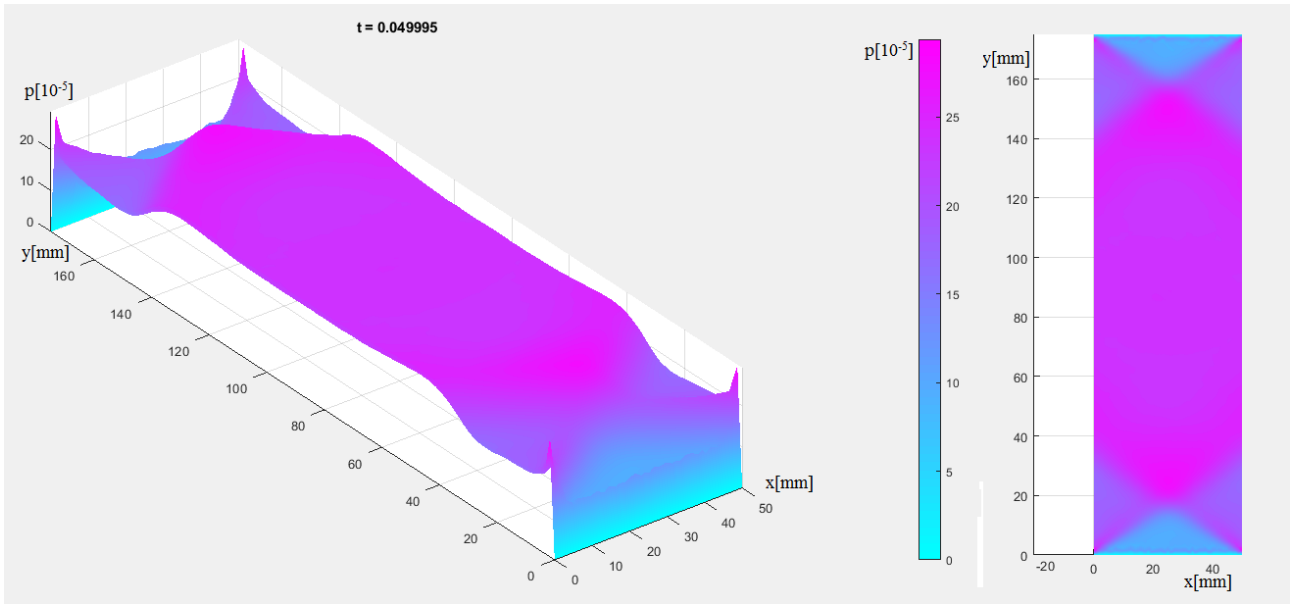


FIGURA 4.8 HARDENING 1

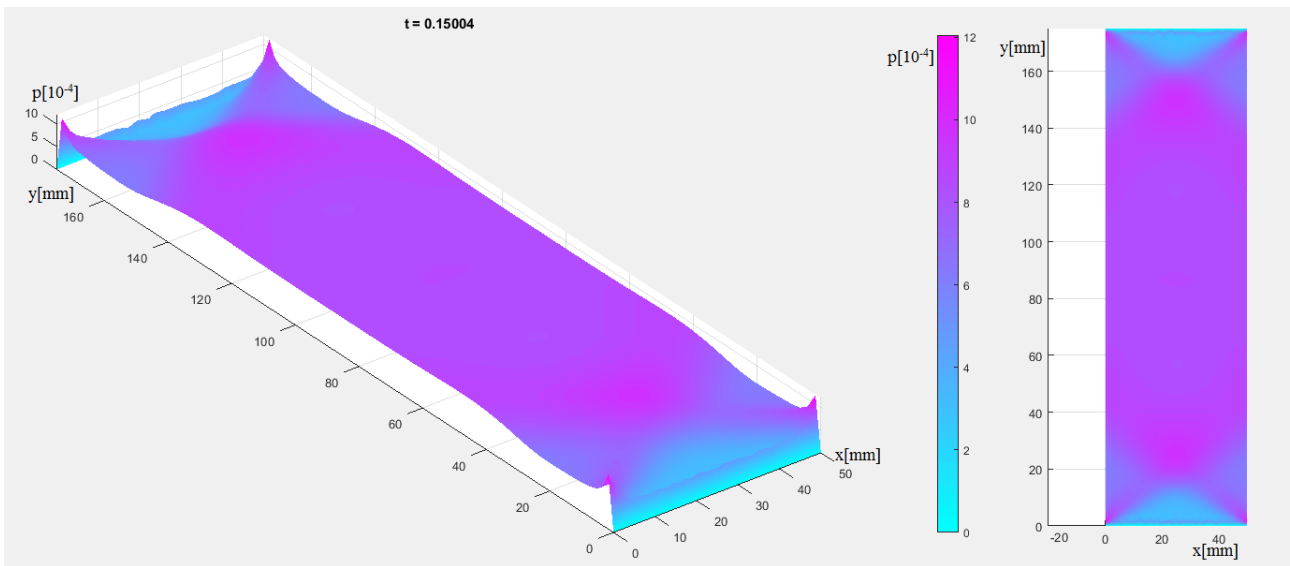


FIGURA 4.9 HARDENING 2

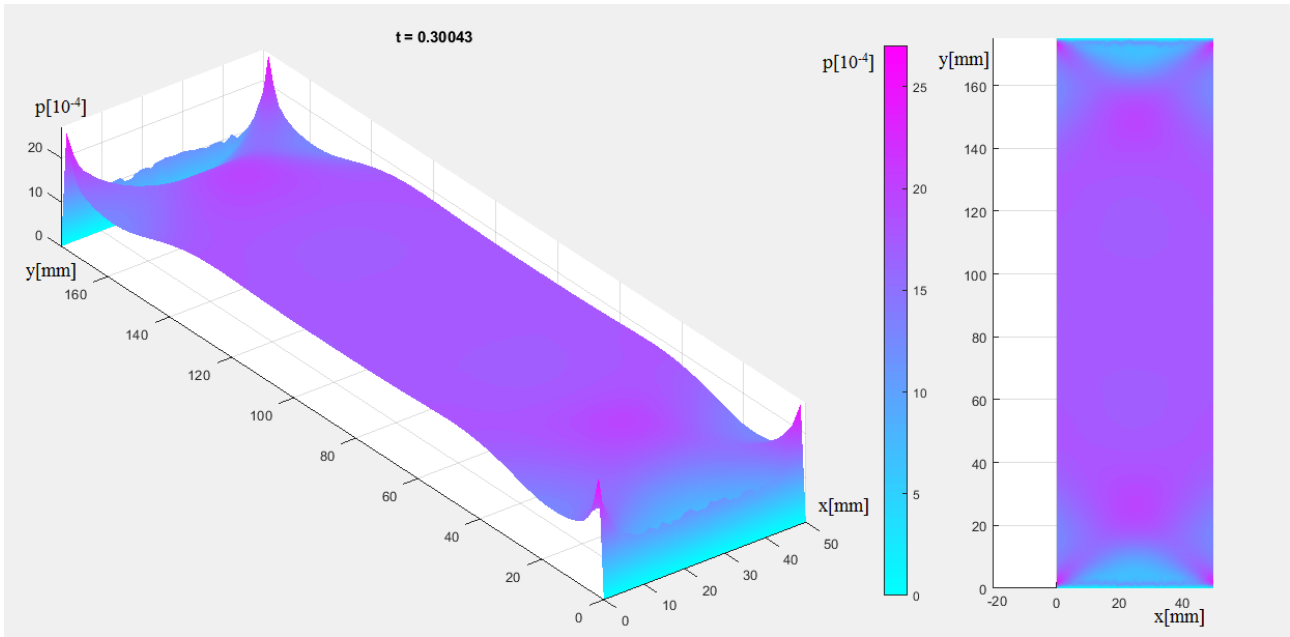


FIGURA 4.10 HARDENING 3

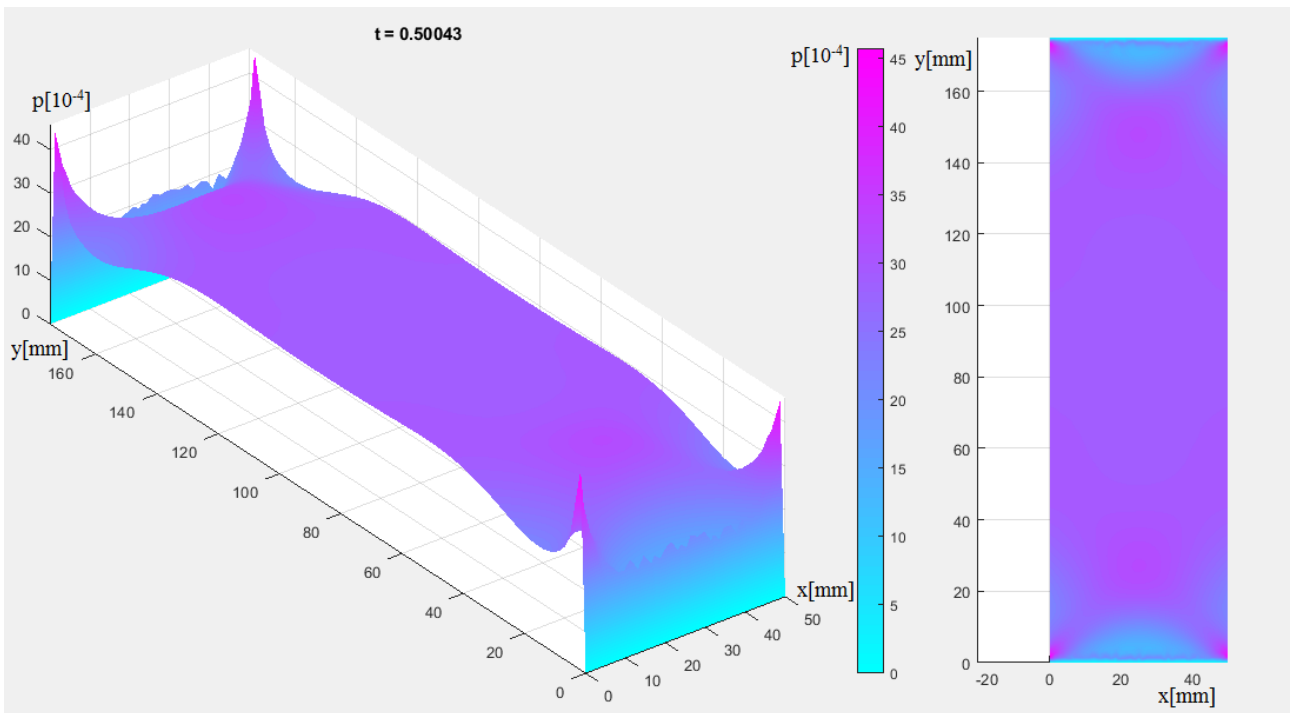


FIGURA 4.11 HARDENING 4

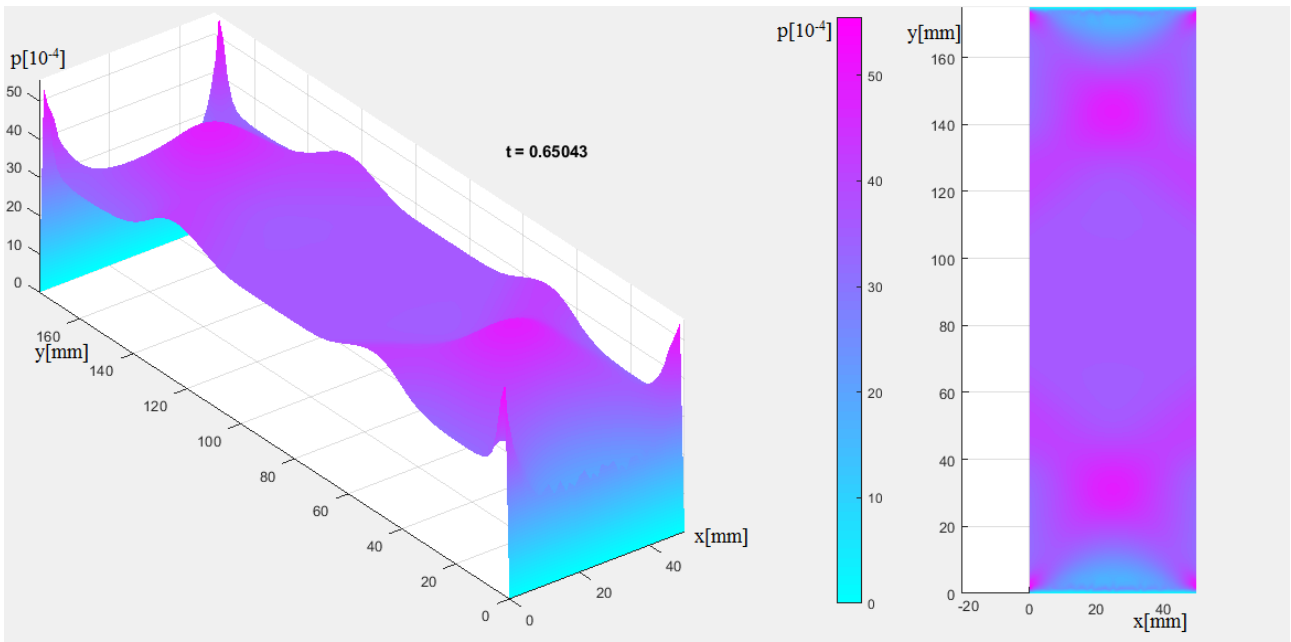


FIGURA 4.12 HARDENING 5

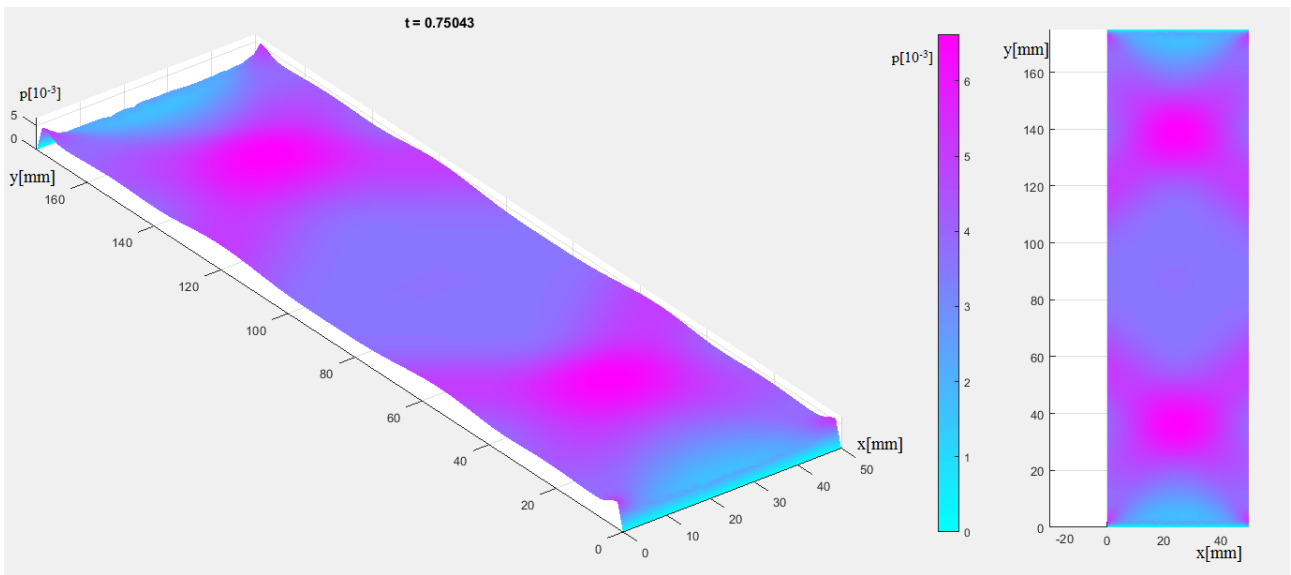


FIGURA 4.13 PASSAGGIO 1

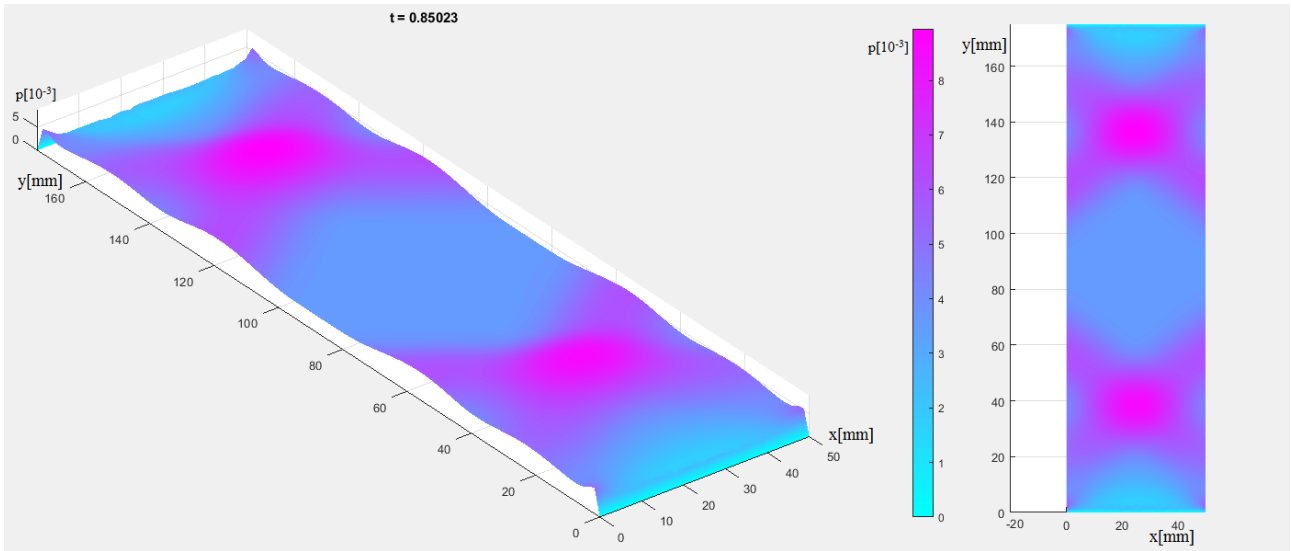


FIGURA 4.14 PASSAGGIO 2

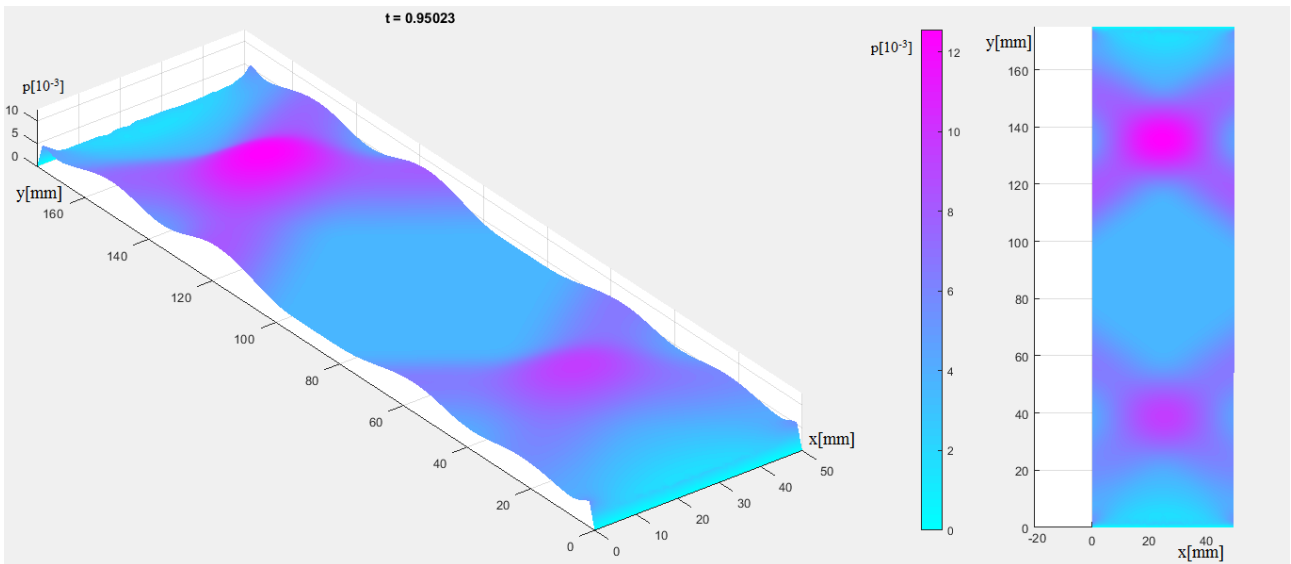


FIGURA 4.15 PASSAGGIO 3

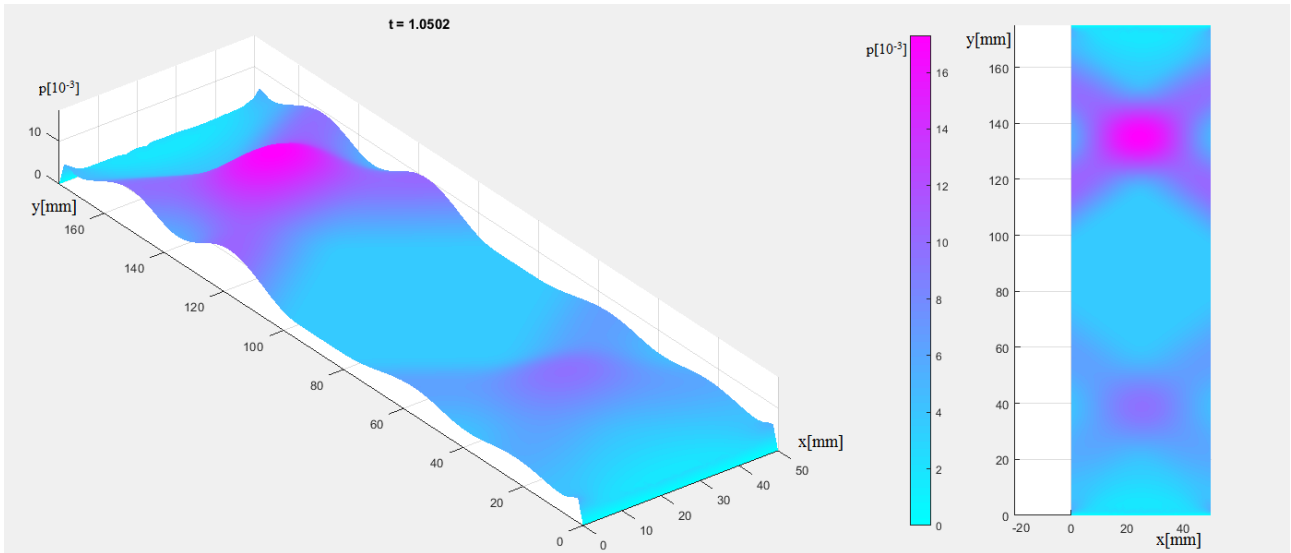


FIGURA 4.16 PASSAGGIO 4

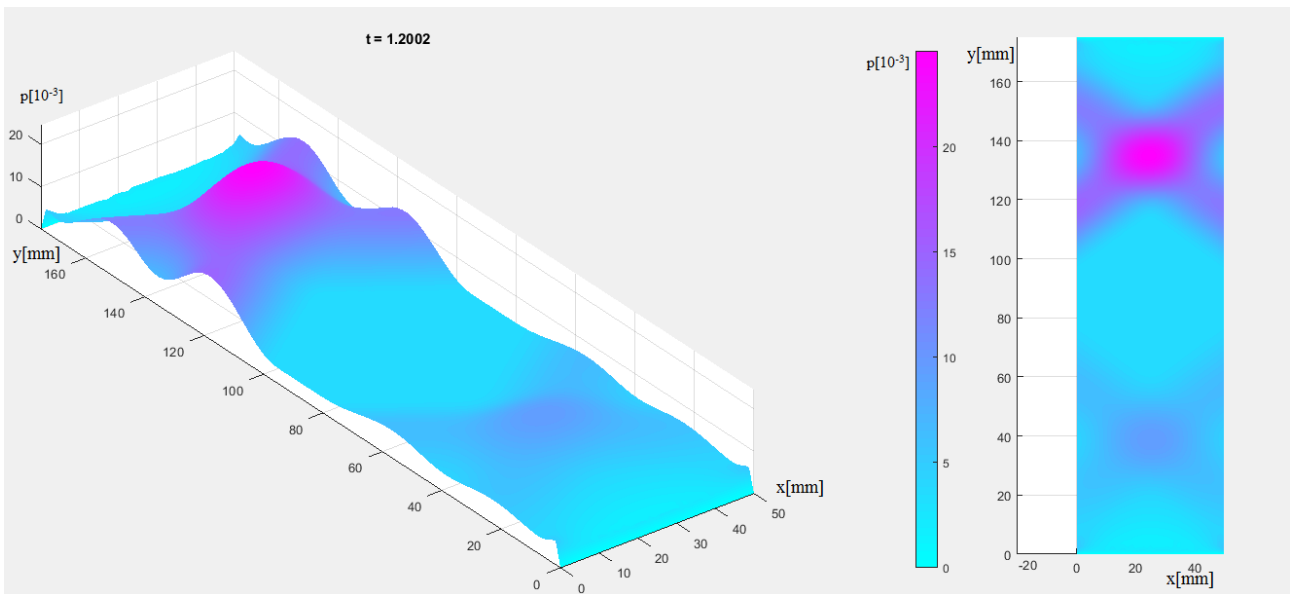


FIGURA 4.17 SOFTENING 1

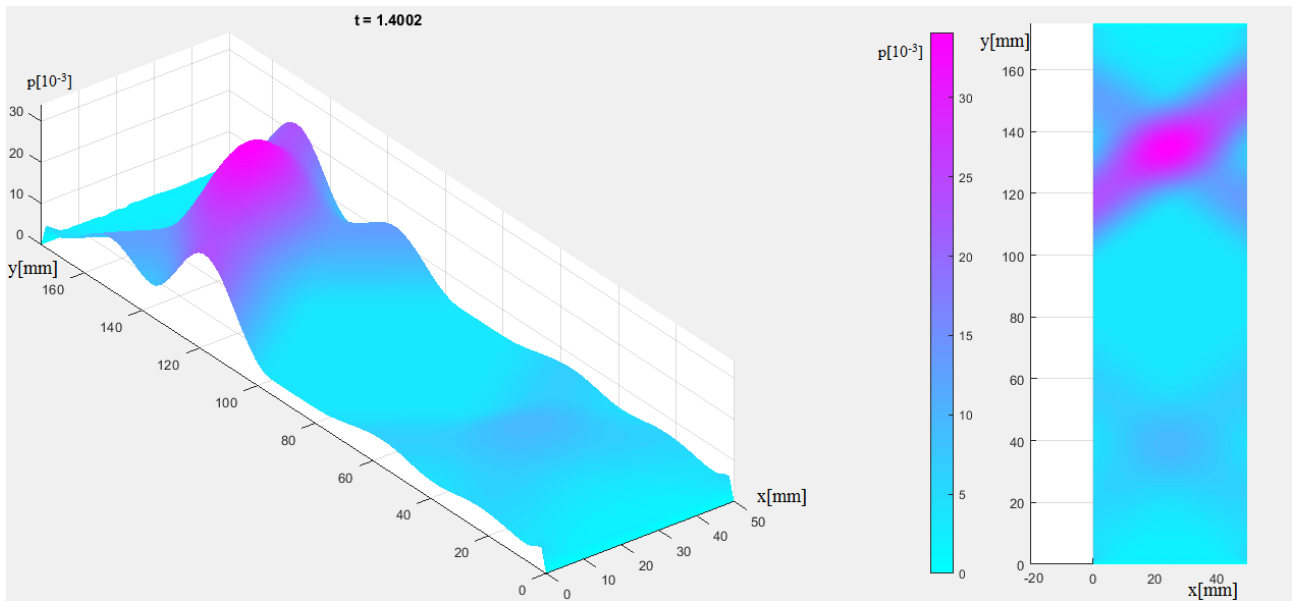


FIGURA 4.18 SOFTENING 2

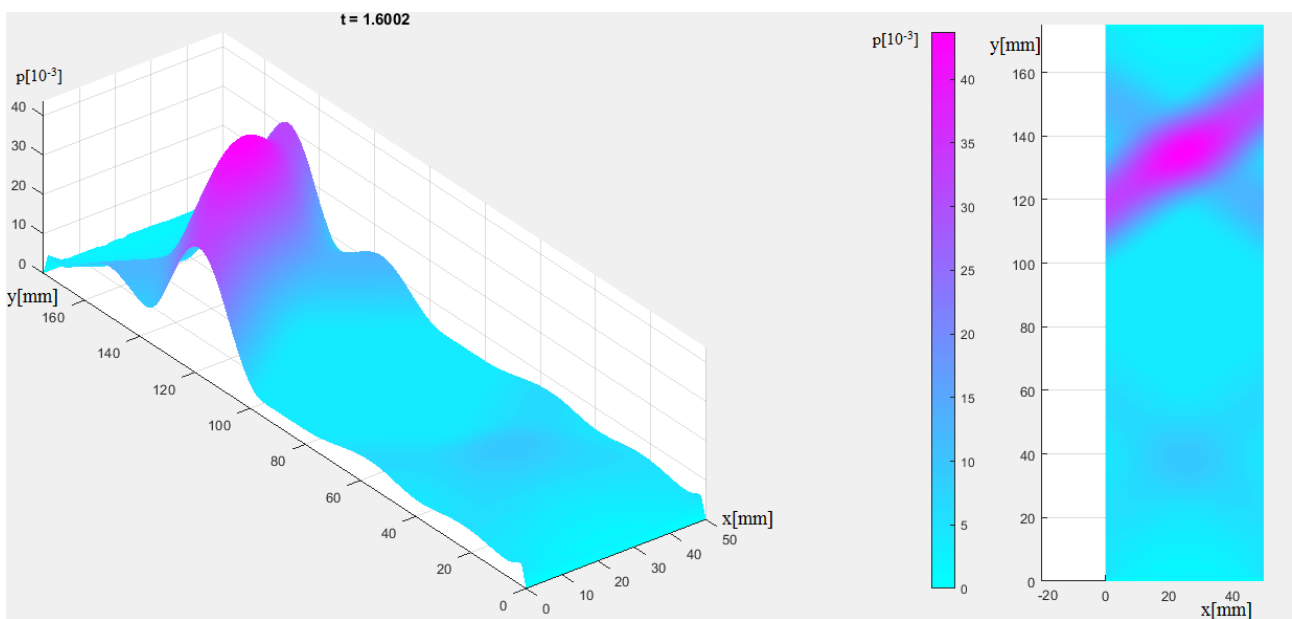


FIGURA 4.19 SOFTENING 3

Dai risultati grafici della simulazione appena presentata, si osserva che, la stessa, non riproduce opportunamente il comportamento desiderato. Si nota, infatti, che la plasticizzazione avviene vicina ad un estremo e la pendenza del ramo di softening è troppo bassa. Si tenta dunque di applicare una plasticità simmetrica nel prossimo capitolo, considerando nella funzione di snervamento non solo la parte deviatorica, ma anche la parte sferica del tensore delle tensioni.

4.3.3. Plasticità simmetrica – hardening e softening

Si passa dunque ad un modello diverso con plasticità simmetrica. La differenza principale, rispetto al modello usato sino ad ora è il seguente:

$$\underline{\underline{N}} = \frac{\underline{\underline{T}}}{\|\underline{\underline{T}}\|}$$

In cui “ $\underline{\underline{T}}$ ” rappresente il tensore delle tensioni, non solo la sua parte deviatorica.

Definito sinteticamente il modello si passa alle simulazioni. Si presenta, inizialmente la curva sforzo-deformazione:

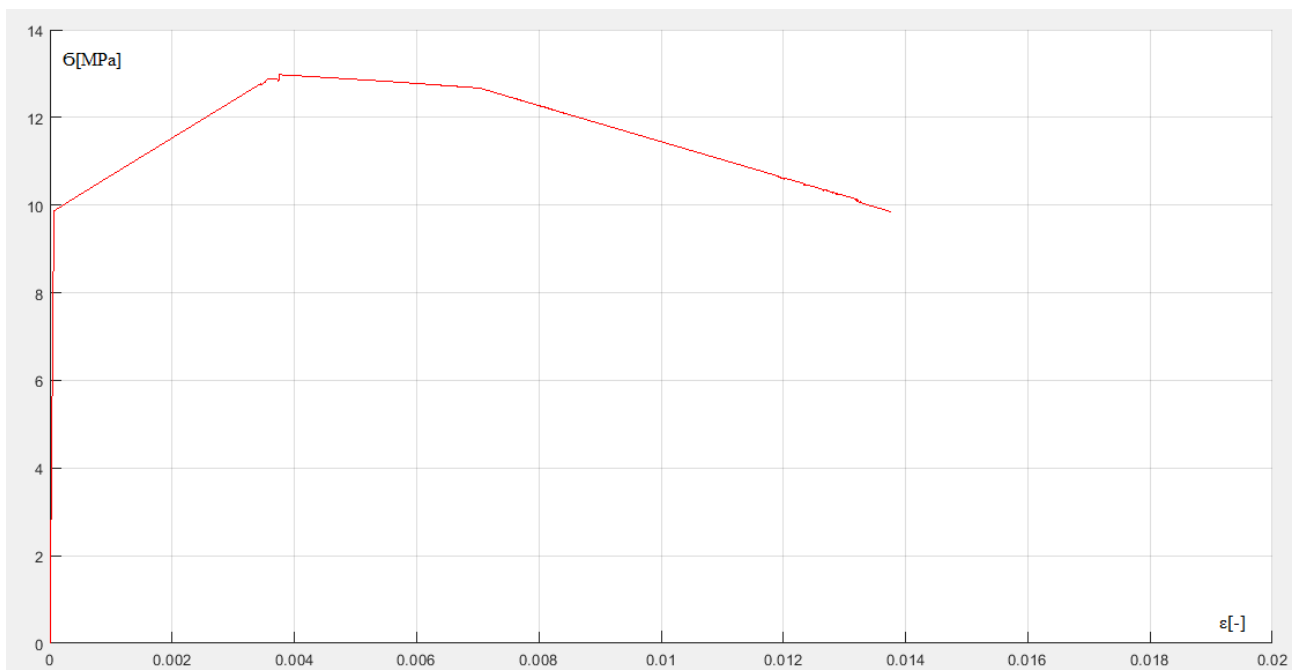


FIGURA 4.20 PLASTICITÀ SIMMETRICA- CURVA SFORZO DEFORMAZIONE

Dopo la curva sforzo-deformazione si passa alla distribuzione della plasticità cumulata sulla barra (fig. da 4.21 a 4.35):

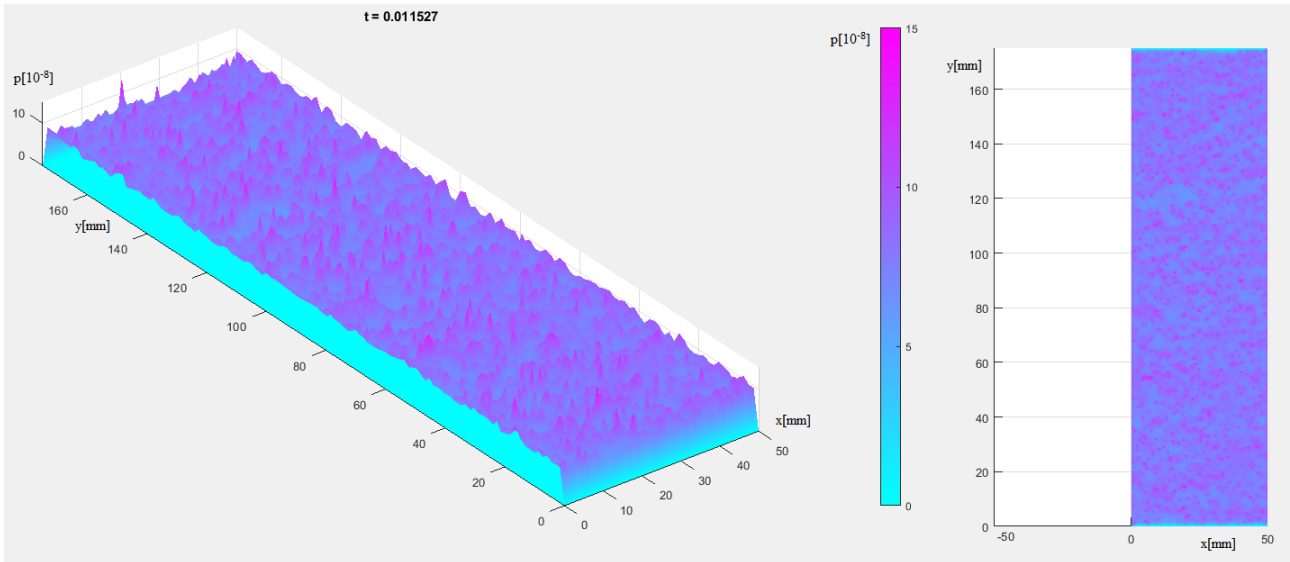


FIGURA 4.21 STEP ELASTICO

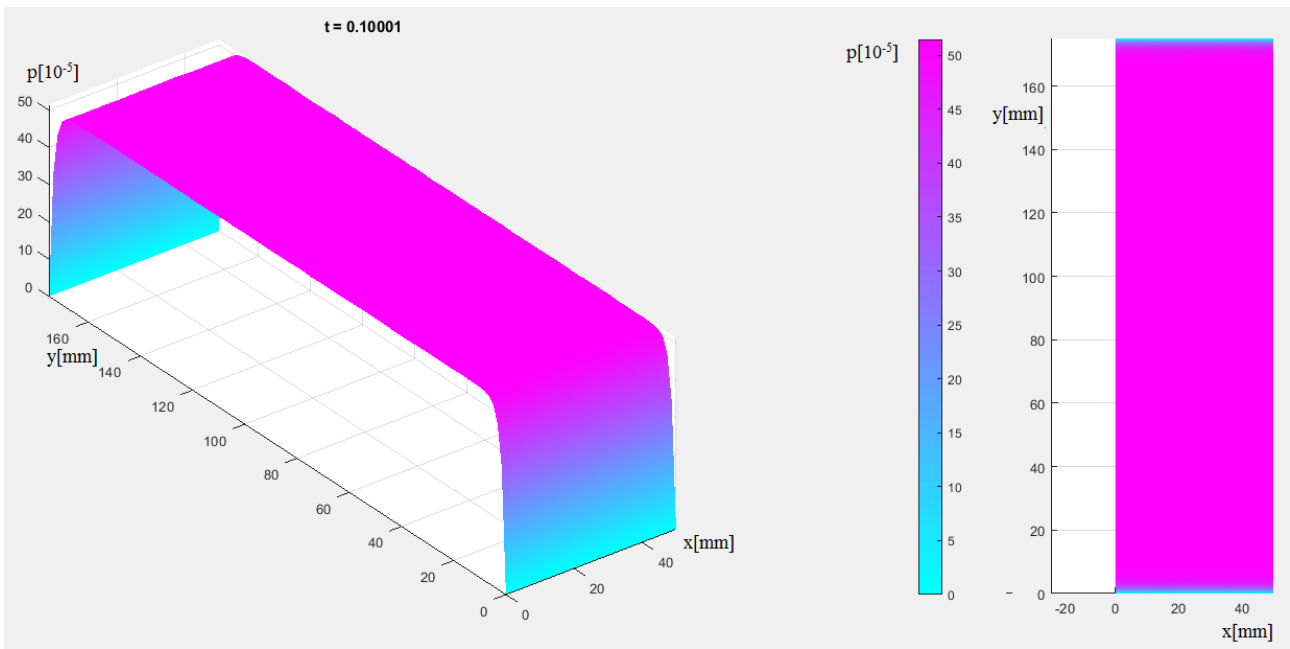


FIGURA 4.22 HARDENING 1

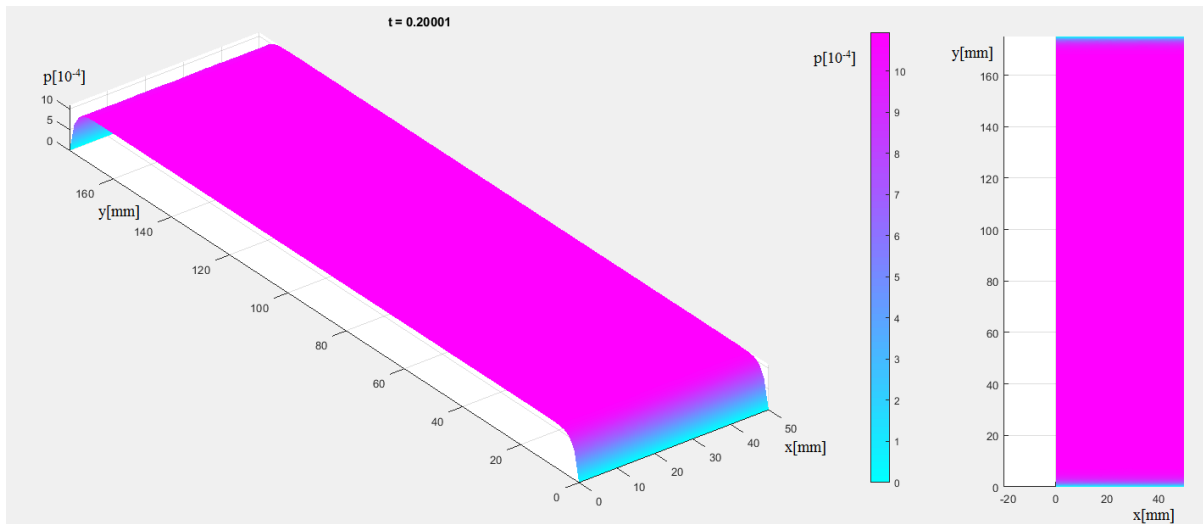


FIGURA 4.23 HARDENING 2

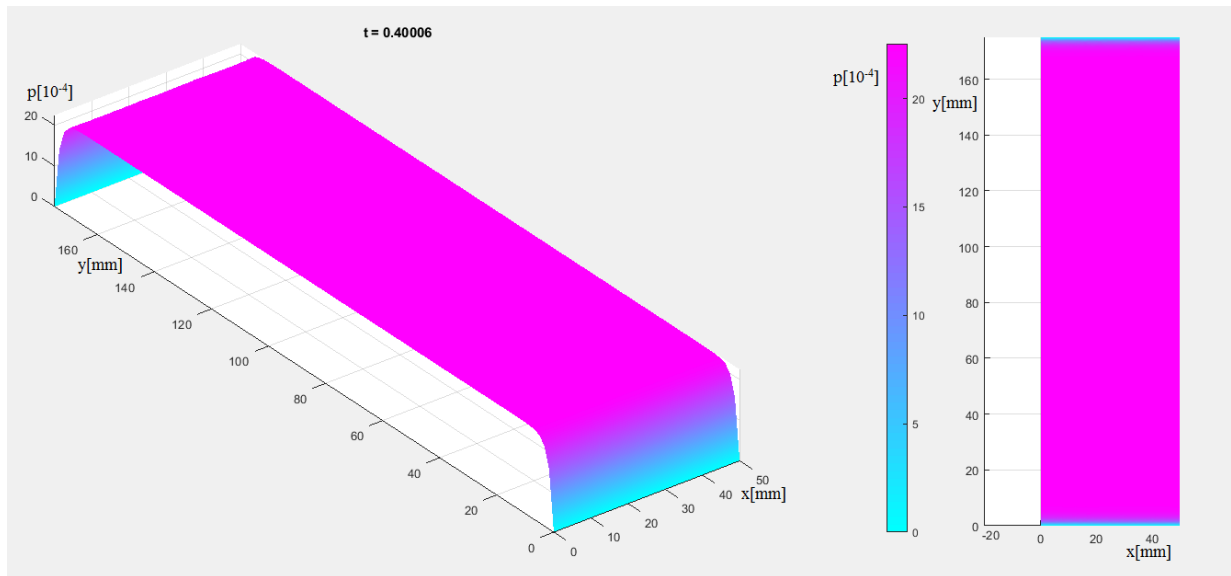


FIGURA 4.24 HARDENING 3

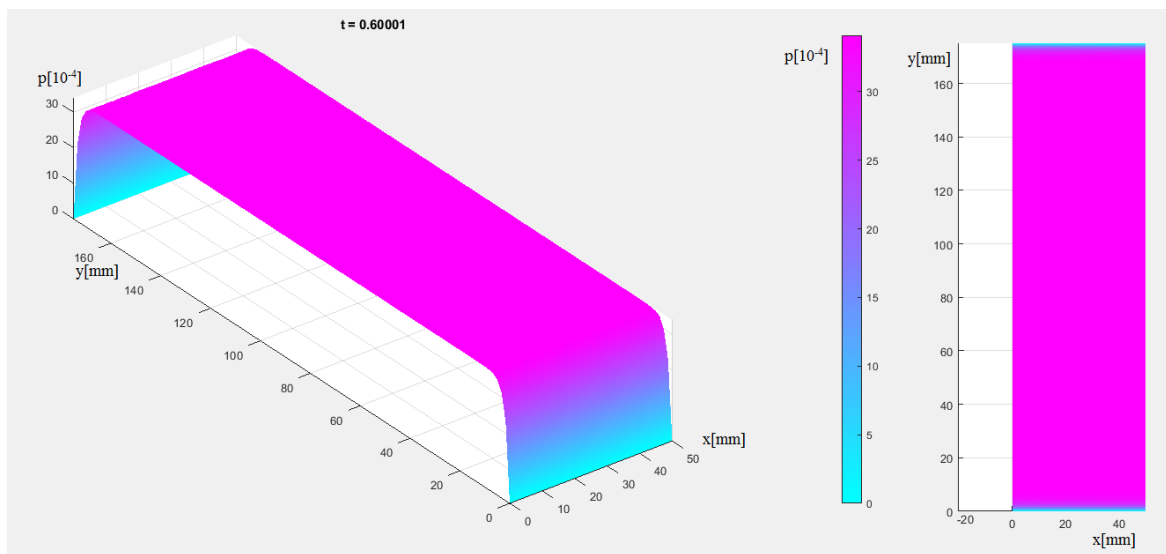


FIGURA 4.25 HARDENING 3

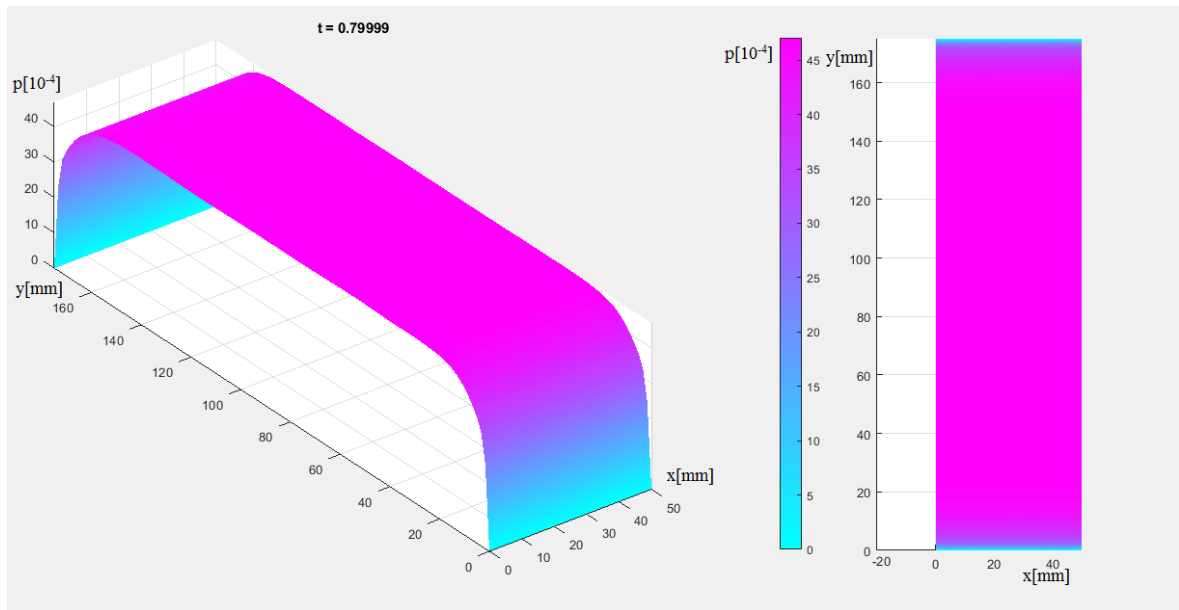


FIGURA 4.26 PASSAGGIO 1

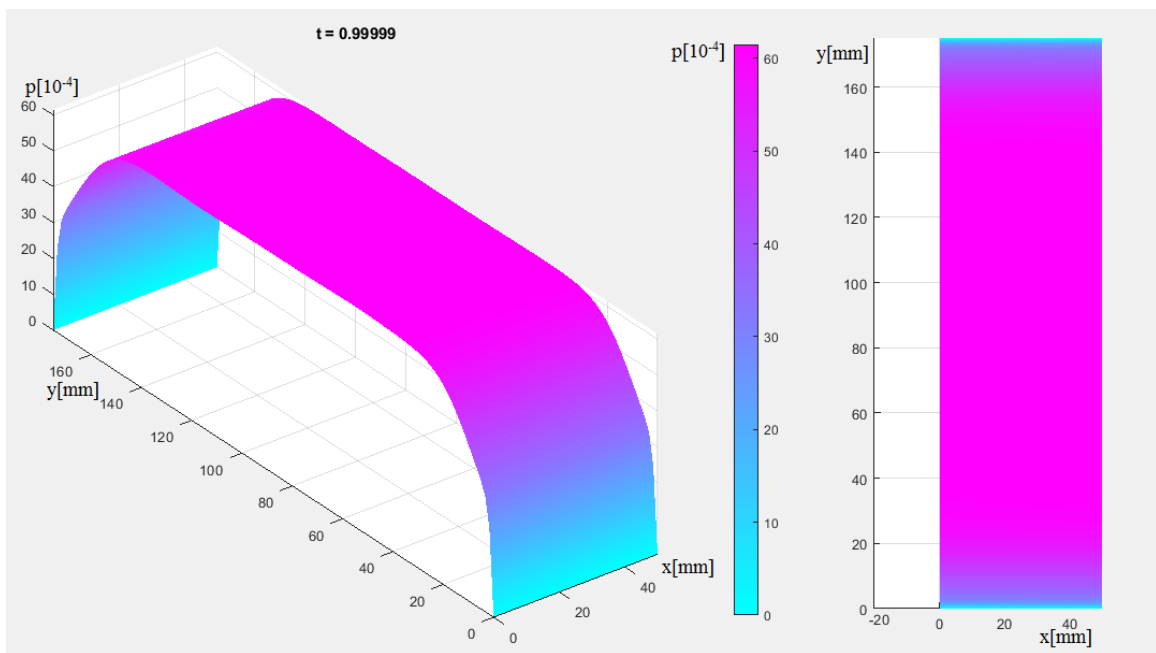


FIGURA 4.27 PASSAGGIO 2

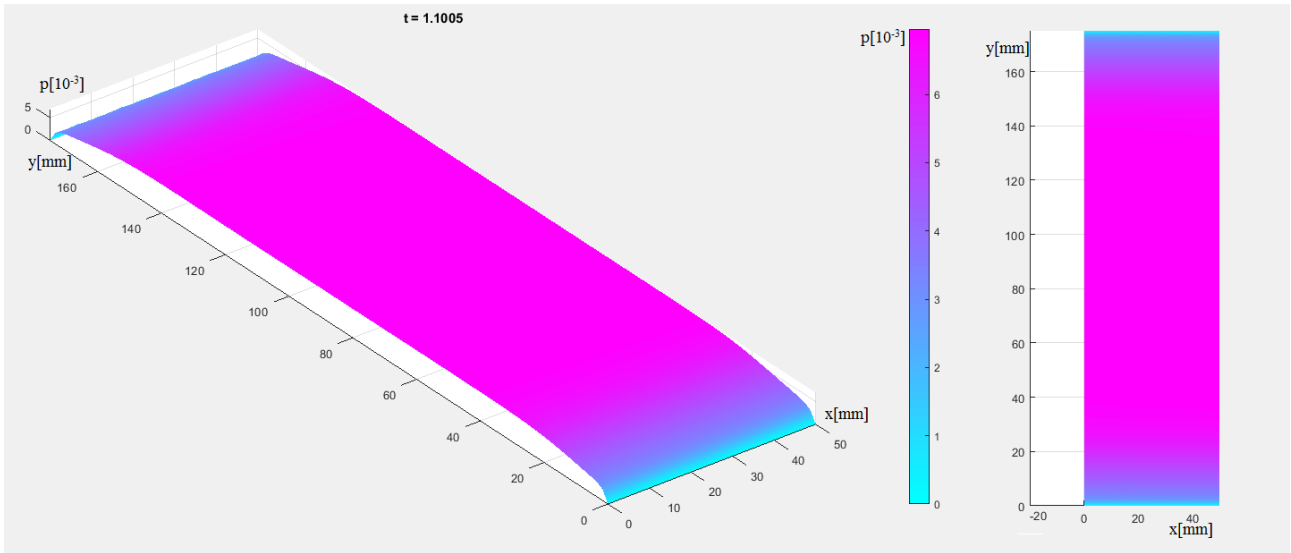


FIGURA 4.28 PASSAGGIO 3

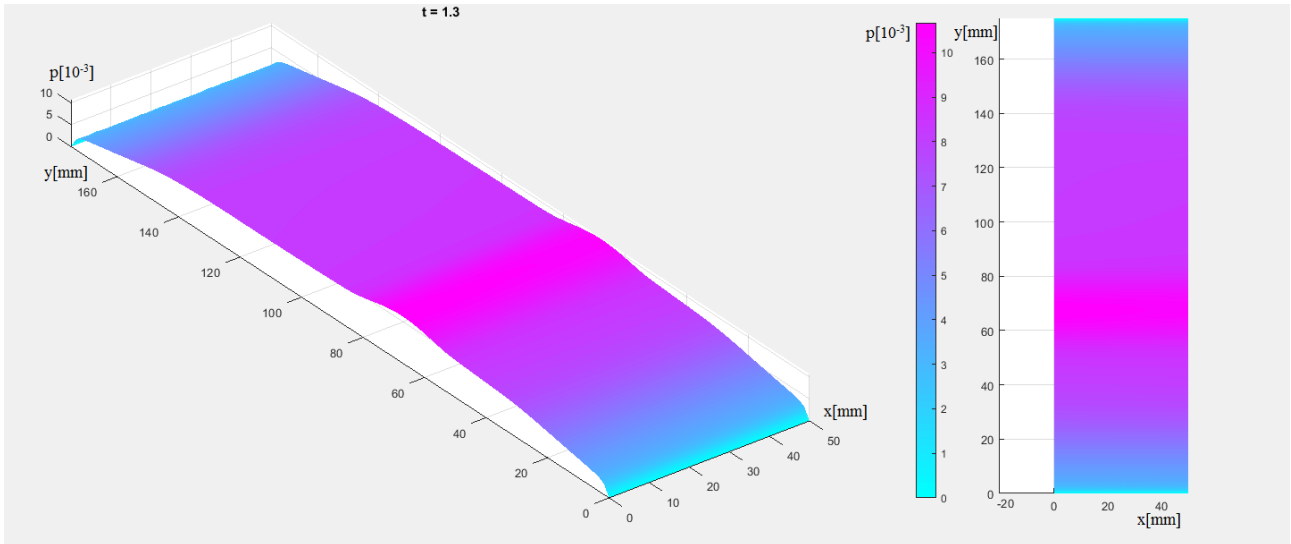


FIGURA 4.29 PASSAGGIO 4

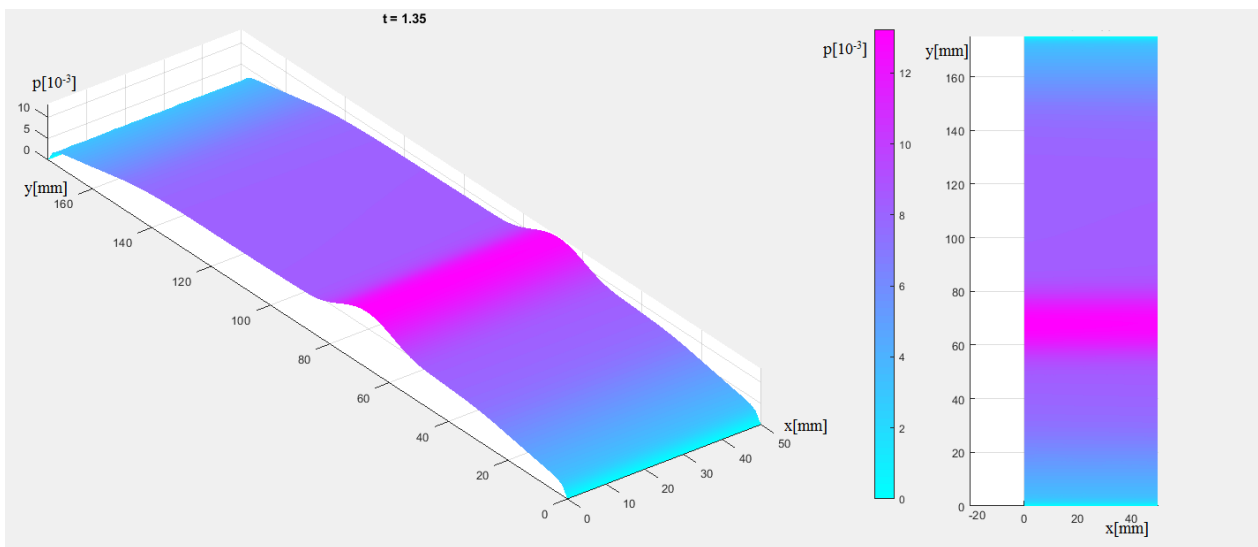


FIGURA 4.30 SOFTENING 1

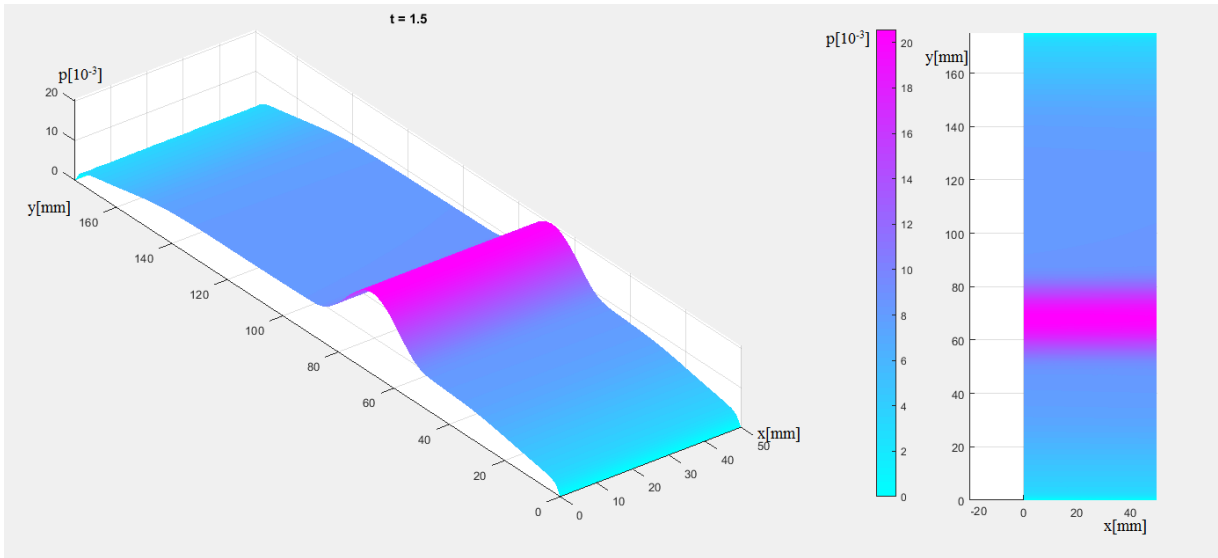


FIGURA 4.31 SOFTENING 2

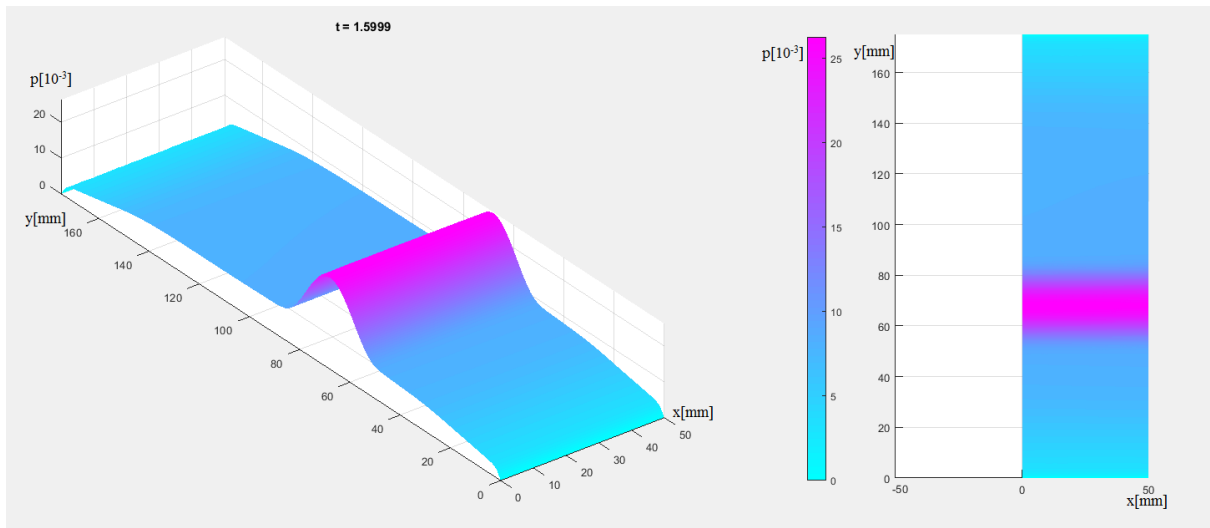


FIGURA 4.32 SOFTENING 3

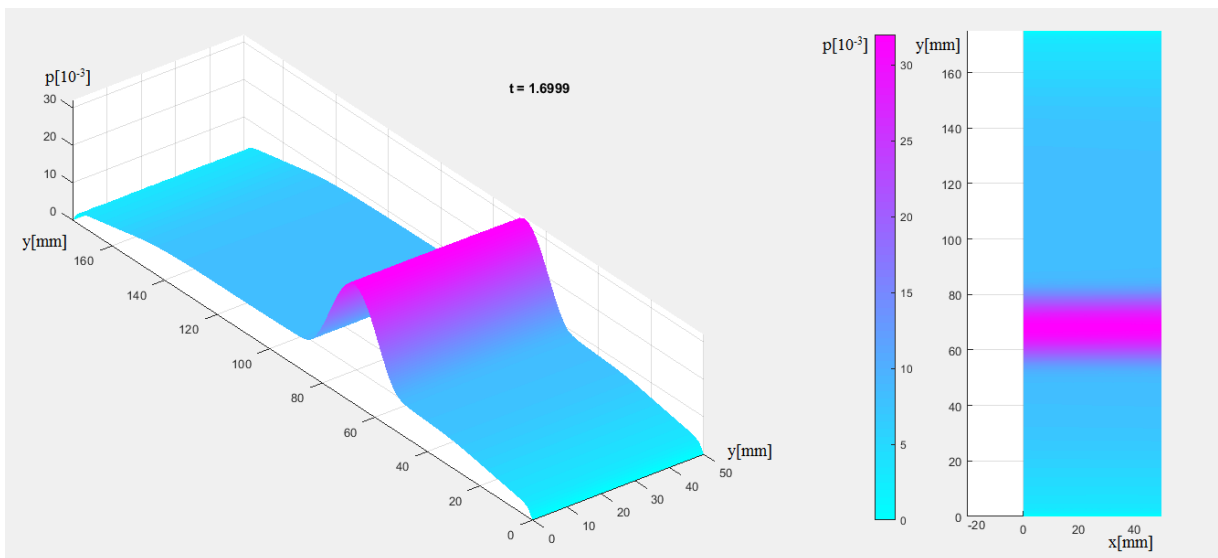


FIGURA 4.33 SOFTENING 4

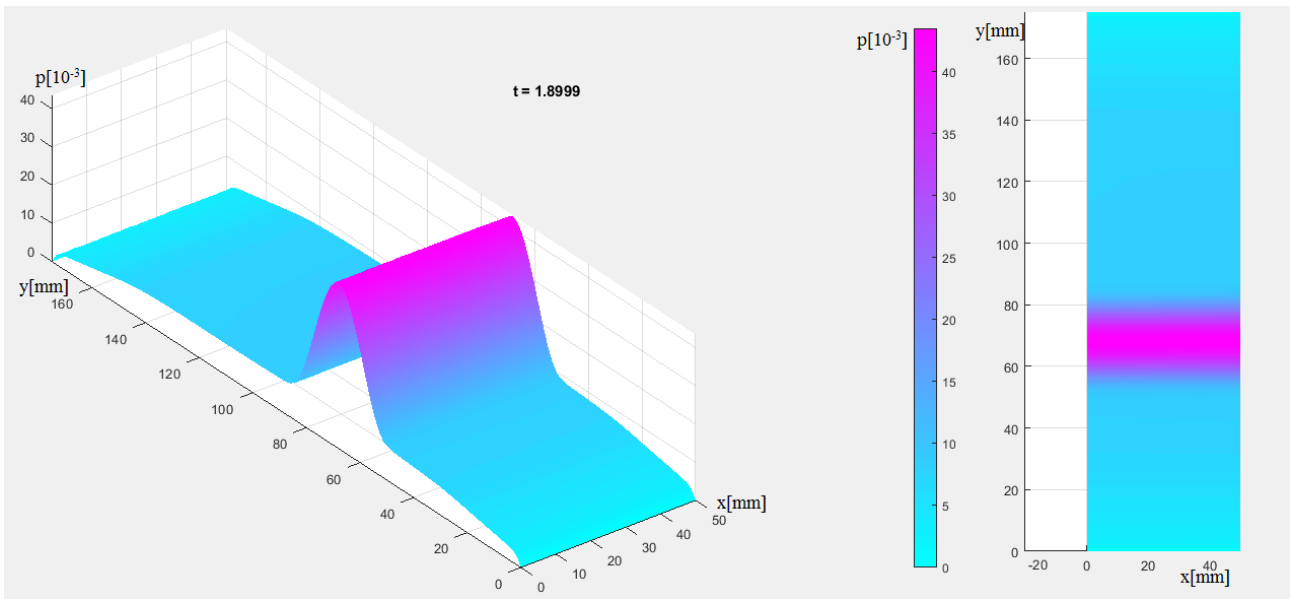


FIGURA 4.34 SOFTENING 5

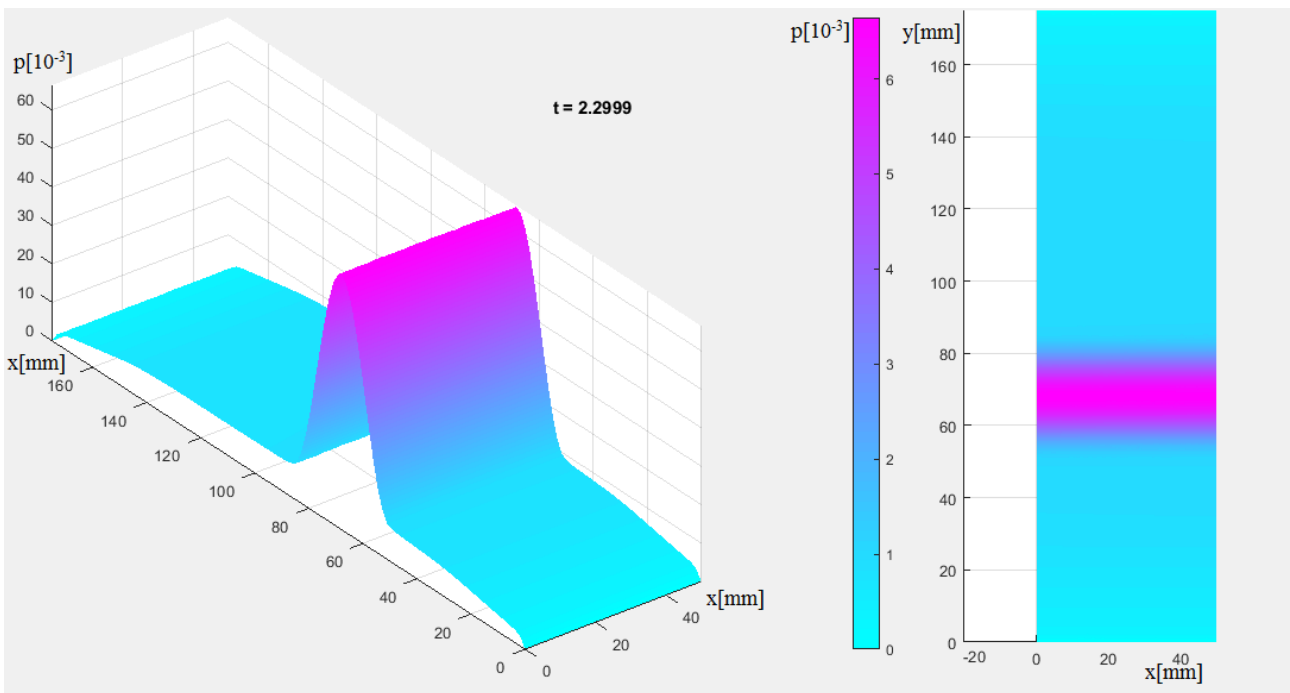


FIGURA 4.35 SOFTENING 6

Applicando questa superficie di snervamento si ottiene un risultato di gran lunga migliore. La curva sforzo deformazione presenta un tratto di raccordo tra l'hardening e il softening. Questo tratto è dovuto principalmente alla discretizzazione della barra, e si nota anche nelle rappresentazioni di passaggio riportate (fig. da 4.26 a 4.30). La localizzazione, inoltre, non avviene esattamente al centro della barra, ma un po' più in basso. I difetti che si notano, dunque, nei report sono prevalentemente dovuti alle approssimazioni e agli errori accumulati durante i vari step di carico. Si cerca dunque di mitigare questi errori modificando la formulazione di w'' nel prossimo sotto capitolo.

4.3.4. Plasticità simmetrica con cambio graduale di energia

Il raccordo si sceglie di farlo partire dall'85% della plasticità corrispondente al cambio di regime (da hardening a softening), ottenendo i seguenti grafici (fig. 4.36):

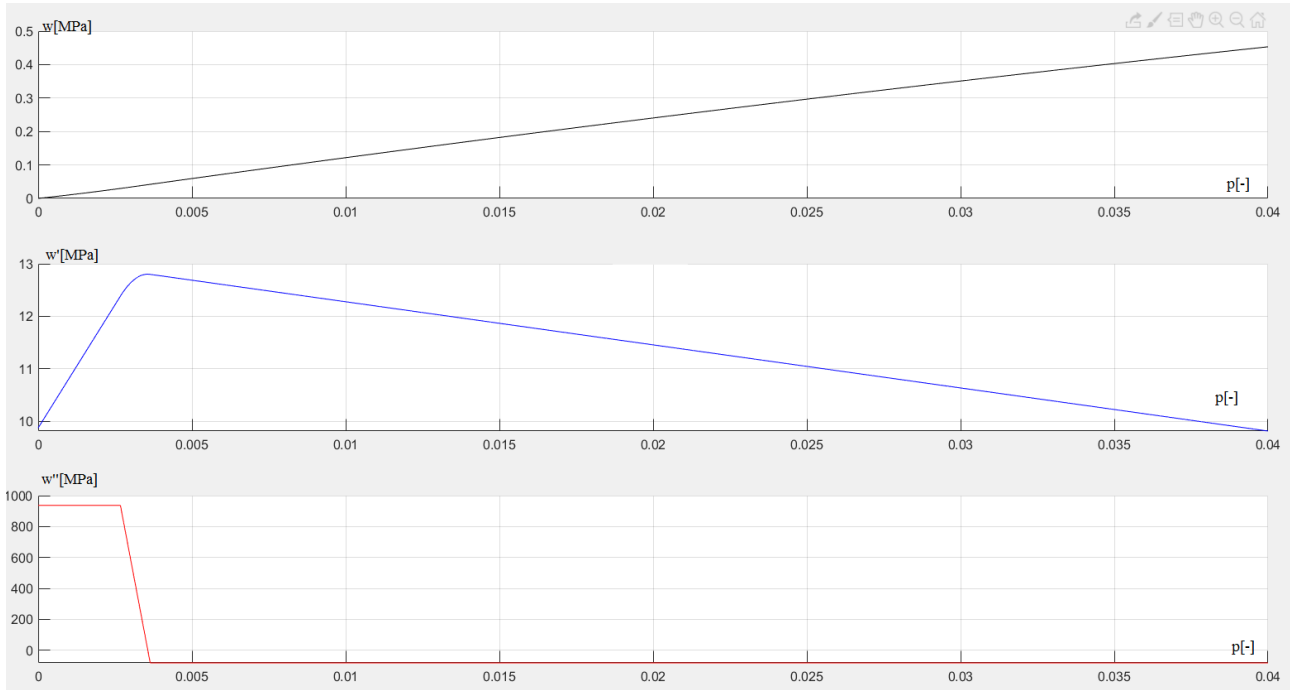


FIGURA 4.36 ANDAMENTO ENERGIA CON CAMBIO GRADUALE

Si riporta quindi la curva sforzo-deformazione (fig. 4.37):

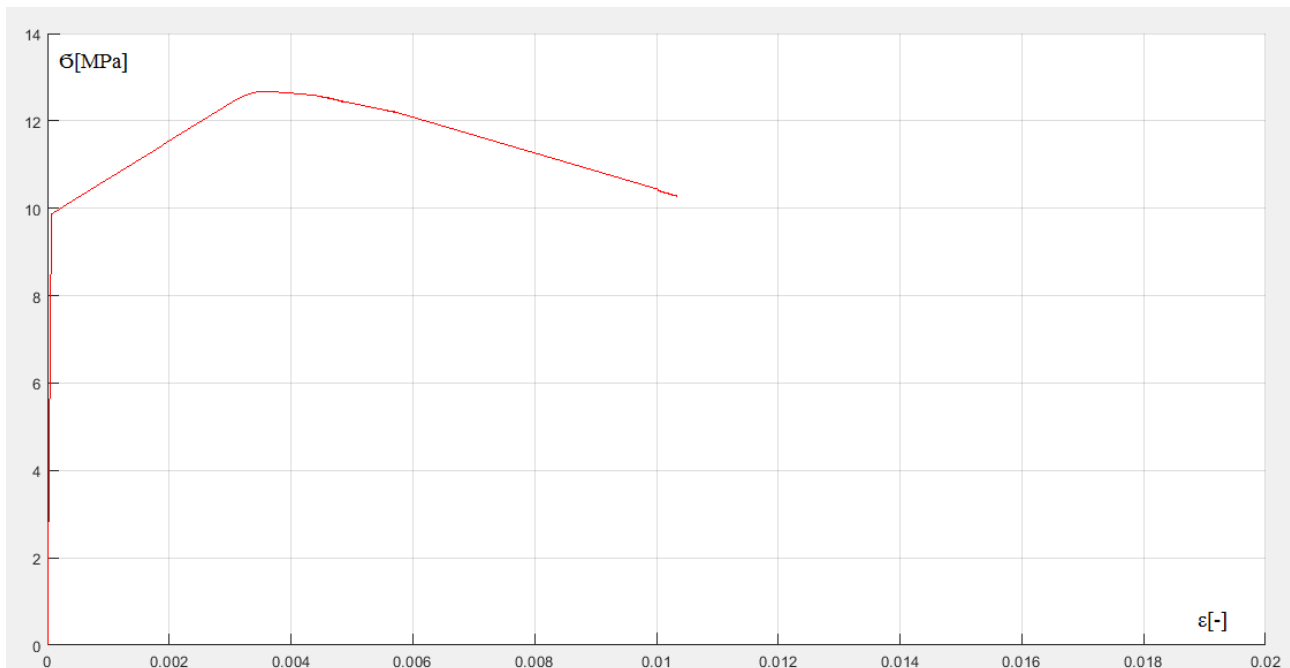


FIGURA 4.37 CURVA SFORZO-DEFORMAZIONE, PLASTICITÀ SIMM. CON VARIAZIONE GRADUALE DI ENERGIA

E si procede con la distribuzione di plasticità cumulata sulla barra a partire da $t=0,7$ (la fase iniziale è la stessa del cap. 4.3.3); (fig. da 4.38 a 4.47):

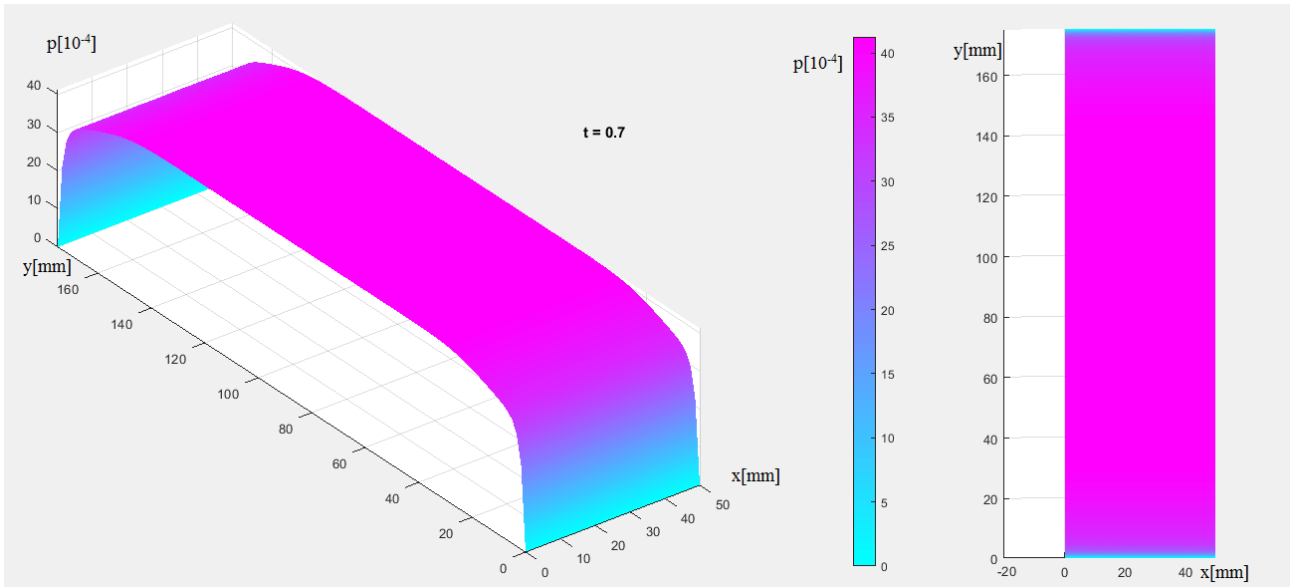


FIGURA 4.38 HARDENING

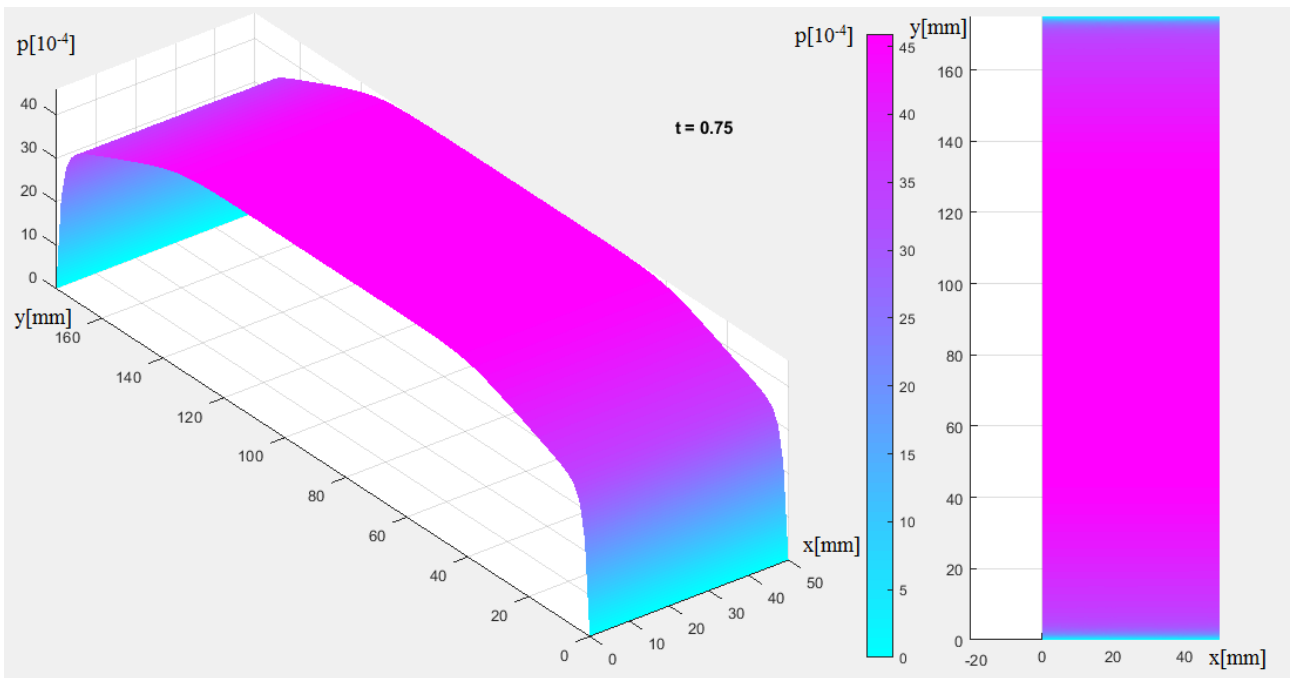


FIGURA 4.39 PASSAGGIO 1

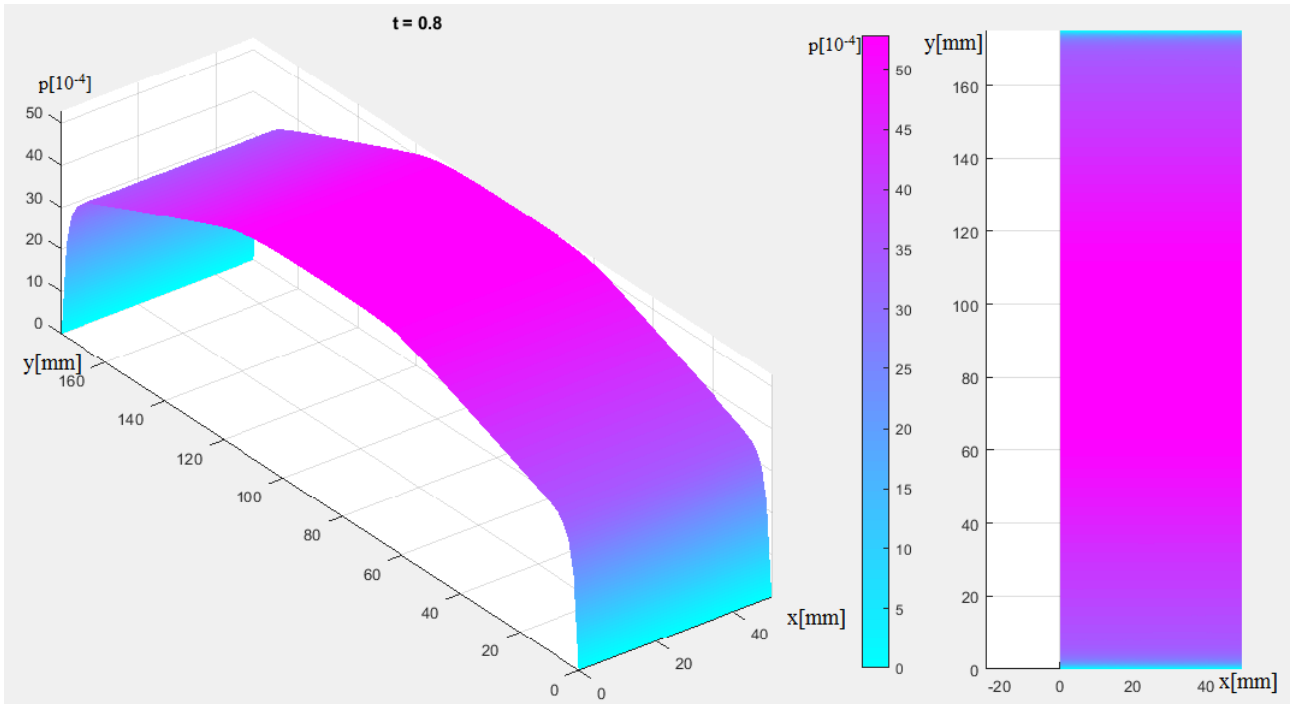


FIGURA 4.40 PASSAGGIO 2

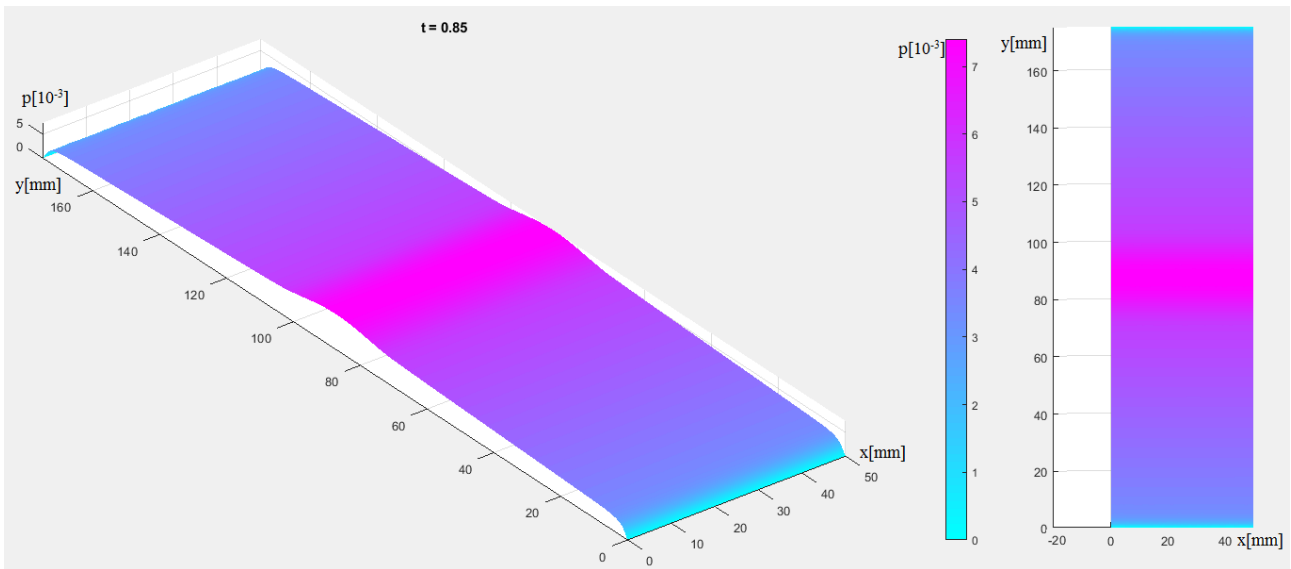


FIGURA 4.41 SOFTENING 1

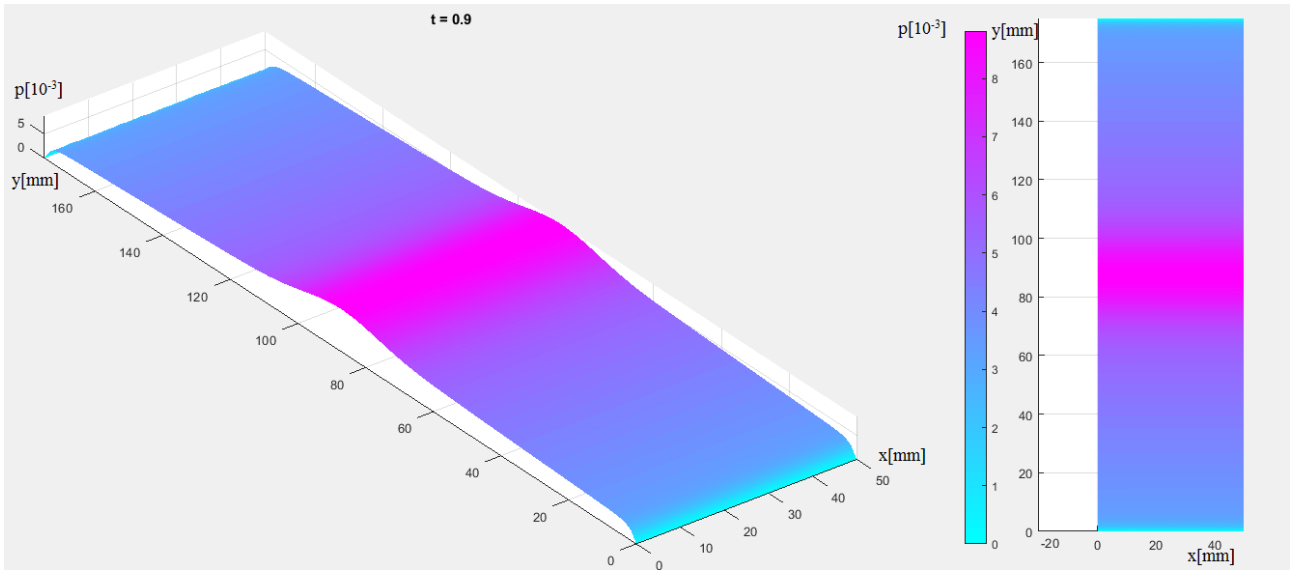


FIGURA 4.42 SOFTENING 2

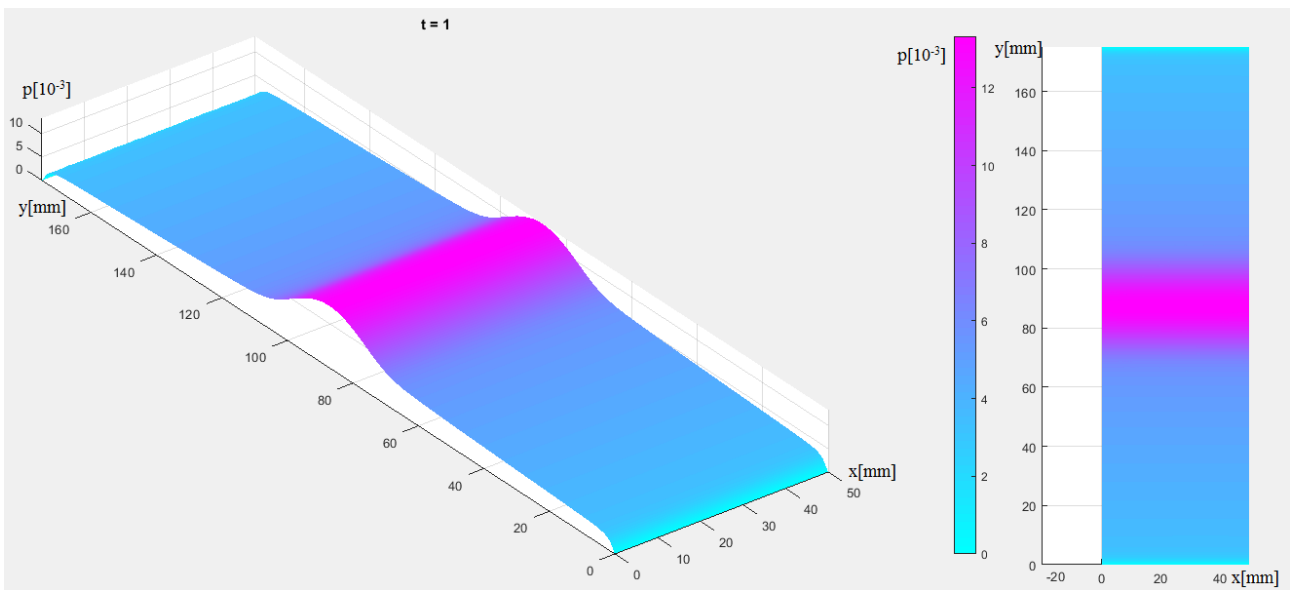


FIGURA 4.43 SOFTENING 3

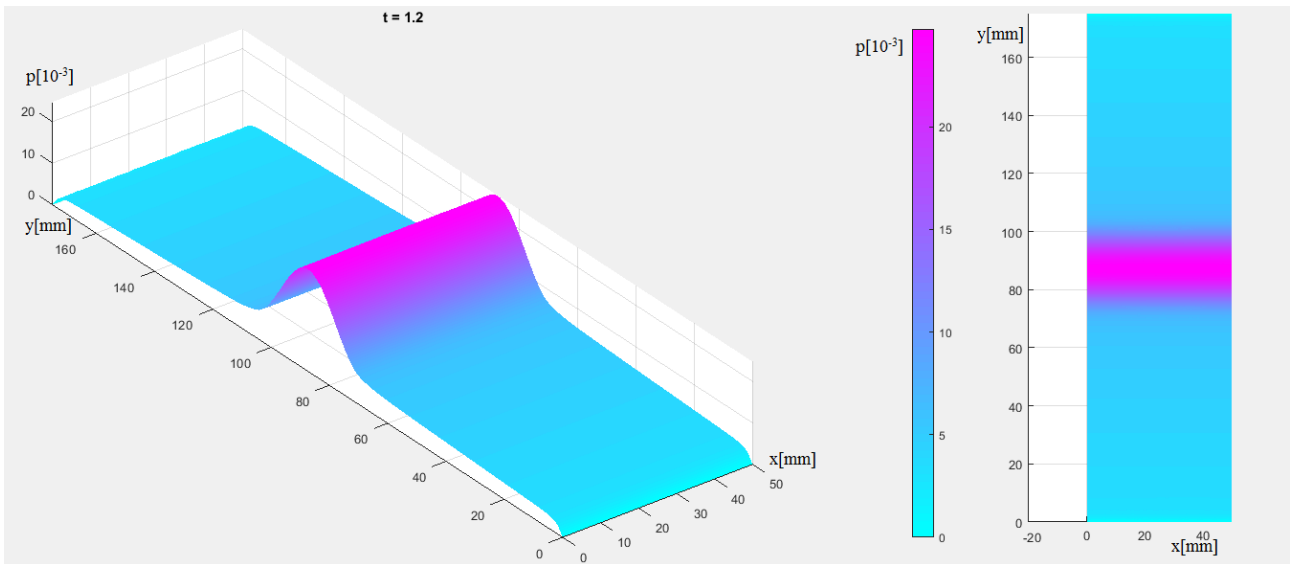


FIGURA 4.44 SOFTENING 4

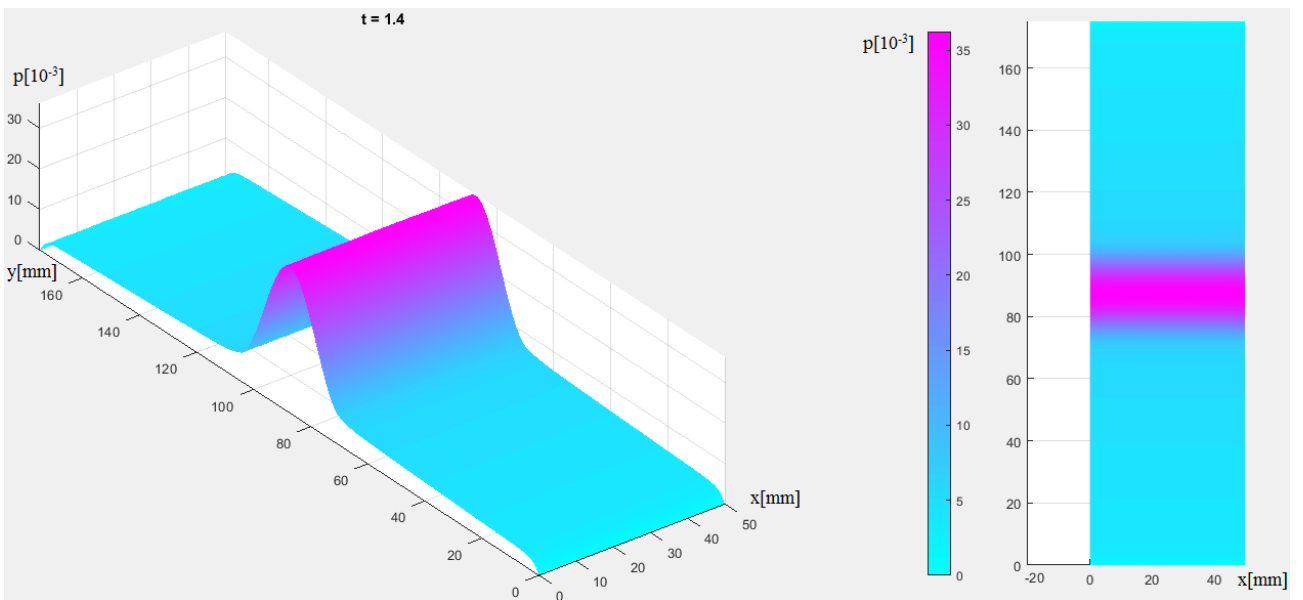


FIGURA 4.45 SOFTENING 5

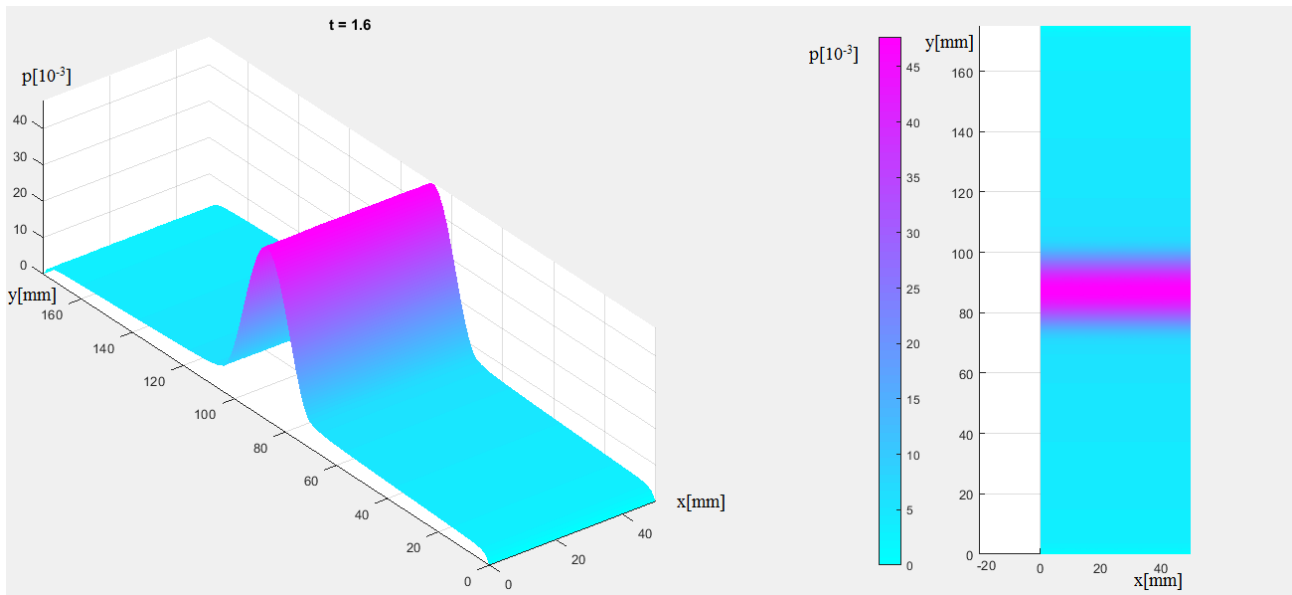


FIGURA 4.46 SOFTENING 6

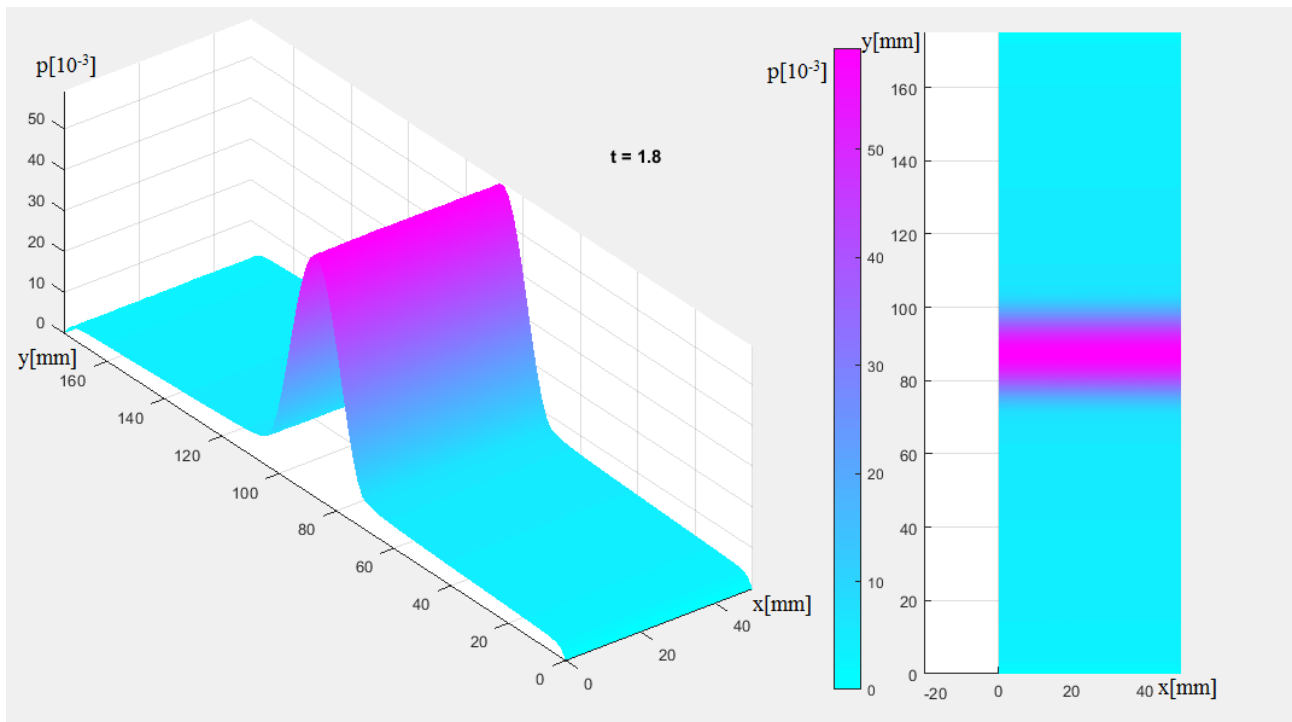


FIGURA 4.47 SOFTENING 7

Seppur si noti un certo tratto di raccordo nella curva e negli altri grafici, esso è molto più controllato, rispetto al sotto capitolo precedente.

5 POSSIBILI SVILUPPI E CONCLUSIONI

5.1. MODELLO VARIAZIONALE DI DANNO

5.1.1. Introduzione

Si vuole portare in questo capitolo un modello diverso da quello basato sulla plasticità di gradiente, in particolare si presenta un modello di danno. Si presenterà in questo capitolo il modello in questione basandosi sull'articolo [5]. Il modello descritto in seguito presenta alcune analogie con il modello adottato negli studi fatti in questa tesi. Esso infatti aggiunge al modello elastico standard un ulteriore parametro, che rappresenterà il danneggiamento (nel caso del UHPFRC fratturazione). Questo parametro avrà valori che vanno da "0" (materiale non danneggiato) ad "1" (materiale completamente danneggiato) e ad esso verranno associate le componenti energetiche sia locale che di gradiente. Sebbene cambi di molto la forma particolare, fino ad ora i due modelli esposti sembrano avere molte cose in comune, la differenziazione maggiore sarà infatti che, all'interno della forma dell'energia elastica, i parametri descrittivi della stessa (modulo di Young e di Poisson per un materiale isotropo) dipenderanno anche dal parametro di danno (in particolare diminuiscono con l'aumentare dello stesso). Nei prossimi sotto-capitoli si andrà ad analizzare il caso della barra tesa.

5.1.2. Equilibrio

Si inizia definendo il seguente parametro di danneggiamento:

$$\alpha(x) \in [0;1] \quad \text{che, nel caso della barra diventa} \quad \alpha(x) \in [0;1]$$

Definito questo parametro si passa alla ridefinizione delle energie, a partire dalla componente elastica:

$$\Psi_{el}(u, \alpha) = \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha) u'^2 dx \quad (\text{in cui il modulo di Young dipende dalla fratturazione})$$

$$\Psi_{loc}(\alpha) = \int_0^l w_d(\alpha) dx \quad (\text{componente locale dell'energia di danno})$$

$$\Psi_{non_loc}(\alpha) = \int_0^l \frac{1}{2} B \alpha'^2 dx \quad (\text{componente non locale dell'energia di danno})$$

Da ciò, l'energia interna totale, diventa:

$$\Psi(u, \alpha) = \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha) u'^2 + w_d(\alpha) + \frac{1}{2} B \alpha'^2 dx$$

Risulta opportuno precisare che la densità di energia di danno (w_d) sarà molto diversa, a livello di formulazione, rispetto alla controparte plastica (chiamata nei capitoli precedenti "w") e che il

funzionale energetico è scritto sull'unità di area (costante). Va posta, inoltre, attenzione alla funzione che descrive il modulo di Young:

- $E'(\alpha) < 0$
- $E(\alpha = 0) = E_0 = \text{modulo di Young della fase elastica}$
- $E(\alpha = 1) = E_{\min} = 0$

Assegnate ora le condizioni al contorno sullo spostamento ($u(0) = 0 \quad u(x=l) = tl$, con "t" per semplicità "tempo") e sul danno ($\alpha(0) = 0 \quad \alpha(x=l) = 0$) si procede con l'equilibrio:

$$\delta\Psi(u, \alpha, \delta u, \delta\alpha) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha + k\delta\alpha) [u' + k\delta u']^2 + w_d'(\alpha) k\delta\alpha + \frac{1}{2} B[\alpha' + k\delta\alpha']^2 - \frac{1}{2} E(\alpha) u'^2 - \frac{1}{2} B\alpha'^2 dx$$

$$\delta\Psi = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha) [k^2 \delta u'^2 + 2u' k \delta u'] + \frac{1}{2} E'(\alpha) k\delta\alpha [u'^2 + k^2 \delta u'^2 + 2u' k \delta u'] + w_d'(\alpha) k\delta\alpha + \frac{1}{2} B [k^2 \delta\alpha'^2 + 2\alpha' k \delta\alpha'] dx$$

$$\delta\Psi = \int_0^l E(\alpha) u' \delta u' + \frac{1}{2} E'(\alpha) \delta\alpha [u'^2] + w_d'(\alpha) \delta\alpha + B\alpha' \delta\alpha' dx$$

$$\delta\Psi = \int_0^l -E(\alpha) u'' \delta u + \frac{1}{2} E'(\alpha) [u'^2] \delta\alpha + w_d'(\alpha) \delta\alpha - B\alpha'' \delta\alpha dx + \left[\cancel{(E(\alpha) u' \delta u)} + \cancel{(B\alpha' \delta\alpha)} \right]_0^l$$

Da ciò si ottiene:

- $-E(\alpha) u'' \geq 0 \rightarrow \sigma' = 0 \rightarrow \sigma$ costante lungo x
- $\frac{1}{2} E'(\alpha) u'^2 + w_d'(\alpha) - B\alpha'' = f(u', \alpha) \geq 0$

Mentre la prima condizione rappresenta la classica condizione di equilibrio ($\text{div}(\underline{T}) = -\underline{p} \square \underline{0}$), la seconda rappresenta la superficie di snervamento del modello di danno, in analogia con il modello plastico.

5.1.3. Problema evolutivo

Introducendo la condizione di danno irreversibile ($\dot{\alpha} \geq 0 \quad ; \quad \dot{\alpha} + \delta\dot{\alpha} \geq 0$) si passa all'analisi del problema evolutivo, definendo, noto $\Psi(u(t), \alpha(t)) = \Psi(t) = \Psi_t$, lo sviluppo dell'energia interna al secondo ordine per calcolare $\Psi_{t+\tau}$:

$$\Psi_{t+\tau} \square \Psi_t + \tau \dot{\Psi}_t + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{\Psi}_t \quad \text{considerando} \quad u(t+\tau) = u(t) + \tau \dot{u}(t) \quad \alpha(t+\tau) = \alpha(t) + \tau \dot{\alpha}(t)$$

Definito il potenziale al tempo $t + \tau$, si procede con la sua minimizzazione. Dato che la configurazione al tempo t è nota, sarà sufficiente minimizzare:

$$F(\dot{u}, \dot{\alpha}) = \dot{\Psi}_t + \frac{1}{2} \tau \ddot{\Psi}_t$$

Svolgendo i conti (che vengono omissi in questa sede) si ottiene:

- $\dot{\sigma}' = 0$ (condizione di equilibrio)
- $\dot{\alpha} \geq 0 \quad f(t) + \tau \dot{f}(t) \geq 0 \quad \dot{\alpha}(f(t) + \tau \dot{f}(t)) = 0$ (condizioni di Kuhn-Tucker)

Passiamo ora alla prima fase, che sarà quella elastica. In questa parte le condizioni di Kuhn-Tucker saranno soddisfatte tramite $\dot{\alpha} = 0 \quad f(t) + \tau \dot{f}(t) \geq 0$ ed avremo:

$$\alpha = 0 \quad u' = t \quad \sigma = E(\alpha = 0)t = E_0 t$$

Nel momento in cui si passa alla fase successiva ($t = t_e$), dovrà esser soddisfatta anche la condizione $f(t) = 0$, ottenendo:

$$t_e^2 = \sqrt{-2w_d' / E'} \quad (E' < 0) \rightarrow \sigma_e = E_0 \sqrt{-2w_d' / E'}$$

Potendo ora misurare σ_e e E_0 durante una normale prova a trazione, abbiamo che, nella costruzione del modello, dovremo mantenere:

$$\frac{\sigma_e^2}{2E_0^2} = \frac{w_d'(\alpha = 0)}{-E'(\alpha = 0)}$$

Passando ora all'analisi della fase successiva avremo:

$$\sigma = Eu' \rightarrow \dot{\sigma} = E'u'\dot{\alpha} + E\dot{u}'$$

Dato che la tensione di trazione è costante per le equazioni di equilibrio, avremo:

$$\dot{\sigma} = \bar{\sigma} = \frac{1}{l} \int_0^l E'u'\dot{\alpha} + E\dot{u}' dx = \frac{E'u'}{l} \int_0^l \dot{\alpha} dx + E\dot{t} = E'u'\bar{\dot{\alpha}} + E\dot{t}$$

Considerando le ultime due equazioni, otteniamo:

$$\dot{\sigma} = E'u'\dot{\alpha} + E\dot{u}'; \dot{\sigma} = E'u'\bar{\dot{\alpha}} + E\dot{t} \rightarrow E'u'\dot{\alpha} + E\dot{u}' = E'u'\bar{\dot{\alpha}} + E\dot{t}$$

Ovvero:

$$\dot{u}' = \frac{E'u'}{E}(\bar{\dot{\alpha}} - \dot{\alpha}) + \dot{t}$$

Si ottiene quindi la velocità di deformazione in funzione della velocità di deformazione. Si passa, dunque alla verifica delle condizioni di Kuhn-Tucker. La prima possibilità di soddisfarle si ha con , da cui si ottiene $\dot{f} = E'u'\dot{u}' \geq 0$. Ricordando ora $E' \leq 0$, si procede sostituendo:

$$\dot{u}' = \frac{E'u'}{E}(\bar{\dot{\alpha}} - \dot{\alpha}) + \dot{t}$$

$$\dot{f} = E'u'\dot{u}' = E'u' \left[\frac{E'u'}{E}(\bar{\dot{\alpha}} - \dot{\alpha}) + \dot{t} \right]_{\alpha=0} \geq 0$$

$$u' \left[\frac{E'u'}{E} (\bar{\alpha} - \dot{\alpha}) + i \right]_{\alpha=0} \leq 0 \rightarrow u'i \leq 0$$

La diseuguaglianza ottenuta ($u'i \leq 0$) rappresenta una fase di scarico (u' e i hanno segno opposto)

Consideriamo ora la seconda possibilità di soddisfare le condizioni di Kuhn-Tucker, tramite:

$$\dot{\alpha} \geq 0 \quad ; \quad \dot{j} = \frac{1}{2} E'' \dot{\alpha} u'^2 + E' u' \dot{u}' + w_d'' \dot{\alpha} - B \dot{\alpha}'' = 0$$

Considerando ora la precedente espressione della tensione al limite elastico ($\sigma_e = E_0 \sqrt{-2w_d' / E'}$), avremo la seguente equazione differenziale:

$$BS'(\alpha=0)\dot{\alpha}'' - j(\alpha=0)\dot{\alpha} = -S'^2(\alpha=0)\sigma\dot{\sigma}$$

In cui $S = 1/E$ è il modulo di cedevolezza del materiale ($S' = -E' / E^2$) e

$$j(\alpha) = w_d''(\alpha)S'(\alpha) - w_d'(\alpha)S''(\alpha)$$

Prima di procedere con le soluzioni, risulta utile definire le seguenti lunghezze caratteristiche:

$$l_i(\alpha) = 2\pi \sqrt{\frac{BS'(\alpha)}{|j(\alpha)|}} \quad ; \quad l_c(\alpha) = \frac{2S'^2(\alpha)w_d'(\alpha)}{S(\alpha)|j(\alpha)|} l_i(\alpha)$$

5.1.4. Soluzioni

Per il calcolo delle soluzioni, vanno distinti i casi in cui lo scalare “ j ” risulta positivo, nullo o negativo. Si procede dunque (omettendo tutti i calcoli) come segue:

- $j > 0$

Si ottiene:

$$\dot{\alpha}(x) = \frac{S'^2}{j} \sigma \dot{\sigma} g(x) \quad \text{con} \quad g(x) = 1 - \frac{\cosh[\pi(l-2x)/l_i]}{\cosh(\pi l/l_i)}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{1 + \bar{g}(l_c/l_i)} \dot{i} \quad \text{con} \quad \bar{g} = 1 - \frac{l_i}{\pi l} \tanh\left(\frac{\pi l}{l_i}\right)$$

- $j = 0$

$$\dot{\alpha}(x) = \frac{3E}{6BS' + E^2 SS' w_p' l^3} \sigma x(l-x)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{1 + \bar{g}(l_c/l_i)} \dot{i} \quad \text{con} \quad \bar{g} = 1 - \frac{l_i}{\pi l} \tanh\left(\frac{\pi l}{l_i}\right)$$

In ambo i casi si nota un comportamento incrudente (hardening).

- $j < 0$

Questo caso risulta un po' più complicato dei due precedenti. Andranno, infatti, distinti i casi di barra "lunga" ($l > l_i$) e di barra "corta" ($l \leq l_i$). Iniziando con il caso di barra corta si ha:

BARRA CORTA $l \leq l_i$

$$\dot{\alpha}(x) = \frac{S'^2}{j} \sigma \dot{\sigma} g(x) \quad \text{con} \quad g(x) = 1 - \frac{\cos[\pi(l-2x)/l_i]}{\cos(\pi l/l_i)}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{1 - \bar{g}(l_c/l_i)} \dot{t} \quad \text{con} \quad \bar{g} = 1 - \frac{l_i}{\pi l} \tan\left(\frac{\pi l}{l_i}\right) = \psi(2\pi l/l_i)$$

$$\dot{\alpha}(x) = \frac{ES'^2}{j(1 - \bar{g}l_c/l_i)} \sigma g(x) \dot{t}$$

In cui, per semplicità $\psi(y) = 1 - \frac{\tan(y/2)}{y/2}$

La natura della soluzione, in questo caso, cambia a seconda della lunghezza della barra considerata. In particolare, se $l \in [0; l_i/2]$ avremo che $g; \bar{g} < 0 \rightarrow \dot{\sigma}; \dot{\alpha} > 0 \quad \forall x \in [0; l]$, avremo dunque una fase di hardening. Mentre, se $l \in (l_i/2; l_i]$, avremo una soluzione accettabile (in particolare che rispetta $\dot{\alpha} \geq 0$) solo se $\bar{g} \geq l_c/l_i$ e sarà di softening.

BARRA LUNGA $l > l_i$

Per evitare che la condizione $\dot{\alpha} \geq 0$ sia violata in $x > l_i$, si impone la seguente soluzione

$$\dot{\alpha}(x) = \frac{ES'^2}{j(1 - \bar{g}l_c/l_i)} \sigma \dot{t} g(x) \quad \text{con} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - \cos[2\pi x/l_i] & x \in [0; l_i] \\ 0 & x > l_i \end{cases}$$

In questo caso $\dot{\alpha} \geq 0 \leftrightarrow l \leq l_c$, mentre l'espressione di $\dot{\sigma}$ è simile alle precedenti.

Per riassumere le soluzioni trovate si riportano i seguenti grafici:

- per $j > 0$ avremo:

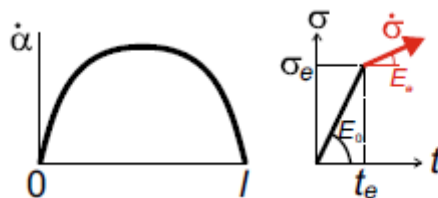


FIGURA 5.1 $j > 0$

- mentre per $j < 0$:

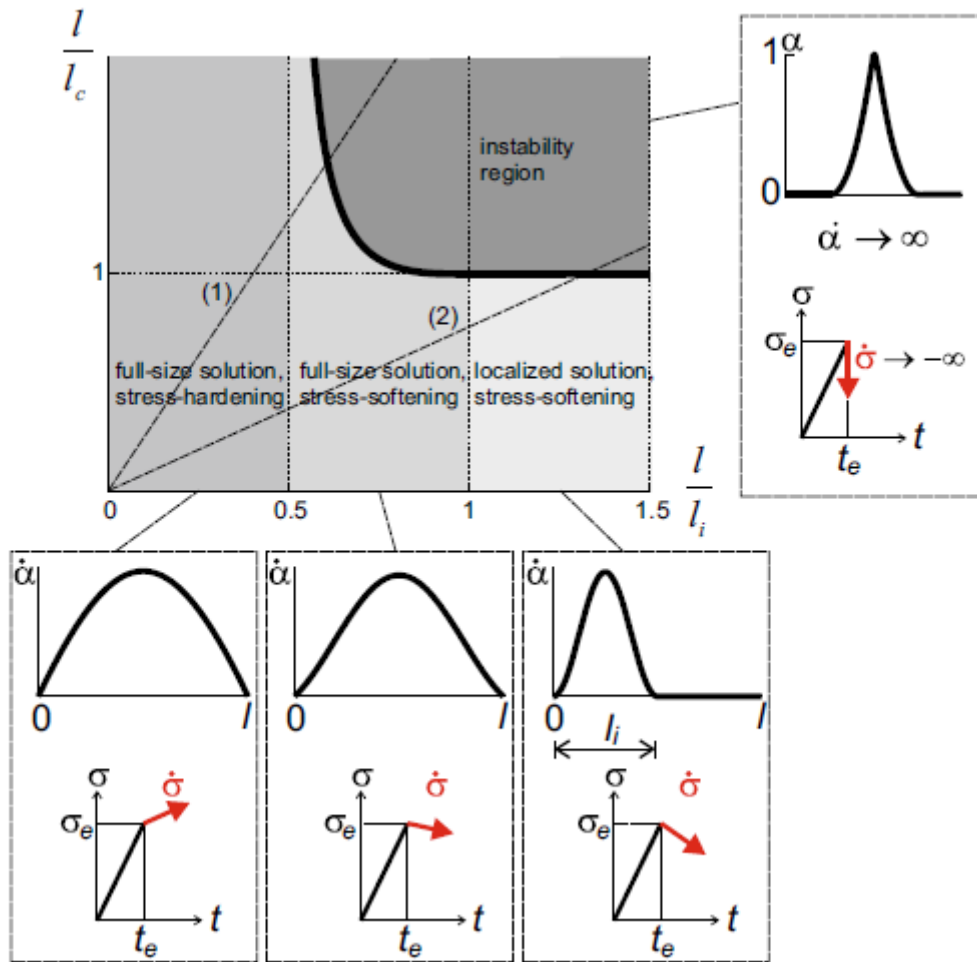


FIGURA 5.2 $J < 0$

5.1.5. Proposte $E(\alpha)$; $w_p(\alpha)$

Nello stesso articolo vengono proposte principalmente le seguenti funzioni:

$$E(\alpha) = (1 - \alpha^2)E_0$$

$$w_d(\alpha) = \frac{\sigma_e^2}{qE_0} \left[(1 - \alpha)^{-q} - 1 \right]$$

Dato che, per $q=0$ la funzione $w_d(\alpha)$ non è definita, si applica il teorema di De L'Hôpital:

$$w_d(\alpha, q=0) = \frac{\sigma_e^2}{E_0} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \left[(1 - \alpha)^{-q} - 1 \right]}{\partial q}}{\frac{\partial q}{\partial q}} = \frac{\sigma_e^2}{E_0} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial (1 - \alpha)^{-q}}{\partial q} = \frac{\sigma_e^2}{E_0} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial e^{-q \log(1 - \alpha)}}{\partial q} = \frac{\sigma_e^2}{E_0} \lim_{q \rightarrow 0} e^{-q} \log(1 - \alpha)$$

$$w_d(\alpha, q \rightarrow 0) = \frac{\sigma_e^2}{E_0} \log(1 - \alpha)$$

Trascurando ora il termine non locale, avremo i seguenti esempi di diagrammi sforzo- deformazione standardizzati:

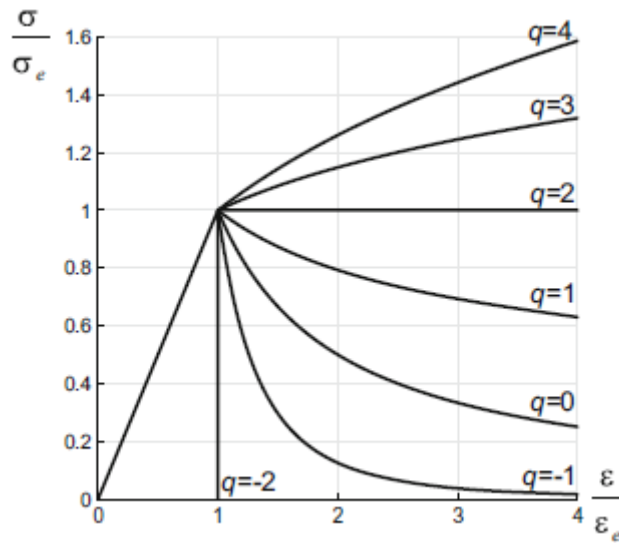


FIGURA 5.3 INFLIENZA DEL FATTORE "q"

Mentre, per quanto riguarda le lunghezze caratteristiche (importanti per la stabilità) avremo:

$$l_i = 2\pi \sqrt{\frac{BE_0(1-\alpha)^{q+2}}{\sigma_e^2(2-q)}} \quad l_c = \frac{4}{2-q} l_i$$

Dato che, come nella plasticità, la lunghezza interna di fessurazione è misurabile, si può esplicitare il coefficiente relativo al termine non locale:

$$B = \frac{(2-q)\sigma_e^2 l_i^2 (\alpha = 0)}{4\pi^2 E_0}$$

Si riportano dunque alcuni esempi delle lunghezze caratteristiche in forma grafica per diversi parametri "q" durante la prova:

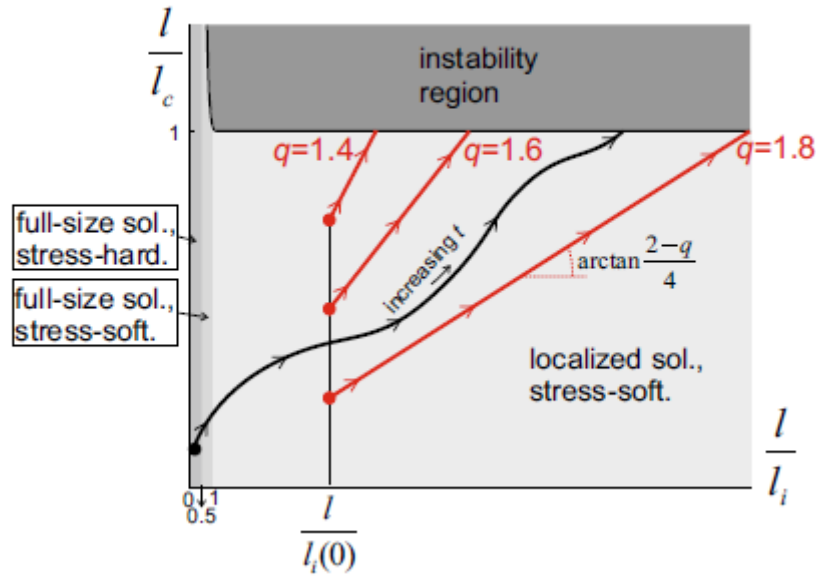


FIGURA 5.4 COMPORTAMENTO IN RAPPORTO ALLE LUNGHEZZE CARATTERISTICHE

Per descrivere sia il ramo di hardening che quello di softening, si va a specializzare la forma precedentemente esposta in:

$$w_d(\alpha) = \begin{cases} \frac{a_1}{q_1} \left[(1-\alpha)^{-q_1} - 1 \right] & \alpha \leq \alpha_M \\ \frac{a_2}{q_2} \left[(1-\alpha)^{-q_2} - 1 \right] & \alpha > \alpha_M \end{cases}$$

In cui il pedice “M” indica i parametri relativi al punto in cui lo sforzo è massimo, mentre i parametri della funzione avranno i seguenti valori:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_e^2 / E_0 \\ a_2 &= (1 - \alpha_M)^{(q_2 - q_1)} \\ c_2 &= \frac{a_1}{q_1} \left[(1 - \alpha_M)^{-q_1} - 1 \right] - \frac{a_2}{q_2} \left[(1 - \alpha_M)^{-q_2} - 1 \right] \\ \alpha_M &= 1 - \sqrt{\frac{\sigma_M}{E_0 \varepsilon_M}} \\ q_1 &= 2 \frac{\log(\varepsilon_M / \varepsilon_{el}) + \log(\sigma_M / \sigma_{el})}{\log(\varepsilon_M / \varepsilon_{el}) - \log(\sigma_M / \sigma_{el})} \\ B &= \frac{a_2}{4\pi^2} (2 - q_2) l_i^2 \alpha_M (1 - \alpha_M)^{-(q_2 + 1)} \end{aligned}$$

Introdotta il modello riguardante la teoria della frattura, si prosegue nel prossimo sotto capitolo con alcune riflessioni.

5.2. MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ

5.2.1. Criticità del modello di danno

La differenza principale tra un modello di danno ed un modello di plasticità risiede nel fatto che il modello di danno pone la relazione tra superficie di snervamento e le deformazioni/tensioni interni tramite la variazione dei parametri elastici:

$$\frac{1}{2} E'(\alpha) u'^2 + w_d'(\alpha) - B\alpha'' = f(u', \alpha) \geq 0 \rightarrow \text{relazione globale}$$

$$\frac{1}{2} E'(\alpha) u'^2 \rightarrow \text{parte relativa allo stato di tensione/deformazione interno all'elemento}$$

$$w_d'(\alpha) - B\alpha'' \rightarrow \text{superficie vera e propria}$$

In questa situazione risulta più che necessario modificare i parametri elastici del materiale al fine di imporre la superficie di snervamento richiesta. Ciò, tuttavia può non risultare in accordo con il ramo di scarico che, in un materiale trattato solamente con un modello di danno, risulta lineare (se il ramo elastico è considerato lineare) e confluyente, spesso, nel punto $(\sigma = 0; \varepsilon = 0)$. Non ammette dunque normalmente una deformazione residua, che può essere presente, tuttavia, in un materiale generico.

Il modello plastico, invece, costruisce la relazione tra superficie di snervamento e stato di tensione/deformazione interno tramite il parametro deformazione plastica:

$$|E(u' - \gamma)| \leq w_p' - Ap'' \rightarrow \text{relazione globale}$$

In cui:

u' = deformazione totale

γ = deformazione plastica

p = plasticità cumulata

$w_p = w_p(p)$ = energia plastica relativa al punto (\underline{x}) e all'istante d'interesse

A = coefficiente del termine non locale dell'energia plastica

$$|E(u' - \gamma)| = |\sigma| \rightarrow \text{parte relativa allo stato di tensione/deformazione interno all'elemento}$$

$$w_p' - Ap'' \rightarrow \text{superficie vera e propria}$$

Non riesce, tuttavia, a cogliere variazioni nei parametri elastici del materiale avvenuti a seguito di un ciclo di carico.

Si tenterà dunque in questa sede di combinare i due modelli al fine di sopperire alle carenze di entrambi.

5.2.2. Formulazione ed equilibrio

Si compone, dunque il potenziale nel seguente modo:

$$\Psi = \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha)(u' - \gamma)^2 + w_p(p) + w_d(\alpha) + w_a(\alpha, p) + \frac{1}{2} Ap'^2 + \frac{1}{2} B\alpha'^2 dx$$

In cui sono presenti, in ordine, la componente elastica, quella plastica, quella di danno ed una componente di accoppiamento. Sono, inoltre presenti i due termini non locali (sia quello plastico che di danno).

Si definiscono, per semplicità, le seguenti quantità:

- $\Psi_{el} = \int_0^l \frac{1}{2} E(\alpha)(u' - \gamma)^2 dx \rightarrow$ parte elastica del funzionale
- $\Psi_p = \int_0^l w_p(p) + \frac{1}{2} Ap'^2 dx \rightarrow$ parte plastica del funzionale
- $\Psi_d = \int_0^l w_d(\alpha) + \frac{1}{2} B\alpha'^2 dx \rightarrow$ parte di danno del funzionale
- $\Psi_a = \int_0^l w_a(\alpha, p) dx \rightarrow$ componente accoppiata (dipendente dal danno e dalla plasticità cumulata) del funzionale

Si passa, dunque, ad imporre l'equilibrio:

- $\delta\Psi_{el} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^l \frac{1}{2} (E + h\delta\alpha E)((u' - \gamma) + h(\delta u' - \delta\gamma))^2 - \frac{1}{2} E(\alpha)(u' - \gamma)^2 dx$
- $\delta\Psi_{el} = \int_0^l \frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 \delta\alpha - E(u' - \gamma)\delta\gamma - (E(u' - \gamma))' \delta u dx + \cancel{[E(u' - \gamma)\delta u]_0^l}$
- $\delta\Psi_p = \int_0^l w_p' \delta p - Ap'' \delta p dx + [Ap' \delta p]_0^l$
- $\delta\Psi_d = \int_0^l (w_d'(\alpha) - B\alpha'') \delta\alpha dx + [B\alpha' \delta\alpha]_0^l$
- $\delta\Psi_a = \int_0^l \frac{dw_a}{d\alpha} \delta\alpha + \frac{dw_a}{dp} \delta p dx = \int_0^l w_{a,\alpha} \delta\alpha + w_{a,p} \delta p dx$

In cui, nel termine accoppiato, per esprimere la derivata di una funzione rispetto ad un solo parametro da cui dipende (nel caso dipenda da più parametri) è stata usata la virgola.

Si hanno, quindi, le seguenti condizioni:

$$(E(u' - \gamma))' = \sigma' = 0$$

$$(w_p' - Ap'') + w_{a,p} - |E(u' - \gamma)| \geq 0 \quad p \geq 0 \quad p \left[(w_p' - Ap'') + w_{a,p} - |E(u' - \gamma)| \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 + (w_d' - B\alpha'') + w_{a,\alpha} \geq 0 \quad \alpha \geq 0 \quad \left[\frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 + (w_d' - B\alpha'') + w_{a,\alpha} \right] \alpha = 0$$

Si definisce, quindi, per semplicità:

$$f_p = (w_p' - Ap'') + w_{a,p}$$

$$f_d = (w_d'(\alpha) - B\alpha'') + w_{a,\alpha}$$

$$f = \frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2$$

Si analizza, dunque, il punto finale della fase elastica:

$$w_p'(0) + w_{a,p}(0,0) - \sigma_{el} = 0 \rightarrow w_p'(0) + w_{a,p}(0,0) = \sigma_{el}$$

$$\frac{1}{2} E'(0)u'^2 + w_d'(0) + w_{a,\alpha}(0,0) = 0$$

5.2.3. Evoluzione

Per risolvere il problema evolutivo, si calcolano le derivate delle diverse parti dell'energia:

$$- \dot{\Psi}_{el} = \int_0^l \frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 \dot{\alpha} + E(u' - \gamma) \dot{u}' - E(u' - \gamma) \dot{\gamma} dx$$

$$\dot{\Psi}_{el} = \int_0^l \frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 \dot{\alpha} + \sigma \dot{u}' - \sigma \dot{\gamma} dx$$

$$- \dot{\Psi}_p = \int_0^l w_p' \dot{p} + Ap' \dot{p}' dx$$

$$- \dot{\Psi}_d = \int_0^l w_d' \dot{\alpha} + B\alpha' \dot{\alpha}' dx$$

$$- \dot{\Psi}_a = \int_0^l w_{a,\alpha} \dot{\alpha} + w_{a,p} \dot{p} dx$$

Mentre le derivate seconde sono:

$$\begin{aligned}
 - \ddot{\Psi}_{el} &= \int_0^l \left(d \left(\frac{1}{2} E'(u'-\gamma)^2 \right) / dt \right) \dot{\alpha} + \dot{\sigma} \dot{u}' - \dot{\sigma} \dot{\gamma} dx \\
 \ddot{\Psi}_{el} &= \int_0^l \frac{1}{2} E''(u'-\gamma)^2 \dot{\alpha}^2 + 2E'(u'-\gamma)(\dot{u}'-\dot{\gamma})\dot{\alpha} + E(\dot{u}'-\dot{\gamma})^2 dx \\
 - \ddot{\Psi}_p &= \int_0^l w_p'' \dot{p}^2 + A\dot{p}'^2 dx \\
 - \ddot{\Psi}_d &= \int_0^l w_d'' \dot{\alpha}^2 + B\dot{\alpha}'^2 dx \\
 - \ddot{\Psi}_a &= \int_0^l w_{a,\alpha,\alpha} \dot{\alpha}^2 + 2w_{a,\alpha,p} \dot{\alpha} \dot{p} + w_{a,p,p} \dot{p}^2 dx
 \end{aligned}$$

Considerando ora nota la situazione iniziale, si calcola la variazione prima dei precedenti funzionali, rispetto alle velocità dei parametri costitutivi (spostamento, plasticità e danno):

$$\begin{aligned}
 - \delta \dot{\Psi}_{el} &= \int_0^l \frac{1}{2} E'(u'-\gamma)^2 \delta \dot{\alpha} + E(u'-\gamma) \delta \dot{u}' - E(u'-\gamma) \delta \dot{\gamma} dx = \\
 \delta \dot{\Psi}_{el} &= \int_0^l \frac{1}{2} E'(u'-\gamma)^2 \delta \dot{\alpha} - (E(u'-\gamma))' \delta \dot{u}' - E(u'-\gamma) \delta \dot{\gamma} dx \\
 \delta \dot{\Psi}_{el} &= \int_0^l \frac{1}{2} E'(u'-\gamma)^2 \delta \dot{\alpha} - \sigma' \delta \dot{u}' - \sigma \delta \dot{\gamma} dx \\
 - \delta \dot{\Psi}_p &= \int_0^l w_p' \delta \dot{p} + A p' \delta \dot{p}' dx = \int_0^l w_p' \delta \dot{p} - A p'' \delta \dot{p} dx + [A p' \delta \dot{p}]_0^l \\
 - \delta \dot{\Psi}_d &= \int_0^l w_d' \delta \dot{\alpha} - B \alpha'' \delta \dot{\alpha} dx + [B \alpha' \delta \dot{\alpha}]_0^l \\
 - \delta \dot{\Psi}_a &= \int_0^l w_{a,\alpha} \delta \dot{\alpha} + w_{a,p} \delta \dot{p} dx \\
 - \delta \dot{\Psi}_{el} &= \int_0^l 2 \left[\frac{1}{2} E''(u'-\gamma)^2 \dot{\alpha} + E'(u'-\gamma)(\dot{u}'-\dot{\gamma}) \right] \delta \dot{\alpha} + 2 [E(\dot{u}'-\dot{\gamma}) + E' \dot{\alpha}(u'-\gamma)] (\delta \dot{u}' - \delta \dot{\gamma}) dx \\
 \delta \dot{\Psi}_{el} &= 2 \int_0^l \dot{f} \delta \dot{\alpha} - \dot{\sigma}' \delta \dot{u}' - \dot{\sigma} \delta \dot{\gamma} dx \\
 - \delta \dot{\Psi}_p &= 2 \int_0^l w_p'' \dot{p} \delta \dot{p} - A \dot{p}'' \delta \dot{p} dx + 2 [A \dot{p}' \delta \dot{p}]_0^l \\
 - \delta \dot{\Psi}_d &= 2 \int_0^l w_d'' \dot{\alpha} \delta \dot{\alpha} - B \dot{\alpha}'' \delta \dot{\alpha} dx + 2 [B \dot{\alpha}' \delta \dot{\alpha}]_0^l \\
 - \delta \dot{\Psi}_a &= 2 \int_0^l w_{a,\alpha,\alpha} \dot{\alpha} \delta \dot{\alpha} + w_{a,\alpha,p} \dot{\alpha} \delta \dot{p} + w_{a,\alpha,p} \dot{p} \delta \dot{\alpha} + w_{a,p,p} \dot{p} \delta \dot{p} dx
 \end{aligned}$$

Si passa ora alla risoluzione vera e propria del problema evolutivo. Considerando nota la soluzione all'istante iniziale ("t"), si passa alla ricerca della soluzione al tempo "t+τ". Ciò si ottiene tramite:

$$\delta\dot{\Psi} + \frac{1}{2}\tau\delta\ddot{\Psi} \geq 0$$

$$0 \leq \int_0^l \frac{1}{2} E'(u' - \gamma)^2 \delta\dot{\alpha} - \sigma' \delta\dot{u} - \sigma \operatorname{sgn}(\delta\dot{\gamma}) \delta\dot{p} + (w_p' - Ap'') \delta\dot{p} + (w_d' - B\alpha'') \delta\dot{\alpha} + w_{a,\alpha} \delta\dot{\alpha} + w_{a,p} \delta\dot{p} dx +$$

$$+ \tau \int_0^l \dot{f} \delta\dot{\alpha} - \dot{\sigma}' \delta\dot{u} - \dot{\sigma} \delta\dot{\gamma} + (w_p'' \dot{p} - A\dot{p}'' + w_{a,p,p} \dot{p} + w_{a,\alpha,p} \dot{\alpha}) \delta\dot{p} + (w_d'' \dot{\alpha} - B\dot{\alpha}'' + w_{a,\alpha,\alpha} \dot{\alpha} + w_{a,\alpha,p} \dot{p}) \delta\dot{\alpha} dx$$

$$\int_0^l (f + \tau \dot{f}) \delta\dot{\alpha} - (\sigma + \tau \dot{\sigma})' \delta\dot{u} - (\sigma + \tau \dot{\sigma}) \operatorname{sgn}(\delta\dot{\gamma}) \delta\dot{p} + (f_p + \tau \dot{f}_p) \delta\dot{p} + (f_d + \tau \dot{f}_d) \delta\dot{\alpha} dx \geq 0$$

Da ciò si avranno le classiche condizioni di equilibrio e di Khun-Tucker:

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = 0$$

$$f_p + \tau \dot{f}_p - |\sigma + \tau \dot{\sigma}| \geq 0 \quad \dot{p} \geq 0 \quad (f_p + \tau \dot{f}_p - |\sigma + \tau \dot{\sigma}|) \dot{p} = 0$$

$$(f_d + \tau \dot{f}_d) + (f + \tau \dot{f}) \geq 0 \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad (f_d + \tau \dot{f}_d + f + \tau \dot{f}) \dot{\alpha} = 0$$

Dato che sono presenti tre parametri costitutivi, si cercano, anziché le soluzioni generali, le soluzioni in casi particolari. Si riporteranno in seguito due esempi.

5.2.4. Annullamento della componente di accoppiamento

Si tenta, inizialmente, di annullare la componente dell'energia di accoppiamento, facendo innescare danno e plasticità subito dopo la fase elastica. In generale, dopo la fase elastica, si avrà:

$$w_p' - Ap'' = \sigma \quad w_d' - B\alpha'' = \frac{1}{2} S' \sigma^2 \quad \text{con} \quad S = 1/E = \text{cedevolezza}$$

Considerando ora $\sigma = \sqrt{\frac{2(w_d' - B\alpha'')}{S'}}$ avremo:

$$w_p' - Ap'' = \sqrt{\frac{2(w_d' - B\alpha'')}{S'}} \rightarrow f_p = \sqrt{\frac{2f_d}{S'}} = \sigma \rightarrow f_d = \frac{1}{2} S' f_p^2 \rightarrow S' = \frac{2f_d}{f_p^2}$$

Per quanto riguarda, invece, il limite elastico, avremo:

$$\sigma_{el} = \sqrt{\frac{2w_d'(0)}{S'(0)}} = w_p'(0) \rightarrow w_d'(0) = \frac{1}{2} S'(0) w_p'^2(0)$$

Riassumendo, abbiamo dunque che, annullando la componente di accoppiamento, rimarranno da determinare le superfici di snervamento (plastico e di danno) e la cedevolezza (il degrado del modulo elastico in forma indiretta). L'obiettivo principale, in questa fase, è quello di riprodurre sia la curva sforzo-deformazione, sia il ramo di scarico. Può, dunque, essere una possibile scelta l'annullamento di tale energia, tuttavia la componente di accoppiamento fornisce una maggiore libertà di scelta per le altre funzioni.

5.2.5. Accoppiamento lineare in "p"

Un'altra proposta più articolata è presente in [6]. In questo caso si scelgono le seguenti ipotesi:

- $w_p(p) = 0$
- $w_d(\alpha) = w(\alpha)$
- $w_a(\alpha, p) = \sigma_p(\alpha)p$
- $A = 0$
- $B = 2w_1\ell^2$

Vengono, inoltre date le seguenti funzioni per il modello specifico:

- $w(\alpha) = w_1\alpha$
- $E(\alpha) = (1-\alpha)^2 E_0$
- $\sigma_p(\alpha) = (1-\alpha)^s \sigma_p$

In cui w_1 e σ_p sono due costanti positive. Abbiamo dunque:

- $f_p = \sigma_p(\alpha) = (1-\alpha)^s \sigma_p$
- $f_d = (w'(\alpha) - 2w_1\ell^2\alpha'') + \sigma_p'(\alpha)p = w_1 - 2w_1\ell^2\alpha'' + s(1-\alpha)^{s-1}\sigma_p p$
- $f = -(1-\alpha)E_0(u' - \gamma)^2 = \frac{-1}{E_0(1-\alpha)^3} \sigma^2$

Si avranno dunque le seguenti superfici di snervamento, rispettivamente per plasticità e danno (trascurando il termine non locale):

$$\sigma_p(\alpha) = (1-\alpha)^s \sigma_p$$

$$\sigma_D(\alpha, p) = \sqrt{E_0} \sqrt{w_1 + s(1-\alpha)^{s-1}\sigma_p p} \sqrt{(1-\alpha)^3}$$

A seconda ora di quale funzione sia la maggiore al limite elastico, avremo che si potrà attivare prima il danneggiamento o prima la plasticità. Per sintetizzare si sceglie di riportare ciò in forma grafica nella figura 5.5. In detta figura si riportano i 4 casi principali. Nel primo caso si vede che la superficie di snervamento plastica è sempre maggiore di quella di danno e da ciò risulta che la plasticizzazione non avviene. Nel secondo caso le due superfici si incontrano e continuano unite. In

questo caso si avrà una prima parte in cui si innesca solo il danno ed una seconda in cui evolvono sia danno che plasticità. Nel terzo caso avremo che è la superficie di snervamento plastica ad essere inizialmente minore, perciò esse si innescherà prima. Ad un certo punto, tuttavia, la superficie di snervamento di danno sarà minore. L'evoluzione della plasticità, perciò, si arresterà ed evolverà solo il danno. L'ultimo caso è analogo al precedente, con la differenza che, dopo essersi incontrate le superfici di snervamento vanno a coincidere, permettendo l'evoluzione sia del danno che della plasticità.

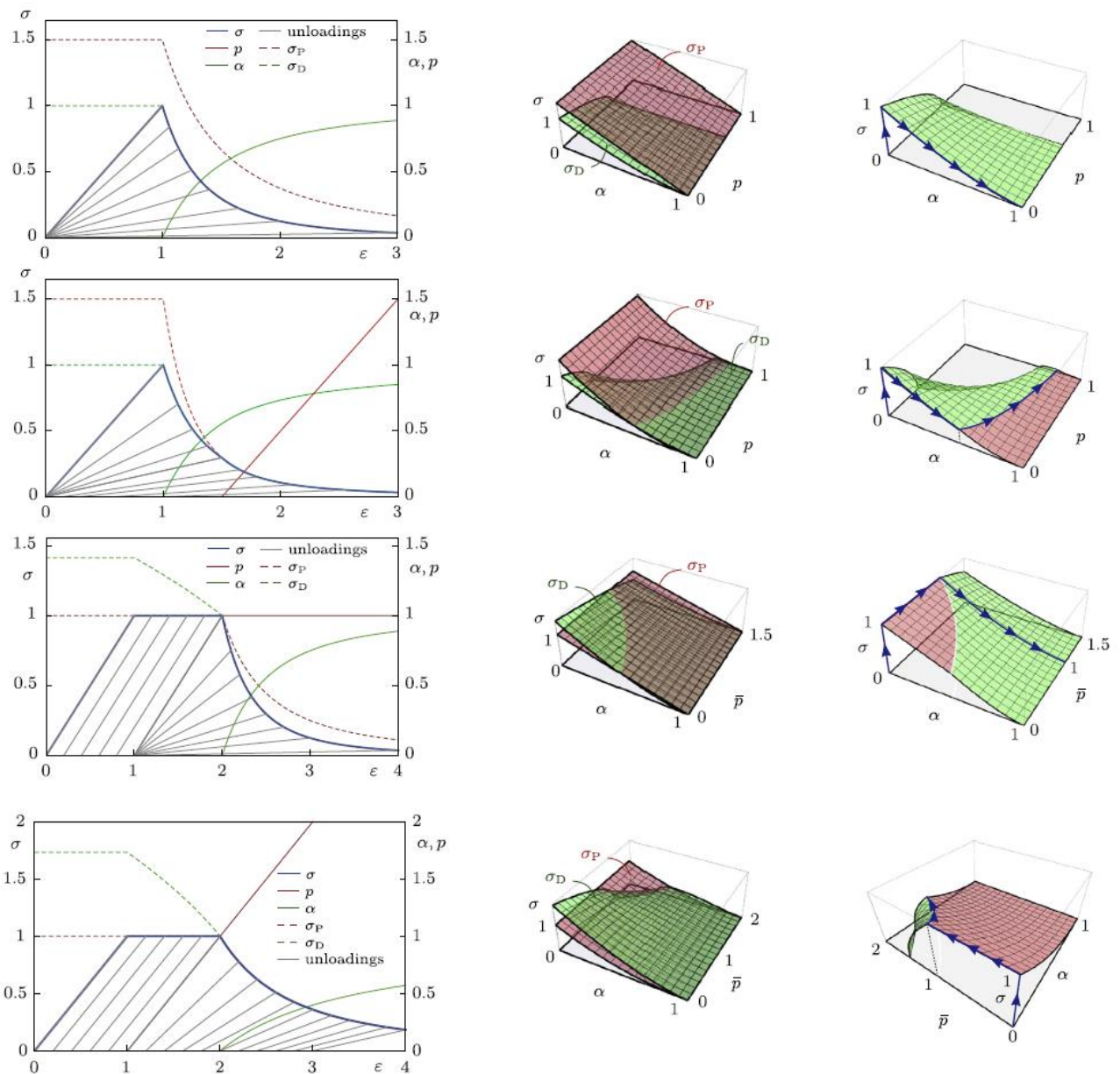


FIGURA 5.5 ANDAMENTO DI TENSIONE, DEFORMAZIONE, DANNO E PLASTICITÀ NEI 4 CASI PRINCIPALI (NELLE 4 RIGHE). NELLA COLONNA A DESTRA LA CURVA SFORZO-DEFORMAZIONE STANDARDIZZATA. CON RIPORE ANCHE LE SUPERFICI DI SNERVAMENTO E I PARAMETRI DI DANNO E PLASTICITÀ CUMULATA. AL CENTRO SI RIPORTANO LE SUPERFICI DI SNERVAMENTO E, A SINISTRA I PERCORSI EVOLUTIVI DEI PARAMETRI COSTITUTIVI

5.3. ALTRE FORME DI ENERGIA PLASTICA

5.3.1. Introduzione

Fino ad ora è stata considerata (anche per la soluzione al continuo) una forma dell'energia plastica tale che la sua derivata seconda fosse costante a tratti. Ciò, tuttavia, rispecchia una sola tra le possibili soluzioni del problema. In questo sotto capitolo si andranno ad esporre altre forme utilizzabili. Un criterio possibile per cercare di avvicinarsi inizialmente alla superficie di snervamento reale, può essere quello di trascurare inizialmente il coefficiente non locale, ottenendo:

$$\sigma = w' - \cancel{A} p^n = w'$$

Ovvero si può cercare (soprattutto durante l'hardening) di imporre un'energia plastica la cui derivata sia simile alla superficie di snervamento misurata durante la prova a trazione. Questo metodo può essere poco affidabile per il ramo di softening. Dopo questa breve introduzione si può passare ad esporre alcune proposte.

5.3.2. Per punti

Continuando, in prima approssimazione a ricercare una funzione di w' simile alla superficie di snervamento misurata, si può imporre che:

dati da una prova di trazione i vettori $\underline{\varepsilon}$ (deformazioni misurate) e $\underline{\sigma}$ (tensioni misurate) di dimensione "n", si possono costruire i vettori:

$$\underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon} - \varepsilon_{elastico} \underline{1}_{n \times 1}$$

Individuato ora $\varepsilon_{elastico} = \varepsilon_{m,1}$ (ovvero la deformazione elastica si trova nella m-esima riga del vettore $\underline{\varepsilon}$) e definito $h=n-m+1$, si definisce il vettore:

$$\underline{\gamma}_{h,1} \quad |\gamma_{i,1} = \varepsilon^*_{i+m-1,1}$$

In modo da ottenere le deformazioni plastiche medie (simili alle deformazioni plastiche massime secondo il capitolo 3) ed, in parallelo:

$$\underline{w}'_{vett,h,1} \quad |w'_{i,1} = \sigma_{i+m-1,1}$$

Per definire il vettore delle derivate seconde, considerando $\gamma_{i+1,1} - \gamma_{i,1} = \Delta$ costante, esso può essere approssimato come:

$$\underline{w}''_{vett,h,1} \quad |w''_{i,1} = (w'_{i+1,1} - w'_{i-1,1}) / (2\Delta) \quad per \quad i \in [2, h-1]$$

$$w''_{1,1} = (w'_{2,1} - w'_{1,1}) / \Delta \quad ; \quad w''_{h,1} = (w'_{h-1,1} - w'_{h,1}) / \Delta$$

Mentre, per quanto riguarda la funzione dell'energia plastica si può procedere con la regola dei trapezi:

$$w_{vett_hx1} \quad | w_{0,1} = 0; \quad w_{i,1} = w_{i,1} + [(w'_{i,1} + w'_{i+1,1})\Delta / 2]$$

Questo metodo può risultare utile solo in prima approssimazione se sono impostate condizioni al contorno di tipo "hard", mentre risulta esatto nel caso in cui le stesse siano di tipo "soft". Per le condizioni di tipo "hard" si possono andare ad applicare le conclusioni del cap. 3:

$$\bar{\gamma} = \frac{(\sigma - \sigma_{el})}{lw''} \int_0^l 1 - \frac{\cosh[k(\frac{l}{2} - x)]}{\cosh(\frac{kl}{2})} dx = \frac{(\sigma - \sigma_{el})}{w''} \left(1 - \frac{2 \tanh(kl/2)}{lk} \right)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} = E(u' - \bar{\gamma}) \rightarrow \bar{\gamma} = u' - (\sigma / E)$$

unendo:

$$u' - (\sigma / E) = \frac{(\sigma - \sigma_{el})}{w''} \left(1 - \frac{2 \tanh(kl/2)}{lk} \right) \rightarrow 1 - [u' - (\sigma / E)] \frac{w''}{\sigma - \sigma_{el}} = \frac{2 \tanh(kl/2)}{lk} = f(A, w'')$$

In questo caso, tuttavia, appare anche il contributo del termine non locale. Si ha, dunque la necessità di fissare un dato aggiuntivo, oppure di inserire una formula ausiliaria. Si potrebbe procedere, dunque, in due modi:

- 1- Fisso il coefficiente non locale, stimandolo a partire dalla fase di softening
- 2- Inserisco una prova a trazione aggiuntiva eseguita su provini di lunghezza diversa.

Si consiglia, tuttavia, di utilizzare (come fatto fino ad ora) la prima opzione. Così facendo si ottiene il vettore che rappresenta la derivata seconda dell'energia plastica, mentre la derivata prima e la funzione stessa potranno esser dedotte con la regola dei trapezi.

Per quanto riguarda il softening, va ricordato:

$$w'' = \frac{\frac{\hat{l}}{l} m_s}{1 - \frac{m_s}{E}} \quad \text{in cui} \quad m_s = \frac{\dot{\sigma}_t}{\dot{u}_t'} = \frac{d\sigma_t}{d\cancel{t}} \frac{\cancel{dt}}{d(u_t')} = \frac{d\sigma_t}{d(u_t')}$$

$$\text{C.C. HARD: } \rightarrow \quad A = \frac{|w''|}{4\pi^2}$$

$$\text{C.C. SOFT: } \rightarrow \quad A = \frac{|w''|}{\pi^2}$$

Mantenendo, dunque, costante la lunghezza di fessurazione (misurata sul provino) e ricalcolando volta volta il coefficiente angolare locale del ramo di softening, avremo i vettori che restituiscono sia il coefficiente del termine non locale, sia la derivata seconda dell'energia plastica. Resta dunque da stimare la deformazione plastica associata a questi due valori. Sia in condizioni al contorno hard, che soft, si ha:

$$\dot{\gamma}_i = \begin{cases} \frac{\dot{\sigma}_i}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases}$$

Integrando nel tempo, si ha che, tra lo step "i-1" e lo step "i" si ha:

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} = \begin{cases} \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{w''} (1 - \cos(kx)) & 0 \leq x \leq \hat{l} \\ 0 & x > \hat{l} \end{cases}$$

Si sceglie di associare le caratteristiche calcolate allo step "i" al valore di plasticità cumulata massima, ovvero:

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{w_i''} + \gamma_{i-1}$$

Con questi dati si può andare a costruire una serie di successioni che potranno poi essere interpolate.

5.3.3. Cubica

Viene presentata nell'articolo [2] una forma cubica dell'energia. Le funzioni che la rappresentano sono esposte di seguito in forma grafica (fig. 5.5):

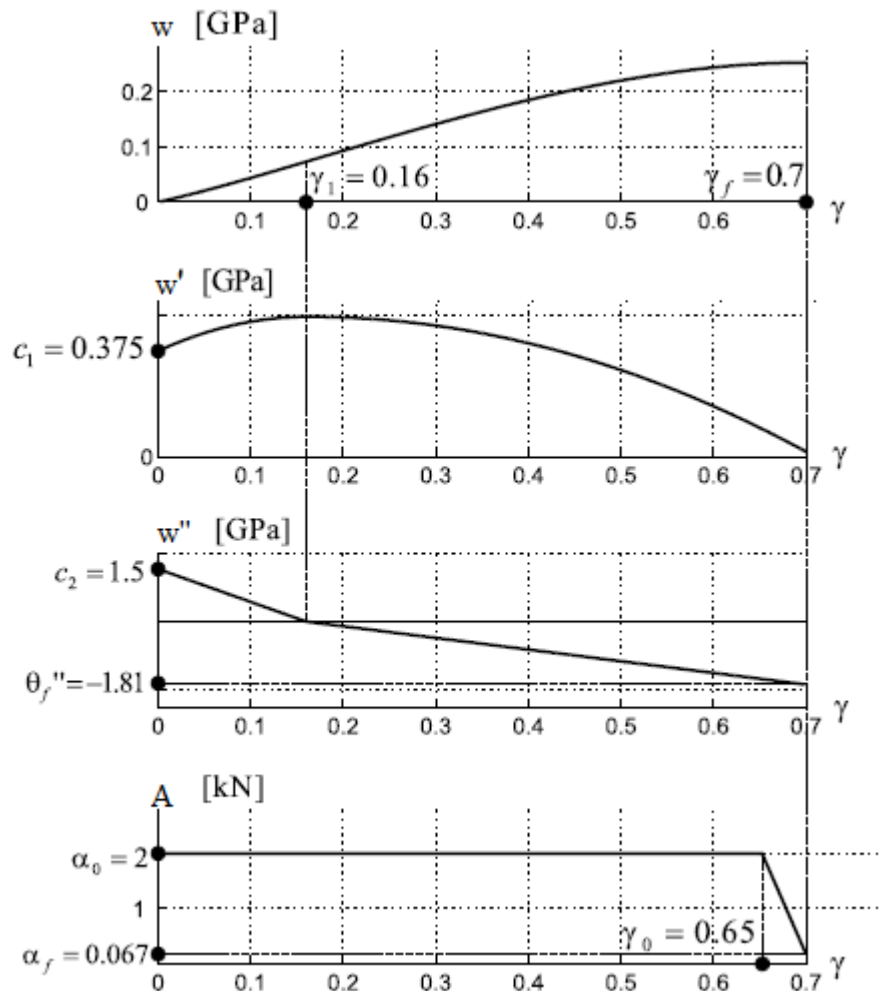


FIGURA 5.6 FORMA CUBICA, GRAFICI w, w', w'' E A

Questa forma di energia può esser usata per riprodurre anche la parte di iniziale sforzo costante nel ramo incrudente degli acciai, tramite forme simili alla seguente (fig. 5.6):

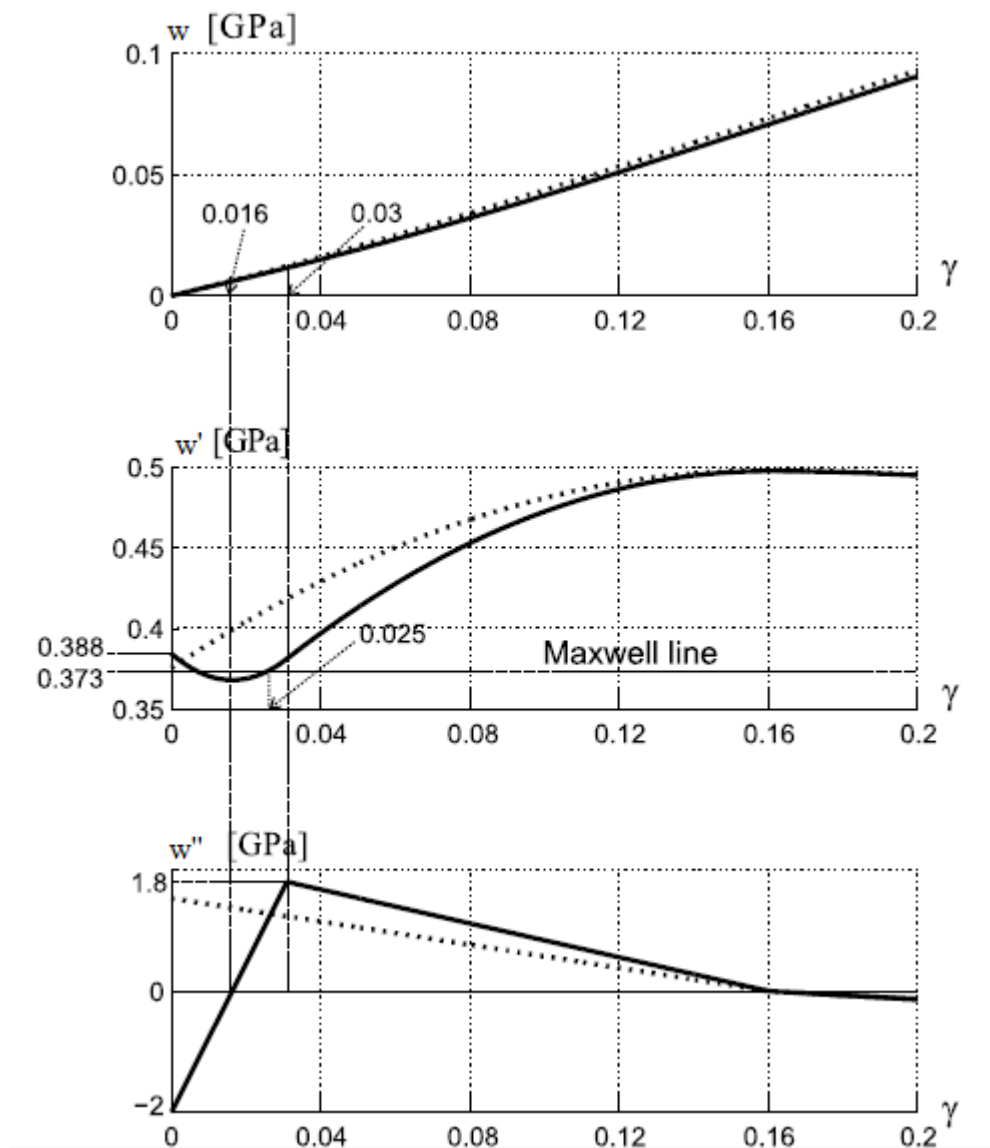


FIGURA 5.7 CUBICA, GRAFICI DI w, w', w'' E A , PIANEROTTOLO INIZIALE DEGLI ACCIAI

5.3.4. Arcotangente

Si propone, in questo sotto capitolo la funzione:

$$w'' = c \arctan(b(p_0 - p))$$

Da cui si ricavano, integrando:

$$w' = (p - p_0)w'' + \frac{c}{2b} \log \left(1 + pb^2 \frac{p - 2p_0}{1 + b^2 p_0^2} \right) + cp_0 [\arctan(bp_0)] + \sigma_e$$

$$w = (p - p_0)w' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + (p_0 - p)^2 \right) w'' - \frac{cp}{2b} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{b^2} + p_0^2 \right) \arctan(bp_0) + p_0 \sigma_e$$

Considerando ora il cambio di variabili:

$$d = \varepsilon + p \rightarrow p = d - \varepsilon$$

(si ricorda, inoltre: $\sigma = w' - \alpha p''$)

Si calcola:

$$\frac{d\sigma}{d(d)} = c \frac{d}{d(d)} [(d - \varepsilon - p_0) \arctan(b(p_0 - d + \varepsilon)) + \frac{1}{2b} \log \left(\frac{1 + b^2(p_0 - d + \varepsilon)^2}{1 + b^2 p_0^2} \right) + p_0 \arctan(bp_0) + \frac{\sigma_e}{c} - \frac{\alpha}{c} p'']$$

$$\frac{d\sigma}{d(d)} = c \left(\arctan(b(p_0 - d + \varepsilon)) + \frac{-b(d - \varepsilon - p_0)}{1 + b^2(p_0 - d + \varepsilon)^2} + \frac{1}{2b} \frac{1 + b^2 p_0^2}{1 + b^2(p_0 - d + \varepsilon)^2} \frac{-2b^2(p_0 - d + \varepsilon)}{1 + b^2 p_0^2} \right) - \alpha \frac{dp''}{d(d)}$$

$$\frac{d\sigma}{d(d)} = c \left(\arctan(b(p_0 - p)) + \frac{-b(p - p_0)}{1 + b^2(p_0 - p)^2} + \frac{1}{2b} \frac{-2b^2(p_0 - p)}{1 + b^2(p_0 - p)^2} \right) - \alpha \frac{dp''}{d(d)}$$

$$\frac{d\sigma}{d(d)} = c \left(\arctan(b(p_0 - p)) + \frac{-b(p - p_0)}{1 + b^2(p_0 - p)^2} + \frac{b(p - p_0)}{1 + b^2(p_0 - p)^2} \right) - \alpha \frac{dp''}{d(d)}$$

$$\frac{d\sigma}{d(d)} = w'' - \alpha \frac{dp''}{d(d)}$$

Per poi definire:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d(d)} = E_1 = c \arctan(bp_0) \rightarrow c = \frac{E_1}{\arctan(bp_0)} \rightarrow bp_0 = \tan \left(\frac{E_1}{c} \right)$$

In cui E_1 è ricavabile dalla curva sforzo-deformazione come arcotangente della pendenza della retta, tangente alla curva stessa sul limite elastico. Da ciò si può riscrivere:

$$w'' = c \arctan[\tan(E_1/c)(1 - (p/p_0))]$$

$$w' = (p - p_0)w'' + \frac{cp_0}{2 \tan(E_1/c)} \log\left(1 + \frac{p \tan^2(E_1/c)}{p_0^2} \frac{p - 2p_0}{1 + \tan^2(E_1/c)}\right) + p_0 E_1 + \sigma_e$$

$$w = (p - p_0)w' + p_0 \sigma_e - \frac{cpp_0}{2 \tan(E_1/c)} - \frac{1}{2} \left(\frac{p_0^2}{\sin^2(E_1/c)} - 2pp_0 + p^2 \right) w'' + \frac{E_1 p_0^2}{2 \sin^2(E_1/c)}$$

Se si considera il seguente set di dati:

c=	1000	Mpa
E ₁ =	1300	MPa
p ₀ =	0,0035	-
σ _{e1} =	10	MPa

Le funzioni sovraesposte hanno i seguenti profili (fig. 5.7):

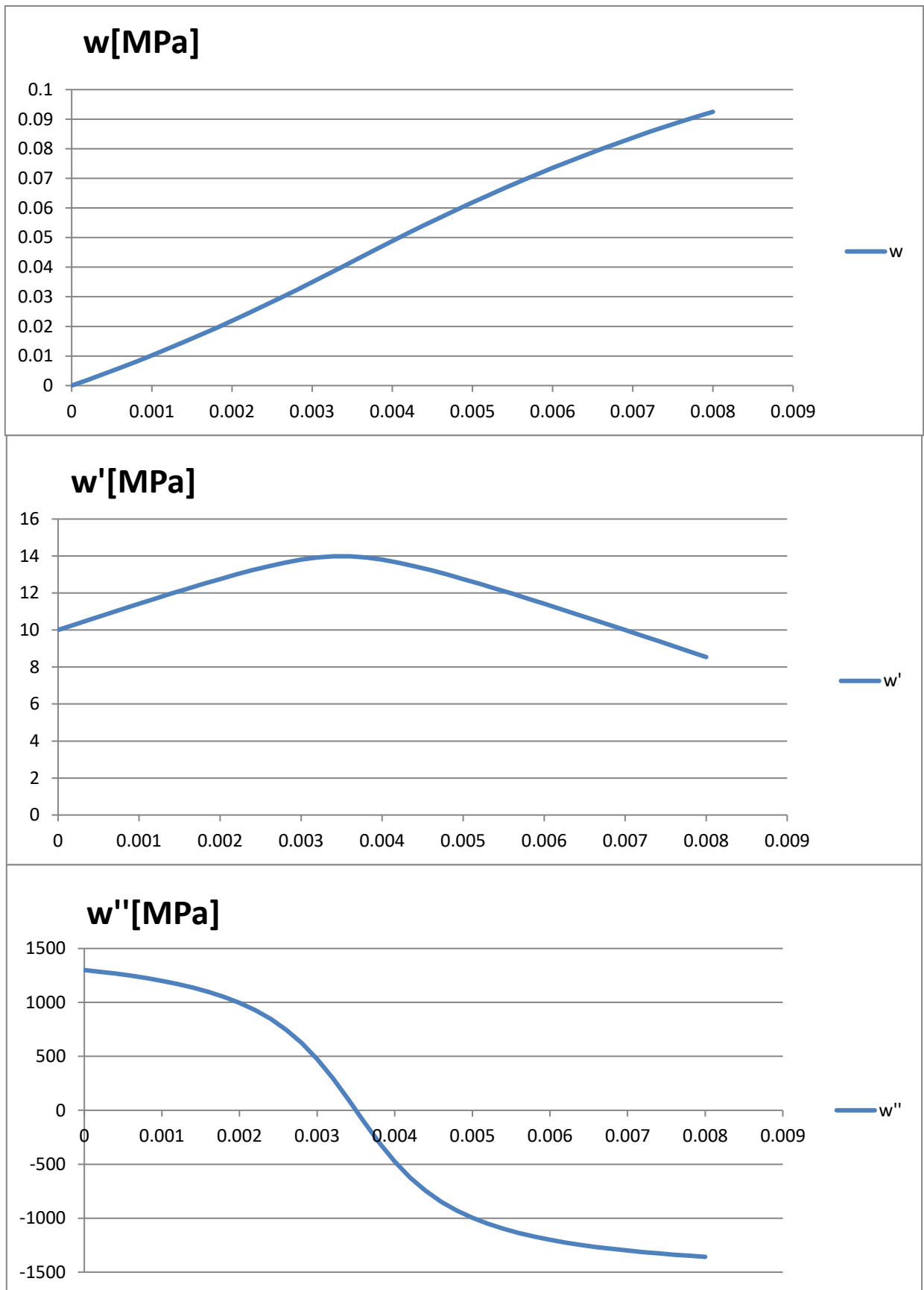


FIGURA 5.8 ARCOTANGENTE, GRAGICI w, w', w''

Il risultato delle simulazioni 1-D con l'applicazione di questa forma è il seguente (fig. 5.8 e 5.9):

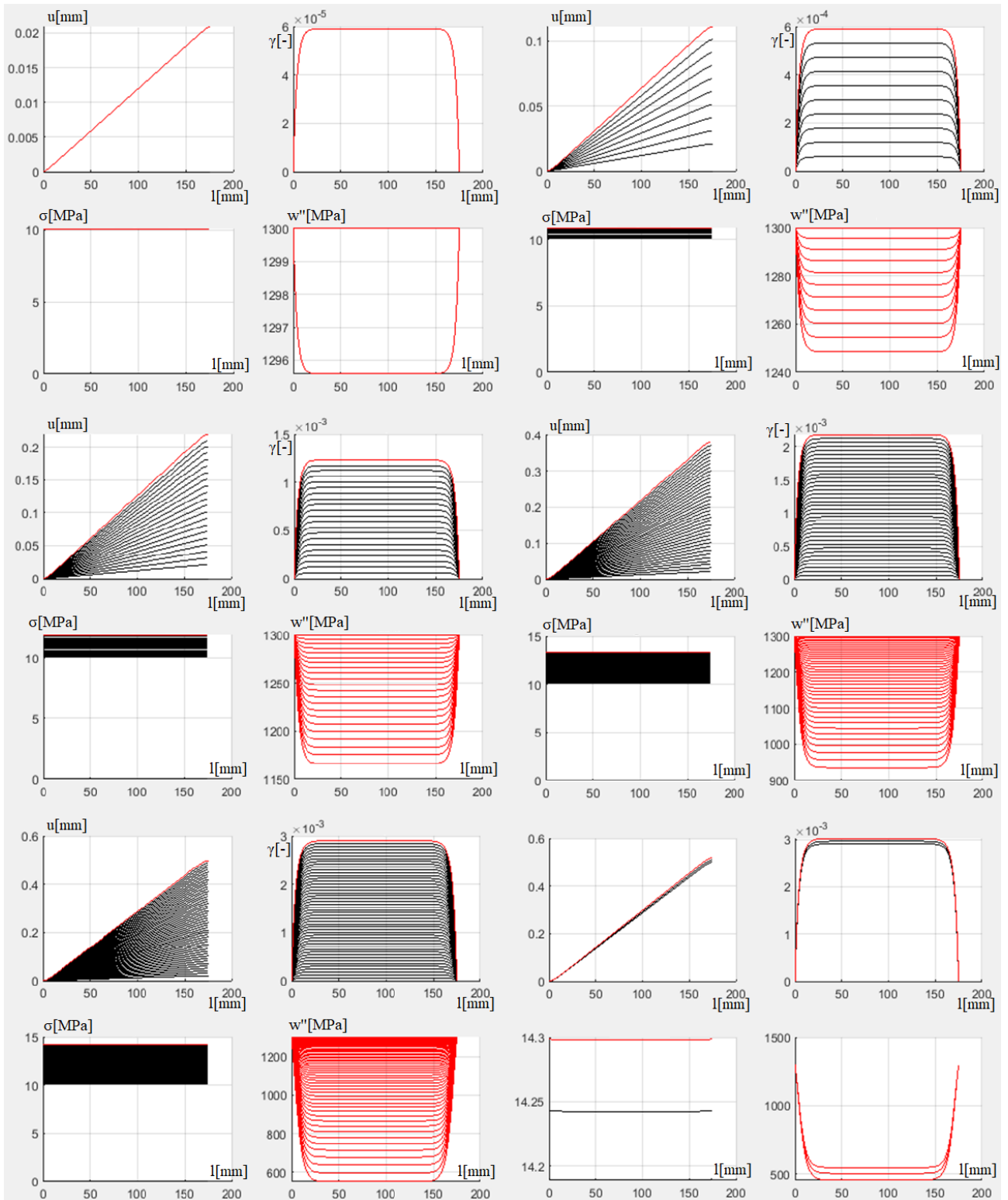


FIGURA 5.9 STEP ARCOTANGENTE AI TEMPI: $T=0,02$; $T=0,11$; $T=0,21$; $T=0,38$; $T=0,5$; $T=0,52$

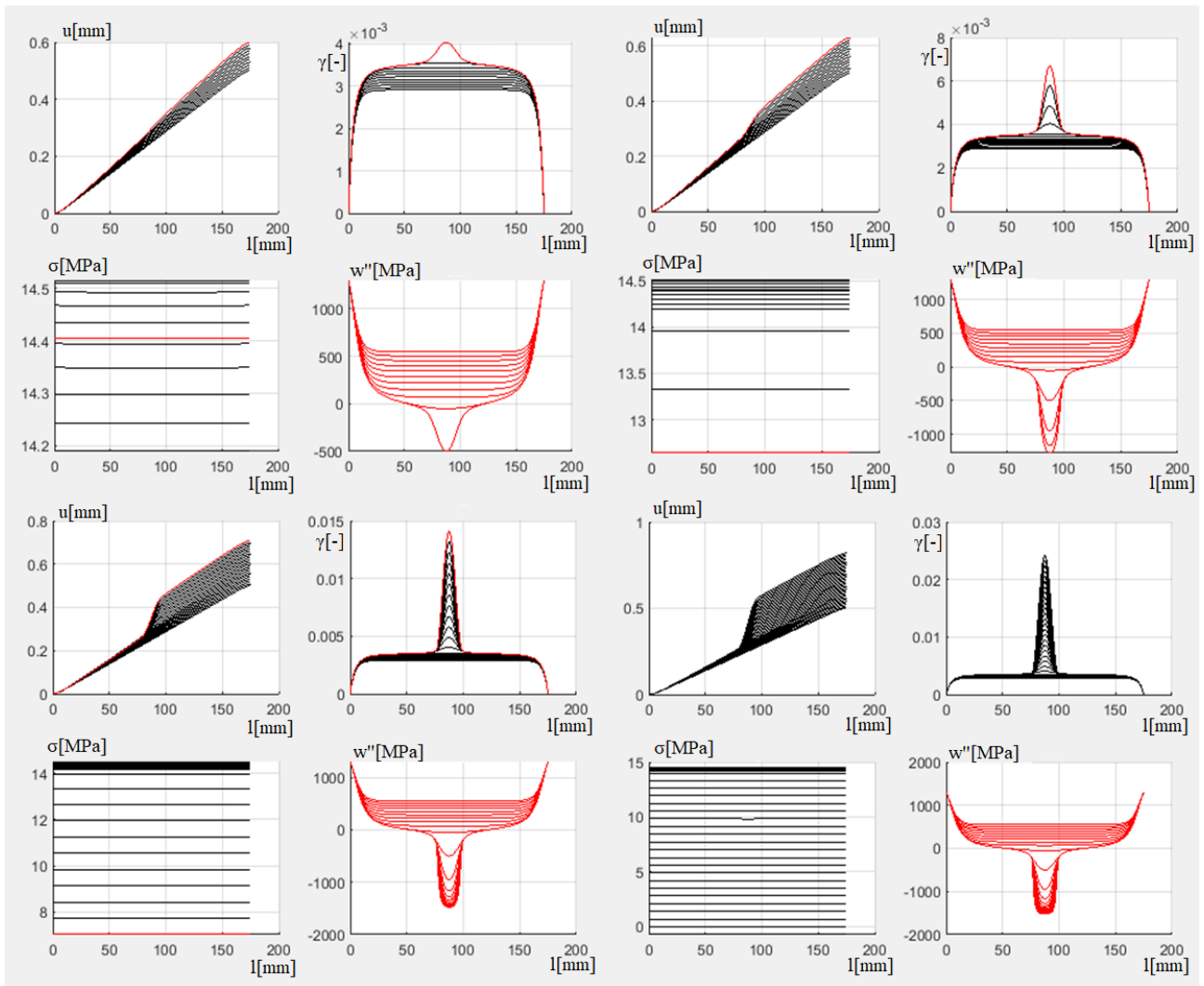


FIGURA 5.10 STEP ARCOTANGENTE AI TEMPI: $T=0,6$; $T=0,63$; $T=0,71$; $T=0,82$

Si riporta, infine, la curva sforzo-deformazione (fig. 5.10):

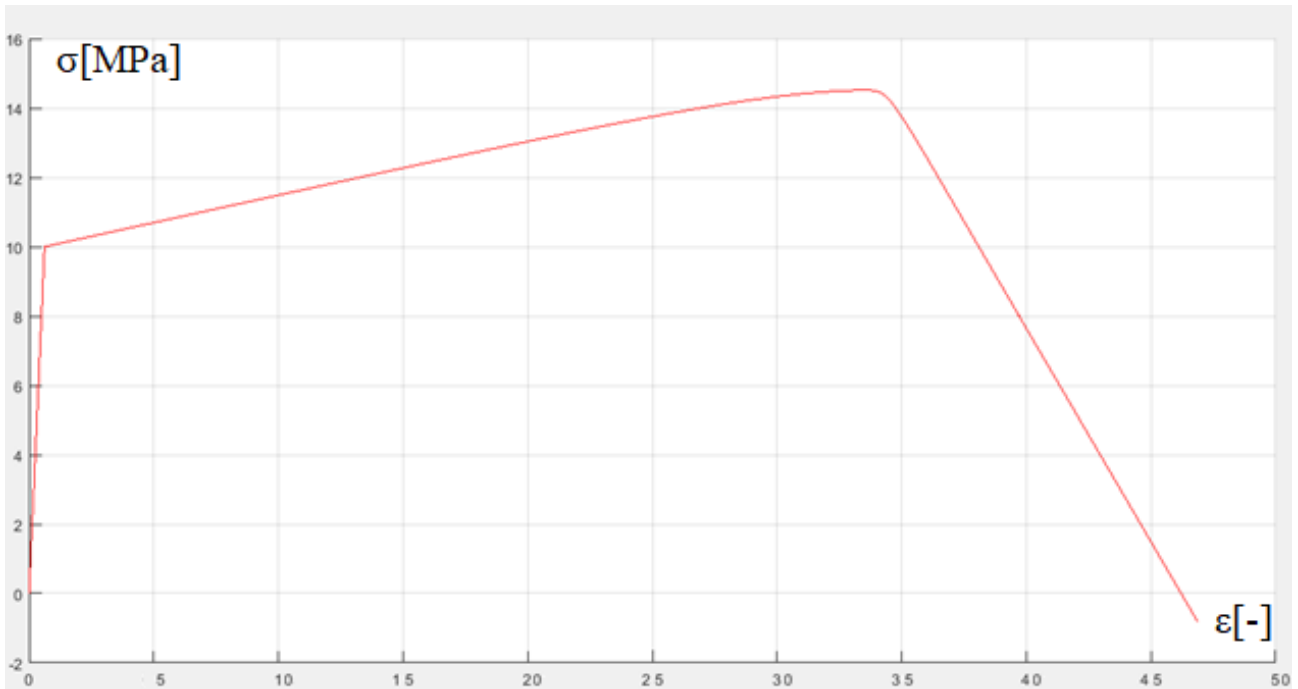


FIGURA 5.11 ARCOTANGENTE - CURVA SFORZO DEFORMAZIONE

Si nota una grande variazione di pendenza tra hardening e softening. Per regolare i due rami in modo meno connesso, sarò possibile usare due funzioni diverse con opportune condizioni di raccordo, oppure una funzione dalla seguente forma:

$$w'' = c \arctan(\varphi - bp) + d$$

$$w' = \left(p - \frac{\varphi}{b}\right)w'' + \frac{c}{2b} \log\left(1 + pb \frac{pb - 2\varphi}{1 + \varphi^2}\right) + c \frac{\varphi}{b} [\arctan(\varphi)] + \frac{\varphi d}{b} + \sigma_e$$

$$w = \left(p - \frac{\varphi}{b}\right)w' - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \left(\frac{\varphi}{b} - p\right)^2\right)w'' - \frac{c p}{2b} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\varphi^2}{b^2}\right) \arctan(\varphi) + \frac{d}{2b^2} (1 + \varphi^2) + \frac{\varphi}{b} \sigma_e$$

6 BIBLIOGRAFIA

- [1] “The Mechanics and Thermodynamics of Continua” di Morton E. Gurtin, Eliot Freid, Lallit Anand del 2010
- [2] “Modeling the Response of Tensile Steel Bars by Means of Incremental Energy Minimization” di Giovanni Lancioni del 15-02-2015
- [3] “Tensile behavior of Ultra High Performance HybridFiberReinforced Concrete” di S. H. Park, D. J. Kim et al del 2012
- [4] “Straingradientplasticitymodeling and finite elementsimulation of Lüders band formation and propagation” di Matthieu Mazière e Samuel Forest del 29-12-2013
- [5] “Variationalmodelling of diffused and localizeddamagewith applications to fiber-reinforcedconcretes” di Giovanni Lancioni e Valeria Corinaldesi del 20 giugno 2017
- [6] “Coupling damage and plasticity for a phase-field regularisation of brittle, cohesive and ductile fracture: One-dimensional examples” di Roberto Alessi, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini e Stefano Vidolini del 15-06-2017