



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE  
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

---

Corso di laurea specialistica in Banche e Mercati

PROBLEMI DI GESTIONE ATTIVA DI  
PORTAFOGLIO  
PROBLEMS OF ACTIVE PORTFOLIO  
MANAGEMENT

Relatore: Chiar.mo  
Prof. Giulio Palomba

Tesi di laurea di:  
Cristian Ferretti

Correlatore: Chiar.mo  
Prof. Riccardo Lucchetti

**Anno accademico 2020/21**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>La Teoria del Portafoglio e la Gestione Attiva</b>	<b>13</b>
2.1	Il modello di Markowitz . . . . .	13
2.1.1	Frontiera Media-Varianza . . . . .	13
2.1.2	Frontiera con un titolo Risk-free . . . . .	20
2.2	Le critiche al modello Media-Varianza . . . . .	22
2.3	Gestione Attiva . . . . .	24
2.3.1	Misure di Performance e di Rischio . . . . .	24
2.3.2	Misure Asimmetriche di rischio . . . . .	27
2.3.3	La Mean-TEV Frontier . . . . .	28
2.3.4	L'emergere del Problema di Agenzia . . . . .	31
<b>3</b>	<b>La riduzione dell'Efficiency Loss</b>	<b>35</b>
3.1	La frontiera con vincolo sul $\beta_{p b}$ . . . . .	35
3.2	La frontiera con vincolo di TEV costante . . . . .	39
3.2.1	Frontiera con TEV costante . . . . .	39
3.2.2	Strategie di investimento nella CTF . . . . .	43

3.2.3	Vincoli sulle quantità nella CTF . . . . .	48
3.3	Constrained Mean-Tracking Error Variance Frontier . . . . .	51
3.3.1	Vincoli su TEV e VaR . . . . .	51
3.3.2	Una misura per l'efficacia del vincolo sul VaR . . . . .	59
3.4	Frontiera Alpha-TEV . . . . .	61
3.5	Una visione di insieme . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Dialettica tra Sponsor e Manager</b>	<b>69</b>
4.1	La Fixed VaR-TEV Frontier . . . . .	69
4.1.1	Intersezione tra CMTF e CTF . . . . .	69
4.1.2	La Fixed VaR-TEV Frontier . . . . .	71
4.2	La Risk Balancing Frontier . . . . .	76
4.2.1	Sototoinsiemi della RBF . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Analisi Empirica</b>	<b>85</b>
5.1	Applicazione empirica della RBF . . . . .	85
5.2	Un'analisi per dati trimestrali . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>111</b>
	Bibliografia . . . . .	113

# Elenco delle figure

2.1	MVF	19
2.2	MVF e MTF messe a confronto	32
3.1	MVF, MTF e CTF nello stesso piano	40
3.2	Sharpe Ratio e $M^2$ Risk-Adjusted Performance per i portafogli ottenuti	46
3.3	Information Ratio per i portafogli ottenuti	47
3.4	Frontiera con vincolo sul VaR nel caso di rendimenti normalmente distribuiti	52
3.5	Rappresentazione grafica di CVF e CMTF con livello di confidenza alto	57
3.6	Relazione Grafica tra le diverse frontiere di Portafoglio concernenti la TEV	65
3.7	Rappresentazione vincolo su VaR e CVaR	66
4.1	Rappresentazione grafica degli scenari con vincoli non compatibili	73
4.2	Rappresentazione grafica degli scenari della FVTF	75

4.3	<b>Risk Balancing Frontier</b> . . . . .	79
4.4	<b>Sottoinsiemi della RBF</b> . . . . .	81
4.5	<b>Relazione tra le diverse quantità nella RBF</b> . . . . .	83
5.1	<b>Rendimenti dei titoli contenuti nell'Euro Stoxx dall'01/01/2018 al 05/02/2022</b> . . . . .	87
5.2	<b>Rappresentazione grafica delle diverse frontiere</b> . . . . .	88
5.3	<b>Rappresentazione grafica della RBF</b> . . . . .	90
5.4	<b>Rendimenti giornalieri Euro Stoxx dall'01/01/2018 al 05/02/2022</b> . . . . .	93
5.5	<b>RBF nel trimestre Aprile-Luglio 2020</b> . . . . .	103
5.6	<b>Portafogli M e Z prima e dopo la pandemia</b> . . . . .	105
5.7	<b>Distribuzione dei valori per il VaR che rendono tangenti CTF e CVF con <math>\bar{T}=1\%</math></b> . . . . .	106
5.8	<b>Serie dei valori per il VaR che rendono tangenti CTF e CVF con <math>\bar{T}=1\%</math></b> . . . . .	107
5.9	<b>Distribuzione dei valori della TEV nel periodo</b> . . . . .	108
5.10	<b>Serie dei valori per la TEV che rendono tangenti CTF e CVF con <math>Va\bar{R}=1,7540\%</math></b> . . . . .	109

# Capitolo 1

## Introduzione

Il termine *Gestione di Portafoglio* indica un insieme articolato di procedimenti che possono essere raggruppati in tre diverse categorie:

- *Asset Allocation* e cioè la suddivisione della ricchezza da allocare tra le diverse possibili asset class;
- *Stock Picking* che rappresenta la selezione delle singole attività a livello più specifico, secondo le esigenze e le modalità stabilite dal management;
- *Market Timing* e cioè la scelta del momento migliore per acquistare o vendere una determinata attività,

Una distinzione fondamentale in quest'ambito è quella tra gestione attiva e passiva. Solitamente tale distinzione viene adoperata quando si fa riferimento ai fondi di investimento e per capire la differenza tra le due è necessario introdurre il concetto di "benchmark".

Per benchmark si intende solitamente un paniere di attività finanziarie preso come riferimento rispetto ad un determinato settore geografico, industriale o ad un particolare sottoinsieme di società. Spesso vengono utilizzati come benchmark indici di mercato preesistenti come ad esempio lo S&P 500. Le quantità di attività inserite in questi panieri devono però essere ponderate secondo modalità che ne consentano la replicabilità o comunque la facile confrontabilità. Per questo motivo, parlando di indici, i panieri calcolati tramite metodi *price weighted*, che ponderano cioè le quantità di asset al loro interno mediante i prezzi, non possono essere utilizzati come benchmark non essendo facilmente replicabili (ne é un esempio il Dow Jones). L'attenzione alla replicabilità deriva proprio dalla distinzione tra gestione attiva e passiva. Nel caso della gestione passiva infatti, verranno semplicemente replicate le quote del benchmark tentando di riprodurne l'andamento tramite strumenti finanziari appositamente creati come gli *Exchange Traded Funds*. La gestione attiva invece, considera il fondo selezionato come un vero e proprio obiettivo, un benchmark, da superare in termini di performance con le proprie scelte di gestione.

La scelta tra queste due modalità viene di solito compiuta sulla base delle convinzioni del manager circa l'efficienza del mercato di riferimento (si veda Fama (1979)), dove con *efficienza del mercato* si intende la capacità dello stesso di incorporare le informazioni rilevanti nei prezzi e la velocità con cui questo processo avviene. Gli agenti convinti che il mercato abbia una forte efficienza, e che quindi sia in grado di scontare pressoché immediatamente le nuove informazioni, ritengono inutile la gestione attiva poiché, secondo la loro vi-



sione, non è possibile battere sistematicamente il benchmark. Questi soggetti di conseguenza si sposteranno pertanto verso quella passiva. Dall'altro lato, gli agenti che ritengono non vi sia ancora un grado sufficiente di efficienza nel mercato tenderanno invece di sfruttare l'informazione in loro possesso mediante la gestione attiva.

Il ricorso all'una o all'altra forma di gestione nel mercato ha un andamento ciclico<sup>1</sup> e numerosi sono stati i contributi nella letteratura che hanno tentato di dare una spiegazione a questa ciclicità. Come sottolineato in Van Vuuren ed Evans (2019), fino a pochi anni fa le forme di gestione passiva avevano preso il sopravvento, nella convinzione che ormai il mercato avesse raggiunto un livello di efficienza tale che, al netto dei costi di gestione, i fondi attivi non fossero in grado di battere sistematicamente il benchmark. Lambridis (2017), tuttavia, fa notare come tale percezione derivi dal fatto che molte di queste ricerche sono state condotte per lo più con dati relativi ai mercati di paesi avanzati, come quello americano. Tale scelta, seppur dettata da motivazioni razionali (come l'abbondanza e l'affidabilità di dati), non permette di considerare l'andamento dei paesi con economie emergenti, come ad esempio il Sud Africa. In questi paesi vi sono notevoli differenze col mercato americano, tra le quali le modalità di tassazione che impattano fortemente sui risultati finali, negando ai fondi passivi i vantaggi fiscali di cui godono negli USA. Altri lavori, tra i quali quelli di Torr (2018) e Cairns (2018) hanno invece evidenziato come numerosi indici attualmente esistenti tendano a concentrarsi sempre più su pochi titoli a

---

<sup>1</sup><https://www.nasdaq.com/articles/active-funds-are-dominating-2021-etf-launches-2021-07-14>

grandissima capitalizzazione, andando a rendere elevata l'esposizione al rischio su di essi anche negli strumenti di gestione passiva. Questo rende i portafogli costruiti come repliche di tali indici, altamente inefficienti da un punto di vista della diversificazione.

Il dibattito tra i sostenitori delle due forme di gestione è ancora acceso nella letteratura e fornisce anche numerosi spunti riguardanti le motivazioni del ritorno in auge della gestione attiva<sup>2</sup>. La letteratura, tuttavia, evidenzia anche numerose criticità connesse proprio a quest'ultima, tra le quali, una delle più trattate riguarda l'emergere di *problematiche di agenzia* tra il manager (*agente*) e gli sponsor (*principale*) del fondo. Le figure all'interno di un rapporto di gestione attiva di portafoglio, infatti, hanno degli interessi non sempre coincidenti. Da un lato, lo sponsor, che è il soggetto che riunisce gli aderenti al fondo, è interessato alla performance del portafoglio in termini di rendimento e rischio. Il manager, invece, è colui che si occupa materialmente delle scelte in termini di costruzione del portafoglio, e solitamente è interessato ad ottenere le migliori performance possibili in termini delle metriche di valutazione cui la sua prestazione, nonché il suo compenso, è sottoposta. Le logiche con cui questi due soggetti valutano un portafoglio quindi possono spesso divergere, quantomeno nell'orizzonte temporale. L'ottica degli sponsor è infatti più diretta al medio-lungo termine, mentre quella dei manager è di più breve periodo.

Queste divergenze possono portare verso conseguenze indesiderate per gli sponsor. Questo lavoro si concentra sulle tematiche legate ai *problemi di agen-*

---

<sup>2</sup><https://www.morganstanley.com/ideas/investment-strategies-passive-investing-2022>

*zia*, fornendo una panoramica della letteratura relativa ad essi e andando ad analizzare strumenti innovativi per tentare di mitigarli. In particolare ci si concentra su eventuali problemi derivanti da metriche di valutazione per i manager che non consentano di tenere d'occhio il livello di rischio da questi generato nella costruzione del portafoglio. La necessità di una tale analisi si avverte anche in relazione al particolare momento storico e alle conseguenze relative alla pandemia da COVID-19. Come descritto in Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022), il sistema di stimoli fiscali e monetari, la crescita dei tassi di inflazione e i sussidi spesso diretti a categorie di attività meno rappresentate nella gestione passiva, determineranno molto probabilmente un aumento del ricorso a quella attiva. Proprio in quest'ottica è ancora più necessario considerare alcuni nuovi strumenti per analizzare e mitigare tali problemi di agenzia.

La struttura di questo elaborato è la seguente: nel capitolo 2 si introduce il modello Media-Varianza di Markowitz, gli indicatori che verranno utilizzati nel corso del testo e la definizione del problema di agenzia nei modelli di portafoglio per la gestione attiva. Nel capitolo 3 viene svolta un'analisi della letteratura esistente circa gli strumenti atti a ridurre la portata del conflitto di interessi e la perdita di efficienza che ne deriva. Nel capitolo 4 si fa una breve analisi dei modelli introdotti in Palomba e Riccetti (2012) e Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022) i quali si differenziano dai precedenti per un approccio al problema di agenzia che vira verso l'apposizione congiunta di vincoli inerenti agli interessi di sponsor e management. Nel capitolo 5 viene svolta un'applicazione empirica e il capitolo 6 conclude.



## Capitolo 2

# La Teoria del Portafoglio e la Gestione Attiva

### 2.1 Il modello di Markowitz

#### 2.1.1 Frontiera Media-Varianza

Nel cercare di fornire alcune nozioni utili a comprendere le problematiche della gestione attiva di portafoglio, è necessario partire da quello che è considerato l'approccio pionieristico nel campo della moderna teoria del portafoglio contenuto nel paper del Premio Nobel per l'economia Henry Markowitz (1952). Nonostante questo modello non preveda necessariamente una distinzione tra gestione attiva e passiva, esso getta le basi per le analisi successive, definendo numerose quantità e metodologie utili. L'importanza del modello di Markowitz è dimostrata dal fatto che spesso viene utilizzato come una sorta di *best-practice* contro cui le diverse modalità di costruzione di portafoglio devono misurarsi.

Il lavoro di Markowitz prevede innanzitutto l'assegnazione di due misure particolari al rischio e al rendimento di un portafoglio, date rispettivamente dalla varianza e dal valore atteso dei rendimenti dello stesso. Le due quantità saranno indicate rispettivamente con  $\sigma^2$  e  $\mu$ . In questo modo è possibile rappresentare i singoli portafogli nel piano cartesiano  $(\sigma^2, \mu)$ . In particolare, in questo tipo di rappresentazione si adatta la seguente regola per stabilire la preferibilità di un portafoglio rispetto ad un altro:

$$\begin{cases} \mu_1 \geq \mu_2 \\ \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \end{cases}$$

dove  $\mu_1 = E(R_1)$  e  $\mu_2 = E(R_2)$  sono i rendimenti attesi di due generici portafogli, mentre  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  sono le rispettive varianze. In questo modo si sta assumendo che il rendimento del titolo sia una variabile casuale, indicata con  $R$ , i cui valori per un dato periodo vengono spesso calcolati attraverso l'approssimazione  $R_t \approx \ln P_t - \ln P_{t-1}$ , dove  $P_t$  e  $P_{t-1}$  sono i prezzi dell'attività in periodi successivi tra loro. La stima dei momenti della variabile  $R$  viene di solito effettuata tramite l'utilizzo di dati in serie storica. Da qui, il modello va a declinare il criterio Media-Varianza sui rendimenti del portafoglio, cercando di massimizzare l'utilità dell'investitore che è una funzione crescente rispetto al rendimento atteso e decrescente rispetto alla varianza. Markowitz stabilisce una serie di assunzioni riguardanti i mercati e il loro funzionamento su cui fondare il proprio modello:

- investimenti di durata uniperiodale;

- assenza di imposte e di costi di transazione;
- perfetta competitività nei mercati;
- distribuzione dei rendimenti appartenente alla classe delle ellittiche; solitamente si associa una distribuzione normale al singolo rendimento,
- possibilità di effettuare vendite allo scoperto;
- l'individuo ha uno stock di ricchezza  $W$  da allocare.

Queste assunzioni sono necessarie a rendere il modello il più generale possibile. L'ipotesi di rendimenti normali, inoltre, fa sì che siano sufficienti informazioni su media e varianza per descrivere l'intera distribuzione degli stessi. In altre parole, vengono momentaneamente trascurate le caratteristiche di asimmetria e curtosi tipiche delle distribuzioni dei rendimenti finanziari, per le quali sarebbero potuti essere necessari ulteriori indicatori di rischio basati su momenti di ordine superiore al secondo.

Nel definire la media e la varianza del rendimento di un portafoglio, è necessario ricordare che esso è composto da un insieme di attività finanziarie. Nel modello la quota relativa al singolo asset all'interno di un portafoglio si indica con  $q_i$  mentre  $\mathbf{q}$  indica il vettore di tali pesi.

Dati  $n$  asset rischiosi, il modello di Markowitz prevede che la ricchezza  $W$  venga completamente allocata, ovvero impone il vincolo:

$$\mathbf{q}'\boldsymbol{\iota} = 1 \tag{2.1}$$

con  $\boldsymbol{\iota}$  vettore somma, composto da  $n$  valori unitari. A questo punto sarà

possibile indicare il rendimento del portafoglio come:

$$\mathbf{q}'\boldsymbol{\mu} = \mu_p \quad (2.2)$$

con  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{R})$  vettore dei rendimenti attesi dei singoli titoli. Il rendimento atteso di portafoglio, quindi, altro non è che una somma ponderata dei valori attesi dei rendimenti dei singoli titoli. La varianza di portafoglio verrà invece calcolata utilizzando la forma quadratica

$$\sigma_p^2 = \mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{q}, \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{V} = E[(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{R} - \boldsymbol{\mu})']$  è la matrice varianza e covarianza dei rendimenti dei titoli. Markowitz vuole dimostrare come sia possibile ottenere un portafoglio il cui rischio sia minore della semplice somma dei rischi dei singoli titoli. Questo viene ottenuto tramite l'azione sul rischio non specifico dei titoli, quindi sulle loro covarianze, contenute in  $\mathbf{V}$ .

L'attenzione di Markowitz si concentra pertanto sul vettore dei pesi che diviene l'insieme delle variabili di scelta per il modello. La selezione ottimale delle quote delle diverse attività finanziarie passa per la definizione (a mezzo del metodo dell' $\epsilon$  - *constraint*) di un problema duale di programmazione matematica, che tenga conto dell'utilità dell'investitore. Vi sono pertanto due possibili modalità di procedere: massimizzare la funzione del rendimento data una certa quantità di rischio, oppure minimizzare la funzione del rischio data



una certa quantità di rendimento. In questo lavoro si sceglie di procedere con la seconda alternativa.

Utilizzando la formalizzazione in Stowe (2019), nella quale si impone un vincolo lineare generico, il problema di ottimo corrispondente può essere scritto come:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{q}} \sigma_p^2 = \mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{q} \\ s.t. \quad \mathbf{q}'\mathbf{E} = \mathbf{c} \end{cases}$$

Per risolvere in modo specifico il problema di Markowitz, la matrice  $\mathbf{E}$  sarà costituita dall'accostamento orizzontale del vettore dei rendimenti e dal vettore somma nel seguente modo  $\mathbf{E} = [\boldsymbol{\nu} \quad \boldsymbol{\mu}]$ . Il vettore dei vincoli invece è dato da  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mu}_p \end{bmatrix}$  dove  $\bar{\mu}_p$  è la quantità di rendimento vincolata per cui si sta cercando la varianza minima. Nel modello potrebbe essere considerato un ulteriore vincolo del tipo  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$  che rappresenta il divieto di vendite allo scoperto, una restrizione spesso imposta a molti gestori di fondi. Il vincolo di non negatività viene qui rimosso così da poter ottenere una soluzione analitica della frontiera con  $n$  titoli. Il processo di individuazione della soluzione procede con la definizione della Lagrangiana:

$$L = \mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{q} - (\mathbf{q}'\mathbf{E} - \mathbf{c})\boldsymbol{\Lambda} \quad (2.4)$$

dove  $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$  è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange o dei *prezzi ombra*.

Differenziando l'espressione rispetto al valore  $\mathbf{q}$  si ottiene  $2\mathbf{V}\mathbf{q} - \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda} = 0$ , da cui si potrà estrarre  $\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}$ . Se si sostituisce  $\mathbf{q}$ , all'interno del vincolo si ottiene  $\mathbf{q}'\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{E}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{c}$ , da cui risulterà  $\boldsymbol{\Lambda} = 2(\mathbf{E}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{c}$ . Così

facendo si possono ottenere le quantità ottimali del vettore dei pesi, in funzione delle quantità iniziali

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E} (\mathbf{E}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E})^{-1} \mathbf{c}'. \quad (2.5)$$

Questo vettore rappresenta la soluzione del problema di ottimo in Markowitz (1952) e fornisce i pesi da assegnare nel portafoglio alle attività finanziarie disponibili per ottenere un dato livello di rendimento, col minor rischio associato possibile. Da qui è possibile calcolare la varianza semplicemente applicando la relazione  $\mathbf{q}' \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{c}' (\mathbf{E}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E})^{-1} \mathbf{c}'$  che, una volta esplicitata, diventa:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = \mathbf{q}' \mathbf{V} \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mu}_p \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mu}_p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\iota}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota} & \boldsymbol{\iota}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota} & \boldsymbol{\mu}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mu}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mu}_p \end{bmatrix} = \\ &= a + 2b\bar{\mu}_p + c\bar{\mu}_p^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

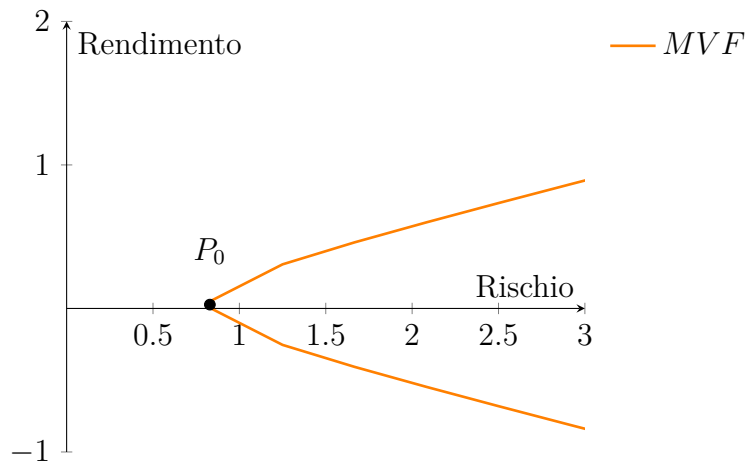
Le costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  all'interno dell'equazione (2.6) valgono rispettivamente<sup>1</sup>  $a = \boldsymbol{\iota}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota}$ ,  $b = \boldsymbol{\iota}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ ,  $c = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$  e  $d = c - b^2/a$ .

L'insieme dei portafogli costituiti mediante la soluzione dell'equazione (2.6) per ogni livello di  $\bar{\mu}_p$  prende il nome di frontiera *Media-Varianza* e da qui in

<sup>1</sup>si veda Palomba e Riccetti (2012).

avanti verrà indicata con l'acronimo MVF. La MVF rappresenta il luogo dei punti all'interno del quale i portafogli hanno varianza minima per ogni dato livello di rendimento. In particolare, la frontiera senza vincoli di non negatività ha la forma di una parabola nel piano  $(\sigma^2, \mu)$  e di un'iperbole, con asintoti di pendenza  $\pm\sqrt{d}$ , nel piano  $(\sigma, \mu)$ . L'iperbole è rappresentata nella Figura 2.1 e, se si richiede che le aspettative nel mercato siano omogenee circa rendimenti e varianze, la frontiera avrà le stesse caratteristiche per ogni agente che vi opera.

Figura 2.1: MVF



Il ramo crescente della curva nello spazio  $(\sigma, \mu)$  è quello *efficiente*, poiché è composto da portafogli "dominanti" per il criterio Media-Varianza. I portafogli nella parte inefficiente avranno invece le stesse varianze dei corrispondenti nel ramo efficiente, ma livelli di rendimento minori rispetto a questi ultimi. I portafogli efficienti e quelli inefficienti sono separati dal portafoglio a *varianza minima* il cui vettore dei pesi  $\mathbf{q}_0 = \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}_L}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}_L} = \frac{\mathbf{b}}{a}$  viene ottenuto non impo-

nendo vincoli al rendimento nel problema di ottimo. Così facendo, si ottiene il portafoglio con la varianza minore tra tutti quelli ottenibili dal processo di ottimizzazione. In questo lavoro il portafoglio viene indicato con  $P_0 = (\sigma_0, \mu_0)$ .

### 2.1.2 Frontiera con un titolo Risk-free

Esiste una versione del problema di Markowitz in cui vengono considerati anche titoli "*risk-free*", ovvero titoli che abbiano varianza nulla. Alcuni esempi di questi asset possono essere i Titoli di Stato considerati "più sicuri", con scadenze brevi e livelli elevati di rating (ad esempio AAA nelle scale di molte agenzie di rating). Nel piano  $(\sigma, \mu)$  i portafogli composti solo da questi titoli saranno collocati sull'asse delle ordinate e, solitamente, hanno un rendimento minore rispetto alle loro controparti rischiose. In questo caso la frontiera diverge dal modello con  $n$  titoli rischiosi perché, generalmente, la relazione ottenuta come soluzione del problema è una retta crescente. Lungo questa retta, vi saranno le combinazioni ottimali del titolo risk-free con quelli rischiosi e vi sarà pertanto un punto di tangenza con la frontiera Media-Varianza che è composta solo da quest'ultimi. Se, oltre alle aspettative omogenee, si richiede che il mercato considerato sia in equilibrio<sup>2</sup>, il punto di tangenza tra le due prende il nome di *portafoglio di mercato*. Il portafoglio *di mercato* viene chiamato così perché contiene tutti i titoli attualmente presenti nel mercato di riferimento.

La relazione lineare ottenuta come soluzione in presenza di un titolo risk-

---

<sup>2</sup>I titoli vengono tutti allocati correttamente grazie alla corrispondenza tra domanda e offerta.

free viene anche chiamata "*Capital Market Line*" e il suo coefficiente angolare corrisponde a  $\eta = \frac{\mu_m - \mu_f}{\sigma_m}$ , dove  $\mu_m$  e  $\sigma_m$  sono rendimento e deviazione standard del portafoglio di mercato mentre  $\mu_f$  è il rendimento dei titoli risk-free. Questo rapporto viene anche letto come il premio di mercato per il rischio. Nel coefficiente angolare della retta è possibile sostituire i parametri relativi al portafoglio di mercato con quelli di un portafoglio generico e in tal caso il rapporto prende il nome di *Sharpe Ratio* (da qui in avanti indicato con SR). Lo SR viene utilizzato proprio per ottenere informazioni circa rapporto tra extra-rendimento e rischio di un portafoglio. Il portafoglio che rende tangenti le due frontiere è proprio quello con lo Sharpe Ratio più elevato ed è definito dal vettore dei pesi  $\mathbf{q}_{tg} = \frac{1}{b} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ .

È importante notare come, sia nel caso di  $n$  titoli rischiosi che in presenza del titolo privo di rischio, è possibile derivare la frontiera efficiente anche in un altro modo. In Robert Merton (1972) l'autore mostra anche come sia sufficiente una combinazione lineare di due portafogli appartenenti alla MVF per descrivere un qualunque altro portafoglio nel set efficiente. Tale teorema prende il nome di *Two Funds Separation* o *Mutual fund separation theorem*. Nel caso con  $n$  titoli rischiosi, un esempio di come questo sia possibile viene riportato in Alexander e Baptista (2008) dove l'autore descrive i portafogli sulla MVF come

$$\mathbf{q}_p = (1 - C)\mathbf{q}_0 + C\mathbf{q}_{tg} \quad (2.7)$$

dove  $\mathbf{q}_0$  è il vettore dei pesi del portafoglio a varianza minima mentre  $\mathbf{q}_{tg}$  quello del portafoglio di tangenza tra la Capital Market Line e la MVF (da qui in poi indicato con *TG*). La quantità  $C$  dipende invece dal rendimento atteso

scelto come vincolo ( $\bar{\mu}_p$ ) ed è definita come  $C = \frac{\bar{\mu}_p - \mu_0}{\mu_{tg} - \mu_0}$  dove  $\mu_0$  e  $\mu_{tg}$  sono i rendimenti dei portafogli nella 2.7.

## 2.2 Le critiche al modello Media-Varianza

Numerose sono state le critiche mosse all'approccio di Markowitz appena analizzato; soprattutto circa le ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti e sulla scelta della variabile che identifica il rischio. La scelta più discussa è proprio quella che riguarda la varianza, misura per la quale viene attribuita una penalizzazione identica a scostamenti di segno opposto e di uguale grandezza dal valore atteso. Da qui la letteratura inizia a considerare possibili misure di rischio alternative da adoperare in modelli simili a quello di Markowitz. Artzner, Delbaen, Eber and Heath (1999) definiscono quelle che sono le caratteristiche che una misura di rischio deve avere per essere utilizzata come tale. In particolare, una misura di rischio qualunque indicata con  $\rho(\cdot)$  dovrà possedere le seguenti proprietà:

**Assioma 1** *Translation invariance*: in simboli  $\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$  dove la quantità  $X$  è una variabile casuale e  $\alpha$  e  $r$  sono costanti. Associando alla variabile casuale una quantità deterministica  $r$  nella proporzione  $\alpha$  la quantità di rischio misurata da  $\rho(\cdot)$  dovrà variare di un ammontare pari ad  $\alpha$  stesso;

**Assioma 2** *Subadditivity*: per due variabili casuali  $X_1$  e  $X_2$  deve valere  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ . Questo assioma in particolare va a tenere conto dell'effetto della diversificazione;

**Assioma 3** *Positive homogeneity*:  $\forall \lambda \geq 0$  varrà  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ . Questo assioma serve a garantire che il rischio si mantenga proporzionale all'esposizione;

**Assioma 4** *Monotonicity*: indicando due variabili casuali  $X$  e  $Y$  tali che  $X \leq Y$  varrà  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ . In questo caso si ribadisce che, qualora esistano due possibili scelte di investimento, tali che i rendimenti di una sono sempre superiori all'altra indipendentemente dall'andamento del mercato, la misura di rischio deve sempre indicare la prima come preferibile alla seconda;

**Assioma 5** *Relevance*: per la quale varrà che con  $X \neq 0$  o  $X < 0$  comunque  $\rho(X) > 0$ . Questo assioma vuole andare ad impedire che vi sia una concentrazione del rischio capace di passare sottotraccia.

Qualora una misura di rischio possieda queste caratteristiche, viene indicata dagli autori come *coerente*. La varianza è un indicatore simmetrico e quindi non riesce a rispettare il requisito imposto dall'assioma 4.

Per questo motivo la letteratura è andata avanti considerando anche altre possibili misure di rischio quali, ad esempio, il modello con semivarianza in Vigdis Boasson, Emil Boasson and Zhao Zhou (2011) o con l'Expected Shortfall (o CVar) in Stucchi (2015).

## 2.3 Gestione Attiva

### 2.3.1 Misure di Performance e di Rischio

Quanto visto fino ad ora si riferisce in modo generico all'asset allocation e alla costruzione di un portafoglio. In questo lavoro si vuole però trattare in modo più specifico la gestione attiva di portafoglio e pertanto è utile definire alcune quantità ulteriori. Innanzitutto quando si va a valutare le performance del portafoglio attivo rispetto al Benchmark, assume particolare rilevanza il "Tracking Error" definito in Roll (1992) come  $G = \mu_p - \mu_b$ , dove  $\mu_p$  è il rendimento atteso del portafoglio attivo mentre  $\mu_b$  quello del benchmark. Tale indicatore può essere utilizzato ai fini dell'analisi della performance di un manager. Vista l'alta rumorosità<sup>3</sup> dei dati relativi ai rendimenti di un titolo, il Tracking Error non è tuttavia sufficiente a stabilire quanto dell'extra-rendimento ottenuto, sia effettivamente attribuibile all'operato del manager. Per questo motivo si valuta anche la "Tracking Error Volatility" (TEV in breve), ossia la varianza di  $G$ , che da qui in avanti verrà indicata con  $T = (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \mathbf{V} (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)$  dove  $\mathbf{q}_p$  e  $\mathbf{q}_b$  sono le quantità assegnate ai rendimenti del generico portafoglio attivo e al benchmark. Roll (1992) considera "Ottimale" la volatilità mese su mese del TE se questa assume valori vicino allo 0. Nonostante questo non sembri rispettare le critiche mosse alla varianza dei rendimenti, qui si utilizzano logiche differenti. Secondo questa definizione, infatti, un buon manager è quello che riesce a mantenere un tracking error positivo costante per il maggior numero di periodi di rilevazione possibile evitando crolli o picchi repentini. Nonostan-

---

<sup>3</sup>Questi dati sono soggetti a numerose variazioni, dovute a componenti non sempre identificabili.



te improvvisi picchi a rialzo nelle performance possano sembrare degli effetti positivi, questi potrebbero essere connessi ad una forte volatilità ignorata dal manager. Un'altra misura utile nel valutare la gestione attiva è l'Alpha di portafoglio. In particolare, si utilizza l'ex-ante Alpha che viene definito in Alexander e Baptista (2010) come la differenza tra l'extra-rendimento atteso di un portafoglio e l'extra-rendimento del benchmark aggiustato per il coefficiente  $\beta_{p|b}$ . Con extra-rendimento si intende la differenza tra il rendimento dei due portafogli ed il tasso di rendimento risk-free, mentre con  $\beta_{p|b}$  si indica il  $\beta$  di un portafoglio rispetto al suo benchmark. Il  $\beta_{p|b}$  e l' $\alpha$  sono strettamente collegati tra loro dato che entrambi provengono da una regressione lineare del tipo  $\mu_p - \mu_f = \alpha + \beta_{p|b}(\mu_b - \mu_f) + \epsilon$ , dove  $\mu_b$  è il rendimento del benchmark e il termine  $\epsilon$  indica un termine di errore del tipo  $\epsilon \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ .

In formule la definizione dell'Alpha è

$$\alpha = (\mu_p - \mu_f) - \beta_{p|b}(\mu_b - \mu_f) \quad (2.8)$$

dove  $\mu_f$  è il tasso di rendimento di un titolo risk-free. Il  $\beta_{p|b}$  del portafoglio è invece una misura di rischio e rappresenta, secondo la definizione usata in Roll (1992), l'ampiezza relativa delle fluttuazioni in prezzo del portafoglio attivo rispetto a quelle benchmark, quando queste sono correlate. La definizione analitica del  $\beta_{p|b}$  è

$$\beta_{p|b} = \frac{Cov(\mu_p, \mu_b)}{\sigma_b^2} \quad (2.9)$$

dove  $\mu_p$  e  $\mu_b$  sono nuovamente i rendimenti attesi di un generico portafoglio e del benchmark, mentre  $\sigma_b^2$  è la varianza del benchmark.

L'operato dei manager viene solitamente valutato anche mediante delle quantità ulteriori, tra le quali l'Information Ratio (IR), lo Sharpe Ratio (SR) e l' $M^2$  Risk-Adjusted Performance.

Le formule di tali indicatori sono le seguenti:

$$SR = \frac{(\mu_p - \mu_f)}{\sigma_p} \quad (2.10)$$

$$IR = \frac{(\mu_p - \mu_b)}{\sqrt{T}} \quad (2.11)$$

$$M^2 = \bar{\mu}_f + \left(\frac{\bar{\mu}_p - \bar{\mu}_f}{\sigma_p}\right)\sigma_m \quad (2.12)$$

dove  $\sigma_m$  è la volatilità del mercato. Lo Sharpe Ratio è il coefficiente angolare della Capital Market Line, definito nella sezione 2.1.2, qui calcolato per un portafoglio generico. L'indice  $M^2$  è molto simile allo SR, ma viene utilizzato perché di più facile interpretazione, dato che restituisce la performance del portafoglio in termini di extra-rendimento come una percentuale. Se l'indice ha valore positivo significa che il portafoglio ha un rendimento, aggiustato per il rischio, migliore di quello del titolo risk-free. L'Information Ratio dà invece un'indicazione sul rapporto tra extra-rendimento garantito dal portafoglio sul benchmark e deviazione standard del tracking error. Queste quantità danno quindi una misura, ponderata in modalità diverse per il rischio, dell'extra-rendimento che il manager ha ottenuto.

### 2.3.2 Misure Asimmetriche di rischio

Alcuni indicatori possono essere utilizzati per controllare che un portafoglio non vada a generare un rischio troppo elevato per il fondo, agendo direttamente sulla distribuzione dei rendimenti del portafoglio. Questi indicatori sono detti *asimmetrici* e ne fanno parte Value at Risk (VaR) e Conditional Value at Risk (CVaR).

Il VaR è una statistica d'ordine che va a misurare le maggiori perdite possibili in un dato periodo e ad un dato livello di confidenza. Con la notazione utilizzata in Alexander e Baptista (2008), vale  $VaR_\theta(R) = \{Y | P(R \geq Y) = 1 - \theta\}$ , che sta ad indicare che il VaR è quella quantità  $Y$  tale che la probabilità che le perdite siano superiori ad essa è pari a  $1 - \theta$ , con  $\theta \in [0.5, 1]$  livello di confidenza. In simboli la formula è  $VaR_\theta(R) = \int_{z_\theta}^{+\infty} \phi(R) dR = 1 - \theta$ .

Il VaR non rispetta tuttavia le condizioni indicate per una misura di rischio coerente, mancando in particolare della proprietà della subadditività (Assioma Numero 2 paragrafo 2.2).

La CVaR o Expected Shortfall invece rispetta ognuno degli assiomi precedentemente elencati. La CVaR rappresenta il rendimento atteso del portafoglio calcolato nel caso di perdite di livello pari o superiore a quelle del  $VaR$ , sempre ad un livello di confidenza  $\theta$ . Con la notazione fin qui utilizzata si scrive  $ES_\theta(R) = E[Y | Y \geq VaR_\theta]$ , cioè l'expected shortfall è uguale al valore atteso delle quantità  $Y$  tali da essere superiori al VaR fissato al livello di confidenza  $\theta$ . In simboli tale quantità viene calcolata come  $ES_\theta(R) = \frac{1}{1-\theta} \int_{z_\theta}^{+\infty} R\phi(R) dR$ .

### 2.3.3 La Mean-TEV Frontier

L'analisi relativa ai modelli di gestione attiva di portafoglio parte da quello definito in Roll (1992) che elabora una frontiera di portafogli capaci di minimizzare la TEV per una data quantità di Tracking Error ( $G$ ). Questo paper è molto importante, poiché è uno dei primi ad aver formalizzato la costruzione di un portafoglio nell'ambito della gestione attiva, evidenziando anche i problemi ad essa connessi. L'obiettivo è quindi quello di stabilizzare le oscillazioni del rendimento del portafoglio attivo per una dato livello di extra-rendimento richiesto. Tale frontiera prende il nome di *Mean-TEV Frontier* (da qui indicata con l'acronimo MTF). Oltre alle definizioni già utilizzate per la frontiera Media-Varianza è necessario aggiungere:

- $n$  = numero di asset rischiosi a disposizione del manager;
- $\mathbf{q}_b$  = un vettore  $n \times 1$  dei pesi del benchmark;
- $\mathbf{q}_p$  = un vettore  $n \times 1$  dei pesi del portafoglio gestito dal manager;
- $\mathbf{x}$  = un vettore  $n \times 1$ , contenente le variazioni in acquisto/vendita agli asset contenuti nel benchmark.

Rappresenta le scelte di investimento del manager con  $\mathbf{x} = \mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b$ ;

- $G$  = tracking error;
- $\mathbf{V}$  = la matrice  $n \times n$  della varianza e covarianza dei rendimenti (definita esattamente come per il modello di Markowitz).

Il problema di ottimo viene formulato nel seguente modo:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = G \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \end{cases}$$

Anche qui, per poter definire analiticamente la frontiera, vengono concesse le vendite allo scoperto. In questo caso gli altri vincoli avranno un significato differente rispetto a quelli nel modello di Markowitz. La variabile obiettivo qui è il vettore  $\mathbf{x}$  e pertanto, anziché il rendimento, si va a vincolare l'extra rendimento rispetto al benchmark  $(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)'\boldsymbol{\mu} = G$ . Il vincolo  $\mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0$  è invece necessario per garantire che  $\mathbf{q}'_p\boldsymbol{\iota} = 1$  e  $\mathbf{q}'_b\boldsymbol{\iota} = 1$

La soluzione che deriva da questo problema di ottimo dipenderà fortemente dalle costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  già definite nel problema di Markowitz. Nel caso della MTF, queste emergono quando si va a ricercare il punto di ottimo nella Lagrangiana

$$L = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} - G) - \lambda_2(\mathbf{x}'\boldsymbol{\iota})$$

dalla quale dopo aver derivato per  $\mathbf{x}$  si ottiene  $\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}[\boldsymbol{\mu} \ \boldsymbol{\iota}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

Premoltiplicando quanto sopra per  $[\boldsymbol{\mu} \ \boldsymbol{\iota}]'$  e risolvendo per  $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

si ottiene  $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ c & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Reinserendo i valori ottenuti per i moltiplicatori di Lagrange nell'espressione per  $\mathbf{x}$  si ottiene il vettore delle deviazioni ottimali dal benchmark

$$\mathbf{x} = D(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) \quad (2.13)$$

La componente  $D = \frac{G}{(\mu_1 - \mu_0)}$  nell'espressione del vettore  $\mathbf{x}$ , viene anche detta *Relative Performance Target* e rappresenta sostanzialmente il rapporto tra l'extra-rendimento desiderato e la differenza tra i rendimenti attesi di due specifici portafogli. I portafogli  $P_1$  e  $P_0$ , i cui rendimenti si trovano nel denominatore di  $D$ , sono dati dalle intersezioni tra la MVF e la sua retta secante uscente dall'origine e che passa per il portafoglio a varianza minima ( $P_0$ ). Il fatto che in  $\mathbf{x}$  non compaiano quantità legate al benchmark è importante perché indica che manager con uno stesso insieme di asset a disposizione e con le medesime aspettative circa rendimenti attesi e varianze, compieranno le stesse scelte in termini di deviazioni dal benchmark, indipendentemente da quale esso sia. Anche in questo caso, come nella MVF, è possibile ottenere il portafoglio soluzione da una combinazione di altri portafogli. Qui ci si trova di fronte però ad una *Three Funds Separation*, poiché è necessario combinare tre portafogli per ottenere  $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_b + \mathbf{x}$ . Descrivendo la combinazione come in Alexander e Baptista (2008) si ottiene  $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_b + C(\mathbf{q}_{tg} - \mathbf{q}_0)$  dove  $\mathbf{q}_{tg}$  e  $\mathbf{q}_0$  sono gli stessi usati nella 2.7 ed appartengono alla MVF mentre  $\mathbf{q}_b$  è il vettore dei pesi del benchmark. Il coefficiente  $C$  qui vale  $C = \frac{\bar{\mu}_p - \mu_b}{\mu_{tg} - \mu_0}$ .

Una volta ottenuto  $\mathbf{q}_p$ , vettore di pesi degli asset del portafoglio attivo, si potrà andare a derivare alcune delle quantità elencate nel paragrafo preceden-

te, quali la varianza, la TEV e il  $\beta$  sul benchmark:

$$T = D^2(\sigma_1^2 - \sigma_0^2) \quad (2.14)$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + T + 2D \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right) \quad (2.15)$$

$$\beta_{p|b} = \frac{\mathbf{q}_b + \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{q}_b}{\sigma_b} = 1 + D \frac{\sigma_0^2}{\sigma_b^2} \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right) \quad (2.16)$$

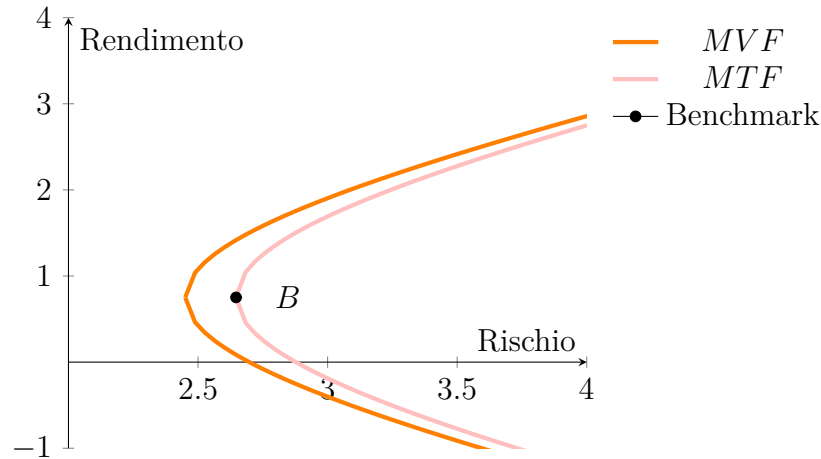
Da queste formule è possibile vedere come la stessa TEV dipenda dai portafogli  $P_0$  e  $P_1$  in una sorta di trade-off tra l'extra-rendimento desiderato e la varianza di quei due portafogli.

Tramite l'equazione (2.15) è possibile ottenere la relazione che intercorre tra il rischio e il rendimento per i portafogli nella MTF nel piano  $(\sigma, \mu)$ . Così facendo si riesce ad ottenere la frontiera che prende il nome di Mean-TEV Frontier e che rappresenta il luogo dei punti che minimizzano la volatilità del tracking error per un dato  $G$ . Tale frontiera ha la stessa forma della MVF e passa per il benchmark che rappresenta per essa il portafoglio a varianza minima.

### 2.3.4 L'emergere del Problema di Agenzia

Una volta ottenuta la MTF se la si mette a confronto con la MVF, come nella Figura 2.2, si ha una rappresentazione grafica del problema di agenzia citato nell'introduzione e su cui questo lavoro si va a concentrare.

La minimizzazione della TEV da sola, infatti, produce un allontanamento dalla frontiera di Markowitz. Tale distanza viene chiamata *Efficiency Loss* e viene generalmente indicata con  $\delta_b = \sigma_{MTF} - \sigma_{MVF}$ , dove le quantità con

Figura 2.2: *MVF* e *MTF* messe a confronto

pedice *MVF* appartengono a portafogli sulla frontiera di Markowitz, mentre quelle con pedice *MTF* sono portafogli con uno stesso livello di rendimento dei primi ma appartenenti alla Mean-TEV Frontier. Analiticamente tale quantità viene definita in Palomba e Riccetti (2012) come  $\delta_b = \sigma_b^2 - \sigma_c^2 - \frac{(\mu_b - \mu_c)^2}{d}$ . Il termine Efficiency Loss è dovuto al fatto che la *MTF* subisce una traslazione orizzontale rispetto alla *MVF*, che si traduce in un sistematico aumento della varianza di portafoglio. Tale rischio aggiuntivo risulta problematico poiché deriva dall'attenzione dei manager verso la riduzione della sola TEV, percepita come unico parametro di valutazione della loro attività.

La traslazione è ben visibile se si confrontano le formule per la varianza dei portafogli sulla *MVF* e sulla *MTF* scritte come in Alexander e Baptista (2008):

$$\sigma_{MVF}^2 = \frac{1}{a} + \frac{(\mu_p - \frac{b}{a})^2}{d} \quad (2.17)$$



$$\sigma_{MTF}^2 = \frac{1}{a} + \frac{(\mu_p - \frac{b}{a})^2}{d} + \delta_b \quad (2.18)$$

Considerando uno stesso livello di rendimento  $\bar{\mu}_p$ , questa definizione delle varianze mette bene in evidenza come la distanza tra le due sia dovuta all'efficiency loss.



## Capitolo 3

# La riduzione dell'Efficiency Loss

### 3.1 La frontiera con vincolo sul $\beta_{p|b}$

Con la formalizzazione del problema di agenzia nella gestione attiva, definito nel capitolo 2 tramite la MTF, si dà il via ad una corposa letteratura il cui obiettivo è quello di trovare dei modi per *ridurre l'efficiency loss*. Il primo tentativo di ridurre l'accresciuta volatilità si trova proprio in Roll (1992) il quale propone un sistema di minimizzazione della TEV che comprenda anche una condizione imposta sul  $\beta_{p|b}$  definito nell'equazione (2.9). L'inserimento di un ulteriore vincolo per i manager è necessario a far sì che questi tengano conto anche della volatilità di portafoglio nella loro funzione obiettivo. L'idea di un vincolo sul  $\beta_{p|b}$  origina dal fatto che i portafogli che dominano il benchmark secondo il criterio Media-Varianza, hanno un valore di questo parametro che risulta minore o uguale a 1. Ciò implica che tali portafogli sono meno rischiosi del benchmark.

Il problema ha la seguente impostazione:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = G \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \\ \frac{\mathbf{q}'_p\mathbf{V}\mathbf{q}_b}{\sigma_b^2} = \beta_{p|b} \end{cases}$$

L'ultimo vincolo rappresenta il livello di  $\beta_{p|b}$  desiderato dai gestori del portafoglio e di solito viene fissato per intervalli ritenuti accettabili dal management. In questo caso il problema di ottimo viene risolto con la seguente Lagrangiana

$$L = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} - G) - \lambda_2(\mathbf{x}'\boldsymbol{\iota}) - \lambda_3\left(\frac{\mathbf{q}'_p\mathbf{V}\mathbf{q}_b}{\sigma_b^2} - \beta_{p|b}\right)$$

e la soluzione è data da  $\mathbf{x} = \gamma_1\mathbf{q}_1 + \gamma_0\mathbf{q}_0 + \gamma_b\mathbf{q}_b$ , dove  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{q}_1$  sono i pesi relativi ai 2 portafogli già incontrati nell'equazione (2.13) mentre i tre parametri  $\gamma_0, \gamma_1$  e  $\gamma_b$  sono necessari a soddisfare i vincoli del problema e deve valere  $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_b = 0$ . Anche in questo caso nel portafoglio  $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_b + \mathbf{x}$  vale la *Three Funds Separation* e variando la quantità nel vincolo  $\bar{\mu}_p$  è possibile tracciare una curva nel piano  $(\sigma, \mu)$ .

I tre coefficienti nell'equazione di  $\mathbf{x}$  sono ottenute a mezzo di passaggi algebrici successivi all'applicazione della Lagrangiana e possono essere esplicitati come  $\gamma_1 \equiv \frac{\bar{G}(\sigma_b^2 - \sigma_0^2) + \sigma_b^2(\beta_{p|b} - 1)(\mu_0 - \mu_b)}{(\mu_1 - \mu_0)(\sigma_b^2 - \sigma_b^{2*})}$ ,  $\gamma_2 \equiv \frac{\bar{G}(\mu_b/b - \sigma_b^2) + \sigma_b^2(\beta_{p|b} - 1)(\mu_b - \mu_1)}{(\mu_1 - \mu_0)(\sigma_b^2 - \sigma_b^{2*})}$  e  $\gamma_3 \equiv \frac{\bar{G}(\sigma_0^2 - \mu_b/b) + \sigma_b^2(\beta_{p|b} - 1)(\mu_1 - \mu_0)}{(\mu_1 - \mu_0)(\sigma_b^2 - \sigma_b^{2*})}$ . L'informazione che le 3 quantità danno non è sempre facilmente interpretabile ma l'elemento dal significato più immediato è il denominatore  $(\mu_1 - \mu_0)(\sigma_b - \sigma_b^*)$ , comune a tutte e tre. Indicando col pedice  $b^*$  il portafoglio con stesso rendimento del

benchmark sulla MVF, è possibile vedere come, quando la distanza tra i due è pari a zero, non si potrà minimizzare la TEV vincolando anche il  $\beta_{p|b}$ . Si nota anche come più il benchmark si trova vicino alla MVF, più i portafogli della frontiera TEV efficiente con  $\beta_{p|b}$  vincolato vedranno il livello di variabilità aggiuntiva per unità di Tracking Error assumere valori elevati. Risulta evidente quindi come l'impatto del vincolo imposto su  $\beta_{p|b}$  sia da considerare relativamente alla posizione del benchmark e al livello desiderato di  $G$ . Anche tenendo conto di questo, la restrizione sembra in grado di mostrare effetti positivi sulla varianza del portafoglio. In Stucchi (2015) viene proposta un'analisi più approfondita sulle modalità di fissazione del  $\beta_{p|b}$  quando  $\beta_{p|b} < 1$ . Innanzitutto si specifica che solo una parte della MTF con  $\beta_{p|b}$  vincolato (da qui in avanti indicata con  $MTF-\beta_{p|b}^-$ ), in questo intervallo, risulta dominante per il criterio di Media-Varianza, sulla MTF non vincolata. Vi sono infatti delle porzioni di  $MTF-\beta_{p|b}^-$  capaci di garantire la dominanza per la sola varianza. Questo significa che, in tali porzioni della  $MTF-\beta_{p|b}^-$  una volta fissato un livello di rendimento  $\bar{\mu}_p$ , è possibile trovare un portafoglio con varianza minore rispetto a quello con stesso rendimento sulla MTF priva di vincoli. Per un dato livello di varianza  $\sigma_p^2$  non è però sempre possibile il contrario. È perciò necessario ottenere il livello del vincolo sul  $\beta_{p|b}$  a partire dal quale è possibile ottenere la porzione dominante per Media e Varianza della frontiera. In Stucchi (2015) si nota come a tale scopo sia necessario che il portafoglio a varianza minima della  $MTF-\beta_{p|b}^-$  sia compreso tra quello della MVF e quello della MTF non

vincolata. Quanto detto finora può essere scritto come

$$\frac{1}{c} \leq \sigma_p^2 = \frac{\sigma_b^2(\beta_{p|b} - 1)^2}{\Delta_2} + 2\sigma_b(\beta_{p|b} - 1) + \sigma_b \leq \frac{1}{c} + \delta_b \quad (3.1)$$

dove  $\beta_{p|b}$  sarà il vincolo da apporre e  $\sigma_p^2$  la varianza del portafoglio di minima varianza della frontiera vincolata. Risolvendo la disequazione per il livello di  $\beta_{p|b}$  si ottiene

$$1 - \frac{\Delta_2}{\sigma_b} \left[ 1 + \sqrt{\frac{1}{\Delta_2} \left( \Delta_2 - \frac{\Delta_1^2}{d} \right)} \right] \leq \beta_{p|b} \leq 1 - \frac{\Delta_2}{\sigma_b} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{\Delta_2} \left( \Delta_2 - \frac{\Delta_1^2}{d} \right)} \right]. \quad (3.2)$$

Sostituendo si nota che il portafoglio maggiormente vicino alla MVF sarà quello per il quale risulta  $\beta_{p|b}^- = \frac{1}{c\sigma_b}$ . Tutto ciò è importante, in quanto mostra come sia effettivamente possibile ridurre l'inefficienza della MTF, tramite un vincolo appositamente determinato sul  $\beta_{p|b}$ . La TEV sarà inevitabilmente maggiore nel portafoglio con questo vincolo aggiuntivo, ma si otterrà una varianza totale minore di quella in assenza del vincolo. Si nota quindi come la riduzione di  $\delta_b$  comporti un trade-off tra gli interessi dei soggetti coinvolti. L'aggiunta di un vincolo sul  $\beta_{p|b}$  rappresenta solo un primo passo verso una vasta letteratura il cui scopo è la riduzione della miopia dei manager, spesso concentrati sulla TEV e troppo poco sulla volatilità totale del portafoglio.

## 3.2 La frontiera con vincolo di TEV costante

### 3.2.1 Frontiera con TEV costante

Il secondo modello analizzato è quello in Jorion (2003), il cui contributo consiste nel riformulare il problema di ottimo della frontiera TEV-efficiente nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} = \bar{T} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \\ (\mathbf{q}_b + \mathbf{x})'\mathbf{V}(\mathbf{q}_b + \mathbf{x}) = \sigma_p^2 \end{array} \right.$$

In questo caso si sta massimizzando il Tracking Error per una data quantità di Tracking Error Volatiltity ( $\bar{T}$ ), ma soprattutto si inserisce un vincolo anche sulla varianza totale di portafoglio. La Lagrangiana costruita per risolvere il problema di ottimo presenta la seguente forma

$$L = \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} + \lambda_1 \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} + \frac{1}{2} \lambda_2 (\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \bar{T}) + \frac{1}{2} \lambda_3 (\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} + 2\mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{q}'\mathbf{V}\mathbf{q} - \sigma_p^2) \quad (3.3)$$

e da qui sarà possibile giungere al vettore ottimale delle deviazioni dal benchmark  $\mathbf{x} = \frac{-1}{\lambda_2 + \lambda_3} \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} + \lambda_1 \boldsymbol{\iota} + \lambda_3 \mathbf{V}\mathbf{q})$ .

Qui è la quantità  $\sigma_p^2$  nel vincolo a poter essere variata per tracciare la *Constant TEV Frontier* (da qui indicata con CTF) e attraverso un po' di algebra si ottiene che la forma di questa nuova frontiera nello spazio  $(\sigma^2, \mu)$  è

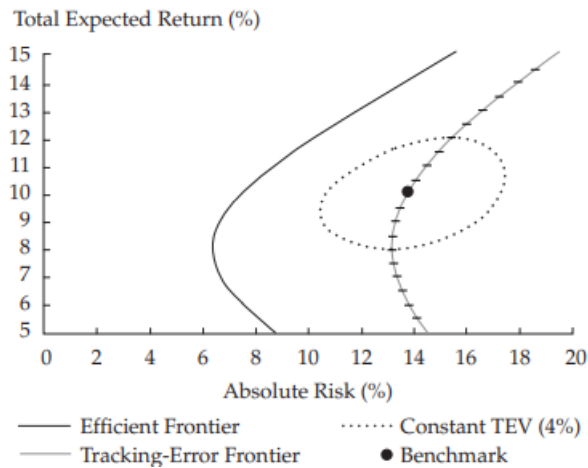
quella di un'ellisse. L'ellisse è identificato dall'equazione

$$dy^2 + 4\Delta_2 z^2 - \Delta_1 yz - 4T(d\Delta_2 - \Delta_1^2) = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{con} \begin{cases} y = \sigma_p^2 - \sigma_b^2 - T \\ z = \mu_p - \mu_b \\ \Delta_1 = \mu_b - \mu_0 \\ \Delta_2 = \sigma_b^2 - \sigma_0^2 \end{cases}$$

Riportando l'analisi nel piano  $(\sigma, \mu)$ , tuttavia, la forma della frontiera non è più quella di un'ellisse ma quella di un ovale "distorto". In particolare, la forma della frontiera è quella rappresentata nella Figura 3.1 dove viene anche posta a confronto con la frontiera di Markowitz e con la MTF.

Figura 3.1: MVF, MTF e CTF nello stesso piano



La relazione quadratica descritta nell'equazione (3.4) rappresenta effettivamente un'ellisse solo se nello spazio  $(\sigma, \mu)$  vale  $d(4\Delta_2) - \frac{1}{4}(-4\Delta_1)^2 =$



$4(d\Delta_2 - \Delta_1^2) > 0$ . Per definizione se il benchmark si trova all'interno della porzione di piano definita dal set efficiente della MVF, tale relazione sarà sempre rispettata. L'inclinazione dell'asse centrale della CTF dipende dal segno di  $\Delta_1$ ; se  $\Delta_1 = 0$  è orizzontale, altrimenti avrà una inclinazione positiva per  $\Delta_1 > 0$  e negativa per  $\Delta_1 < 0$ . Il centro dell'ellisse è invece collocato nel punto  $(\mu_b, \sigma_b^2 + T)$  quindi dipende fortemente dal valore assegnato alla TEV. Il massimo e il minimo del rendimento atteso ottenibile possono essere analizzati nel piano  $(\sigma, \mu)$  e si troveranno all'intersezione tra la CTF e la MTF di Roll, alla quota

$$\mu_p = \mu_b \pm \sqrt{dT}. \quad (3.5)$$

Ciò avviene perché quest'ultima ha proprio il compito di fornire il maggior livello di rendimento possibile per un dato livello di TEV.

Per quanto riguarda i valori massimi e minimi della varianza ottenibile lungo l'ovale la relazione è invece

$$\sigma_p^2 = \sigma_b^2 + T \pm 2\sqrt{T(\sigma_b^2 - \sigma_0^2)}. \quad (3.6)$$

Il range di valore della volatilità non dipende quindi dal rendimento atteso, ma dalla volatilità del tracking error e dalla differenza di volatilità tra il benchmark e il portafoglio a varianza minima. Ovviamente, note queste proprietà, qualora il vincolo dovesse essere  $\bar{T} = 0$ , l'intera frontiera collassa nel punto del portafoglio usato come benchmark.

Jorion inoltre enuncia un ulteriore insieme di proprietà della frontiera con TEV costante, tra le quali:

- la frontiera raggiunge un punto di contatto con la frontiera efficiente di Markowitz per

$$\sqrt{\bar{T}} = \sqrt{\Delta_2 - \frac{\Delta_1^2}{d}} = \sqrt{\delta_b} \quad (3.7)$$

questo punto sarà in presenza di un livello di rendimento pari a quello del benchmark ;

- quando  $\sqrt{\bar{T}} = \sqrt{\Delta_2}$  l'ellisse raggiunge un livello di rischio minimo pari a quello del portafoglio a varianza minima;
- quando  $\sqrt{\bar{T}} = 2\sqrt{\Delta_2 - \frac{\Delta_1^2}{d}}$  l'ellisse passa per il benchmark stesso; al di sopra di tale valore il benchmark non sarà più contenuto;
- quando  $\sqrt{\bar{T}} = 2\sqrt{\Delta_2}$ , la frontiera della TEV costante raggiunge un livello di rischio minimo pari a quello del benchmark, sopra questo valore, ogni portafoglio avrà un rischio maggiore del benchmark.

Attraverso queste proprietà è possibile vincolare il livello di rischio del portafoglio, per renderlo uguale a quello del benchmark. Tale strategia viene spesso indicata come "Jorion's Benchmark Risk". Ricordando che la varianza del singolo portafoglio è pari a  $\sigma_p^2 = (\mathbf{q} + \mathbf{x})'V(\mathbf{q} + \mathbf{x}) = \sigma_b^2 + 2\mathbf{q}'V\mathbf{x} + \mathbf{x}'V\mathbf{x}$ , è facile notare come la componente legata alle covarianze  $2\mathbf{q}'V\mathbf{x}$  dovrà essere uguale a "-T". Jorion si occupa poi di dimostrare come imporre una simile restrizione andrà inevitabilmente a ridurre il rendimento atteso *del portafoglio soluzione* rispetto a quello definito nell'equazione (3.5). Il costo di tale scelta

viene derivato tramite la seguente espressione

$$\mu_p - \mu_b = -\bar{T} \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} \pm \sqrt{\bar{T} \left( d - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2} \right) \left( 1 - \frac{\bar{T}}{4\Delta_2} \right)} \quad (3.8)$$

ottenuta imponendo  $y = \sigma_p^2 - \sigma_b^2 - \bar{T} = -\bar{T}$  nell'equazione della CTF. La forma ovale della frontiera, descritta dall'autore come un'*ellisse distorto*, nello spazio  $(\sigma, \mu)$ , permette di comprendere il motivo della scelta nel vincolo  $\sigma_p^2 = \sigma_b^2$ . L'ovale risulta essere schiacciato nella sua parte superiore, andando a determinare una distanza relativamente ridotta tra i rendimenti al suo interno. Per questo motivo un portafoglio situato in un livello di rischio equivalente a quello del benchmark, avrà un rendimento di poco minore rispetto al portafoglio con rendimento massimo.

In termini di costi/benefici, tale restrizione sembra essere desiderabile. In particolare il nuovo vincolo risulterà tanto più utile allo scopo, quanto:

- minore sarà la TEV;
- maggiore sarà l'efficiency loss del benchmark dalla frontiera efficiente di Markowitz.

### 3.2.2 Strategie di investimento nella CTF

La CTF presenta numerose differenze con le frontiere iperboliche di Markowitz e Roll e per questo è presente una vasta letteratura sulle sue proprietà. Un'ulteriore analisi di questa frontiera viene fatta in Evans e Van Vuuren (2019) dove si verifica l'impatto di diverse strategie di investimento all'interno

dello spazio descritto dalla CTF. Questo studio è utile ad evidenziare i risultati che dovrebbero essere ottenuti con le diverse strategie, permettendo così una migliore valutazione da parte degli sponsor.

Evans e Van Vuuren valutano le seguenti strategie di investimento:

- *Massimo Rendimento* (MR) - seleziona il portafoglio col massimo rendimento per una data TEV (descritto nell'equazione 3.5);
- *Rischio del Benchmark di Jorion* (JB) prevede l'utilizzo di un vincolo del tipo  $\sigma_p^2 = \sigma_b^2$ ;
- *Massimo Sharpe Ratio* (MS) come strategia punta a selezionare il portafoglio con la massima Sharpe-Ratio lungo l'ellisse di Jorion<sup>1</sup>;
- *Varianza Minima* (MV) si sceglie il portafoglio a varianza minima lungo l'ellisse di Jorion (descritto nell'equazione (3.6));
- *Diversificazione Massima* (MD) sceglie un portafoglio capace di massimizzare la diversificazione sulla base di una misura appositamente definita col nome di "Diversification Ratio<sup>2</sup>", che restituisce risultati indipendenti dal benchmark. La definizione di questo portafoglio non è però normalmente collegata alla CTF, pertanto gli autori ricercano empiricamente tale portafoglio per la frontiera con TEV vincolata;
- *Minima Intra-Correlazione* (MIC) l'obiettivo della quale è quello di individuare il portafoglio capace di minimizzare l'intra-correlazione e tale

---

<sup>1</sup>Tramite il metodo descritto in Maxwell et al. (2018).

<sup>2</sup>Risulta nel vettore delle deviazioni dal benchmark  $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{g}}{\mathbf{g}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{g}}$ , dove  $\mathbf{g}$  contiene gli elementi diagonali della matrice delle Covarianze dei rendimenti ed è costruito nel seguente modo  $g_i = v_{ii}$  con  $i = 1, \dots, n$  è l'elemento diagonale  $i$ -esimo di  $\mathbf{V}$ .

scelta viene fatta allo scopo di ridurre il più possibile la correlazione media tra gli asset nel portafoglio<sup>3</sup>. Anche in questo caso, la misura è definita in modo indipendente dalla TEV e gli autori ricercano empiricamente un portafoglio che la integri nella CTF.

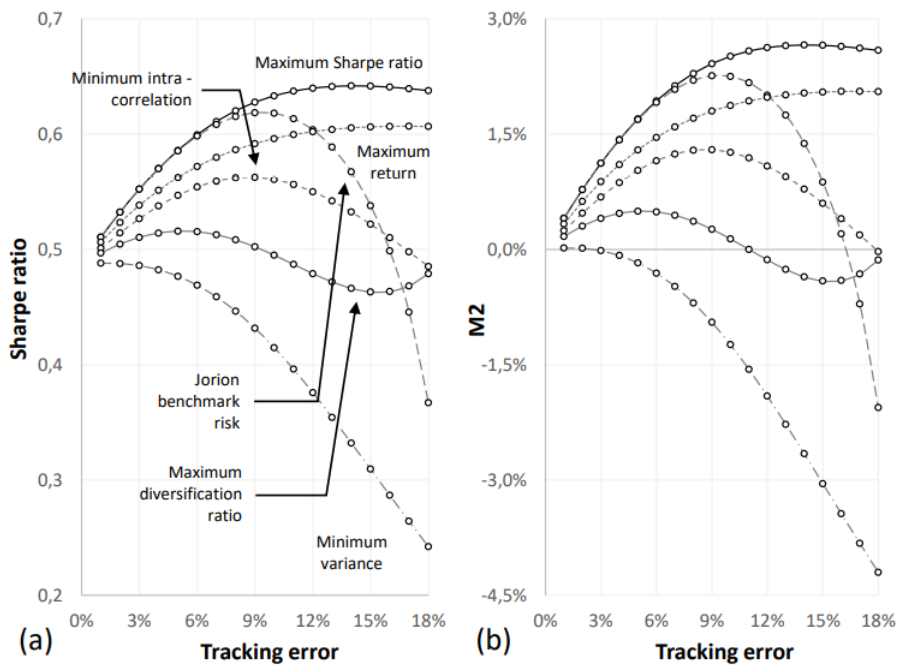
Nell'articolo viene valutata la CTF per diversi livelli di  $\bar{T}$  (da 0 al 18%) e, su di essa, i differenti portafogli scelti mediante le sei strategie sopra menzionate. L'analisi si ferma al 18% come valore massimo perché al di sopra di tale valore il benchmark cade al di fuori dell'ovale della CTF, quindi non tutte le strategie possono essere replicate. I portafogli ottenuti vengono poi valutati tramite Information Ratio, Sharpe Ratio e  $M^2$ , definiti nel capitolo 2. L'andamento delle tre quantità per le diverse strategie è contenuto nelle Figure 3.2 e 3.3. Dalla Figura 3.2 si può notare la somiglianza tra lo Sharpe Ratio e l'indice  $M^2$ , i quali restituiscono situazioni molto simili, per cui è sempre il portafoglio MS ad essere preferibile. L'analisi relativa all' $M^2$ , tuttavia, ha il vantaggio di fornire anche la capacità del portafoglio di superare la performance del titolo risk-free in termini di rendimenti ponderati per la volatilità. I portafogli che non riescono a superare il rendimento del titolo risk-free per quel livello di varianza, cadono al di sotto della linea dello zero. In questo caso l'unico portafoglio a rimanere sempre sotto lo zero è quello a varianza minima (MV). Una spiegazione per tale performance è l'alta concentrazione degli asset al suo interno. Il portafoglio JB per IR e  $M^2$  ha una relazione quadratica rispetto alla TEV, con valori crescenti per bassi livelli di di quest'ultima e valori de-

---

<sup>3</sup>La MIC si applica calcolando  $MIC = [(\mathbf{q} + \mathbf{x})'(\mathbf{q} + \mathbf{x})]^{-1}(\mathbf{q} + \mathbf{x})'[\boldsymbol{\rho} - \mathbf{diag}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{q} + \mathbf{x})$ , dove  $\boldsymbol{\rho}$  è la matrice di correlazione degli asset.

screscenti, fino ad essere negativi, per valori elevati di  $\bar{T}$ . Il portafoglio con diversificazione massima (MD) presenta alcune discontinuità nella relazione tra i suoi indicatori della performance e la TEV. Per livelli elevati di quest'ultima però, la relazione torna ad essere crescente fino a risalire sulla linea dello zero per un livello di TEV pari al 18%.

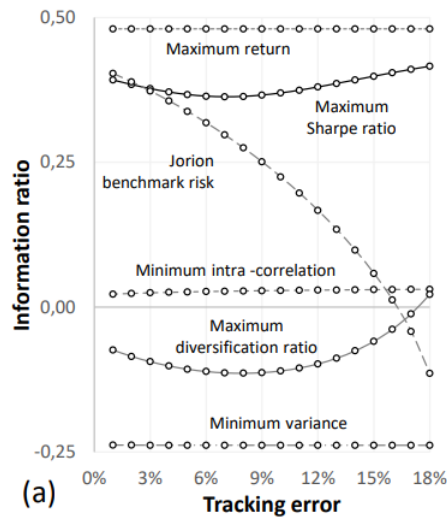
Figura 3.2: **Sharpe Ratio e  $M^2$  Risk-Adjusted Performance per i portafogli ottenuti**



Fonte dati: Van Vuuren Evans (2019)

La fotografia fornita dall'analisi dell'Information Ratio risulta invece leggermente diversa dalla precedente, restituendo come miglior performance, questa volta rispetto al benchmark, quella del portafoglio MR. Anche in questo caso, tuttavia, il portafoglio MV risulta essere quello con la performance peggiore, non riuscendo a superare quella del benchmark per nessuno dei livelli di Tracking Error Volatility considerati. I portafogli MR e MV seguono entrambi un andamento costante, in termini di information ratio, per i livelli di TEV tali che  $0\% \leq \bar{T} \leq 18\%$ .

Figura 3.3: Information Ratio per i portafogli ottenuti



Fonte dati: Van Vuuren Evans (2019)

Infine si analizza la relazione delle diverse misure di performance (IR, Sharpe Ratio e  $M^2$ ) con rendimento e rischio dei portafogli selezionati per livelli crescenti di TEV. L'andamento della relazione è crescente fino a valori di TEV con  $\bar{T} \geq 10\%$  a partire dai quali l'andamento delle quantità raggiunge un *plateau*. La ragione di questo stallo viene identificata nel movimento della CTF al variare del livello della TEV. La frontiera inizialmente si espanderà verso sinistra, andando ad essere prima tangente, e poi secante, alla MVF. Tuttavia successivi aumenti della TEV si traducono in uno spostamento verso destra della CTF che man mano si allontana dallo stesso benchmark, lasciandolo al di fuori dell'ellisse. A causa di tali movimenti lo Sharpe Ratio, ad esempio, raggiunge un picco perché una volta che la CTF diventa tangente alla Capital Market Line, essa non potrà spingersi oltre, essendo quello il massimo livello di Sharpe Ratio ottenibile. Questo ragionamento può essere adattato anche per l'Information Ratio e l'indice  $M^2$ .

### 3.2.3 Vincoli sulle quantità nella CTF

In Daly e Van Vuuren (2020), viene studiato il comportamento della CTF una volta inserito un ulteriore vincolo sui pesi degli asset nel portafoglio. Tale vincolo viene inserito poiché rappresenta una condizione di migliore aderenza alla realtà vissuta da alcuni gestori di fondi e permette quindi una comprensione più approfondita di come questi vadano poi a formulare le proprie scelte. Il metodo per la costruzione della frontiera passa per la definizione di una



funzione indicatrice del tipo

$$\mathbf{1}_l = \begin{cases} 1 & \text{se l'asset } i \in l \\ 0 & \text{se l'asset } i \notin l \end{cases} \quad (3.9)$$

dove  $l$  è un sottoinsieme degli asset scambiati su cui il manager voglia imporre un vincolo. Il vettore  $\mathbf{1}_l$  risultante sarà un vettore di dimensione  $n \times 1$ , contenente solo gli asset che il manager vorrà vincolare. A questo punto è anche possibile applicare un vincolo con disuguaglianza del tipo

$$\mathbf{1}'_l \mathbf{q}_p \leq \bar{w} \quad (3.10)$$

dove  $\bar{w}$  è il vincolo sui pesi che può essere maggiore o minore di zero (permettendo quindi delle vendite allo scoperto), ma dovrà comunque valere  $\mathbf{q}'_p \boldsymbol{\iota} = 1$ . Il metodo per derivare la soluzione di un problema di ottimo come questo viene descritto in Bajoux-Besnainou et al. (2011). Nel paper gli autori definiscono un parametro  $\gamma$  che tenga conto dell'avversione al rischio, e uno che definisca la risk tolerance chiamato  $\theta$ , legati dalla relazione

$$\theta = \frac{\boldsymbol{\iota}' \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\gamma} \quad (3.11)$$

che in Bajoux-Besnainou (2007) viene scritto come  $\frac{\mu_0}{\sigma_0^2 \gamma}$ , dove  $\mu_0$  e  $\sigma_0^2$  sono rendimento e varianza del portafoglio a varianza minima.

L'obiettivo sarà poi risolvere il seguente problema di ottimo

$$\begin{cases} \max_x \boldsymbol{\mu}'\mathbf{x} - \frac{\gamma}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \\ \mathbf{1}'\mathbf{q}_p \leq \bar{w} \end{cases} \quad (3.12)$$

Questa versione rimane equivalente a quelle trattate fino ad ora, ma consente di rappresentare il problema proposto tramite i parametri  $\theta$  e  $\gamma$ .

Gli autori procedono poi a costruire un esempio con dati simulati, in cui si considera una CTF con  $\bar{T} = 5\%$ . Tramite la simulazione si vuole illustrare come viene modificata la forma della frontiera una volta inserito questo vincolo. In particolare gli autori suddividono l'insieme di asset disponibili in quattro classi comprendenti due asset domestici e due esteri. Il vincolo sulla quantità verrà inizialmente imposto solo sugli asset domestici.

La CTF si restringe man mano che il vincolo  $\mathbf{1}'\mathbf{q}_p \leq \bar{w}$  diventa più rigido, lasciando ai manager una quantità sempre minore di portafogli tra cui scegliere. Immaginando di dividere la frontiera con gli assi dell'ellisse, la CTF subirà un restringimento, soprattutto nel lato alla destra del centro, corrispondente a livelli elevati di rischio e rendimento. Il lato "sud-est" della frontiera resterà invece ancorato alla posizione iniziale, nonostante un vincolo pari a  $\mathbf{1}'\mathbf{q}_p \leq 80\%$  sia già sufficiente a far cadere il benchmark fuori dalla CTF. Anche l'inclinazione dell'asse maggiore, data solitamente dalla quantità  $\Delta_1$ , muta all'aumentare

della rigidità del vincolo. Per i dati nell'esempio in Daly e Van Vuuren (2020) caratterizzati inizialmente da  $\Delta_1 > 0$ , l'orientamento diviene negativo già per livelli di vincolo relativamente blandi come  $\mathbf{1}'\mathbf{q}_p \leq 88\%$ . Questa variazione nell'orientamento della CTF ha importanti implicazioni nell'operato dei manager nella loro scelta delle modalità di allocazione.

### 3.3 Constrained Mean-Tracking Error Variance Frontier

#### 3.3.1 Vincoli su TEV e VaR

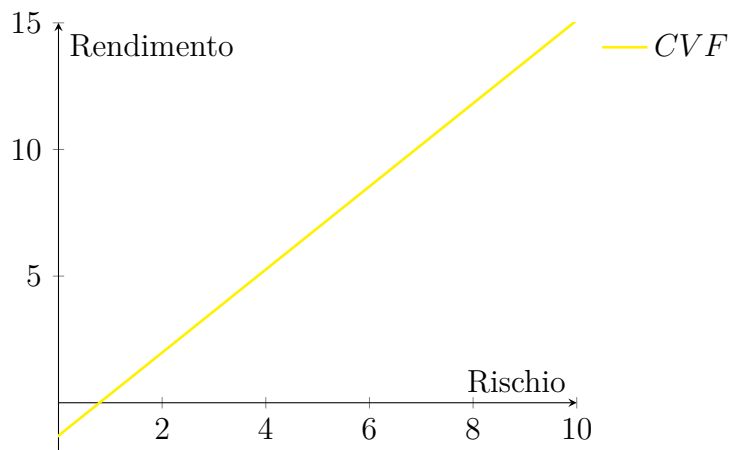
Alexander e Baptista (2008) tentano di mitigare l'efficiency loss tramite l'utilizzo di un vincolo sul Value at Risk. La scelta di una restrizione sul VaR risulta particolarmente utile poiché esso è largamente utilizzato nell'industria finanziaria (al punto di essere anche contenuto in Basilea 2) e per via della relativa semplicità della sua interpretazione definita in termini di perdite attese. Sotto l'ipotesi di investimenti uniperiodali e di rendimenti normali il VaR viene espresso attraverso la relazione lineare:

$$VaR[\theta, R_q] = z_\theta \sigma_p - \mu_p. \quad (3.13)$$

La quantità  $VaR[\theta, R_q]$  indica il Value at Risk, il quantile al livello di probabilità  $\theta$  della distribuzione dei rendimenti ( $R$ ), di un generico portafoglio con vettore dei pesi  $\mathbf{q}$ . Il valore,  $z_\theta = \Phi^{-1}(\theta)$  è proprio il quantile di una normale

standard corrispondente alla probabilità indicata da  $\theta$  e  $\Phi(\cdot)$  è la funzione di ripartizione della stessa. La relazione (3.13) potrà essere rappresentata nel piano  $(\sigma, \mu)$  come nella Figura 3.4.

Figura 3.4: **Frontiera con vincolo sul VaR nel caso di rendimenti normalmente distribuiti**



La retta del vincolo é una frontiera di portafoglio di equazione  $\mu_p = z_\theta \sigma_p - \bar{VaR}$ , dove il vincolo sul VaR è l'intercetta. Questa relazione lineare prende il nome di *Constant VaR Frontier* e viene indicata con l'acronimo CVF. Un vincolo sul VaR viene indicato con  $VaR[\theta, R_q] \leq \bar{VaR}$  e i portafogli che lo rispettano sono quelli con un VaR minore o uguale alla soglia predeterminata. Guardando la forma della CVF nella (3.4), risulta ovvio che i portafogli capaci di rispettare la restrizione saranno quelli sulla linea del vincolo e quelli appartenenti al semipiano a sinistra della stessa. Alexander e Baptista (2008) definiscono poi un'altra frontiera di portafogli contenente i portafogli che minimizzano la TEV per vari livelli di rendimento sotto un dato vincolo sul VaR e che prenderà il nome di *Constrained Mean-TEV Frontier* (da qui in avanti CMTF). Prima di procedere con la definizione analitica del problema di ottimo, è importante considerare che un vincolo sul VaR può essere visto come un vincolo indiretto sul rendimento o sulla varianza. Se si sceglie di minimizzare la varianza, soggetta ad un dato livello di rendimento, la definizione del VaR potrà essere riscritta come

$$\sigma_p \leq \frac{\bar{VaR} + \bar{\mu}}{z_\theta} \quad (3.14)$$

In Stucchi (2015) il problema di ottimo relativo alla CMTF viene scritto proprio tramite questo vincolo come:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} T = \mathbf{x}'\mathbf{V}'\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = \bar{G} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \\ (\mathbf{x}'\mathbf{q}_b)'\mathbf{V}(\mathbf{x}'\mathbf{q}_b) = \left(\frac{V\bar{a}R + \bar{G} + \bar{\mu}_b}{z_\theta}\right)^2 \end{cases} \quad (3.15)$$

La soluzione dipenderà quindi dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}_p - \bar{G}) - \lambda_2(\mathbf{x}'\boldsymbol{\iota}) - \frac{1}{2}\lambda_3\left[(\mathbf{x} + \mathbf{q}_b)'\mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_b) - \left(\frac{V\bar{a}R + \bar{G} + \bar{\mu}}{z_\theta}\right)^2\right]$$

Da qui, l'analisi prosegue mettendo a confronto la CMTF con la MVF e con la MTF, quindi, la notazione relativa ai vari portafogli sulle diverse frontiere sarà distinta nel seguente modo:

- $\mu_{q_{MVF}}, \sigma_{q_{MVF}}, R_{q_{MVF}}$  ( $r_{q_{MVF}}$  nella sua controparte campionaria) e  $\mathbf{q}_{MVF}$  saranno quantità associate ai portafogli della frontiera Media-Varianza (MVF);
- $\mu_{q_{MTF}}, \sigma_{q_{MTF}}, R_{q_{MTF}}$  ( $r_{q_{MTF}}$ ) e  $\mathbf{q}_{MTF}$  quelle della Media-TEV (MTF);
- $\mu_{q_{CMTF}}, \sigma_{q_{CMTF}}, R_{q_{CMTF}}$  ( $r_{q_{MVF}}$ ) e  $\mathbf{q}_{CMTF}$  quelle della Media-TEV con vincolo sul VaR (CMTF).

Se si suppone di fissare  $V\bar{a}R$  ad un livello tale che nessun portafoglio sulla MTF possa rispettare tale vincolo, ossia  $VaR[\theta, R_{q_{MTF}}] > \bar{V}aR$ , e che esistano dei portafogli nella porzione di piano individuata dai titoli che sono invece capaci di farlo, si ottiene dalla 3.14 che:

$$\sigma_{q_{CMTF}} \leq \frac{V\bar{a}R + \bar{\mu}}{z_\theta} < \sigma_{q_{MTF}} \quad (3.16)$$

Questa semplice relazione mostra come col vincolo sul VaR sia possibile rendere i portafogli meno rischiosi di quelli sulla MTF.

Alexander e Baptista (2008) vanno poi a caratterizzare ulteriormente questa nuova frontiera. Nel *Lemma 1* viene stabilito che qualora i portafogli rispettino le condizioni imposte nell'equazione (3.16), i punti per cui il vincolo sul VaR risulta *saturato* avranno le caratteristiche di seguito riportate. Innanzitutto, qualora i portafogli di cui sopra si dovessero trovare sulla retta del vincolo essi esibiranno una "*Three fund separation*", del tipo

$$\mathbf{q}_{CMTF} = (1 - X - Y)\mathbf{q}_b + X\mathbf{q}_0 + Y\mathbf{q}_{tg} \quad (3.17)$$

dove  $\mathbf{q}_{CMTF}$  è il vettore dei pesi di un portafoglio sulla CMTF, mentre le quantità  $X$  e  $Y$  sono opportunamente definite in Alexander e Baptista (2008). I coefficienti  $X$  e  $Y$  dipendono dai parametri del problema di ottimo e deve valere la relazione  $X + Y = 1$ . Come si evince dalla formula, anche in questo caso i pesi dei portafogli sulla CMTF possono essere ottenuti tramite una combinazione lineare dei pesi dei portafogli  $TG$ ,  $P_0$  e  $B$ . Tenendo conto del *Lemma 1* inoltre, se i portafogli saturano il vincolo e sono soggetti ad un problema di ottimo come quello della CMTF, per un valore di TEV adeguato che dipenda da  $\bar{\mu}_p$  e  $\bar{VaR}$ , saranno anche nella frontiera di Jorion con TEV costante, dimostrando dunque l'esistenza di una relazione tra le due. Il paper procede poi con la caratterizzazione della Constrained Mean-TEV Frontier (CMTF) definendo dei riferimenti per il vincolo sulla quantità  $\bar{VaR}$  e sul livello

di confidenza  $\theta$ . Innanzitutto il livello di confidenza viene distinto sulla base del valore  $\sqrt{d}$ , qui indicato come "valore soglia", nel seguente modo:

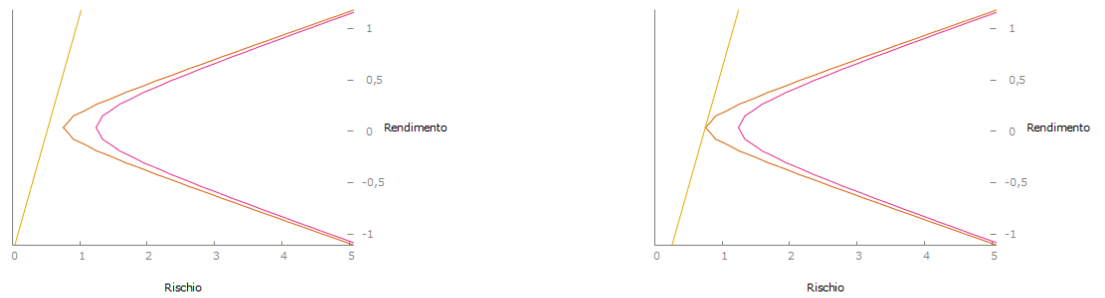
- $\theta > \Phi(\sqrt{d})$  è il caso del livello di confidenza alto per i manager;
- $\theta \leq \Phi(\sqrt{d})$  basso livello di confidenza.

Tale distinzione è molto rilevante ai fini dell'analisi, poiché il livello di confidenza va ad impattare su  $z_\theta$ , coefficiente angolare del vincolo sul VaR nel piano  $(\sigma, \mu)$ . L'analisi di seguito effettuata viene condotta sulla base delle relazioni individuate tra il vincolo e le frontiere di Media-Varianza e di Media-TEV non vincolata. In questo lavoro la trattazione per il basso livello di confidenza è omessa, dato che nella realtà il livello di confidenza richiesto è generalmente molto elevato. Nell'analisi della frontiera con livello di confidenza alto, è necessario definire dei portafogli capaci di fare da riferimento. In questo caso i portafogli  $\mathbf{q}_{MV}^*$  e  $\mathbf{q}_{MTF}^*$ , indicati con i loro vettori dei pesi, sono quelli con VaR minimo per le rispettive frontiere. A questo punto il paper studia le intersezioni con la sola MTF nel **Lemma 3**, nel quale viene riportato che:

- i) se  $\theta > \Phi(\sqrt{d})$  e  $VaR < VaR[\theta, r_{q_{MTF}^*}]$ , allora non ci sarà nessun portafoglio per cui il vincolo sarà soddisfatto né intersezione alcuna,
- ii) se  $\theta > \Phi(\sqrt{d})$  e  $VaR = VaR[\theta, r_{q_{MTF}^*}]$ , allora ci sarà un solo portafoglio sulla MTF, capace di soddisfare il vincolo e sarà  $VaR = VaR[\theta, r_{q_{MTF}^*}]$ ;
- iii) se  $\theta > \Phi(\sqrt{d})$  e  $VaR > VaR[\theta, r_{q_{MTF}^*}]$  allora avremo due portafogli capaci di saturare il vincolo sulla MTF e saranno da qui indicati con  $\mathbf{q}_{MTF}^{\bar{}}$  e  $\mathbf{q}_{MTF}^{\underline{}}$

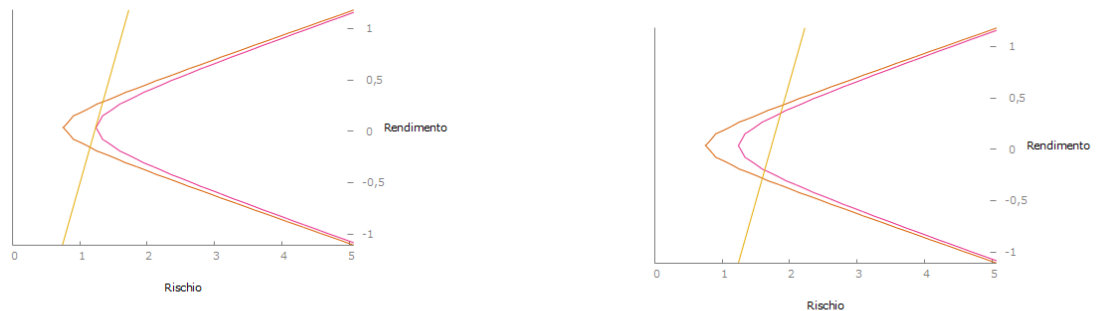


Figura 3.5: Rappresentazione grafica di CVF e CMTF con livello di confidenza alto



(a) Caso 1 -  $VaR < VaR[\theta, R_{qMV}^*]$

(b) Caso 2 -  $VaR = VaR[\theta, R_{qMV}^*]$



(c) Caso 3 -  $VaR[\theta, R_{qMV}^*] < VaR < VaR[\theta, R_{qMT}^*]$

(d) Caso 4 -  $VaR > VaR[\theta, R_{qMT}^*]$

Un'analisi più approfondita si può trovare nella *Proposizione 2*, nel paper di Alexander e Baptista (2008), dove viene illustrata la forma della frontiera, considerando sia le intersezioni con la MVF che con la MTF. I possibili scenari ottenuti sono quelli nella Figura 3.5. La frontiera è vuota per l'ipotesi del vincolo più stringente possibile con  $VaR < VaR[\theta, R_{qMV}^*]$ . Con questa restrizione non potrà esserci alcuna intersezione tra le altre frontiere e il vin-

colo (Caso 1 in Figura 3.5). Se la restrizione è invece pari a  $VaR[\theta, R_{q_{MVF}^*}]$  l'unico punto contenuto nella CMTF è proprio il portafoglio con VaR minimo per la frontiera Media-Varianza (Caso 2 in Figura 3.5). Se il vincolo è compreso tra  $VaR[\theta, R_{q_{MVF}^*}]$  e  $VaR[\theta, R_{q_{MTF}^*}]$  vi saranno due punti di intersezione con la frontiera efficiente di Markowitz e saranno i portafogli indicati da qui con  $\bar{\mathbf{q}}_{MVF}$  e  $\underline{\mathbf{q}}_{MVF}$ . La CMTF sarà dunque formata in questo caso da  $\bar{\mathbf{q}}_{MVF}$  e  $\underline{\mathbf{q}}_{MVF}$  e il tratto della retta del vincolo sul VaR che li unisce (Caso 3 in Figura 3.5). Volendolo esprimere nei termini delle equazioni delle due precedenti frontiere (MVF ed MTF) e del vincolo sul VaR si ha che la CMTF è formata dall'equazione (3.13) per livelli di rendimento nell'intervallo  $E[R_{\underline{\mathbf{q}}_{MVF}}] \leq \mu_p \leq E[R_{\bar{\mathbf{q}}_{MVF}}]$ , cioè compresi tra il rendimento dei due portafogli nei punti di contatto con la MVF. Al diminuire della rigidità del vincolo inizieranno ad apparire dei punti di contatto anche con la MTF. In particolare, se il vincolo è quantificato esattamente nel VaR del portafoglio  $\mathbf{q}_{MTF}^*$  la frontiera è simile alla precedente ed è composta dai due punti di contatto con la frontiera media-varianza, il segmento che li unisce e il portafoglio in cui la retta del vincolo è tangente alla MTF ( $\mathbf{q}_{MTF}^*$ ). In ultima analisi, nel caso in cui si abbia che il vincolo sul VaR è maggiore di quello minimo per la MTF, la frontiera assumerà una forma relativamente diversa dalle altre. In questo caso infatti nella CMTF saranno compresi i portafogli in cui la retta del vincolo del VaR interseca la MVF ( $\bar{\mathbf{q}}_{MVF}$  e  $\underline{\mathbf{q}}_{MVF}$ ), il segmento che li unisce, le intersezioni del vincolo con la MTF ( $\bar{\mathbf{q}}_{MTF}$  e  $\underline{\mathbf{q}}_{MTF}$ ) e l'arco della MTF compreso tra quest'ultimi (Caso 4 in Figura 3.5). In particolare, volendo esplicitare la frontiera anche qui in termini di rendimento, si ha che la CMTF è costituita dalla (3.13) per livelli

di rendimenti nell'intervallo  $E[R_{\underline{q}_{MVF}}] \leq \mu_p \leq E[R_{\underline{q}_{MTF}}]$  e anche per quelli nell'intervallo  $E[R_{\bar{q}_{MTF}}] \leq \mu_p \leq E[R_{\bar{q}_{MVF}}]$ . L'arco della MTF compreso nella frontiera sarà invece determinato dall'equazione (2.18) per livelli di rendimento compresi nell'intervallo  $E[R_{\underline{q}_{MTF}}] \leq \mu_p \leq E[R_{\bar{q}_{MTF}}]$ .

Il caso 4 evidenzia come nella natura del problema vi sia anche la minimizzazione della TEV dove la MTF rappresenta un limite inferiore che non può essere superato.

### 3.3.2 Una misura per l'efficacia del vincolo sul VaR

La capacità della CMTF di ridurre l'accresciuta volatilità viene ribadita tramite il calcolo della frazione di efficiency loss eliminata con l'inserimento di un vincolo sul VaR. Tale quantità viene ottenuta attraverso la relazione:

$$\phi(\bar{\mu}_p) = 1 - \frac{(\frac{\sqrt{a}R + \bar{\mu}_p}{z_\theta})^2 - [1/c + \frac{(\bar{\mu}_p - b/c)^2}{d}]}{\delta_b}. \quad (3.18)$$

Questa funzione è in grado di fornire un'effettiva misura di quanto la CMTF sia più efficiente della MTF per diversi livelli di rendimento e di VaR fissati. Ovviamente, in tutti i casi sopra menzionati in cui il portafoglio si trova sulla MVF, questa quantità è pari a 1. Nei casi in cui invece i portafogli della CMTF si trovano sulla MTF, la quantità  $\phi(\bar{\mu}_p)$  è pari a 0. In tutti gli altri scenari questa quantità avrà un valore nell'intervallo  $0 < \phi(\bar{\mu}_p) < 1$  e fornirà la prova dell'utilità della CMTF, nonché della convenienza nell'apporre il vincolo.

Successivamente viene proposto un esempio per meglio comprendere come le diverse quantità imposte nei vincoli, possano impattare sul risultato finale per quanto riguarda rendimento e varianza del portafoglio. Nell'esempio si valuta solo la casistica con alto livello di confidenza e si vanno a generare i valori possibili di  $V\bar{a}R$ . Quello che si nota dall'esempio è che la deviazione standard dei portafogli nella frontiera vincolata (CMTF), risulta inferiore a quella dei portafogli nella frontiera non vincolata (MTF) e che tale riduzione aumenta in proporzione alle seguenti caratteristiche:

- più il vincolo sarà stringente (ad esempio riducendo la quantità  $V\bar{a}R$  o aumentando il valore di  $\theta$ );
- maggiore sarà la deviazione standard del benchmark (poiché *ceteris paribus* risulta che il vincolo sta diventando relativamente più stringente);
- minore sarà il rendimento richiesto (questo perché, sempre tenendo tutto il resto costante, al momento della riscrittura del vincolo come  $\sigma_{CMTF} \leq (\frac{V\bar{a}R + \mu_b + \bar{G}}{z_\theta})$ , la  $\bar{G}$  sarà una quantità sommata di segno positivo di dimensioni ridotte).

In Alexander e Baptista (2008) viene poi valutata la riduzione di efficiency loss ottenuta sotto le condizioni elencate in precedenza. Le prime tre implicazioni vengono tranquillamente replicate, mentre l'effetto di  $\bar{G}$  dipende fortemente dai valori di intervallo di confidenza e dal benchmark. Ciò si nota effettuando il calcolo della seguente derivata rispetto a  $G$  della funzione  $\phi(\mu_b + \bar{G})$  per i valori che si stanno trattando.

### 3.4 Frontiera Alpha-TEV

L'articolo Alenxader e Baptista (2010) contiene un nuovo tentativo di risolvere il problema dell'eccesso di rischio definendo una frontiera basata stavolta sulla ricerca di portafogli capaci di minimizzare la TEV rispettando una data quantità di ex-ante alpha (definito nell'equazione (2.8)). Tale frontiera prende il nome di *Alpha-TEV Frontier*. Questa scelta viene fatta perché la selezione accurata di un vincolo sull'alpha può permettere una più forte riduzione dell'efficiency loss al punto di arrivare ad essere tangente alla MVF. Per ogni livello di riduzione di efficiency loss desiderato si avranno due portafogli capaci di garantire tale quantità, fatta eccezione per la riduzione del 100% per il quale ve ne sarà solo uno. Questa frontiera ha la particolarità di contenere, oltre alla restrizione sui pesi delle deviazioni, un solo vincolo relativo all'Alpha del portafoglio. Nei modelli precedenti si andavano invece ad aggiungere vincoli a quelli già esistenti nel problema originario di Roll (1992). Ciò significa che, a mezzo di tale vincolo, è possibile ottenere contemporaneamente degli effetti sul rendimento atteso e sulla varianza nel portafoglio di ottimo. Tale particolarità si individua nel problema di ottimo da risolvere per ottenere l'*Alpha-TEV*

*Frontier*:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \boldsymbol{\iota} = 0 \\ \mathbf{x}' (\mathbf{R} - \mathbf{V} \mathbf{q}_b \frac{\mu_b - \mu_f}{\sigma_b^2}) = \alpha \end{cases}$$

La soluzione al precedente problema di ottimo viene caratterizzata dagli

autori mediante tre quantità distinte:

$$k_1 = \frac{b - (\mu_b - \mu_f)/\sigma_b^2}{c} \quad (3.19)$$

$$k_2 = a + \frac{\mu_f^2 - \mu_b^2}{\sigma_b^2} - \frac{[b - (\mu_b - \mu_f)/\sigma_b^2]^2}{c} \quad (3.20)$$

$$k_3 = d/c + (b/c - \mu_b)(\mu_b - \mu_f)/\sigma_b^2; \quad (3.21)$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  saranno maggiori di zero per definizione. Tramite l'impiego di  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  gli autori dimostrano come anche i portafogli sulla *Alpha-TEV* hanno la proprietà della *Three-fund separation*, espressa nel seguente modo nel *Teorema 1*:

$$q_\alpha = \gamma_{0,\alpha} \mathbf{q}_0 + \gamma_{1,\alpha} \mathbf{q}_1 + (1 - \gamma_{0,\alpha} - \gamma_{1,\alpha}) \mathbf{q}_b \quad (3.22)$$

dove le quantità  $\gamma_{0,\alpha}$  e  $\gamma_{1,\alpha}$  dipendono appunto da  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ .

Sempre tramite  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , è possibile scrivere anche la relazione che intercorre tra il rendimento atteso e l'alpha dei portafogli sulla frontiera. La relazione sarà espressa da:

$$\mu_{q_\alpha} = \mu_b + \frac{k_3}{k_2} \alpha \quad (3.23)$$

dove  $\mu_{q_\alpha}$  è il rendimento di un portafoglio sulla Alpha-TEV. In questo caso sarà dunque il segno della quantità  $k_3$  a determinare quello dell'uguaglianza. Questa relazione è particolarmente rilevante poiché rende possibile comprendere se i portafogli con livelli di *alpha* positivi avranno o meno rendimenti maggiori di quelli del benchmark, influenzando anche il modo di leggere la frontiera stessa. La relazione tra la riduzione dell'efficiency loss e il livello di alpha richiesto,

dipenderà essa stessa da tale quantità. I portafogli sulla alpha-TEV sono inoltre strettamente legati a quelli sulla  $\beta_{p|b}$ -constrained definita in Roll (1992). Ogni portafoglio sulla Alpha-TEV è presente anche nella  $\beta_{p|b}$ -constrained per dei vincoli su  $\beta_{p|b}$  e rendimento atteso che dipendano dall' $\alpha$  in questione. Il contrario tuttavia non è sempre vero, in quanto dei portafogli su una stessa curva della MTF- $\beta_{p|b}^-$  avranno lo stesso  $\beta_{p|b}$  per definizione, mentre i portafogli sulla Alpha-TEV no. Inoltre la frontiera Alpha-TEV contiene sempre un punto tangente alla MVF, mentre la frontiera MTF con vincolo sul  $\beta_{p|b}$  generalmente no. La relazione che lega varianza e rendimento dei portafogli lungo l'Alpha-TEV frontier è espressa nella seguente equazione:

$$\sigma_p^2 = \frac{\left\{ \mu_p - \left[ \mu_b + \frac{k_3}{K_2} (k_1 \mu_f) \right] \right\}^2}{K_3^2 / k_2} + \sigma_b^2 - \frac{(k_1 - \mu_f)^2}{k_2} \quad (3.24)$$

dalla quale risulta evidente come il portafoglio tangente alla MVF sarà quello con  $\alpha$  pari a  $\alpha = K_2 / [(\mu_b - \mu_f) / \sigma_b^2]$ .

### 3.5 Una visione di insieme

Un contributo utile a comprendere le relazioni esistenti tra le diverse frontiere elencate in questo capitolo è quello contenuto in Stucchi (2015). Nel paper viene mostrato come livelli diversi di vincoli nei metodi finora elencati, possano essere ricondotti, solo nell'ipotesi di rendimenti normalmente distribuiti, a soluzioni equivalenti in termini di deviazioni dal benchmark. In particolare, in

Stucchi (2015) vengono ricondotti all'equazione

$$\mathbf{x} = \gamma_1 \frac{\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{b} + \gamma_0 \frac{V^{-1}t}{c} + \gamma_b \mathbf{q}_b, \quad (3.25)$$

dove in questo caso i pesi  $\gamma_1$ ,  $\gamma_0$  e  $\gamma_b$  sono i pesi che emergono dall'ottimizzazione della MTF- $\bar{\beta}_{p|b}$  e sono contenuti nell'appendice di Stucchi (2015). Questo risultato è particolarmente importante, poiché mostra come, nonostante la forma delle frontiere sia diversa, queste scaturiscono da procedure comuni alle quali possono essere ricondotte. Questo risultato è particolarmente utile ai manager nel dialogo con gli sponsor del fondo, ai quali potranno essere fornite informazioni sulla base dei diversi indicatori di rischio. Questo va a migliorare la comunicazione tra le parti coinvolte, fornendo agli sponsor una maggior possibilità di controllo. Un vincolo sul  $\beta_{p|b}$  potrà essere così facilmente ricondotto ad un valore di vincolo sul VaR capace di garantire un risultato analogo. Il VaR ha però il vantaggio di essere descritto in termini di perdite attese. Il grafico nella Figura 3.6 contiene le curve di livello delle frontiere con vincolo su  $VaR$ ,  $CVaR$  e  $\beta_{p|b}$  all'interno del piano<sup>4</sup>  $(G, T)$  per livelli di rischio equivalenti e serve a mostrare le relazioni che intercorrono tra queste nel punto di soluzione del problema.

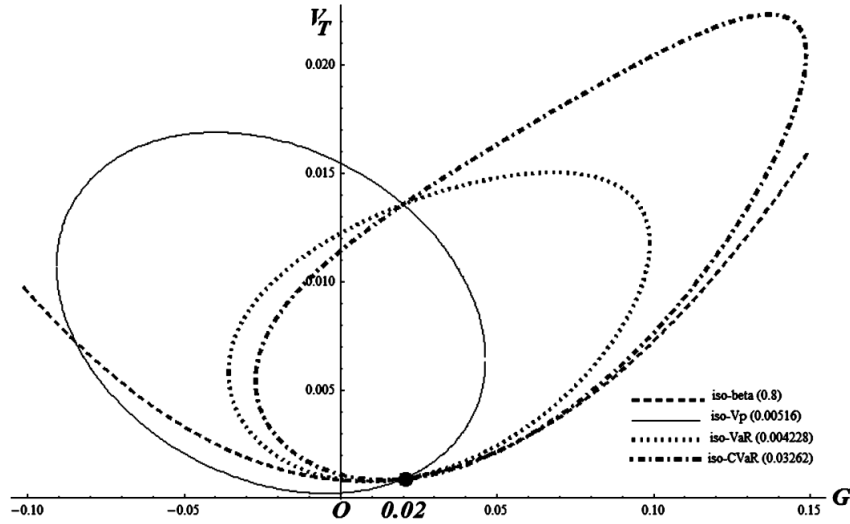
Stucchi (2015) va inoltre a proporre una ulteriore frontiera che è quella con vincolo sulla  $CVaR$  o *Expected Shortfall* per tentare di sopperire ai problemi connessi al VaR come misura di rischio, elencati nel capitolo 2. Questa frontiera

---

<sup>4</sup>Stucchi (2015) indica la TEV con il simbolo  $V_T$



Figura 3.6: **Relazione Grafica tra le diverse frontiere di Portafoglio concernenti la TEV**



Fonte dati: Patrizia Stucchi (2015)

è il luogo dei punti dei portafogli il cui CVaR non supera un dato livello, per una quantità fissata di rendimento. Anche in questo caso, sotto l'ipotesi di normalità il CVaR può essere scritto come una relazione lineare del tipo:

$$CVaR = -\mu_p + \sigma_p \frac{n(z_\theta)}{1 - \theta} \quad (3.26)$$

dove  $n(z_\theta)$  indica la funzione di densità della normale standard, mentre le quantità  $\theta$  e  $z_\theta$  sono le stesse di Alexander e Baptista (2008).

Il problema di ottimo di una frontiera di portafogli con un vincolo sul CVaR e sull'extra-rendimento ha la seguente forma:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} T = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} = \bar{G} \\ \mathbf{x}'\boldsymbol{\iota} = 0 \\ (\mathbf{x} + \mathbf{q}_B)'V(\mathbf{x} + \mathbf{q}_B) = \left[\left(\frac{CVaR + \bar{G} + \mu_b}{n(z_\theta)}\right)(1 - \theta)\right]^2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Questa frontiera presenta le medesime proprietà delle precedenti potendo essere ricondotta ad un vincolo indiretto in termini delle altre quantità in esse adoperate. Per poterne meglio evidenziare le differenze con la frontiera sviluppata nel caso del vincolo sul VaR, si forniscono le rappresentazioni nella Figura 3.7, dove la retta del vincolo è rappresentata in grigio.

Figura 3.7: **Rappresentazione vincolo su VaR e CVaR**



(a) Vincolo sul VaR

(b) Vincolo sulla CVaR

I due scenari vengono rappresentati con uno stesso intervallo di confidenza

e una stessa intercetta, per poter mostrare come la restrizione sul CVaR renda il coefficiente angolare della retta del vincolo maggiore a parità di condizioni. Questa caratteristica rende quindi lo stesso vincolo più stringente.



# Capitolo 4

## Dialettica tra Sponsor e Manager

### 4.1 La Fixed VaR-TEV Frontier

#### 4.1.1 Intersezione tra CMTF e CTF

Sulla letteratura delle frontiere di portafoglio nello spazio  $(\sigma, \mu)$ , va ad inserirsi il contributo di Palomba e Riccetti (2012), nel quale si cerca di creare uno strumento analitico capace interpretare il contrasto tra management e sponsor. In questo articolo si dà rilievo sia alla necessità da parte del management di cercare di raggiungere il miglior livello di performance possibile in termini di TEV, sia alle esigenze da parte degli sponsor di limitare il rischio complessivo a cui il portafoglio è soggetto. In quest'ottica si sceglie di vincolare il TEV e il VaR come misure di rischio capaci di spiegare il contrasto tra le parti. Per fare questo è necessario comprendere quando i due vincoli siano compatibili tra

loro, permettendo così di ottenere portafogli capaci di rispondere ad entrambe le esigenze contemporaneamente. L'analisi si basa perciò sulla ricerca di punti di contatto tra le frontiere CMTF e CTF definite da Alexander e Baptista (2008) e Jorion (2003) definite nel capitolo 3.

L'analisi viene condotta nello spazio  $(\sigma^2, \mu)$  dove il vincolo sul VaR è una parabola dalla forma  $\sigma_p^2 = \frac{(\mu_p + V\bar{a}R)^2}{z_\theta^2}$ . Ciò viene fatto allo scopo di utilizzare l'equazione della CTF che in questo spazio è una ellisse. Le situazioni possibili sono le seguenti:

- il vincolo sul VaR è troppo stringente e la CVF giace alla sinistra della CTF senza nessun punto di contatto;
- la CVF interseca la CTF in almeno un punto e quindi il numero di possibili soluzioni spazia da uno a infinito;
- la frontiera CTF è alla sinistra della CVF e quindi il vincolo sul VaR è troppo blando, presentando di fatto una situazione immutata rispetto al solo vincolo sulla TEV.

Ovviamente la situazione di maggiore interesse è la seconda nella quale è possibile ottenere uguagliando l'equazione di entrambe le frontiere e risolvendo il sistema che ne deriva. Palomba e Riccetti (2012) mostrano che il sistema restituisce un'equazione di quarto grado che ha sempre due soluzioni complesse coniugate e se le altre due soluzioni sono numeri reali si possono generare degli scenari ulteriori. Si avranno due portafogli soluzione differenti ( $K_1$  e  $K_2$ ) qualora siano due numeri reali distinti o una sola ( $K$ ) qualora siano soluzioni reali coincidenti. Nel primo caso la CTF ovale e la CVF lineare sono secanti,

nel secondo caso tangenti.

Tra i valori possibili dei due vincoli ne esiste una combinazione capace di restituire un portafoglio indicato con  $K$ , il cui livello di VaR è definito come  $V_K = VaR[\theta, R_{qK}]$ , nel quale le due frontiere sono tangenti e a partire dal quale sarà possibile ottenere delle soluzioni che soddisfino contemporaneamente vincoli su TEV e VaR. In Palomba e Riccetti (2012) è contenuto un algoritmo per ottenere tale soluzione, basato su una *Grid Search* per i diversi valori assegnati alla TEV.

#### 4.1.2 La Fixed VaR-TEV Frontier

In Palomba e Riccetti (2012) viene definita una nuova frontiera di portafogli che prende il nome di "*Fixed VaR-TEV Frontier*" (FVTF in breve). Tale frontiera emerge quando i vincoli su TEV e VaR sono compatibili e si individua almeno un portafoglio nel piano  $(\sigma, \mu)$  nel quale i vincoli sono entrambi soddisfatti. L'analisi condotta in Palomba e Riccetti (2012) utilizza l'apparato teorico definito da Jorion (2003) e da Alexander e Baptista (2008):

- $\Delta_1 = \mu_b - \mu_c > 0$  il benchmark ha quindi rendimenti maggiori del portafoglio a varianza minima sulla MVF ( $P_0$ ), la CTF avrà pertanto l'asse principale con inclinazione positiva;
- $z_\theta > \sqrt{d}$  livello di confidenza elevato;

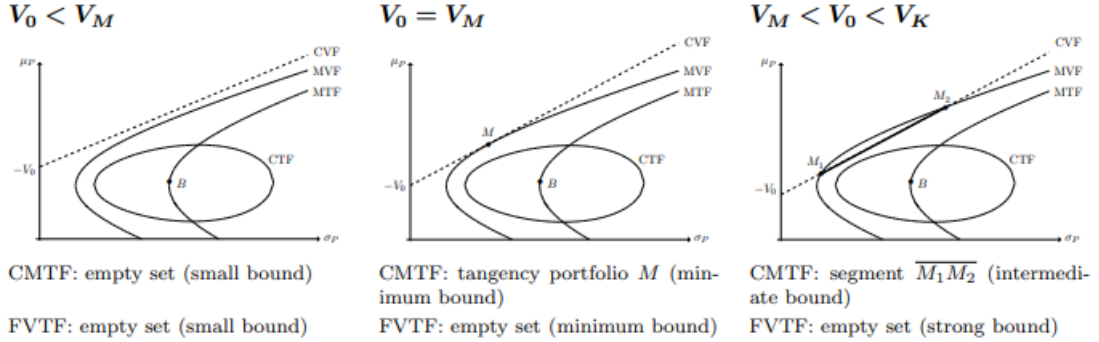
- $\bar{T} < T_H$  dove  $T_H = \delta_b$  indica il valore della TEV per cui la CTF è tangente alla MVF, come visto anche nella (3.7).

Una discussione degli scenari possibili, una volta fatte variare queste ipotesi, è nel Technical Supplement di Palomba e Riccetti (2012). Operando con le caratteristiche appena descritte, i due autori compiono un'analisi geometrica simile a quella di Alexander e Baptista (2008). Le possibili casistiche ottenibili sono le seguenti:

- a) *Small Bound* - il caso in cui i vincoli sono troppo stringenti, al punto che la CVF non risulta tangente nemmeno alla MVF e quindi il vincolo sul VaR non può essere soddisfatto;
- b) *Minimum Bound* - sarà il caso del vincolo sul VaR più stringente possibile, con la retta del vincolo sul VaR tangente alla sola MVF nel portafoglio con VaR minimo  $M \equiv (\sigma_0^2 + d \frac{\sigma_0^2}{z_\theta^2 - d}, \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{z_\theta^2 - d}})$  il cui VaR è  $VaR[\theta, R_{qM}] = -\mu_\sigma + \sqrt{\sigma_c^2(z_\theta^2 - d)}$ , dove le quantità con pedice 0 appartengono al portafoglio a varianza minima ( $P_0$ );
- c) *Strong Bound* - è il caso in cui il vincolo è tale che  $V_M < \bar{VaR} < V_K$  e quindi è minore di quello che renderebbe tangenti la CTF e CVF. In questo caso la retta del vincolo interseca la MVF in due portafogli diversi (da qui  $M_1$  e  $M_2$ ) e il segmento  $(M_1 \bar{M}_2)$  tra questi contenuto, oltre alla porzione di piano alla sua sinistra, rappresenterà la CMTF definita da Alexander e Baptista.



Figura 4.1: **Rappresentazione grafica degli scenari con vincoli non compatibili**



Fonte dati: Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022)

Fino a qui l'analisi ripropone quanto già detto dalla letteratura precedente, in quanto i vincoli proposti non sono ancora compatibili tra loro (non essendovi intersezioni tra CVF e CTF). Questi scenari sono rappresentati nella Figura 4.1.

Continuando ad aumentare il valore del VaR, la FVTF (nella Figura 4.2) prende forma e gli scenari possibili sono i seguenti:

- d) *Medium Bound* - quando il vincolo è  $VaR = V_K$  e quindi la CVF è tangente alla CTF. In questo caso avremo che nel portafoglio di tangenza  $K$  saranno saturati entrambi vincoli con uguaglianza (vale pertanto  $T = \bar{T}$  e  $VaR = VaR$ ). Il portafoglio  $K$  individua la FVTF e ne è l'unico componente;
- e) *Intermediate Bound* - in questo caso il vincolo è compreso nell'intervallo  $V_K < VaR < VaR[\theta, R_{qR}] = V_R$  dove  $V_R = -\mu_\sigma + \sqrt{(\sigma_b^2 - \Delta_1^2/d)(z_\theta^2 - d)}$  è il VaR del portafoglio per cui la CVF è tangente alla MTF e secante alla CTF. In questo caso la FVTF è costituita dal segmento  $\overline{K_1 K_2}$ , cioè

la parte di retta del vincolo sul VaR compresa nella CTF tra i due punti di intersezione, e da  $\widehat{K_1K_2}$  che rappresenta l'arco della CTF a sinistra del segmento precedentemente definito;

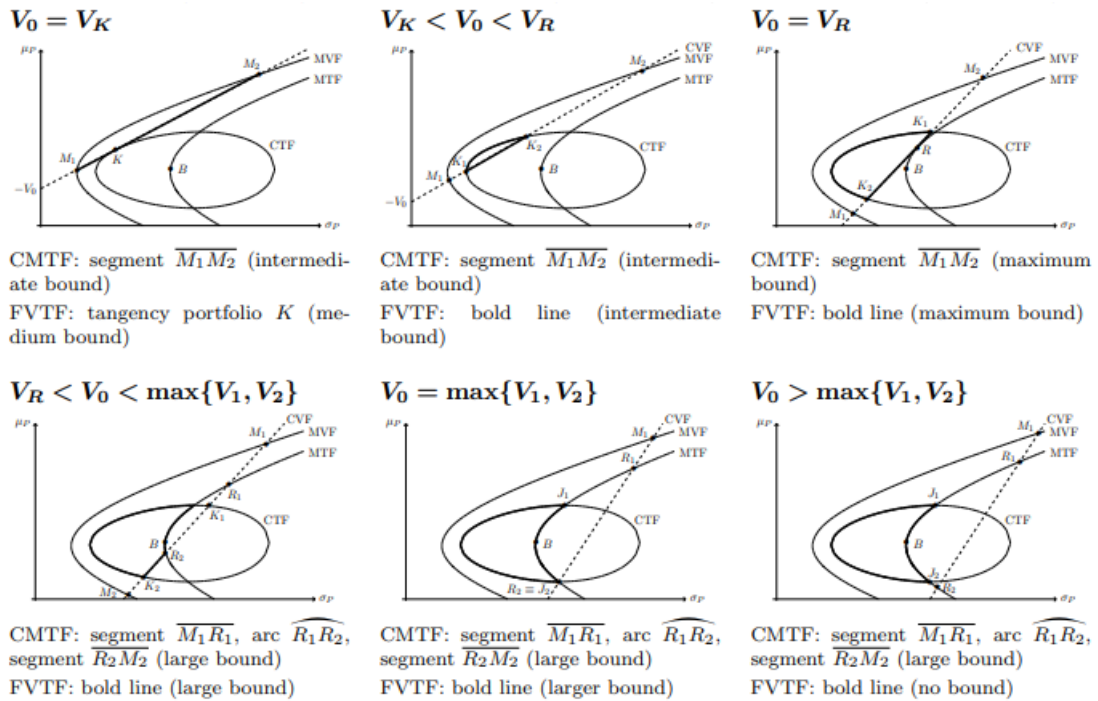
- f) *Maximum Bound* - con  $V\bar{a}R = V_R$ , in questo caso la FVTF è identica al caso precedente fatta eccezione per la presenza del portafoglio per cui la CVF è tangente alla MTF dove la TEV sarà minima per quel livello di rendimento. Il punto in questione è  $R \equiv \left( \sigma_c^2 + \frac{d\sigma_b^2 - \Delta_1^2}{z_\theta^2 - d}, \mu_c + \sqrt{d \frac{d\sigma_b^2 - \Delta_1^2}{z_\theta^2 - d}} \right)$  che risulta di per sé indipendente dal vincolo sul VaR.
- g) *Large Bound* Il vincolo sarà contenuto nell'intervallo  $V_R < V\bar{a}R < \widehat{V}$  con  $\widehat{V} = \max\{VaR[\theta, R_{qJ_1}], VaR[\theta, R_{qJ_2}]\}$ , dove  $J_1$  e  $J_2$  sono i due portafogli che si collocano all'intersezione tra la MTF e la CTF (i cui VaR vengono indicati da qui in avanti con  $V_1$  e  $V_2$ ). La differenza tra  $V_1$  e  $V_2$  dipende fortemente dal coefficiente angolare scelto per il vincolo e dalle caratteristiche della frontiera generata dal benchmark (Palomba e Riccetti (2012) - Tabella A.3). In questo caso la FVFT sarà data dall'arco  $\widehat{K_1K_2}$  e dai punti compresi tra questa e la CMTF che è composta invece dai segmenti  $\overline{M_1R_1}$  e  $\overline{R_2M_2}$ , nonché dall'arco  $\widehat{R_1R_2}$  nella MTF, dove  $R_1$  e  $R_2$  sono le intersezioni tra CVF e MTF.
- h) *Larger Bound* - è il caso con  $V\bar{a}R = \widehat{V}$  dove la FVTF è data esattamente dall'arco di MTF compresa tra  $J_1$  e  $J_2$  oltre che dall'arco, generato sempre dagli stessi due portafogli, sulla CTF. Nell'esempio rappresentato in Palomba e Riccetti (2012) la CVF passa sia per il portafoglio

$J_1$  che per  $J_2$  e questo viene garantito dal coefficiente angolare pari a

$$z_\theta^* = \frac{d}{2\Delta_1}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

- i) *No Bound* - quando  $V\bar{a}R > \hat{V}$  il vincolo non è in grado di modificare la frontiera definita per la sola TEV.

Figura 4.2: Rappresentazione grafica degli scenari della FVTF



Fonte dati: Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022)

Negli ultimi quattro casi, appena analizzati, emerge come in Palomba e Riccetti (2012) non si stia cercando di risolvere un problema di ottimo, ma di combinare le caratteristiche dei risultati descritti nel Capitolo 3 per trovare una porzione di spazio in cui soddisfare i vincoli su TEV e VaR. Fatta eccezione per i punti di intersezione o di tangenza tra le frontiere, in cui i vincoli sono entrambi

saturati, il manager dovrà scegliere da quale dei due discostarsi maggiormente. In queste aree dello spazio  $(\sigma, \mu)$  si va pertanto a ricercare una  $TEV < \bar{T}$  e un  $VaR \leq \bar{VaR}$ . Senza contare che vi saranno poi scenari, come quello nel caso (a), in cui sarà possibile soddisfare solo il vincolo sulla TEV e altri in cui sarà necessario compiere una scelta. Gli scenari (b) e (c) rappresentano proprio i casi in cui, non essendo possibile soddisfare congiuntamente i vincoli, si dovrà scegliere tra un portafoglio che rende bassa la TEV (vicino al benchmark e sulla MTF) e uno che renda il VaR più basso (rimanendo nella MVF).

Ovviamente anche l'insieme dei punti appartenenti alla FVTF avrà un sottoinsieme efficiente per il criterio Media-Varianza. In Palomba e Riccetti (2019) la ricerca dell'efficienza parte dalla frontiera definita da Jorion (2003) e vengono definite le frontiere Efficient CTF (ECTF) e Efficient FVTF (EFTV). Viene individuato innanzitutto il portafoglio a varianza minima per la CTF che sarà da qui indicato con  $J_0$ , definito già nell'equazione (3.6). La porzione efficiente della CTF sarà quella compresa tra  $J_0$  e il portafoglio con il massimo rendimento  $J_1$  (cioè quello con rendimento massimo definito nell'equazione 3.5). Per quanto riguarda la EFVTF, questa viene definita dagli autori come la porzione della ECTF in cui i portafogli hanno un VaR non superiore ad un vincolo prestabilito ( $\bar{VaR}$ ), definendo quindi un sottoinsieme dell'arco  $\widehat{J_0J_1}$ .

## 4.2 La Risk Balancing Frontier

La FVTF definisce il luogo dei punti in cui è possibile soddisfare i vincoli su TEV e VaR congiuntamente individuando una porzione di piano nel quale

sorge un possibile trade-off tra gli interessi di manager e sponsor.

Nel contributo di Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022) ci si concentra invece sulla definizione di un problema di ottimo che possa "guidare" entrambe le parti coinvolte al momento dell'assegnazione dei vincoli. Questo viene fatto minimizzando il VaR, che rappresenta il fattore di rischio globale, rispetto ad un dato livello di rischio relativo, fornito dalla TEV, e di intervallo di confidenza. In pratica, si cerca di individuare un portafoglio  $P \in (\sigma, \mu)$  tale che abbia il minimo VaR per un livello prefissato di TEV. Questo permette, a differenza della FVTF, di identificare un insieme di portafogli in cui entrambi i vincoli risultino, contemporaneamente, saturati per diversi livelli di  $\bar{T}$ . Andando infatti a selezionare dei valori diversi per la restrizione sulla TEV, si va a tracciare una curva nel piano  $(\sigma, \mu)$ , contenente i vari portafogli di tangenza per ogni livello di  $VaR$  corrispondente. In questo caso dunque, si individua una sorta di rapporto ottimale tra le due quantità, cercando di individuare un'allocazione che tenga conto degli interessi del manager, rivolti maggiormente alla TEV, e degli sponsor che generalmente si concentrano maggiormente sul VaR. La TEV racchiude la valutazione della performance del manager da cui dipende solitamente la modalità di assegnazione delle commissioni allo stesso, ma è anche una modalità di controllo dell'effettivo operato del manager da parte del principale. È infatti possibile che i manager, confrontandosi con una TEV troppo stringente, finiscano per compiere scelte molto limitate, rimanendo vicini alle performance del benchmark (come suggerito anche in Riccetti (2012)). Fissare un limite alla TEV e analizzarla congiuntamente ad un vincolo sul VaR, cercando di saturare entrambi, con-

sente dunque un miglior inquadramento delle scelte in capo al manager. Tale modalità di operare sembra voler restituire un maggior controllo al principale del rapporto di agenzia che altrimenti si troverebbe a dover subire le scelte del manager. Anche in questo caso si procede analiticamente attraverso un problema di ottimo in questione è formulato nel seguente modo

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{q}_p} VaR = z_\theta \sqrt{\mathbf{q}'_p \mathbf{V} \mathbf{q}_p} - \mathbf{q}'_p \boldsymbol{\mu} \\ \sqrt{(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \mathbf{V} (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)} = \sqrt{\bar{T}} \\ \mathbf{q}'_p \boldsymbol{\iota} = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{q}_p$  è il vettore dei pesi ottimale del portafoglio. In questo caso si segue un approccio simile a quello nella Alpha-TEV, dato i vincoli nel problema di ottimo di Roll (1992) vengono sostituiti, ad eccezione di quello che impone una completa allocazione della ricchezza  $W$ , con altri vincoli in grado di garantire comunque livelli  $\sigma_p$  non troppo elevati, oltre a quelli desiderati per TEV e VaR.

Questo problema produce la Lagrangiana

$$L(\mathbf{q}_p, \bar{T}) = z_\theta \sqrt{\mathbf{q}'_p \mathbf{V} \mathbf{q}_p} - \mathbf{q}'_p \boldsymbol{\mu} - \lambda_1 [\sqrt{(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \mathbf{V} (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)} - \sqrt{\bar{T}}] - \lambda_2 [\mathbf{q}'_p \boldsymbol{\iota} - 1]$$

dalla quale si ricavano le condizioni di primo ordine del problema, identificate dal gradiente

$$\nabla(\mathbf{q}_p, \bar{T}) = r(\mathbf{q}_p, \theta) \mathbf{V} \mathbf{q}_p - \boldsymbol{\mu} - \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{\bar{T}}} \mathbf{V} (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b) - \lambda_2 \boldsymbol{\iota} = \mathbf{0}$$

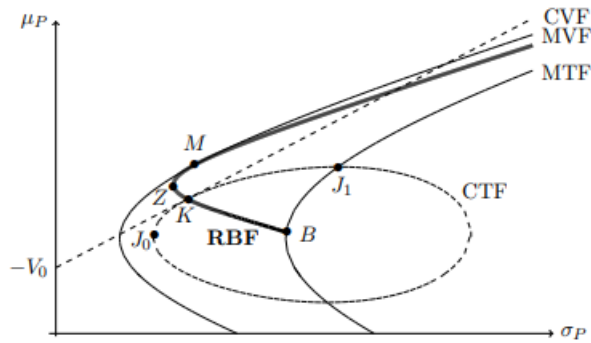
con  $r(\mathbf{q}_p, \theta)$  funzione scalare strettamente positiva ottenuta dallo svolgimento della derivata della quantità  $z_\theta \sqrt{\mathbf{q}'_p \mathbf{V} \mathbf{q}_p}$  rispetto al vettore dei pesi  $\mathbf{q}_p$ . Da qui è possibile identificare l'equazione del portafoglio ottimale, dalla quale si vede come anche per questa frontiera valga la *Three Funds Separation*:

$$\mathbf{q}_p^* = x_1(\mathbf{q}_p^*)\mathbf{q}_b + x_2(\mathbf{q}_p^*)\mathbf{q}_{tg} + x_3(\mathbf{q}_p^*)\mathbf{q}_0 \quad (4.2)$$

$$\text{dove} \begin{cases} x_1(\mathbf{q}_p^*) = 1 - \frac{r(\mathbf{q}_p^*, \theta)}{D(\mathbf{q}_p^*, \theta)}(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \boldsymbol{\mu} \\ x_2(\mathbf{q}_p^*) = \frac{b}{D(\mathbf{q}_p^*, \theta)}(\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \boldsymbol{\mu} \\ x_3(\mathbf{q}_p^*) = \left[ \frac{r(\mathbf{q}_p^*, \theta) - b}{D(\mathbf{q}_p^*, \theta)} \right] (\mathbf{q}_p - \mathbf{q}_b)' \boldsymbol{\mu} \end{cases}$$

con  $b$  e  $d$  definite nel capitolo 3,  $D(\mathbf{q}_p^*, \theta) \equiv d - \Delta_1 r(\mathbf{q}_p^*, \theta)$  e  $\mathbf{q}_{tg}$  il vettore dei pesi del portafoglio che massimizza lo Sharpe ratio (TG).

Figura 4.3: Risk Balancing Frontier



Fonte dati: Lucchetti, Nicolau, Palomba, Riccetti (2022)

Osservando la Figura 4.3, è possibile notare come possa esistere una combinazione con  $x_1 = 1$   $x_2$  e  $x_3$  uguali a zero che restituirà il benchmark (portafoglio B in figura), anch'esso nella frontiera, per un livello di TEV pari a zero ( $\bar{T} = 0$ ).

Non vi sarà tuttavia una possibilità per cui i portafogli  $TG$  e  $P_0$  siano, presi singolarmente, gli unici diversi da zero, poiché questi due non appartengono alla RBF. Di particolare interesse è invece la situazione in cui solo il peso relativo al benchmark ( $x_1$ ) è pari a zero, poiché il vettore dei pesi del portafoglio ottimale risulta essere una combinazione di due portafogli appartenenti alla MVF. Il caso di  $x_1 = 0$ ,  $x_2 \neq 0$  e  $x_3 \neq 0$  mostra come la RBF possa essere tangente alla MVF (nel portafoglio  $M$  rappresentato nella 5.1).

Per l'equazione (4.2) non esiste una soluzione esplicita e quindi è necessario un algoritmo di ottimizzazione da adoperare per ricavarne una numerica. La procedura descritta lavora in modo simile a quella individuata in Palomba e Riccetti (2012) per  $VaR = V_K$  utilizzando l'algoritmo di ottimizzazione numerica BFGS. L'algoritmo cerca di individuare il livello di rendimento del portafoglio tangente per ogni livello di restrizione  $\bar{T}$  e da qui risalire alla sua varianza mediante l'equazione  $S_T = \sigma_b^2 + \bar{T} + \frac{2}{d}(\Delta_1(\mu_p - \mu_b) - \sqrt{d\delta_b[d\bar{T} - (\mu_p - \mu)^2]})$ .

### 4.2.1 Sototoinsiemi della RBF

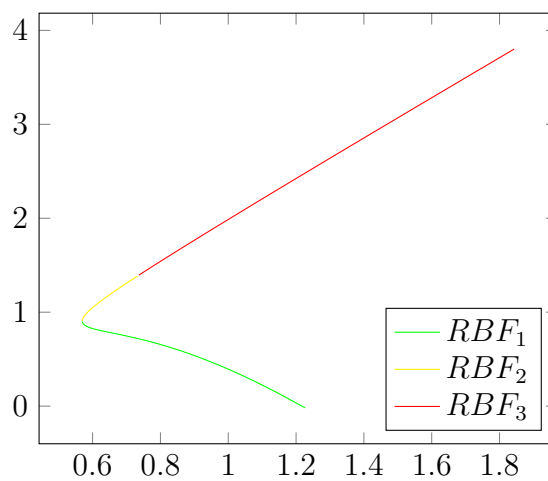
Per meglio comprendere la RBF, è possibile suddividere l'insieme dei punti da questa rappresentati in tre diversi sototoinsiemi privi di punti comuni:

$$RBF = RBF_1 \cup RBF_2 \cup RBF_3 \quad (4.3)$$

La possibilità di suddividere la RBF in questi tre rami è garantita dall'esistenza di due particolari valori della TEV:



- $T_M$  che è il livello che rende tangenti la RBF e la MVF nel portafoglio  $M$ ;
- $T_Z$  che è il livello dal quale nasce il portafoglio a varianza minima per la RBF, identificato nella Figura 5.1 con la lettera  $Z$ .

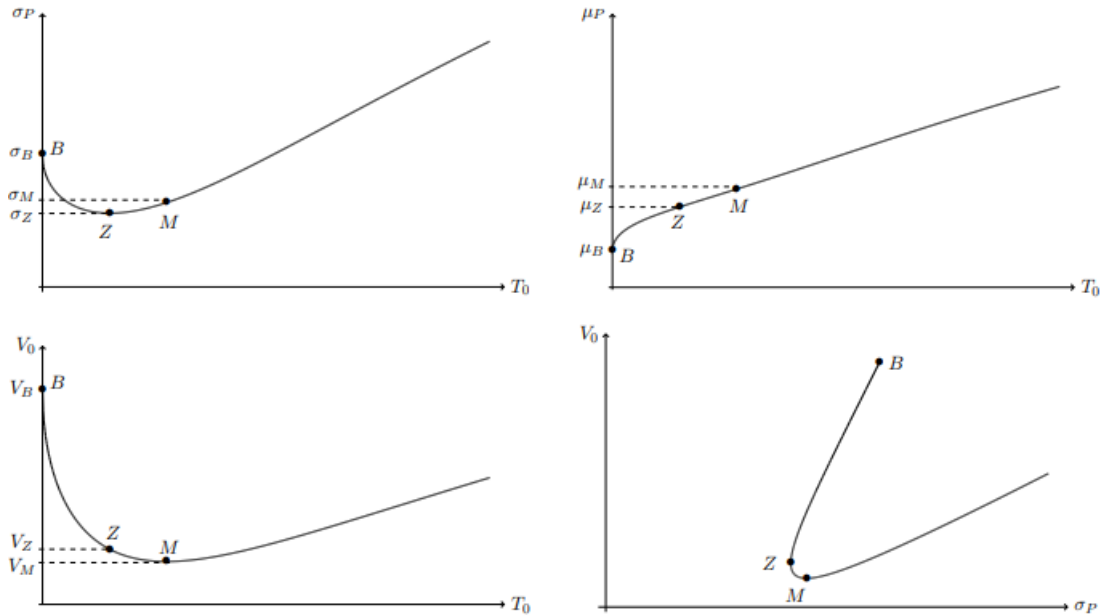
Figura 4.4: **Sottoinsiemi della RBF**

In particolare l'analisi differisce a seconda della relazione tra questi due valori. In Figura ?? si può vedere un esempio di rappresentazione grafica di questi tre insiemi quando vale  $T_Z \leq T_M$ . Nel caso in cui valga  $T_Z \leq T_M$ , infatti, il sottoinsieme  $RBF_1$  viene identificato come  $RBF_1 = \{q_p : 0 \leq \bar{T}_Z\}$ . Questo sottoinsieme è anche detto arco  $\widehat{BZ}$  poiché contiene la parte di RBF compresa tra il benchmark (B) e il portafoglio a varianza minima ( $Z$ ). Lungo questo arco, la frontiera compensa valori meno stringenti di vincolo sulla TEV con una diminuzione di VaR e varianza di portafoglio fino a giungere al portafoglio  $Z$  a varianza minima per la RBF.

Il sottoinsieme  $RBF_2$  contiene invece i portafogli tali che  $RBF_2 = \{\mathbf{q}_p : T_Z < \bar{T} \leq T_M\}$  e viene identificato nell'arco  $\widehat{ZM}$ . Il portafoglio  $M$ , definito in Palomba e Riccetti (2012) nel caso del *Minimum Bound* (nella sezione 4.1), qui è il portafoglio con il minimo VaR, nel quale la RBF risulta tangente alla MVF. La definizione di  $M$  resta la stessa di Palomba e Riccetti (2012)  $M \equiv (\sigma_0^2 + d \frac{\sigma_0^2}{z_\theta^2 - d}, \mu_0 + d \frac{\sigma_0}{\sqrt{z_\theta^2 - d}})$ . In questo arco della frontiera si ha ancora un VaR che diminuisce all'aumentare della TEV, fino a raggiungere il suo minimo in  $M$ , mentre la varianza torna a salire, dopo che nel ramo precedente aveva già toccato il suo minimo. Tale relazione discendente per il VaR è dovuta al fatto che, al crescere marginale della varianza, si associano anche rendimenti più alti ai portafogli dell'arco  $\widehat{ZM}$ . L'ultimo sottoinsieme  $RBF_3$  è tale che  $RBF_3 = \{\mathbf{q}_p : \bar{T} > T_M\}$  ed è composto da tutti i portafogli la cui TEV supera quella del portafoglio  $M$ , sempre nell'ipotesi  $T_Z \leq T_M$ . In questo ramo della frontiera, al crescere della TEV si accompagna la crescita dei rendimenti, della varianza, ma anche del livello di VaR. Questo caso non viene discusso nel dettaglio poiché i portafogli su questo ramo sono fortemente rischiosi e dunque non appetibili per sponsor avversi al rischio. Le relazioni tra indicatori di rischio e rendimento sulla RBF sono meglio rappresentate nella Figura 4.5 proveniente proprio dal paper di Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022).

Se  $T_Z \geq T_M$ , si ha il caso particolare del benchmark aggressivo, situazione nella quale il benchmark è il portafoglio più rischioso. In questo caso l'indebolimento del vincolo sulla TEV viene utilizzato per ridurre la rischiosità, anziché per aumentare i rendimenti. Inoltre la divisione a tre sottoinsiemi della

Figura 4.5: Relazione tra le diverse quantità nella RBF



Fonte dati: Lucchetti, Nicolau, Palomba, Riccetti (2022)

RBF non viene mantenuta poiché qui, fatti salvi casi di TEV irrealisticamente elevati, il ramo  $RBF_3$  contiene portafogli inefficienti. I primi due sottoinsiemi sono invece  $RBF_1 = \{\mathbf{q}_p : 0 \leq \bar{T} < T_M\}$  e  $RBF_2 = \{\mathbf{q}_p : T_M \leq \bar{T} \leq T_Z\}$ . La RBF presenta inoltre l'utilità di far comprendere quali siano gli orientamenti del fondo in merito a rendimento e rischio e permette di monitorare l'operato del manager nel rispettare tali visioni. Questa frontiera, inoltre, riesce a fornire portafogli capaci di ridurre in maniera molto significativa l'efficiency loss, nel rispetto di un doppio vincolo.



# Capitolo 5

## Analisi Empirica

### 5.1 Applicazione empirica della RBF

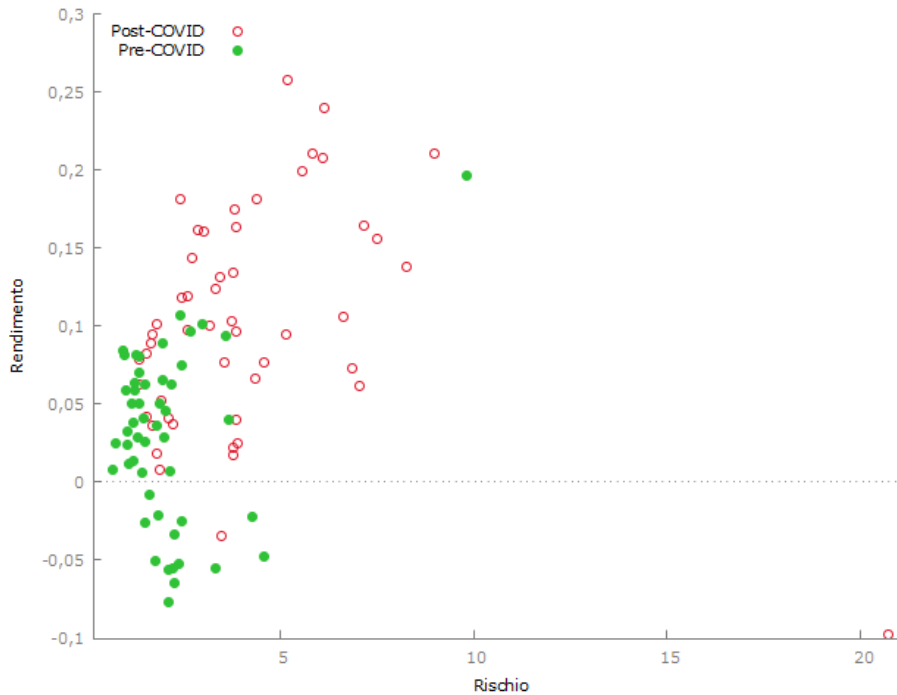
Per comprendere il funzionamento della RBF è possibile provare ad applicarla su un indice di mercato. Nel paper di Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022) tale applicazione viene condotta sui dati relativi ai titoli dello S&P100. In questo lavoro verrà invece utilizzato il *DJ EuroStoxx 50*, un indice che contiene 50 titoli appartenenti al mercato Europeo che possono essere considerati delle "Blue Chip" per l'area. I dati scelti non hanno potuto ovviamente riflettere la composizione del benchmark in ogni periodo dato che le quote dei titoli presenti nel paniere vengono spesso aggiornate per riflettere i cambiamenti nel mercato. È stato inoltre necessario cambiare alcune dei titoli presenti nell'indice a causa della scarsità di dati per alcuni di loro. Sono state quindi effettuate delle sostituzioni per alcune serie con titoli precedentemente inseriti nel paniere e con una maggiore abbondanza di rilevazioni.

In particolare i titoli "Prosus N.V.", "Hermes" e "Adyen N.V." non disponevano di rilevazioni sufficienti e sono pertanto stati sostituiti con i dati relativi a "Amadeus IT Group", "Société Générale Société anonyme" e "Vivendi SA", tutti precedentemente presenti nell'Euro Stoxx 50 nel periodo considerato<sup>1</sup>. I dati presi in considerazione sono quelli relativi al periodo che va dal 31-12-2017 al 05-02-2022. I rendimenti vengono calcolati mediante la differenza prima dei logaritmi dei prezzi, identificati nel valore di "Adjusted Close" per ogni singola giornata di negoziazione. Le osservazioni vengono divise in due diversi sottocampioni, uno che comprendente i due anni precedenti allo scoppio della pandemia da COVID-19 (dall'01/02/2018 al 31/12/2019) e l'altro contenente gli anni relativi alla situazione emergenziale (dall' 01/04/2020 al 05/02/2022). Tale scelta segue quella effettuata in Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022) in modo tale da analizzare il comportamento della frontiera in periodi ordinari di mercato e in periodi *straordinari* caratterizzati da alta volatilità. Come si può notare dalla Figura 5.1, anche nell'Eurostoxx 50, i dati relativi al periodo post-pandemia presentano una volatilità e dei rendimenti maggiori rispetto a quelli del periodo precedente.

---

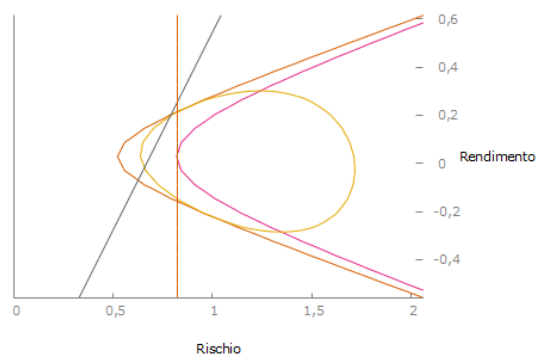
<sup>1</sup>dati presi da <https://finance.yahoo.com>

Figura 5.1: Rendimenti dei titoli contenuti nell'Euro Stoxx dall'01/01/2018 al 05/02/2022

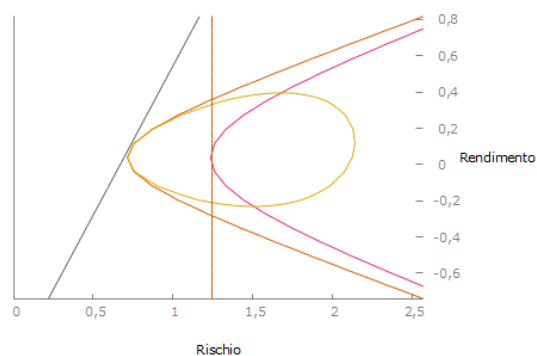


L'analisi qui tiene conto in particolare della MVF, MTF, CTF, CVF e una retta verticale in corrispondenza ad un dato livello di varianza, che è possibile utilizzare come ulteriore vincolo<sup>2</sup>. Mettendo a confronto le situazioni relative ai due campioni scelti, gli scenari ottenuti sono quelli in Figura 5.2 dove il vincolo sul VaR è fissato al livello  $VaR = 1.1$ , la TEV è fissata come  $\bar{T} = 1$  e la linea verticale arancione è fissata in corrispondenza ad una varianza pari a quella del Benchmark. Qui si sceglie dunque di privilegiare gli interessi degli sponsor, fornendo un livello di VaR abbastanza stringente.

<sup>2</sup>Approccio descritto in Palomba e Riccetti (2019).

Figura 5.2: **Rappresentazione grafica delle diverse frontiere**

(a) Situazione Pre-COVID



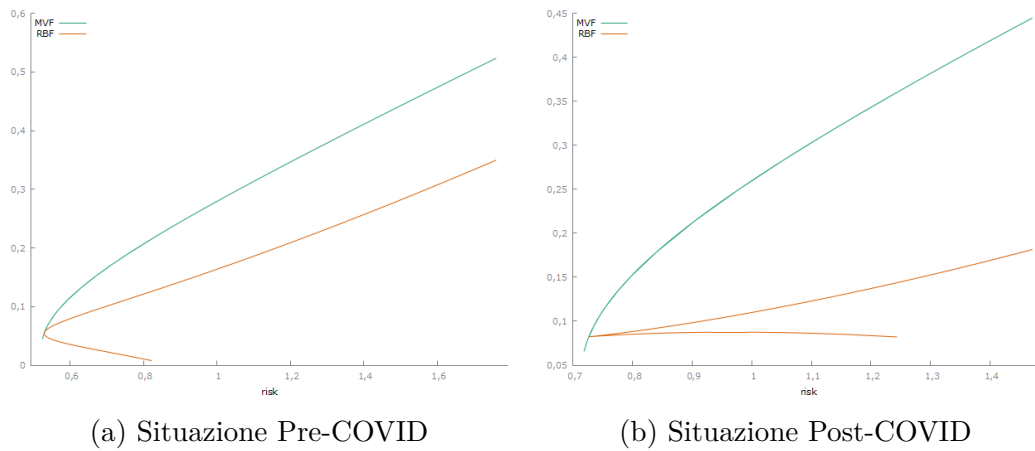
(b) Situazione Post-COVID

Osservando il grafico 5.2a si nota che nel periodo precedente al COVID-19 il benchmark risulta avere rendimenti inferiori a quelli del portafoglio a Varianza Minima. Il benchmark è quindi un portafoglio dominato, per il criterio Media-Varianza, dal portafoglio a varianza minima sulla MVF. Questo comporta una serie di caratteristiche diverse per le frontiere di portafoglio tracciate in que-



sto periodo, a cominciare dalla CTF, per la quale l'asse centrale risulta essere ora orientato negativamente. Nonostante quindi valga  $\Delta_1 < 0$ , la condizione  $4(d\Delta_2 - \Delta_1^2) > 0$  risulta verificata e pertanto il problema di ottimo di Jorion (2003) restituisce ancora una ellisse nello spazio  $(\sigma^2, \mu)$ . Visto che i parametri con cui si definisce la FVTF in questo esempio differiscono da quelli in Palomba e Riccetti (2012) (a causa della presenza di  $\Delta_1 < 0$ ), si prende come riferimento il Technical Supplement degli stessi autori, che però in questo caso non rileva forti differenze con l'analisi di base condotta nel capitolo 4. Nel periodo pandemico  $\Delta_1$  torna ad essere maggiore di zero e il vincolo sulla TEV è in grado di rendere tangenti le frontiere CTF ed MVF. Il portafoglio che si trova all'intersezione delle due viene definito in Palomba e Riccetti (2012) col nome di  $H$ . L'emergere di questo punto di tangenza mostra come, in questo caso, il livello di *Efficiency Loss* sia esattamente pari al vincolo che si è fissato per la TEV (vale quindi  $\bar{T} = \delta_b$ ), fornendo alla CTF la capacità di individuare in modo autonomo un portafoglio con  $\delta_b = 0$ . Andando ora a confrontare le frontiere nei due periodi è sufficiente prendere come riferimento il vincolo del VaR e la linea della varianza del Benchmark, per vedere come vi sia effettivamente stata una forte crescita della volatilità. Il vincolo sul VaR nel periodo pre-covid rientra nel caso del *Medium Bound* di Palomba e Riccetti (2012), mentre lo stesso livello nel corso dell'emergenza pandemica rientra nel caso dello *Small Bound* diventando di fatto troppo stringente. La perdita di efficienza della MTF risulta sicuramente maggiorata come si nota dall'incremento della distanza che intercorre tra quest'ultima e la MVF nel periodo post-COVID.

Figura 5.3: Rappresentazione grafica della RBF



La Figura 5.3 mostra invece la rappresentazione della RBF per questo periodo. È possibile vedere come l'aumento della volatilità e dei rendimenti abbiano impattato sulla RBF, allontanando notevolmente il sottosistema  $RBF_3$  dalla MVF. L'allontanamento del sottosistema  $RBF_3$  (definito nell'Equazione 4.3) dalla MVF comporta però una *maggiore efficiency loss* esattamente come era avvenuto nel paper Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022). Per quanto riguarda gli altri sottosistemi della RBF, nella Figura 5.3b i portafogli  $M$  e  $Z$  coincidono, andando di fatto a rendere un unico insieme  $RBF_1$  e  $RBF_2$ .

Tabella 5.1: Valori di riferimento dei Principali Portafogli

	Pre-COVID					Post-COVID				
Coefficiente Angolare Asintotico MVF/MTF ()	0,2944					0,3157				
Livello di confidenza corrispondente a $\sqrt{d}$	0,6158					0,6239				
$\Delta_1 = \mu_b - \mu_c$	-0,02015					0,04382				
$\Delta_2 = \sigma_b^2 - \sigma_c^2$	0,4039					1,039				
<b>Portafogli:</b>	B	C	TG	Z	M	B	C	TG	Z	M
Rendimenti	0,0079	0,0281	0,8693	0,0545	0,0560	0,0822	0,0383	1,3597	0,0824	0,0824
Variance	0,6763	0,2723	8,4361	0,2808	0,2813	1,5469	0,5083	18,0262	0,5277	0,5277
Dev Standard	0,8224	0,5219	2,9045	0,5299	0,5304	1,2437	0,7129	4,2457	0,7264	0,7264
SR	0,0096	0,0538	0,2993	0,1029	0,1056	0,0661	0,0538	0,3202	0,1134	0,1134
Alpha	0,0000	0,0201	0,8614	0,0466	0,0481	0,0000	-0,0438	1,2775	0,0002	0,0002
TEV	0,0000	0,4039	8,9588	0,4000	0,4260	0,0000	1,0386	17,3945	1,0193	1,0200
IR	0,0000	0,0499	0,0961	0,1165	0,1129	0,000	-0,0422	0,0734	0,0002	0,0002
Efficiency Loss	0,3993	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	1,0193	0,0000	0,0000	0,0000	0,000
VaR	1,3448	0,8303	3,9082	0,8171	0,8165	1,9636	1,1343	5,6239	1,1125	1,1125
$x1(\mathbf{q}_p)$	1,000	-	-	0,0309	-0,0047	1,000	-	-	0,0316	-0,0049
$x2(\mathbf{q}_p)$	0,000	-	-	0,0334	0,0483	0,000	-	-	0,0464	0,0483
$x3(\mathbf{q}_p)$	0,000	-	-	0,9369	0,9713	0,000	-	-	0,9220	0,9567

Tutte queste relazioni vengono confermate dal contenuto della Tabella 5.1, nella quale vengono riportate le informazioni relative ai portafogli che compongono la *Three Funds Separation* per la RBF (definiti nell'equazione (4.2)) e i due portafogli che rendono possibile la suddivisione della frontiera ( $Z$  e  $M$ ). Si nota immediatamente dalla Tabella 5.1 come vi sia stato un andamento discordante delle quantità legate alla performance dei diversi portafogli, rappresentate dalla Information Ratio (IR definito nell'equazione (2.10)) e dallo Sharpe Ratio (SR definito nell'equazione (2.11)). Lo sharpe ratio subisce un miglioramento dal periodo pre-COVID a quello post-COVID mentre l'Information ratio subisce un peggioramento. Questo cambiamento è dovuto alle diverse modalità di calcolo dei due indicatori e mostra come, nello Sharpe Ratio, l'aumento di rischio sia stato adeguatamente compensato dal differenziale di rendimento tra i portafogli esaminati e il titolo risk-free (in questo esempio considerato

$\mu_f = 0$  per la formula (2.10)). Nel caso dell'IR invece l'extra-rendimento dei portafogli sul benchmark non è sufficiente a compensare l'aumento di TEV che si riscontra nel periodo Post-Pandemico (visibile anche nella Tabella 5.1), portando l'indicatore a toccare anche livelli negativi.

I pesi  $x1(\mathbf{q}_p^*)$ ,  $x2(\mathbf{q}_p^*)$  e  $x3(\mathbf{q}_p^*)$  rimangono invece molto simili nei due periodi a parte una lieve diminuzione delle quantità investite nel portafoglio a varianza minima e un aumento della quota relativa al portafoglio che massimizza lo Sharpe Ratio.

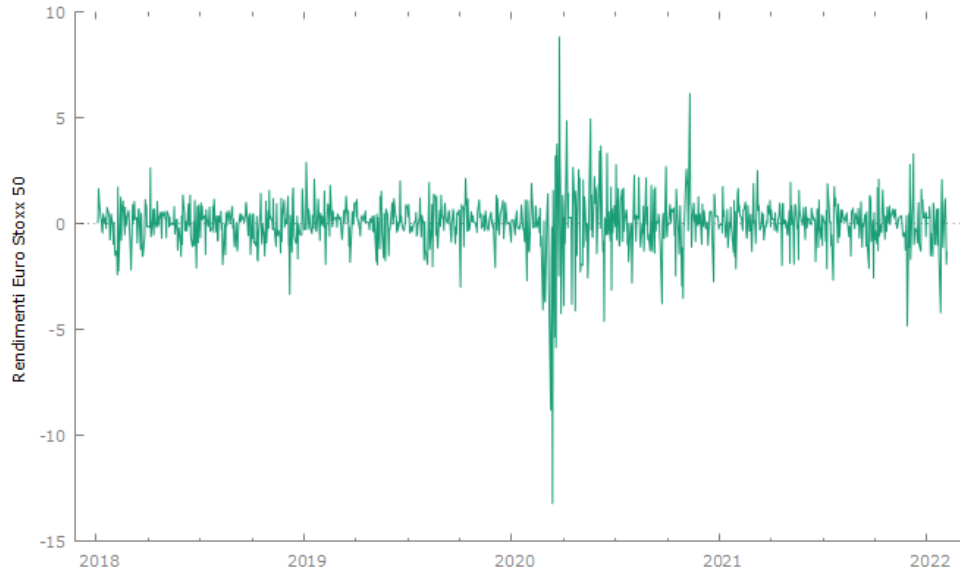
## 5.2 Un'analisi per dati trimestrali

Dopo aver suddiviso il periodo delle osservazioni in due macro-blocchi è possibile dividerle nuovamente, in intervalli più brevi in modo da poter condurre un'analisi dettagliata circa le variazioni della RBF e il suo comportamento in un periodo particolare come quello pandemico. Andando a rappresentare la serie dei rendimenti del benchmark e mettendola in relazione con il tempo sull'asse delle ascisse (come fatto in Figura 5.4), è infatti possibile notare come la varianza sia caratterizzata dall'andamento a "*grappoli*" tipico delle serie finanziarie<sup>3</sup>, ma soprattutto come questi grappoli siano concentrati maggiormente in alcuni dei periodi più critici della pandemia.

---

<sup>3</sup>Si intende che i periodi di alta volatilità tendono a raggrupparsi tra loro, o per citare il premio Nobel Benoit B. Mandelbrot "A grandi cambiamenti seguono grandi cambiamenti e a piccoli cambiamenti seguono piccoli cambiamenti di entrambi i segni".

Figura 5.4: **Rendimenti giornalieri Euro Stoxx dall'01/01/2018 al 05/02/2022**



In questa sezione si ripete l'analisi relativa all'Euro Stock 50 su dati trimestrali.

Si parte dalla definizione dei vincoli inseriti nella Tabella 5.2.

Tabella 5.2: **Valori di Riferimento per l'analisi**

Pre-COVID		Post-COVID
Vincolo Rendimento	0,0281	0,2918
Extra-rendimento	0,0202	0.2096
Vincolo TEV	1,0000	1,0000
Vincolo VaR ( $V'$ )	1,325	1,754
Liv. di Confidenza	0,99	0,99

Per evitare che il livello di vincolo sul VaR perdesse di generalità, si è scelto di fissare due valori diversi, uno per i trimestri prima del COVID-19 e uno per i trimestri successivi, seppur seguendo una stessa modalità di decisione.

Il vincolo utilizzato è il *Simple Bound* descritto in Alexander e Baptista come  $V' = VaR[\theta, R_{qB}] - \bar{G}$ ; col quale si va a sottrarre al VaR del Benchmark il livello di extra-rendimento richiesto. Questo semplice modo di fissare un vincolo garantisce di ottenere un livello di VaR minore rispetto a quello del benchmark, andando a spostare verso sinistra la CVF. La rigidità aggiuntiva dipende interamente dalle scelte in merito all'extra-rendimento richiesto. Qui si è scelto di fissare un livello di  $G$  per il periodo Pre-COVID e uno per il periodo Post-COVID. Tali livelli di  $G$  sono pari al 155% del rendimento del rispettivo Benchmark aggregato contenuto nella Tabella 5.1. Nonostante questa percentuale per l'extra-rendimento sia molto elevata, essa ammonta esattamente alla differenza tra il rendimento del Benchmark ( $B$ ) e del portafoglio a varianza minima ( $P_0$ ) nel periodo 01/02/2018-31/12/2019 (Tabella 5.1). L'ammontare di questo vincolo può essere facilmente desunto osservando quello sul rendimento nella 5.2, fissato allo scopo di analizzare anche il comportamento di un portafoglio, appartenente alla RBF, con un particolare rendimento vincolato. Per quanto riguarda il livello di confidenza richiesto, è necessario aumentare il valore di  $\theta$ , in quanto vi sono numerosi trimestri in cui  $\Phi(\sqrt{d})$  ha un valore maggiore di 0.95. Per questo motivo si sceglie  $\theta = 0.99$ . Nonostante sia tecnicamente possibile condurre comunque l'analisi per la RBF questo porterebbe a risultati diversi da quelli descritti nella relazione 4.3. I portafogli  $M$  e  $Z$  infatti, non risponderebbero più ai ruoli di portafoglio con

VaR minimo e con varianza minima. Il livello del vincolo sulla TEV viene invece mantenuto costante nelle analisi per i trimestri di entrambi i periodi. Tale valore è anche lo stesso utilizzato nella Tabella 5.1 e risulta interessante dato che è il valore che rende CTF ed MVF tangenti nel periodo aggregato Post-COVID. I livelli dei vincoli su VaR e TEV qui, sono pensati per fornire una maggiore attenzione agli interessi degli sponsor, dato che la restrizione su  $\bar{T}$  è quella con un valore relativamente più elevato.

Tabella 5.3: Analisi Pre-COVID

1° Trimestre 01/02/2018-01/05/2018								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	-0,0280	0,0614	0,1404	0,1185	0,1359	0,1359	0,1174	0,0281
Varianza	0,9380	0,0022	0,0051	0,0037	0,0056	0,3944	0,0037	0,8237
Dev. Standard	0,9685	0,0473	0,0715	0,0611	0,0748	0,6280	0,0610	0,8826
SR	-0,0289	1,2994	1,9645	1,9388	1,8170	0,2165	1,9260	0,0318
Alpha	0,0000	0,0895	0,1685	0,1465	0,1640	0,1640	0,1454	0,0561
TEV	0,0000	0,9357	0,9451	0,9419	1,0000	2,5392	0,9300	0,0050
IR	0,0000	0,0956	0,1782	0,1555	0,1640	0,0646	0,1564	11,288
EffLoss	0,9320	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,3896	0,0000	0,8210
VaR	2,2810	0,0486	0,0259	0,0237	0,0381	1,3250	0,0244	2,0250
$x_1$	1,000	-	-	0,0010	-	-	0,0063	0,9128
$x_2$	0,000	-	-	0,7200	-	-	0,7155	0,9088
$x_3$	0,000	-	-	0,2790	-	-	0,2782	-0,8216
2° Trimestre 01/05/2018-01/08/2018								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	-0,0166	0,0117	0,8361	0,1329	0,8432	0,8432	0,1306	0,0281
Varianza	0,5353	0,0029	0,2106	0,0074	0,2368	0,8686	0,0073	0,4859
Dev. Standard	0,7316	0,0542	0,4590	0,0862	0,4867	0,9320	0,0854	0,6518
SR	-0,0227	0,2151	1,8217	1,5419	1,7325	0,9047	1,5288	0,0431
Alpha	0,0000	0,0283	0,8527	0,1495	0,8598	0,8598	0,1472	0,0447
TEV	0,0000	0,5323	0,7543	0,5389	1,0000	2,5926	0,5300	0,0018
IR	0,0000	0,0531	1,1305	0,2775	0,8598	0,3316	0,2777	24,808
EffLoss	0,5321	0,0000	0,0000	0,0000	0,0226	0,6544	0,0000	0,4829
VaR	1,7186	0,1144	0,2316	0,0676	0,2890	1,3250	0,0681	1,4882
$x_1$	1,000	-	-	-0,0010	-	-	0,0082	0,8885
$x_2$	0,000	-	-	0,1475	-	-	0,1445	0,1239
$x_3$	0,000	-	-	0,8535	-	-	0,8473	-0,0125

Tabella 5.4: **Analisi Pre-COVID**

<b>3° Trimestre 01/08/2018-01/11/2018</b>								
<b>Portafogli</b>	<b>B</b>	$P_0$	<b>Q</b>	<b>M</b>	<b>K</b>	<b>VT</b>	<b>RBF:Z</b>	<b>RBF:P</b>
Rendimento	-0,1426	-0,0899	-1,1125	0,1171	0,3208	0,3208	0,1007	0,0281
Varianza	0,6177	0,0534	0,6611	0,0784	0,1859	0,5005	0,0761	0,2723
Dev. Standard	0,7859	0,2312	0,8131	0,2799	0,4311	0,7075	0,2759	0,5237
SR	-0,1815	-0,3890	-1,3682	0,4184	0,7441	0,4535	0,3652	0,0537
Alpha	0,0000	0,0527	-0,9699	0,2597	0,4634	0,4634	0,2434	0,1707
TEV	0,0000	0,5643	1,1093	0,6019	1,0000	1,9228	0,5400	0,1016
IR	0,0000	0,0934	-0,8743	0,4316	0,4634	0,2410	0,4507	1,6800
EffLoss	0,5626	0,0000	0,0000	0,0000	0,0344	0,3490	0,0015	0,2108
VaR	1,9710	0,6277	3,0040	0,5341	0,6821	1,3250	0,5410	1,1902
$\mathbf{x1}$	1,000	-	-	0,0015	-	-	0,0521,	0,6152
$\mathbf{x2}$	0,000	-	-	-0,2020	-	-	-0,1892	-0,1458
$\mathbf{x3}$	0,000	-	-	1,2005	-	-	1,1371	0,5306
<b>4° Trimestre 01/11/2018-01/02/2019</b>								
<b>Portafogli</b>	<b>B</b>	$P_0$	<b>Q</b>	<b>M</b>	<b>K</b>	<b>VT</b>	<b>RBF:Z</b>	<b>RBF:P</b>
Rendimento	-0,0124	-0,0501	-2,8349	0,2641	0,3126	0,3126	0,2481	0,0281
Varianza	0,8927	0,0622	3,5201	0,1062	0,1251	0,4955	0,1034	0,8126
Dev. Standard	0,9448	0,2493	1,8762	0,3258	0,3536	0,7039	0,3215	0,8648
SR	-0,0131	-0,2008	-1,5110	0,8104	0,8839	0,4440	0,7718	0,0325
Alpha	0,0000	-0,0377	-2,8226	0,2764	0,3249	0,3249	0,2605	0,0405
TEV	0,0000	0,8305	4,3821	0,8640	1,0000	2,3669	0,7900	0,0029
IR	0,0000	-0,0454	-0,6441	0,3200	0,3249	0,1373	0,3298	14,0757
EffLoss	0,8299	0,0000	0,0000	0,0000	0,0042	0,3747	0,0015	0,7477
VaR	2,2104	0,6301	7,1996	0,4940	0,5101	1,3250	0,4998	1,9837
$\mathbf{x1}$	1,000	-	-	0,0022	-	-	0,0432,	0,9052
$\mathbf{x2}$	0,000	-	-	-0,1124	-	-	-0,1065	-0,0284
$\mathbf{x3}$	0,000	-	-	1,1102	-	-	1,0633	0,1232
<b>5° Trimestre 01/02/2019-01/05/2019</b>								
<b>Portafogli</b>	<b>B</b>	$P_0$	<b>Q</b>	<b>M</b>	<b>K</b>	<b>VT</b>	<b>RBF:Z</b>	<b>RBF:P</b>
Rendimento	0,1607	0,1677	1,8741	-0,5898	2,7502	2,7502	1,0616	0,0281
Varianza	0,4088	0,0332	0,3715	0,0999	0,8283	3,0686	0,2088	0,4585
Dev. Standard	0,6394	0,1823	0,6095	0,3160	0,9101	1,7517	0,4570	0,5832
SR	0,2514	0,9196	3,0748	-1,8662	3,0218	1,5700	2,3231	0,0482
Alpha	0,0000	0,0069	1,7134	-0,7505	2,5894	2,5894	0,9009	-0,1326
TEV	0,0000	0,3756	0,7166	0,4410	1,0000	5,2579	0,2000	0,0035
IR	0,0000	0,0184	2,3910	-1,7019	2,5894	0,4925	4,5043	-38,4066
EffLoss	0,3756	0,0000	0,0000	0,0000	0,0203	2,2606	0,0828	0,4230
VaR	1,3267	0,2564	-0,4562	1,3250	-0,6329	1,3250	0,0015	1,3287
$\mathbf{x1}$	1,000	-	-	0,4694	-	-	0,7138	0,2111
$\mathbf{x2}$	0,000	-	-	0,5258	-	-	0,4828	3,7504
$\mathbf{x3}$	0,000	-	-	0,0048	-	-	-0,1966	-2,9615



Tabella 5.5: Analisi Pre-COVID

6° Trimestre 01/05/2019-01/08/2019								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	-0,0401	-0,0150	-10,3712	0,4440	0,7716	0,7716	0,3735	0,0281
Varianza	0,6518	0,0501	34,5211	0,1178	0,2616	0,8122	0,1038	0,5732
Dev. Standard	0,8073	0,2238	5,8755	0,3432	0,5114	0,9012	0,3221	0,7315
SR	-0,0497	-0,0672	-1,7652	1,2936	1,5087	0,8561	1,1593	0,0384
Alpha	0,0000	0,0250	-10,3311	0,4841	0,8117	0,8117	0,4136	0,0682
TEV	0,0000	0,6017	34,9060	0,6768	1,0000	2,5407	0,5500	0,0043
IR	0,0000	0,0416	-0,2960	0,7152	0,8117	0,3195	0,7519	15,9591
EffLoss	0,6015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0126	0,5633	0,0052	0,5225
VaR	1,9182	0,5356	24,0395	0,3545	0,4182	1,3250	0,3759	1,6735
$\mathbf{x1}$	1,000	-	-	-0,0020	-	-	0,0928	0,8960
$\mathbf{x2}$	0,000	-	-	-0,0445	-	-	-0,0377	-0,0098
$\mathbf{x3}$	0,000	-	-	1,0466	-	-	0,9449	0,1138
7° Trimestre 01/08/2019-01/11/2019								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,0661	0,2094	1,1840	0,8124	0,8441	0,8441	0,6720	0,0281
Varianza	0,8672	0,0589	0,3329	0,1638	0,1753	0,8694	0,1305	0,9143
Dev. Standard	0,9312	0,2427	0,5770	0,4047	0,4186	0,9324	0,3613	0,8548
SR	0,0709	0,8631	2,0521	2,0075	2,0163	0,9053	1,8602	0,0329
Alpha	0,0000	0,1434	1,1179	0,7464	0,7780	0,7780	0,6060	-0,0380
TEV	0,0000	0,8083	1,1629	0,9631	1,0000	3,1640	0,7400	0,0010
IR	0,0000	0,1774	0,9613	0,7750	0,7780	0,2459	0,8189	-38,2847
EffLoss	0,8024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,6943	0,0099	0,8459
VaR	2,1003	0,3551	0,1582	0,1290	0,1298	1,3250	0,1684	1,9605
$\mathbf{x1}$	1,000	-	-	0,0012	-	-	0,1110	0,9149
$\mathbf{x2}$	0,000	-	-	0,6163	-	-	0,4910	0,1112
$\mathbf{x3}$	0,000	-	-	0,3824	-	-	0,3980	-0,0261

Nella Tabella 5.3 e successive vengono analizzati gli stessi portafogli della Tabella 5.1 con l'aggiunta di  $P$  che è quello sulla RBF con il rendimento vincolato per  $\bar{\mu}_p$ . Vengono inoltre analizzati anche i portafogli  $K$  e  $VT$  necessari a fornire il comportamento della FVTF. Il portafoglio  $K$  va infatti ad individuare il risultato della ricerca del VaR tangente una volta vincolata la TEV, mentre  $VT$  risponde alla stessa esigenza ma lasciando vincolato solo il VaR e mantenendo costante il rendimento.

Osservando solo periodo precedente alla pandemia da COVID-19, si nota come il rendimento dell'Euro Stoxx 50 e delle sue componenti sia stato negativo per diversi periodi. Questi valori nei rendimenti hanno portato una serie di conseguenze anche negli altri portafogli. Se si valuta il portafoglio  $P_0$ , ad

esempio, si può notare nelle Tabelle 5.4 e 5.5, come nel terzo, quarto e sesto trimestre questo abbia registrato rendimenti negativi, spingendosi dunque al di sotto del rendimento del titolo risk-free. Un'importante conseguenza di questo fatto è che la derivazione del portafoglio con massimo Sharpe Ratio restituisce risultati contro intuitivi. Se si prende ad esempio il trimestre Maggio-Agosto 2019, si può notare come il portafoglio di tangenza  $TG$  risulti avere un rendimento particolarmente negativo e che il suo Sharpe Ratio (definito nella 2.10) sia, sì quello più grande in valore assoluto ma, con segno negativo. Le ragioni dietro questo risultato vengono documentate in Robert Merton (1972), dove si mostra come quando si cerca il portafoglio di tangenza ( $TG$ ) nei periodi in cui  $P_0$  ha rendimenti minori di quelli del titolo risk-free, l'unico punto di tangenza è quello nella parte inefficiente della curva Media-Varianza. Nonostante un tale risultato, a priori, scoraggerebbe l'investimento in un simile portafoglio fornendogli così scarso valore economico, in McLeod e Van Vuuren (2004), si cerca comunque di fornire una spiegazione logica alla scelta suggerita dall'indicatore. Nel paper viene dimostrato come, sfruttando l'ipotesi di normalità contenuta nel modello di Markowitz, sia possibile indicare lo Sharpe Ratio come la probabilità che la distribuzione dei rendimenti restituisca un valore maggiore del Risk-free rate. In questo caso quindi la scelta di un portafoglio come  $TG = (-10.3712, 5.87559)$  risulta giustificata. Il portafoglio con massimo Sharpe Ratio infatti presenta una maggiore volatilità e quindi dei valori più grandi sulle code, nonché una maggiore probabilità che questi vengano raggiunti, compreso il valore pari al rendimento risk-free. I risultati nei trimestri 3, 4 e 6 non vanno dunque ad invalidare quanto visto finora per le diverse

frontiere di portafoglio.

I portafogli della RBF ( $M$ ,  $Z$  e  $P$ ) mantengono invece un rendimento positivo, con una variabilità limitata e una buona performance in termini di SR ed IR. Per quanto riguarda i pesi  $\mathbf{x1}$ ,  $\mathbf{x2}$  e  $\mathbf{x3}$  si nota come durante i periodi considerati, questi varino considerevolmente. Degno di nota è però il fatto che il portafoglio tangente  $TG$  viene penalizzato in fasi di mercato con rendimenti negativi, venendo sempre venduto allo scoperto. Negli altri trimestri è invece più frequente osservare pesi negativi per il Benchmark. Di particolare rilevanza è anche il quinto trimestre, dove si nota che i portafogli sulla RBF, seppur continuando ad esistere, assumono comportamenti diversi da quelli ordinari. Il portafoglio con VaR minimo  $M$ , ad esempio, ha rendimento negativo e il suo VaR risulta maggiore di quello di  $Z$  e di  $P$ . Questo è dovuto, come spiegato nell'introdurre i vincoli nella Tabella 5.2, al livello di significatività, che non risulta sufficientemente elevato. Sarà dunque necessario ripetere l'analisi con un valore maggiore di  $\theta$  per giudicare opportunamente tali risultati. L'andamento grafico della frontiera nei trimestri Pre-COVID non presenta particolarità rilevanti, andando ad essere rappresentata in maniera simile a quanto fatto nella Figura 5.3a. Una performance decisamente positiva per il periodo viene mantenuta anche dai portafogli  $VT$  e  $K$ , dimostrando l'utilità di porre contemporaneamente dei vincoli su TEV e VaR.

Tabella 5.6: Analisi Post-COVID

1° Trimestre 01/04/2020-01/07/2020								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,2228	0,0934	4,6661	0,8139	0,8797	0,8797	0,7812	0,2918
Varianza	3,9804	0,1438	7,1867	0,3187	1,4188	1,4188	0,3080	3,7635
Dev. Standard	1,9951	0,3793	2,6808	0,5645	1,1911	1,1321	0,5549	1,9174
SR	0,1117	0,2463	1,7406	1,4417	0,7386	0,7770	1,4077	0,1522
Alpha	0,0000	-0,1294	4,4433	0,5910	0,6569	0,6569	0,5584	0,0690
TEV	0,0000	3,8366	10,4807	3,9486	1,0000	8,6802	3,6700	0,0050
IR	0,0000	-0,0337	0,4240	0,1497	0,6569	0,0757	0,1521	13,809
EffLoss	3,8309	0,0000	0,0000	0,0000	1,0667	0,9296	0,0048	3,6063
VaR	4,4185	0,7889	1,5703	0,4994	1,8913	1,7540	0,5098	4,1687
$x_1$	1,000	-	-	-0,0002	-	-	0,0353	0,9579
$x_2$	0,000	-	-	0,1576	-	-	0,1494	0,0225
$x_3$	0,000	-	-	0,8426	-	-	0,8153	0,0196
2° Trimestre 01/07/2020-01/10/2020								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	-0,0186	0,0115	40,1724	1,4092	0,8487	0,8487	0,9058	0,2918
Varianza	1,5050	0,1054	368,4980	0,5516	0,3399	1,2517	0,3244	1,1297
Dev. Standard	1,2268	0,3246	19,1963	0,7427	0,5830	1,1188	0,5695	1,0690
SR	-0,0151	0,0354	2,0927	1,8975	1,4556	0,7586	1,5905	0,2730
Alpha	0,0000	0,0301	40,1909	1,4278	0,8672	0,8672	0,9244	0,3104
TEV	0,0000	1,3997	370,3436	1,8651	1,0000	4,9071	1,1800	0,0543
IR	0,0000	0,0215	0,1085	0,7655	0,8672	0,1767	0,7834	5,7124
EffLoss	1,3995	0,0000	0,0000	0,0000	0,0745	0,9862	0,0363	1,0064
VaR	2,8725	0,7436	4,4849	0,3185	0,5077	1,7540	0,4191	2,1951
$x_1$	1,000	-	-	-0,0006	-	-	0,1611	0,8542
$x_2$	0,000	-	-	0,0349	-	-	0,0224	0,0073
$x_3$	0,000	-	-	0,9657	-	-	0,8165	0,1385

Tabella 5.7: Analisi Post-COVID

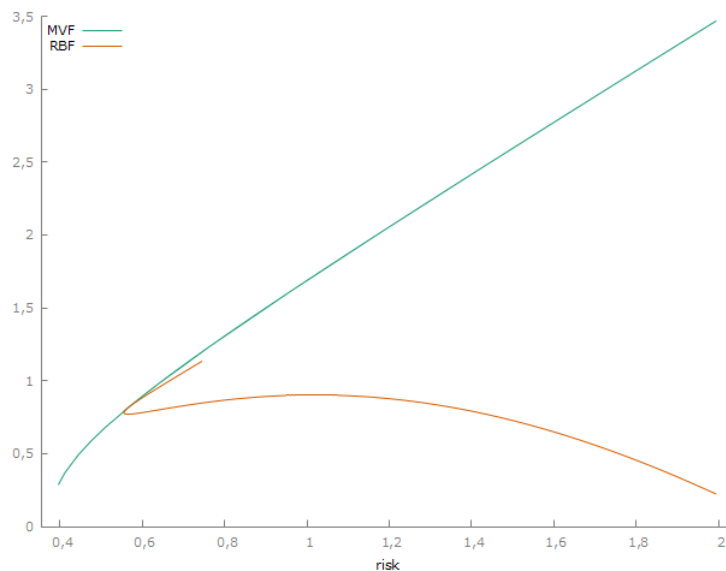
3° Trimestre 01/10/2020-01/01/2021								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,1649	0,1656	1,4666	0,6709	0,6452	0,6452	0,6343	0,2918
Varianza	1,7409	0,0734	0,6499	0,1604	0,2616	1,0636	0,1519	1,4806
Dev. Standard	1,3194	0,2709	0,8062	0,4004	0,5114	1,0313	0,3897	1,2084
SR	0,1250	0,6112	1,8192	1,6755	1,2615	0,6256	1,6277	0,2415
Alpha	0,0000	0,0006	1,3016	0,5060	0,4802	0,4802	0,4693	0,1269
TEV	0,0000	1,6676	2,2447	1,7548	1,0000	5,1243	1,5900	0,0170
IR	0,0000	0,0004	0,5799	0,2883	0,4802	0,0937	0,2952	7,4574
EffLoss	1,6676	0,0000	0,0000	0,0000	0,1098	0,9119	0,0037	1,4018
VaR	2,9046	0,4646	0,4088	0,2606	0,5446	1,7540	0,2723	2,5193
$x_1$	1,000	-	-	0,0013	-	-	0,0469	0,9098
$x_2$	0,000	-	-	0,3874	-	-	0,3603	0,1057
$x_3$	0,000	-	-	0,6114	-	-	0,5928	-0,015
4° Trimestre 01/01/2021-01/04/2021								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,1544	0,0321	3,8941	0,2608	0,3812	0,3812	0,2574	0,2918
Varianza	0,7021	0,0770	9,3533	0,1095	0,1925	0,8424	0,1090	0,1272
Dev. Standard	0,8379	0,2775	3,0583	0,3309	0,4387	0,9178	0,3302	0,3551
SR	0,1843	0,1155	1,2733	0,7880	0,8689	0,4153	0,7797	0,8217
Alpha	0,0000	-0,1223	3,7398	0,1064	0,2268	0,2268	0,1031	0,1374
TEV	0,0000	0,6251	9,3137	0,6228	1,0000	2,6407	0,5900	0,7787
IR	0,0000	-0,1957	0,4015	0,1709	0,2268	0,0859	0,1747	0,1765
EffLoss	0,6158	0,0000	0,0000	0,0000	0,0397	0,6896	0,0004	0,0083
VaR	1,7948	0,6134	3,2206	0,5091	0,6394	1,7540	0,5107	0,5344
$x_1$	1,000	-	-	0,0023	-	-	0,0266	-0,109
$x_2$	0,000	-	-	0,0591	-	-	0,0575	0,0705
$x_3$	0,000	-	-	0,9387	-	-	0,9158	1,0392

Tabella 5.8: **Analisi Post-COVID**

5° Trimestre 01/04/2021-01/07/2021								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,0605	0,1336	1,5469	0,5651	0,8826	0,8826	0,4827	0,2918
Varianza	0,6162	0,0703	0,8135	0,1395	0,2953	1,2845	0,1231	0,3393
Dev. Standard	0,7850	0,2651	0,9020	0,3736	0,5434	1,1334	0,3509	0,5848
SR	0,0771	0,5040	1,7150	1,5128	1,6242	0,7788	1,3757	0,4990
Alpha	0,0000	0,0731	1,4864	0,5046	0,8221	0,8221	0,4222	0,2313
TEV	0,0000	0,5460	1,3661	0,6387	1,0000	3,2801	0,4900	0,0718
IR	0,0000	0,1338	1,0881	0,7900	0,8221	0,2506	0,8616	3,2199
EffLoss	0,5440	0,0000	0,0000	0,0000	0,0163	1,0055	0,0075	0,2598
VaR	1,7656	0,4830	0,5514	0,3039	0,3816	1,7540	0,3336	1,0686
$x1$	1,000	-	-	-0,0009	-	-	0,1175	0,6950
$x2$	0,000	-	-	0,3059	-	-	0,2531	0,1458
$x3$	0,000	-	-	0,6950	-	-	0,6294	0,1592
6° Trimestre 01/07/2021-01/10/2021								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	-0,0107	-0,2410	-1,1358	0,3364	0,4835	0,4835	0,2948	0,2918
Varianza	0,8520	0,0656	0,3093	0,1670	0,2325	0,9251	0,1571	0,3257
Dev. Standard	0,9230	0,2562	0,5561	0,4087	0,4822	0,9618	0,3963	0,5708
SR	-0,0116	-0,9407	-2,0423	0,8230	1,0028	0,5027	0,7437	0,5112
Alpha	0,0000	-0,2303	-1,1251	0,3471	0,4942	0,4942	0,3054	0,3025
TEV	0,0000	0,7864	1,1554	0,8069	1,0000	3,0126	0,6900	0,2402
IR	0,0000	-0,2928	-0,9737	0,4301	0,4942	0,1640	0,4427	1,2591
EffLoss	0,7702	0,0000	0,0000	0,0000	0,0071	0,6997	0,0041	0,1737
VaR	2,1580	0,8369	2,4295	0,6144	0,6382	1,7540	0,6272	1,0361
$x1$	1,000	-	-	-0,0018	-	-	0,0732	0,4751
$x2$	0,000	-	-	-0,6475	-	-	-0,5799	-0,472
$x3$	0,000	-	-	1,6493	-	-	1,5067	0,9978
7° Trimestre 01/10/2021-01/01/2022								
Portafogli	B	$P_0$	Q	M	K	VT	RBF:Z	RBF:P
Rendimento	0,1011	0,1108	1,0614	0,3247	0,3109	0,3109	0,3183	0,2918
Varianza	1,2507	0,0643	0,6159	0,0922	0,0993	0,7878	0,0913	0,5950
Dev. Standard	1,1183	0,2536	0,7848	0,3037	0,3151	0,8876	0,3021	0,7738
SR	0,0904	0,4370	1,3524	1,0691	0,9866	0,3502	1,0537	0,3771
Alpha	0,0000	0,0097	0,9603	0,2236	0,2098	0,2098	0,2172	0,1907
TEV	0,0000	1,1863	1,7492	1,2168	1,0000	3,7336	1,1600	0,1625
IR	0,0000	0,0082	0,5490	0,1837	0,2098	0,0562	0,1872	1,1738
EffLoss	1,1863	0,0000	0,0000	0,0000	0,0105	0,6991	0,0007	0,5107
VaR	2,5005	0,4792	0,7644	0,3819	0,4222	1,7540	0,3844	1,5084
$x1$	1,000	-	-	-0,0013	-	-	0,0235	0,6588
$x2$	0,000	-	-	0,2254	-	-	0,2185	0,1956
$x3$	0,000	-	-	0,7759	-	-	0,7580	0,1456

Nel periodo post-COVID, fatta eccezione per il sesto trimestre, non si rilevano problematiche connesse allo Sharpe Ratio, segno che i rendimenti si mantengono stabilmente al di sopra di quelli del titolo risk-free. Questo è dovuto al forte aumento dei valori di rendimento e volatilità per i singoli asset, come visto anche nella Figura 5.1. Gli unici periodi con rendimenti minori di zero sono il secondo e il sesto trimestre, per i quali ha fortemente inciso la fine dell'estate e il nuovo aggravarsi della pandemia da COVID-19 in Europa<sup>4</sup>. In questo caso la forma della RBF nei diversi trimestri è simile a quella ottenuta nel periodo Post-COVID aggregato della figura 5.3b. L'unico periodo che rappresenta un'eccezione in tal senso è il primo trimestre, che si presenta come nella Figura 5.5.

Figura 5.5: **RBF nel trimestre Aprile-Luglio 2020**



<sup>4</sup><https://ourworldindata.org/grapher/daily-cases-covid-region>

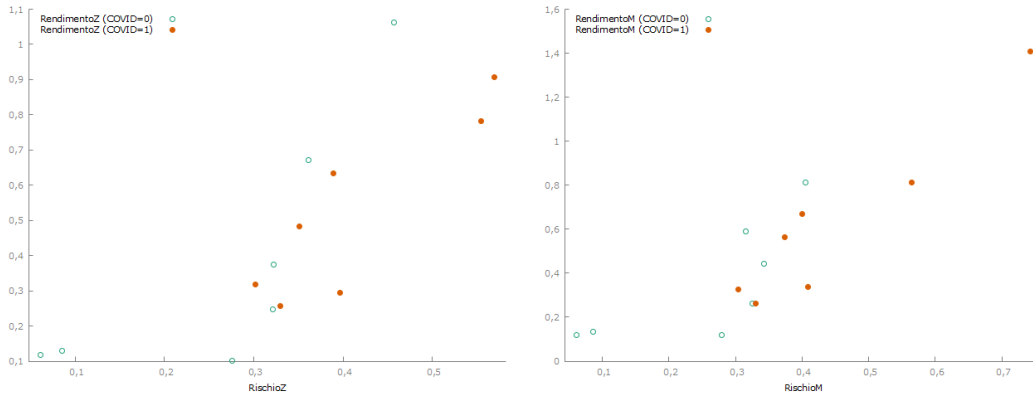
Questo periodo, tra tutti quelli esaminati, è quello in cui la TEV deve assumere il valore maggiore per consentire di arrivare ad un portafoglio di tangenza tra RBF ed MVF, come si può osservare dalla linea arancione nella Figura 5.5. Queste osservazioni sono immediatamente successive al primo picco della pandemia da COVID-19 nel febbraio 2020, osservabile anche nella Figura 5.4, che qui non viene analizzato per via della sua eccezionale volatilità dovuta a caratteristiche supposte come irripetibili, nella forma di pesanti outliers. È dunque possibile pensare che le osservazioni relative al periodo Aprile-Luglio 2020, abbiano il comportamento osservato nella Figura 5.5, unico nel campione qui utilizzato, a causa degli effetti della volatilità eccessiva del periodo precedente. Per questo motivo a questo periodo ci si riferirà da qui in avanti col nome di *picco post-pandemico*.

Osservando i pesi dei singoli portafogli sulla RBF è inoltre possibile vedere come vi sia un aumento dei pesi associati al portafoglio di tangenza ( $\mathbf{x2}$ ) e a quello a varianza minima ( $\mathbf{x3}$ ) in questa fase di mercato con rendimenti maggiori. Mettendo quindi a confronto i due periodi emerge come la situazione dopo il COVID-19 sia sostanzialmente diversa da quella del periodo precedente alla pandemia. Considerando proprio quello che avviene nella RBF si possono mettere in evidenza le variazioni avvenute all'interno dei portafogli  $M$  e  $Z$ . L'andamento dei due portafogli può essere osservato nella Figura 5.6 dove si vede chiaramente come entrambi subiscano un forte aumento di rendimento e rischio. Osservando il grafico si nota come i valori di rendimento e varianza siano maggiori per il portafoglio  $M$ , il quale quale nella RBF si trova infatti a livelli maggiori per i due indici rispetto a  $Z$ . Tale differenza non poteva essere



notata a pieno nell'analisi aggregata dove i portafogli  $Z$  e  $M$  finiscono per coincidere nel periodo Post-Pandemico, come visto nella tabella 5.1.

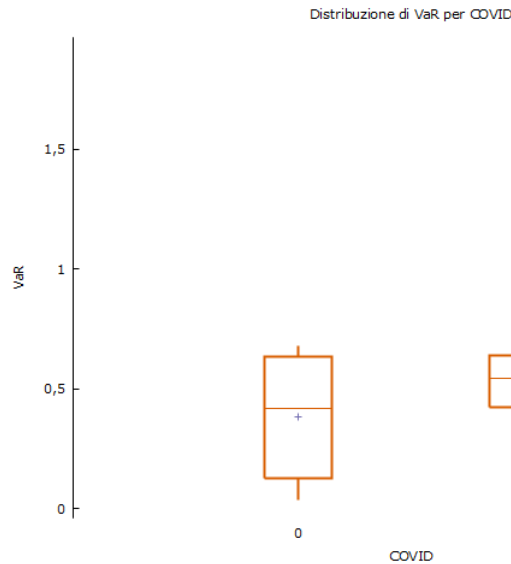
Figura 5.6: **Portafogli M e Z prima e dopo la pandemia**



(a) Portafoglio M pre e post-COVID-19 (b) Portafoglio Z pre e post-COVID-19

A differenza del portafoglio  $B$  però, i valori per  $M$  e  $Z$  rimangono stabilmente al di sopra dello zero per entrambi i periodi. I valori di rendimento e varianze per i diversi trimestri, che si trovano nelle Tabelle 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 mostrano infatti come i portafogli  $M$  e  $Z$  non solo abbiano rendimenti maggiori di  $B$  ma anche un livello di volatilità minore rispetto a quest'ultimo. Questo conferma l'andamento della RBF osservato nella Figura 4.3, nonché le relazioni evidenziate nella Figura 4.5. I sottoinsiemi  $RBF_1$  e  $RBF_2$  sembrano dunque aver mantenuto le loro proprietà anche durante il periodo pandemico. Volendo analizzare la situazione da un punto di vista delle misure inserite come vincolo è possibile osservare graficamente la situazione descritta dal portafoglio  $K$ . Quest'ultimo mostra come sia cambiato il valore del VaR necessario a rendere tangenti CVF e CTF con un livello di TEV pari a  $\bar{T} = 1$ , che è appunto quello inserito nella 5.2.

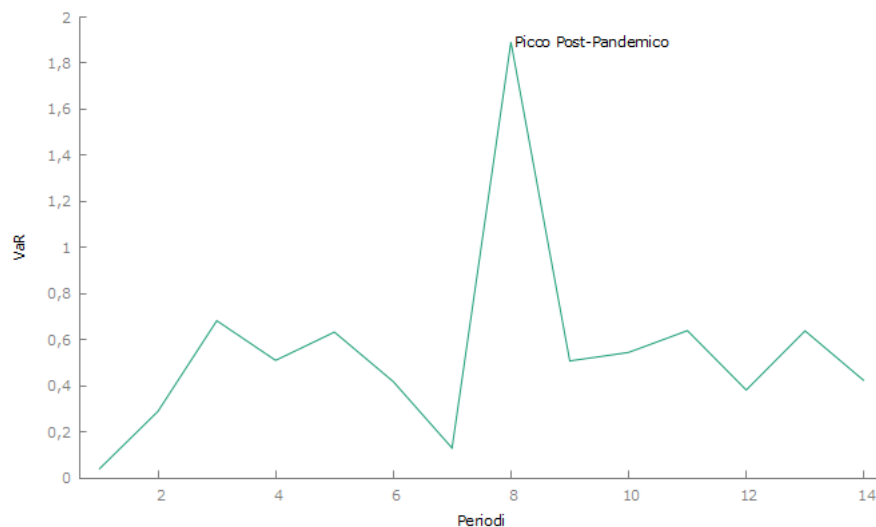
Figura 5.7: **Distribuzione dei valori per il VaR che rendono tangenti CTF e CVF con  $T^- = 1\%$**



Il grafico nella Figura 5.7 è un boxplot con fattore, nel quale viene utilizzata una variabile *dummy* per suddividere i trimestri precedenti al COVID-19, al quale viene assegnato valore 0, da quelli successivi, contraddistinti invece dal valore 1. Nel periodo pre-pandemico, i valori delle perdite attese hanno una distribuzione meno concentrata attorno alla mediana, che è localizzata vicino al valore medio. Il range interquartile in questo caso è più ampio e il valore massimo, esattamente come il minimo, cade al di fuori del corpo del grafico. Nel periodo precedente alla pandemia non si evidenziano *outlier*. Nel periodo post-COVID invece, le variazioni sembrano essere più concentrate intorno alla mediana, mentre la media si sposta molto all'esterno del corpo principale del grafico che si arresta al terzo quartile. Questo è probabilmente dovuto all'osservazione relativa al primo periodo successivo alla pandemia, inquadrata nel

picco post-pandemico, che rimane un *outlier* rispetto alle altre e, da sola, su un campione così piccolo, è in grado di spostare la media delle osservazioni. Questo ancora una volta conferma quanto visto nel grafico 5.5 e mostra l'impatto del periodo pandemico sulle osservazioni. L'andamento della quantità può essere meglio osservato nella 5.8.

Figura 5.8: Serie dei valori per il VaR che rendono tangenti CTF e CVF con  $\bar{T}=1\%$

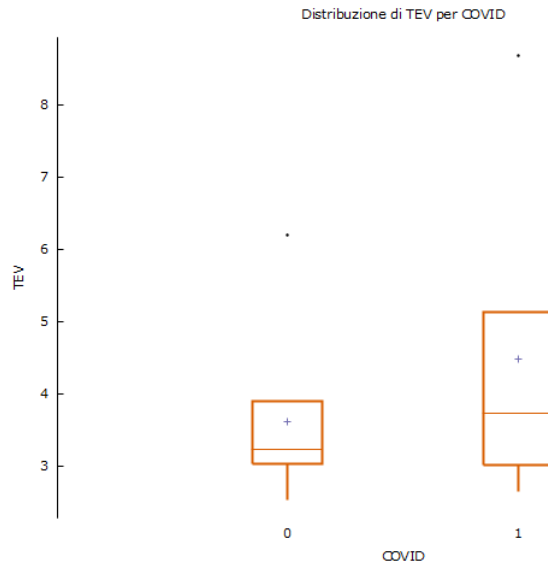


Si vede chiaramente anche qui il picco corrispondente al primo periodo successivo alla pandemia che da solo divide il grafico per i due periodi.

Volendo ripetere una simile analisi anche per le variazioni di TEV necessarie a raggiungere la tangenza tra CTF e CVF per un vincolo di VaR fissato nei due periodi, è necessario controllare il portafoglio  $VT$ . Prima però occorre rivedere leggermente i vincoli nella tabella 5.2. È infatti ora necessario fissare un unico valore di VaR per i due periodi e si sceglie  $VaR = 1,7540$ , cioè il valore

già utilizzato per l'analisi nei trimestri Post-COVID. In questo caso il vincolo risulta essere eccessivamente leggero per il periodo Pre-COVID, cadendo nello spettro del *Large Bound* ma rimane comunque utile ai fini dell'osservazione della TEV. Ripetendo l'analisi per i trimestri i precedenti al COVID-19 si ottiene la situazione nella Figura 5.9. In questo caso la distribuzione risulta molto

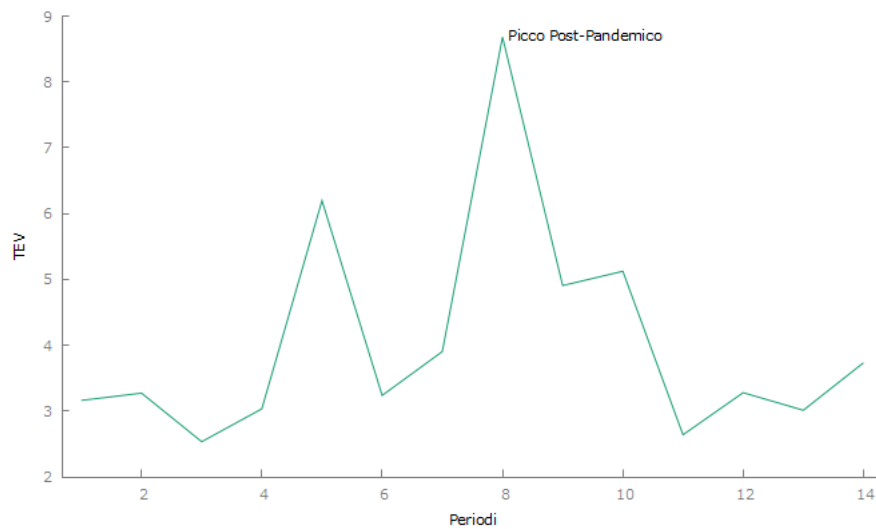
Figura 5.9: **Distribuzione dei valori della TEV nel periodo**



diversa da quanto si è osservato per il VaR, dato che qui sono i periodi successivi alla pandemia a vedere le variazioni più significative. Anche in questo caso, il pesante outlier nei valori della TEV è il trimestre che inizia nell'aprile del 2020. Nei valori della TEV vi è un outlier anche per il periodo pre-pandemico registrato nel quinto trimestre come si osserva nella Figura 5.10. L'eccezionalità del periodo però, è stata già discussa quando si è notato come in questo trimestre il livello di confidenza richiesto sia addirittura superiore a  $\theta = 0.99$ . I risultati osservati per la TEV sono coerenti con l'aumento dell'efficiency loss

che si verifica nel periodo pandemico e che si può osservare nel grafico 5.3. Anche qui, volendo verificare l'andamento della TEV è possibile farlo nella Figura 5.10.

Figura 5.10: Serie dei valori per la TEV che rendono tangenti CTF e CVF con  $Va\bar{R} = 1,7540\%$





# Capitolo 6

## Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è fornire un insieme di nozioni fondamentali sulla gestione attiva di portafogli, al fine di introdurre la *Risk Balancing Frontier* presentata in Lucchetti, Nicolau, Palomba e Riccetti (2022). Per avere una migliore comprensione della RBF, nel capitolo 5 è stata anche effettuata un'analisi empirica utilizzando i rendimenti dell'EuroStoxx 50 per un periodo totale pari a 44 mesi, di cui 22 precedenti alla pandemia da COVID-19 e 22 successivi. Da questa analisi è emersa la capacità della RBF di definire un insieme di portafogli che, anche in condizioni straordinarie di elevata volatilità, riesce a ridurre l'*Efficiency Loss* dei portafogli attivi. L'approccio dell'imposizione di due vincoli viene premiato anche dalle performance tenuta dai portafogli di tangenza  $K$  e  $VT$  (definiti nella Tabella 5.3), stabiliti a mezzo dei vincoli impostati dall'utente. Nonostante queste performance positive, la RBF presenta alcune criticità che sono da individuarsi proprio nell'utilizzo del VaR come misura di rischio. Come già detto in precedenza esso non rispetta infat-

ti la proprietà della *subadditività*, definita nel Capitolo 2, non potendo essere definito una misura *coerente* di rischio. Il VaR inoltre trascura tutti i casi in cui le perdite, superano il valore che si trova nel quantile in cui esso è definito. Una possibile alternativa è rappresentata dall'Expected Shortfall (o Conditional VaR) suggerita in Stucchi (2015). Il CVaR, sotto l'ipotesi di normalità, è infatti esso stesso una relazione lineare, ed appare quindi un buon candidato anche grazie alla sua capacità di tenere conto di scenari peggiori di quelli definiti dal VaR. Un'altra modalità di miglioramento della RBF è l'impiego di distribuzioni non normali per i rendimenti, come fatto parzialmente anche in Alexander e Baptista (2008). Inoltre, le analisi condotte finora rimangono in un ambito statico, utilizzando i dati in serie storica per calcolare rendimenti e varianze realizzati. Per poter trarre conclusioni migliori circa le potenzialità della RBF, sarà necessario includere delle leggi di moto condizionali per il vettore dei rendimenti e la matrice delle covarianze degli asset. Le successive analisi andranno cioè svolte con le quantità  $\mu_{p,t}$  e  $V_{p,t}$ , derivate a mezzo di modelli econometrici come i Vector Autoregressive (VAR) e i Multivariate Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (MGARCH). Per i secondi sarà però necessario utilizzare un numero di asset inferiori, per permettere un adeguato svolgimento della procedura.

In conclusione quindi la RBF presenta una buona capacità di ridurre l'efficiency loss, potendo allo stesso tempo essere un valido aiuto nella gestione dei problemi di agenzia tra sponsor e management. La frontiera potrà infatti trovare spazio in diverse fasi dell'operatività di un fondo. La RBF può essere



usata in una fase preliminare per valutare la compatibilità dei vincoli proposti dagli sponsor per i manager, ma anche in fasi successive, per valutare l'adeguatezza dei risultati ottenuti. Questa serie di proprietà rendono quindi la RBF un valido strumento per la gestione attiva di portafoglio.



# Bibliografia

- [1] Torr A. Fortunes of active management industry look set to improve. *Business Day*, 2018.
- [2] Francesco Cesarone. *Computational Finance*. G. Giappichelli Editore, 2020.
- [3] Eugene Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, (2):383–417, 1970.
- [4] Carig Evans Gary van Vuuren. Investment strategy performance under tracking error constraints. *Investment Management and Financial Innovations*, (1), 2019.
- [5] Luca Riccetti Giulio Palomba. Portfolio selection. *Journal of Banking Finance*, (36):2604–2615, 2012.
- [6] Alexandre M. Baptista Gordon J. Alexander. A comparison of var and cvar constraints on portfolio selection with the mean-variance model. *Management Science*, (50):1261–1273, 2004.

- [7] Alexandre M. Baptista Gordon J. Alexander. Active portfolio management with benchmarking: Adding a value-at-risk constraint. *Journal of Economic Dynamics Control*, (32):779–820, 2008.
- [8] Alexandre M. Baptista Gordon J. Alexander. Active portfolio management with benchmarking: A frontier based on alpha. *Journal of Banking Finance*, (34):2185–2197, 2010.
- [9] Didier Maillard Rolland Portait Isabelle Bajoux-Besnainou, Riadh Belhaj. Portfolio optimization under tracking error and weights constraints, 2007.
- [10] Lambridis J. Why active management beats passive in south africa (prudential article releases)., 2017.
- [11] Philippe Jorion. Portfolio optimization with tracking-error constraints, 2003.
- [12] Wai Lee. *Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*. 2000.
- [13] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, (1):77–91, 1952.
- [14] Robert C. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- [15] Daniel Thomson Gary van Vuuren Michael Maxwell, Michael Daly. Optimizing tracking error-constrained portfolios. *Applied Economics*.

- [16] Jean-Marc Eber David Heath Philippe Artzner, Freddy Delbaen. Coherent measures of risk. 1999.
- [17] Giulio Palomba Luca Riccetti Riccardo Lucchetti, Mihaela Nicolau. Reconciling  $\text{tev}$  and  $\text{var}$  in active portfolio management: A new frontier. *Quaderno di ricerca (Working Paper)*, (461):2604–2615, 2022.
- [18] Luca Riccetti. Using tracking error volatility to check active management and fee level of investment funds. *Global Business and Economics Review*, (3):139–158, 2012.
- [19] Richard Roll. A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*.
- [20] David L. Stowe. Portfolio mathematics with general linear and quadratic constraints. *Journal of Mathematical Finance*, (9):675–690, 2019.
- [21] Patrizia Stucchi. A unified approach to portfolio selection in a tracking error framework with additional constraints on risk. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, (56):165–174, 2015.
- [22] Michael H. Daly Gary van Vuuren. Portfolio performance under tracking error and asset weight constraints. (1).
- [23] G. van Vuuren W. McLeod. Interpreting the sharpe ratio when excess returns are negative. *Investment Analysts Journal*.

- [24] Vigdis Boasson Emil Boasson Zhao Zhou. “portfolio optimization in a mean-semivariance framework”. *Investment Management and Financial Innovations*.