



Università Politecnica delle Marche
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTA' DI INGEGNERIA

**Modellazione della statica di un meccanismo a giunti
flessibili e verifica mediante software CAE di simulazione**

Modeling of the statics of a flexible joint mechanism and
verification using CAE simulation software

Relatore:
Prof. Matteo Claudio Palpacelli

Tesi di Laurea:
Lorenzo Virgini

A.A. 2020/2021

INDICE

1. INTRODUZIONE.....	1
1.1 Coppie cinematiche	1
1.2 Coppie rotoidali.....	2
1.3 Flexure o giunti cedevoli.....	9
1.3.1 Realizzazione e vantaggi.....	9
1.3.2 Svantaggi e sfide future	13
2. MODELLO FLEXURE IN GRANDI DEFORMAZIONI	17
2.1 Adimensionalizzazione del modello	18
2.2 Semplificazione del modello.....	19
2.2.1 Condizioni al contorno	20
2.3 Relazioni di rigidezza.....	22
2.4 Profilo ellittico.....	22
2.5 Trattazione analitica della posizione finale	28
3.CONFRONTO TRA SOLUZIONE ANALITICA E SOLUZIONE NUMERICA	36
3.1 Angolo Θ	36
3.2 Posizione finale	41
4. SISTEMA DI FLEXURE.....	44
4.1 Definizione del numero di equazioni ed incognite	44
4.2 Modello	47
4.3 Forza massima applicabile	57
5.MODELLAZIONE CAE	59
5.1 Analisi FEM.....	59
5.1.2 Mesh.....	60

5.2 Parametri ingegneristici.....	62
5.3 Creazione della geometria.....	63
5.4 Quotatura parametrica.....	66
5.5 Creazione del modello.....	66
5.6 Simulazioni.....	77
6. CONFRONTO TRA SOLUZIONE ANALITICA E SOLUZIONE FEM.....	79
7.MODELLO 3D.....	87
8.CONCLUSIONI.....	90
BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA.....	100

RINGRAZIAMENTI

Questa tesi rappresenta l'ultimo passo verso la conclusione di un percorso durato 5 anni all'Università Politecnica delle Marche presso la facoltà di Ingegneria.

È sicuramente un grande traguardo, ma è un punto di partenza per il futuro e per la carriera personale.

Vorrei ringraziare tutti i docenti, in particolare quelli del corso magistrale, per l'impegno che hanno messo nel trasmettere le loro conoscenze e tutta la loro passione per l'ingegneria e la scienza in generale.

Ringrazio il prof. Palpacelli per avermi dato la possibilità di svolgere questa tesi e anche l'ing. Moschini Simir per la collaborazione e per aver seguito con me questo lavoro.

Un grazie particolare va anche alla mia famiglia e alla mia fidanzata Emily che mi sono sempre stati vicini sia nei brutti che nei bei momenti e che mi hanno sempre supportato nelle scelte e nel proseguimento degli studi.

Infine, ringrazierei anche me stesso per essere sempre andato avanti in ogni circostanza, per non aver mai smesso di credere in ciò che faccio e per essere riuscito a portare a termine un percorso di cui sono orgoglioso e soddisfatto.

Grazie a tutti.

1. INTRODUZIONE

1.1 Coppie cinematiche

Lo scopo di questa tesi è realizzare un modello matematico che possa descrivere il modello statico di un meccanismo costituito da flexure, ossia giunti flessibili ed analizzare il comportamento di tale sistema sottoposto a determinate condizioni di vincolo e forza, attraverso l'utilizzo di strumenti CAE di simulazione.

Generalmente nei sistemi meccanici il moto tra corpi rigidi è ottenuto mediante l'utilizzo di coppie cinematiche, cioè l'insieme dei due corpi e dell'elemento cinematico che consente il movimento relativo.

Le coppie sono caratterizzate essenzialmente dallo spostamento relativo dei membri a contatto, che dipende dalla forma delle superfici che sono in contatto durante il moto: tali superfici sono dette superfici coniugate. Uno stesso spostamento relativo fra i membri può essere ottenuto con differenti coppie di superfici coniugate: l'effettiva forma costruttiva ha influenza sulla trasmissione delle forze, l'usura, l'ingombro, ecc.

Dal punto di vista cinematico si distinguono:

- contatti di rotolamento
- contatti di strisciamento
- contatti di urto

Dal punto di vista realizzativo si distinguono:

- accoppiamenti di forma
- accoppiamenti di forza

In relazione alla geometria del contatto si hanno :

- contatti puntiformi
- contatti lineari
- contatti superficiali

Si indica come classe di una coppia cinematica il numero di gradi di libertà nel moto relativo.

Si definiscono coppie elementari o inferiori quelle coppie rigide che sono realizzabili tramite contatti di superficie: le superfici coniugate sono rigide, identiche e combacianti e sono necessariamente superfici cilindriche, di rivoluzione o elicoidali.

Coppie cinematiche inferiori:

- **rotoidale**
- prismatica
- elicoidale
- cilindrica
- piana
- sferica

Le coppie cinematiche superiori non sono in alcun modo realizzabili tramite contatti di superficie ma esclusivamente tramite contatti lineari o puntiformi. Tutte le coppie tra membri non rigidi sono superiori.

1.2 Coppie rotoidali

Tra le varie coppie cinematiche quelle rotoidali risultano essere particolarmente interessanti perché sono sfruttate in diverse applicazioni.

Quadrilatero articolato

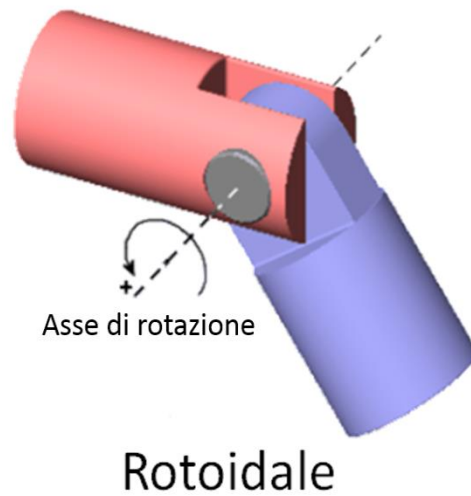


Fig. 1

In Fig.1 è mostrata una coppia rotoidale che come sappiamo toglie due gradi di libertà al meccanismo e ne lascia solamente uno, quello corrispondente alla rotazione.

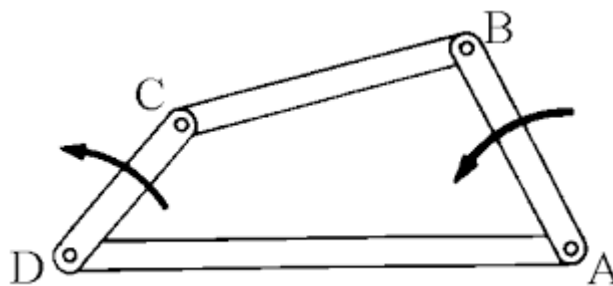


Fig. 2

In Fig.2 è rappresentato un quadrilatero articolato in cui possiamo vedere che i quattro corpi rigidi sono connessi tra loro per mezzo di coppie rotoidali che consentono al meccanismo di muoversi.

Una struttura di questo tipo è abbastanza diffusa nella vita quotidiana: tecnografi, tergicristalli oppure possiamo pensare anche ad un ciclista che sta pedalando. Le gambe del ciclista, insieme ai bracci dei pedali, costituiscono un meccanismo molto simile ad un quadrilatero articolato che consente, appunto, il movimento.

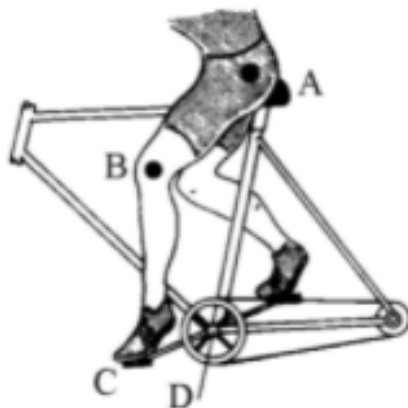


Fig. 3

Come verrà spiegato più avanti, questo tipo di accoppiamento presenta delle problematiche in certe applicazioni, motivo per cui si cerca di adottare il cosiddetto giunto cedevole e in particolare si proverà ad analizzare un meccanismo analogo al quadrilatero in figura, ma in cui al posto delle coppie rotoidali avremo dei giunti cedevoli.

Cuscinetti

Un esempio molto interessante di coppia rotoidale è rappresentato dai cuscinetti. Secondo la terminologia industriale corrente per le coppie prismatiche si chiama *guida* una coppia in cui uno dei corpi è fisso a telaio: in tal caso il corpo fisso è propriamente detto guida, mentre il corpo mobile è detto *pattino*. Se entrambi i corpi di una coppia prismatica sono mobili la coppia è detta *glifo*. La **coppia rotoidale** viene industrialmente denominata *cuscinetto* o appoggio o supporto, ma si usa il termine **cuscinetto** anche per indicare solo l'elemento esterno cavo della coppia, e il termine

perno per indicarne l'elemento interno pieno. La coppia rotoidale è spesso costituita da due parti, una che impedisce il movimento ortogonalmente all'asse di rotazione (detta cuscinetto radiale), l'altra che impedisce il movimento lungo l'asse stesso (detta cuscinetto assiale). Se le due parti sono assemblate in modo da costituire un unico componente si parla di cuscinetto combinato.

Due aspetti importanti dei cuscinetti sono la *lubrificazione* e l'*usura*. È possibile mantenere le superfici della coppia separate da una pellicola di fluido lubrificante quando la forza risultante delle pressioni nel fluido riesce ad equilibrare le forze agenti sui corpi della coppia. Il lubrificante può essere messo in pressione o per effetto idrodinamico o per effetto idrostatico.

Nel caso di coppie a lubrificazione fluida occorre disporre di sistemi più o meno complicati di alimentazione, raccolta, filtraggio e raffreddamento dell'olio. Nel caso idrodinamico si parla di lubrificazione forzata quando nel circuito è presente una pompa che garantisce una certa portata di olio. Se la lubrificazione è idrostatica il circuito di alimentazione è più complesso e costoso dato che deve creare e mantenere nei pozzetti la pressione necessaria per vincere il carico esterno, produrre le adeguate resistenze idrauliche e disporre di eventuali sistemi di regolazione.

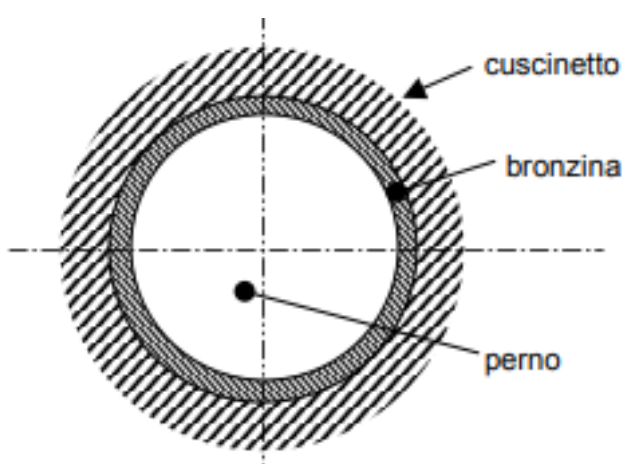


Fig. 4

Le coppie possono essere realizzate interponendo fra i due elementi un terzo elemento di materiale diverso, in genere di materiale più tenero. Per il cuscinetto l'elemento intermedio è costituito dalla *bronzina* e in questo modo l'usura delle parti è prevalentemente concentrata sul materiale interposto, in modo che, quando necessario, lo si può sostituire rapidamente e con costi contenuti.

Col passare del tempo, poi, il cuscinetto tende ad usurarsi, soprattutto se non è stata fatta una corretta lubrificazione e progettazione iniziale.

Tipologie di cuscinetti

Cuscinetti a sfera: sono i più compatti ed economici, e anche quelli più utilizzati. In genere vengono ottimizzati per contatti radiali, il che vuol dire che sono utili quando la forza che deve venire a contatto con il cuscinetto è perpendicolare al suo asse di rotazione.



Fig. 5

Cuscinetti a rulli: sono dispositivi meccanici di piccole dimensioni e quindi non ingombrano affatto. In genere questi prodotti vengono utilizzati nella scatola del cambio e possono essere dotati o meno della gabbia, elemento che permette di sopportare una velocità molto elevata.



Fig. 6

Cuscinetti a rulli conici: possono sopportare carichi radiali, assiali e combinati. Si tratta di cuscinetti rigidi, in grado di sopportare carichi particolarmente elevati. Questi dispositivi sono indicati per essere integrati al mandrino di una vettura, ai sistemi di trasmissione di diversi tipi di veicoli o ai perni delle ruote di camion e macchine.



Fig. 7

Cuscinetti a rulli cilindrici: sono la scelta migliore per sopportare carichi radiali molto elevati. Sul mercato sono disponibili svariati tipi di cuscinetti a rulli cilindrici che differiscono per il numero di corone di rulli. Queste possono essere una, due o quattro, ma può essere presente o no una gabbia, l'elemento che permette al cuscinetto di sopportare oltre ai carichi radiali anche elevate velocità.



Fig. 8

Applicazioni dei cuscinetti

- Riduttori
- Macchine per la lavorazione dei metalli
- Gru ed impianti di sollevamento
- Alberi di trasmissione
- Settore petrolifero
- Settore navale
- Industria siderurgica

1.3 Flexure o giunti cedevoli

1.3.1 Realizzazione e vantaggi

- La produzione additiva ha aperto strade privilegiate verso la rapida realizzazione di beni altamente personalizzati. La tecnologia AM più diffusa è la Fused Deposition Modeling (FDM), che consente la produzione di prototipi in plastica e parti finite. Tra queste opportunità, la tecnologia FDM offre la possibilità di stampare oggetti composti da diversi materiali (Multi-Material-Deposition) per creare oggetti caratterizzati da variazioni locali di conformità. Questa capacità può essere sfruttata per generare giunti flessibili che collegano porzioni più rigide dello stesso oggetto, consentendo un movimento relativo finito tra porzioni dell'oggetto. In altre parole, è possibile realizzare strutture monolitiche e prive di giunti che si basano sulla conformità di zone appositamente progettate per governare il movimento e il trasferimento di forze, ovvero i cosiddetti Compliant Mechanisms.

È possibile incorporare al suo interno un sensore distribuito (cioè una fibra ottica) per misurare la deformazione della giunzione e, quindi, leggere il movimento relativo dei due elementi collegati ad esso. Il controllo di questo tipo di sistemi, infatti, è sempre problematico a causa dell'intrinseca incertezza nell'elasticità e nella densità di massa dei collegamenti, che può rendere i sistemi di controllo ad anello aperto soggetti ad instabilità.

- Un altro vantaggio dei flexure è la facilità con cui vengono miniaturizzati. Semplici microstrutture, attuatori e sensori stanno vedendo un ampio utilizzo e molti altri sistemi microelettromeccanici (MEMS) e sistemi di precisione o anche servovalvole mostrano grandi promesse. La riduzione del numero totale di parti e giunti offerti da meccanismi conformi è un vantaggio significativo nella fabbricazione di micromeccanismi. Micromeccanismi conformi, come quello mostrato di seguito, possono essere fabbricati utilizzando tecnologia e materiali simili a quelli utilizzati nella fabbricazione di circuiti integrati.

In quest'ottica si potrebbe pensare anche ad impieghi nel campo della medicina e chirurgia per interventi di precisione.

Visto che i MEMS sono sempre più diffusi nel mondo della robotica, meccanica ed elettronica, andiamo a vedere brevemente di che cosa si trattano.

Sono particolari dispositivi elettromeccanici costituiti da strutture meccaniche e circuiti elettronici integrati sullo stesso chip di silicio. Si tratta, quindi, di dispositivi in miniatura che integrano attuatori, sensori e processori in grado di coniugare le proprietà elettroniche dei circuiti integrati con proprietà opto-meccaniche per formare sistemi intelligenti.

Il loro utilizzo sta diventando attivo anche in campo medico, motivo per cui lo studio e la ricerca di questi giunti pieghevoli è molto importante, come viene attestato anche dal Politecnico di Milano:

"...affronta in maniera innovativa malattie neurogenerative come Parkinson e Alzheimer mediante tecniche optogenetiche in cui cellule neuronali, geneticamente modificate per essere sensibili ad impulsi di luce, sono impiantate nel paziente per rimpiazzare cellule inattive. Il compito del Politecnico di Milano è lo sviluppo di un sistema miniaturizzato per stimolare otticamente e rilevare elettricamente in-situ (prospettivamente direttamente nel cervello umano) l'effettivo rilascio dei neurotrasmettitori da parte delle cellule neuronali impiantate"

- Poiché i meccanismi conformi si basano sulla deflessione degli elementi flessibili, l'energia viene immagazzinata sotto forma di energia di deformazione negli elementi flessibili. Questa energia immagazzinata è simile all'energia potenziale in una molla deviata e gli effetti delle molle possono essere integrati in un progetto di meccanismi conformi. Questo può essere utilizzato per immagazzinare e/o trasformare facilmente l'energia da rilasciare in un secondo momento o in un modo diverso. Un sistema di arco e frecce ne è un semplice esempio. L'energia viene immagazzinata negli arti mentre l'arciere tira l'arco. Questa energia potenziale viene quindi trasformata in energia

cinetica della freccia. Queste caratteristiche di accumulo di energia possono anche essere utilizzate per progettare specifiche proprietà di deflessione della forza o per far sì che un meccanismo tenda a posizioni particolari.

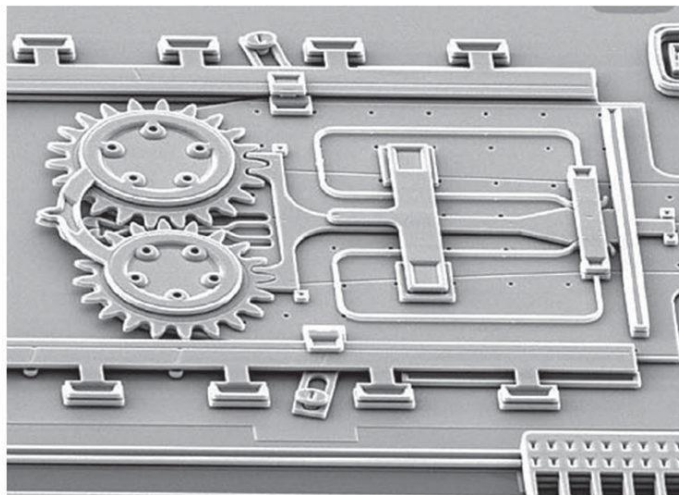


Fig. 9

- Poiché le tecnologie di micro-nano lavorazione e le tecniche robotiche si sviluppano rapidamente, in molte applicazioni in cui sono previsti movimenti di alta precisione, sensibilità e risoluzione, un ruolo importante è svolto dai meccanismi conformi alla flessione, che possono regolare la posizione e l'orientamento degli oggetti operativi, aumentano la corsa effettiva degli attuatori piezoelettrici, realizzano l'uscita di forza costante a corsa grande nelle applicazioni di micro-posizionamento di precisione e migliorare la precisione cinematica delle macchine cinematiche parallele nella gamma micro/nano.

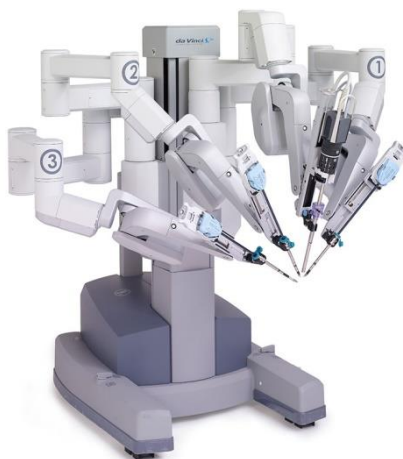


Fig. 10

Per soddisfare la richiesta di progettazione di un'ampia gamma di movimento, elevata rigidità fuori asse, bassa concentrazione di sollecitazioni e piccola deflessione parassitaria, a partire dagli anni '50 sono state concepite e sviluppate successivamente varie cerniere a flessione con profili diversi: ad arco ellittico, parabolico ed iperbolico.

Tuttavia, insieme ai cambiamenti nelle attività di progettazione e nei requisiti applicativi, i ricercatori hanno progettato anche molti tipi di cerniere di forma complessa. Diversi esempi di configurazioni di flessione rappresentative includono il profilo a forma di V smussato, il design parabolico raccordato con angoli circolari a destra, le unità di flessione corrugate, l'esponente a forma di seno e la curva circolare.

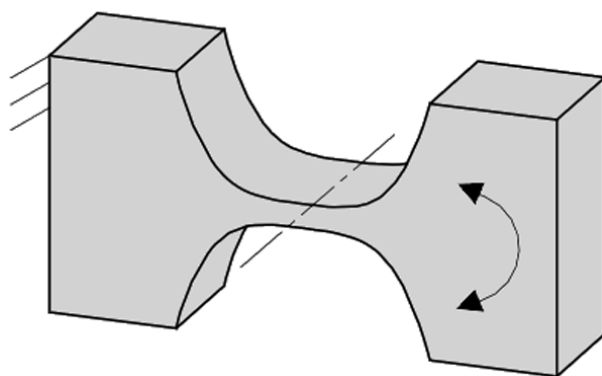


Fig. 11

- Infine, i flexure permettono di risolvere i problemi di lubrificazione, assemblaggio e attrito tra i componenti del sistema. Questi meccanismi hanno un numero minore di giunti mobili, come giunti a perno (girevoli) e scorrevoli. Ciò si traduce in una riduzione dell'attrito e nella necessità di lubrificazione. Queste sono caratteristiche preziose per applicazioni in cui il meccanismo non è facilmente accessibile o per il funzionamento in ambienti difficili che possono influire negativamente sulle articolazioni. Ciò è particolarmente importante nelle applicazioni spaziali perché i lubrificanti tendono a "degassare" (sostanzialmente evaporando) in un ambiente a bassa gravità.

Il dispositivo puntatore conforme è un dispositivo progettato specificamente per l'uso nello spazio. L'usura meccanica si verifica quando le parti si sfregano l'una sull'altra mentre si muovono. Alla fine questo può strofinare o modificare il materiale, che cambia efficacemente la geometria e il movimento del meccanismo.

Poiché i meccanismi conformi utilizzano materiale pieghevole invece dei tradizionali perni e cerniere rigide, l'usura può essere notevolmente ridotta.

- Un altro problema dell'accoppiamento rigido è il gioco che si viene a creare tra i corpi connessi e questo può portare a riduzioni delle prestazioni del meccanismo che si sta considerando, con limitazioni in certi tipi di applicazioni.

Il gioco è causato dalle tolleranze dei pezzi interconnessi. Il gioco nei meccanismi conformi può essere ridotto o eliminato perché non ci sono pezzi di interconnessione. Questo fatto è stato spesso utilizzato nella progettazione della strumentazione. Le vibrazioni e il rumore causati dai giunti rotanti e scorrevoli dei meccanismi a corpo rigido possono anche essere ridotti in alcune applicazioni utilizzando meccanismi conformi.

- Un ultimo vantaggio, ma non meno importante, riguarda il costo di questo tipo di giunti, infatti sono molto più economici rispetto alle tradizionali coppie rotoidali.

1.3.2 Svantaggi e sfide future

Fino adesso sono stati presentati quelli che sono i vantaggi di questo tipo di giunti, ma ci sono anche degli svantaggi e delle sfide che si dovranno superare.

Uno dei problemi più grandi riguarda probabilmente l'analisi e la progettazione dei flexure o di sistemi di flexure. In particolare, è complessa l'analisi di meccanismi cedevoli in cui è presente l'interazione tra corpi flessibili e corpi rigidi.

Poiché molti degli elementi flessibili subiscono grandi deformazioni, le equazioni delle travi linearizzate non sono più valide. È necessario utilizzare equazioni non lineari che

tengano conto delle non linearità geometriche causate da grandi deviazioni. A causa di queste difficoltà, molti meccanismi conformi in passato sono stati progettati mediante approcci per tentativi ed errori.

Tali metodi sono applicabili solo per sistemi molto semplici che eseguono compiti relativamente semplici e spesso non sono convenienti per molte potenziali applicazioni.

L'energia immagazzinata negli elementi flessibili è stata discussa in precedenza come un vantaggio poiché può essere utilizzata per semplificare meccanismi che incorporano molle, per ottenere relazioni forza-deformazione specificate e per immagazzinare energia trasferita o trasformata dal meccanismo. Tuttavia, in alcune applicazioni avere l'energia immagazzinata in elementi flessibili è uno svantaggio. Ad esempio, se la funzione di un meccanismo è trasferire energia da un input ad un output, non tutta l'energia viene trasferita poiché parte viene immagazzinata nel meccanismo.

L'analisi della fatica per i giunti flessibili è un aspetto molto più importante rispetto a quanto non sia per i corpi rigidi. I giunti cedevoli vengono caricati ciclicamente quando fanno parte di certi meccanismi e per questo è importante progettare il sistema in modo che la durata a fatica consenta lo svolgimento dell'operazione richiesta.

I modelli a corpo rigido-flessibile per i singoli segmenti flessibili offrono un metodo semplificato per determinare le deformazioni degli elementi a grande deflessione.

La disponibilità di tale metodo per i singoli segmenti suggerisce il suo utilizzo per modellare sistemi più complessi che includono segmenti flessibili. Questo concetto di modello di corpo si rivela molto utile per semplificare l'analisi e la sintesi di meccanismi conformi. Il suo vantaggio risiede nella sua capacità di sviluppare un modello di un meccanismo conforme, e quindi utilizzare l'ampio corpus di conoscenze disponibili nel campo dell'analisi e della progettazione dei meccanismi dei corpi rigidi.

In questo modo, il concetto di modello del corpo rigido-flessibile agisce per unificare le teorie del meccanismo del corpo rigido e conforme.

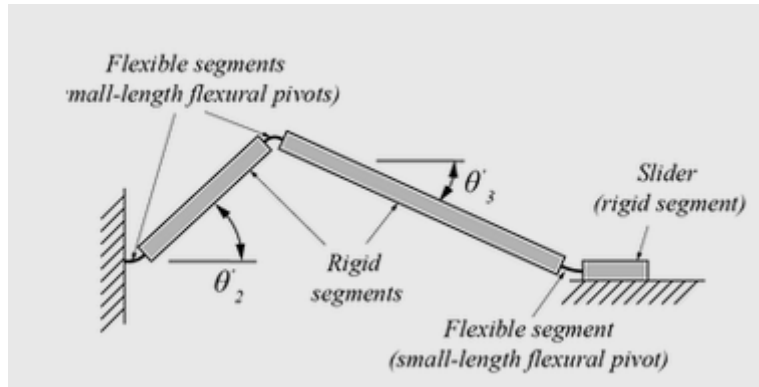


Fig. 12

Nonostante l'importanza e l'utilità tecnologica di questi giunti, le ricerche e gli studi a riguardo sono ancora limitati e l'obiettivo è di arrivare ad avere un quadro completo che ci permetta di descrivere in maniera chiara qualsiasi tipo di meccanismo caratterizzato da giunti flessibili.

Esistono, infatti, diverse tipologie di flexure e ciascun profilo geometrico avrà un determinato comportamento quando sottoposto a flessione o ai carichi in generale. Uno dei più diffusi è il giunto di forma ellittica.

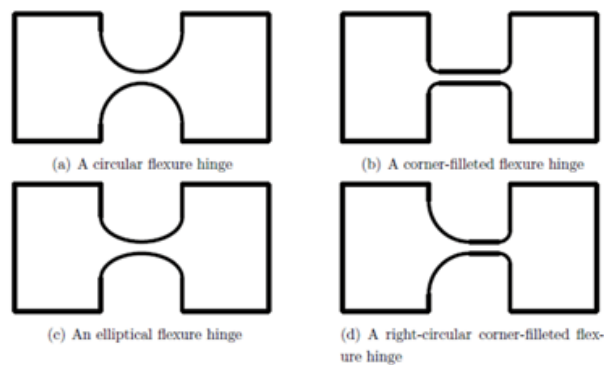


Fig. 13

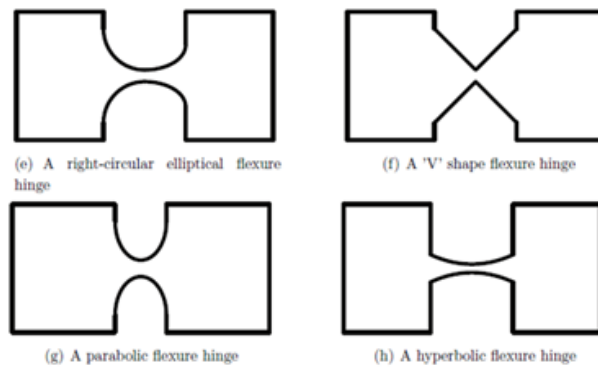


Fig. 14

Nel momento in cui andiamo a realizzare giunti di questo tipo dobbiamo prestare particolarmente attenzione, altrimenti rischieremmo di generare flexure di scarsa qualità.

Infatti possiamo immaginare che se il flexure fosse troppo piccolo, rischieremmo che non sia abbastanza resistente; al contrario, se non fosse abbastanza snello, il movimento potrebbe risultare troppo limitato.

Fin qui è stata fatta una descrizione qualitativa di ciò che sono i flexure , spiegando a cosa servono e perché possono e potranno essere utili in futuro. L'altro aspetto importante riguarda però la descrizione matematica del giunto, in modo tale da riuscire a conoscere il suo comportamento in determinate condizioni e definire un modello chiaro.

2. MODELLO FLEXURE IN GRANDI DEFORMAZIONI

Il primo passo compiuto nello svolgimento di questo lavoro è stato quello di studiare il modello matematico di una trave sottoposta a dei carichi e ad un momento.

Dalla meccanica del continuo sappiamo che possiamo esprimere il comportamento della trave con la seguente equazione:

$$\frac{d[M(x)]}{dx} = \frac{d}{dx} [E I_z(x) \kappa(x)] = [1 + \varepsilon(x)] \{F \sin[\theta(x)] - Q \cos[\theta(x)]\} \quad (1)$$

Dove:

x è l'asse principale della trave nella configurazione iniziale;

M è il momento flettente nella generica sezione della trave;

E è il modulo di Young;

I_z è il momento di inerzia della sezione;

κ è la curvatura della trave nella configurazione deformata;

ε è la deformazione assiale nella configurazione deformata;

F è il carico lungo x applicato ad una estremità;

Q è il carico lungo y applicato alla stessa estremità;

θ è l'angolo formato tra l'asse x nella configurazione iniziale e l'asse x nella configurazione deformata.

Esprimendo la curvatura come:

$$\kappa(x) = \frac{1}{1 + \varepsilon(x)} \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (2)$$

e definendo

$$A = \sqrt{F^2 + Q^2} \quad ; \quad \cos(\varphi) = \frac{F}{\sqrt{F^2 + Q^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{F^2 + Q^2}}$$

arriviamo all'equazione definitiva:

$$\theta''(x) + \left[\frac{I'_z(x)}{I_z(x)} - \frac{1}{1 + \varepsilon(x)} \varepsilon'(x) \right] \theta'(x) = \frac{A}{E I_z(x)} [1 + \varepsilon(x)]^2 \sin[\theta(x) - \varphi] \quad (3)$$

2.1 Adimensionalizzazione del modello

Di seguito vengono rappresentati i passaggi per effettuare l'adimensionalizzazione.

$$x = x_0 \tilde{x}$$

$$I_z = I_z(x) = I_z[x(\tilde{x})] = \bar{I}_z(\tilde{x}) = I_{z0} \tilde{I}_z$$

Dove:

x_0 è la parte dimensionale di x ;

\tilde{x} è la parte adimensionale di x ;

I_{z0} è la parte dimensionale del momento d'inerzia I_z ;

\tilde{I}_z è la parte adimensionale del momento d'inerzia I_z ;

esprimiamo poi

$$\varepsilon(x) = \tilde{\varepsilon}(\tilde{x}) \quad ; \quad \theta(x) = \tilde{\theta}(\tilde{x})$$

e otteniamo

$$\tilde{\theta}''(\tilde{x}) + \left[\frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} - \frac{1}{1 + \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})} \tilde{\varepsilon}'(\tilde{x}) \right] \tilde{\theta}'(\tilde{x}) = \frac{A x_0^2}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tilde{x})} [1 + \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]^2 \sin[\tilde{\theta}(\tilde{x}) - \varphi] \quad (4)$$

L'equazione precedente rappresenta il modello del flexure scritto in forma adimensionale.

2.2 Semplificazione del modello

Nel nostro caso, visto che il materiale è acciaio, avremo a che fare con deformazioni piccole lungo x , tali da poterle considerare trascurabili rispetto al resto del problema.

Un'altra semplificazione che possiamo fare riguarda θ , cioè l'angolo non assumerà valori elevati e per questo possiamo esprimere la funzione $\sin(\theta - \varphi)$ mediante espansione in serie di Taylor.

Matematicamente, le semplificazioni fatte si traducono in:

- $\tilde{\varepsilon}(\tilde{x}) \sim 0$
- $\sin[\tilde{\theta}(\tilde{x}) - \varphi] \sim \cos(\varphi)\tilde{\theta}(\tilde{x}) - \sin(\varphi)$ (5)

Introducendo queste semplificazioni nell'equazione precedente, si ottiene:

$$\tilde{\theta}''(\tilde{x}) + \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} \tilde{\theta}'(\tilde{x}) + a(\tilde{x}) \tilde{\theta}(\tilde{x}) = b(\tilde{x}) \quad (6)$$

dove:

$$a(\tilde{x}) = -\frac{A x_0^2}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tilde{x})} \cos(\varphi) \quad ; \quad b(\tilde{x}) = -\frac{A x_0^2}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tilde{x})} \sin(\varphi)$$

Supponiamo che il massimo valore di $a(\tilde{x})$ sia trascurabile rispetto ad 1 e al minimo valore di $\left| \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} \right|$. Possiamo fare questa ipotesi poiché il denominatore di $a(\tilde{x})$ contiene il modulo di Young che ha un ordine di grandezza pari a $10^{11} Pa$.

In questo modo possiamo assumere che il valore di $|a(\tilde{x})|$ in generale è molto piccolo e di conseguenza il termine $\tilde{\theta}$ è trascurabile.

Se osserviamo ora il termine $a(\tilde{x})$, notiamo che al denominatore compare il modulo di Young E che è pari a $2,1 * 10^{11} MPa$ e di conseguenza nell'equazione anche il termine che contiene $a(\tilde{x})$ può essere considerato trascurabile.

Un altro aspetto da tenere in considerazione è che $b(\tilde{x})$ si distingue da $a(\tilde{x})$ solo per il termine $\sin(\varphi)$, quindi se:

- $\sin(\varphi) \leq \cos(\varphi)$ allora anche $b(\tilde{x})$ è trascurabile
- $\sin(\varphi) > \cos(\varphi)$ $b(\tilde{x})$ non può essere trascurato

Diciamo, però, che $b(\tilde{x})$ in genere migliora l'accuratezza della soluzione.

L'equazione a cui giungiamo dopo queste ulteriori semplificazioni è:

$$\tilde{\theta}''(\tilde{x}) + \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} \tilde{\theta}'(\tilde{x}) = b(\tilde{x}) \quad (7)$$

per questa equazione differenziale c'è una soluzione esatta che vale:

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}_i}^{\tilde{x}} \frac{c_1 + c_2 \tau}{\tilde{I}_z(\tau)} d\tau \quad (8)$$

Dove:

- $c_2 = b(\tilde{x}) \tilde{I}_z(\tilde{x}) = -\frac{A x_0^2 \sin(\varphi)}{E I_{z0}}$
- \tilde{x}_i e c_1 sono due coefficienti ottenuti da condizioni al contorno

2.2.1 Condizioni al contorno

Per ora stiamo considerando un profilo generico e doppiamente simmetrico, con una sezione rettangolare come mostrato in figura.

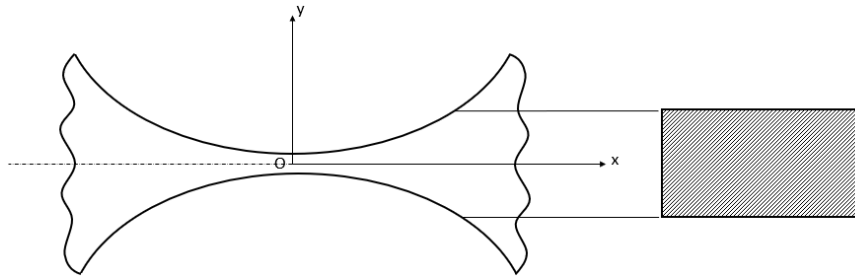


Fig. 15

È conveniente posizionare il sistema di riferimento nel punto O , cioè nell'intersezione tra gli assi del profilo, così che possiamo considerare l'intervallo di variazione dell'ascissa pari a $\tilde{x} \in [-1; 1]$.

Per determinare le condizioni al contorno, immaginiamo una trave fissata al suo estremo sinistro e libera da qualsiasi vincolo all'estremo opposto. In questo modo lo spostamento angolare all'estremo fissato è nullo e così abbiamo definito la prima condizione:

$$\tilde{\theta}(-1) = 0 \quad (9)$$

La seconda condizione che ci serve è ottenuta partendo dalla conoscenza del momento all'altro estremo che vale $M(x) = E I_z(x) \kappa(x)$.

Riprendendo l'equazione della curvatura, otteniamo:

$$\tilde{\theta}'(1) = \frac{x_0 M_0 \tilde{M}(1)}{E I_{z0} \tilde{I}_z(1)} \quad (10)$$

dove

$$M(x) = M_0 \tilde{M}(\tilde{x})$$

Unendo la (7) con le due condizioni al contorno otteniamo la soluzione analitica per una trave soggetta a questi carichi.

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) = \int_{-1}^{\tilde{x}} \left[\frac{x_0 M_0 \tilde{M}(1)}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tau)} + c_2 \frac{\tau - 1}{\tilde{I}_z(\tau)} \right] d\tau \quad (11)$$

2.3 Relazioni di rigidezza

È ragionevole voler associare un coefficiente di rigidezza alla trave, così da poter calcolare il massimo angolo di rotazione una volta noti i carichi.

La massima rotazione la troviamo in corrispondenza dell'estremità libera. Per trovare questa relazione dobbiamo calcolare l'angolo di rotazione nel punto $\tilde{x} = 1$. Mettendo in evidenza il momento applicato all'estremità libera, dalla (11) riusciamo ad ottenere:

$$M_F = K \theta_F + \bar{M} \quad (12)$$

dove

$$M_F = M_0 \tilde{M}(1) \quad ; \quad \theta_F = \tilde{\theta}(1) \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{\int_{-1}^1 \frac{x_0}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tau)} d\tau} \quad ; \quad \bar{M} = \frac{c_2 \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)}{\tilde{I}_z(\tau)} d\tau}{\int_{-1}^1 \frac{x_0}{E I_{z0} \tilde{I}_z(\tau)} d\tau}$$

I coefficienti K e \bar{M} prendono il posto del coefficiente di rigidezza. In particolare essi dipendono dalla geometria della trave, il materiale, il valore dei carichi e il momento applicato nell'estremità libera.

2.4 Profilo ellittico

Il sistema di flexure oggetto del nostro studio è costituito da giunti con profilo ellittico e per questo ora estenderemo la trattazione precedente ad un flexure di tipo ellittico.

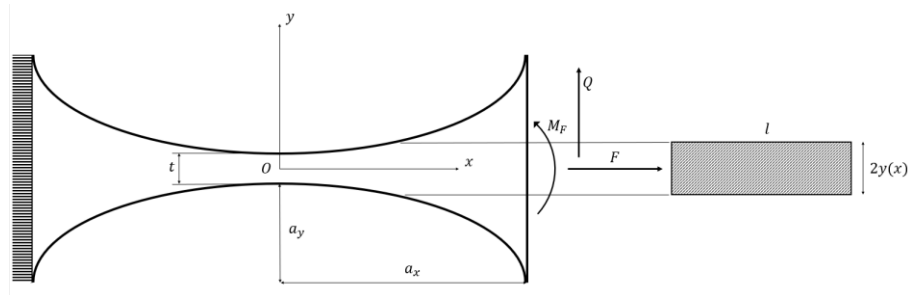


Fig. 16

Possiamo porre:

$$x = a_x \tilde{x} \quad \text{con } \tilde{x} \in [-1; 1] \quad (14)$$

e di conseguenza

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = a_y \left[(1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \tilde{x}^2} \right] = y_0 \tilde{y}(\tilde{x}) \quad (15)$$

dove

$$\beta_y = \frac{t}{2 a_y} \quad ; \quad y_0 = a_y \quad ; \quad \tilde{y}(\tilde{x}) = (1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \tilde{x}^2}$$

t è lo spessore della trave (flexure ellittico);

a_x è il semiasse maggiore;

a_y è il semiasse minore;

$\tilde{y}(\tilde{x})$ è la coordinata y adimensionalizzata del profilo ellittico.

Il momento d'inerzia per un profilo ellittico è $I_z(x) = \frac{l [2 y(x)]^3}{12}$ ed sfruttando le (14) e (15), otteniamo:

$$\bar{I}_z(\tilde{x}) = \frac{2}{3} l a_y^3 \left[(1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \tilde{x}^2} \right]^3 \quad (16)$$

con

$$I_{z0} = \frac{2}{3} l a_y^3 \quad ; \quad \tilde{I}_z(\tilde{x}) = \left[(1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \tilde{x}^2} \right]^3 = [\tilde{y}(\tilde{x})]^3 \quad (17)$$

Le ipotesi che avevamo fatto per il termine $a(\tilde{x})$ erano:

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{x} \in [-1;1]} |a(\tilde{x})| &\ll 1 \\ \max_{\tilde{x} \in [-1;1]} |a(\tilde{x})| &\ll \min_{\tilde{x} \in [-1;1]} \left| \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} \right| \end{aligned}$$

la prima si traduce in

$$\frac{A x_0^2}{E I_{z0}} \frac{1}{\min_{\tilde{x} \in [-1;1]} \tilde{I}_z(\tilde{x})} |\cos(\varphi)| \ll 1$$

e sapendo che $|\cos(\varphi)| \leq 1$, allora la riscriviamo nella forma

$$\frac{A x_0^2}{E I_{z0}} \frac{1}{\min_{\tilde{x} \in [-1;1]} \tilde{I}_z(\tilde{x})} \ll 1$$

A questo punto introduciamo dei parametri adimensionali:

$$\varepsilon = \frac{a_x}{a_y} \quad ; \quad \mu = \frac{F_y}{E l a_x} \quad ; \quad \eta = \frac{F_x}{F_y}$$

riprendendo la disuguaglianza precedente otteniamo la condizione da imporre a μ

$$-\frac{2}{3} \left(\frac{\beta_y}{\varepsilon} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \ll \mu \ll \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_y}{\varepsilon} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

andiamo ora a soffermarci sulla seconda delle due ipotesi che avevamo fatto.

$$\frac{A x_0^2}{E I_{z0} \beta_y^3} \ll \min_{\tilde{x} \in [-1;1]} \left| \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})} \right|$$

La funzione $c(\tilde{x}) = \frac{\tilde{I}'_z(\tilde{x})}{\tilde{I}_z(\tilde{x})}$ ammette uno zero per $\tilde{x} = 0$. Si osserva che $c(-\tilde{x}) = -c(\tilde{x})$, cioè c è una funzione pari. Mentre essendo $a(-\tilde{x}) = a(\tilde{x})$, a è una funzione pari. Se assumessimo $\cos(\varphi) > 0$, avremo che $a(\tilde{x}) < 0$ in $[-1,1]$, mentre $c(\tilde{x}) < 0$ in $[-1,0]$. Così in $] -1,0]$, $a(\tilde{x}) < c(\tilde{x})$.

Definiamo

$$d(\tilde{x}) = c(\tilde{x}) - a(\tilde{x})$$

Trovare le soluzioni della precedente equazione è molto difficile, perché dovremmo andare a risolvere un'equazione di sesto grado. Considerando la condizione sulla μ , la espandiamo in serie di Taylor e ci fermiamo al primo ordine. In questo modo otteniamo la soluzione che vale

$$\tilde{x}_z = -\frac{\varepsilon}{2} \mu \eta \left(\frac{\varepsilon}{\beta_y} \right)^2$$

da questo possiamo dedurre che $|a(\tilde{x})| < |c(\tilde{x})|$ se vale la seguente condizione:

$$-1 \leq \tilde{x} < -\frac{\varepsilon}{2} \mu \eta \left(\frac{\varepsilon}{\beta_y} \right)^2 \quad \tilde{x} \in [-1; 0]$$

Inoltre sappiamo che

$$\overline{a(\tilde{x})} = \frac{3\varepsilon^3 \mu \eta \left\{ 6\sqrt{\beta_y \gamma_y} + 8\sqrt{\beta_y^3 \gamma_y} + 4\sqrt{\beta_y^5 \gamma_y} + 3\delta_y^2 [\pi + 2 \operatorname{csc}^{-1}(\delta_y)] \right\}}{8 \delta_y (\beta_y \gamma_y)^{5/2}}$$

$$\overline{c(\tilde{x})} = 3 \ln \left(\frac{\beta_y}{\delta_y} \right)$$

con

$$\delta_y = 1 + \beta_y \quad ; \quad \gamma_y = 2 + \beta_y$$

otteniamo

$$|\overline{a(\tilde{x})}| \cong 2,3 \cdot 10^{-2} \quad ; \quad |\overline{c(\tilde{x})}| \cong 3.3$$

Quindi possiamo dire che $\max_{\tilde{x} \in [-1;1]} |a(\tilde{x})| \ll \min_{\tilde{x} \in [-1;1]} \left| \frac{l'_z(\tilde{x})}{l_z(\tilde{x})} \right|$ per ogni valore in \tilde{x} in $[-1; 1]$.

Possiamo quindi concludere che l'ipotesi iniziale di trascurare il termine relativo a $\tilde{\theta}(\tilde{x})$ fosse corretta.

Possiamo esprimere $\tilde{\theta}(\tilde{x})$:

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) = \frac{\varepsilon^3 M_F}{E a_x^2 l} f(\tilde{x}, \beta_y) + \mu \varepsilon^3 g(\tilde{x}, \beta_y) \quad (18)$$

Di seguito sono rappresentati gli andamenti delle funzione $f(\tilde{x}, \beta_y)$ e $g(\tilde{x}, \beta_y)$ in funzione di diversi valori del parametro β_y .

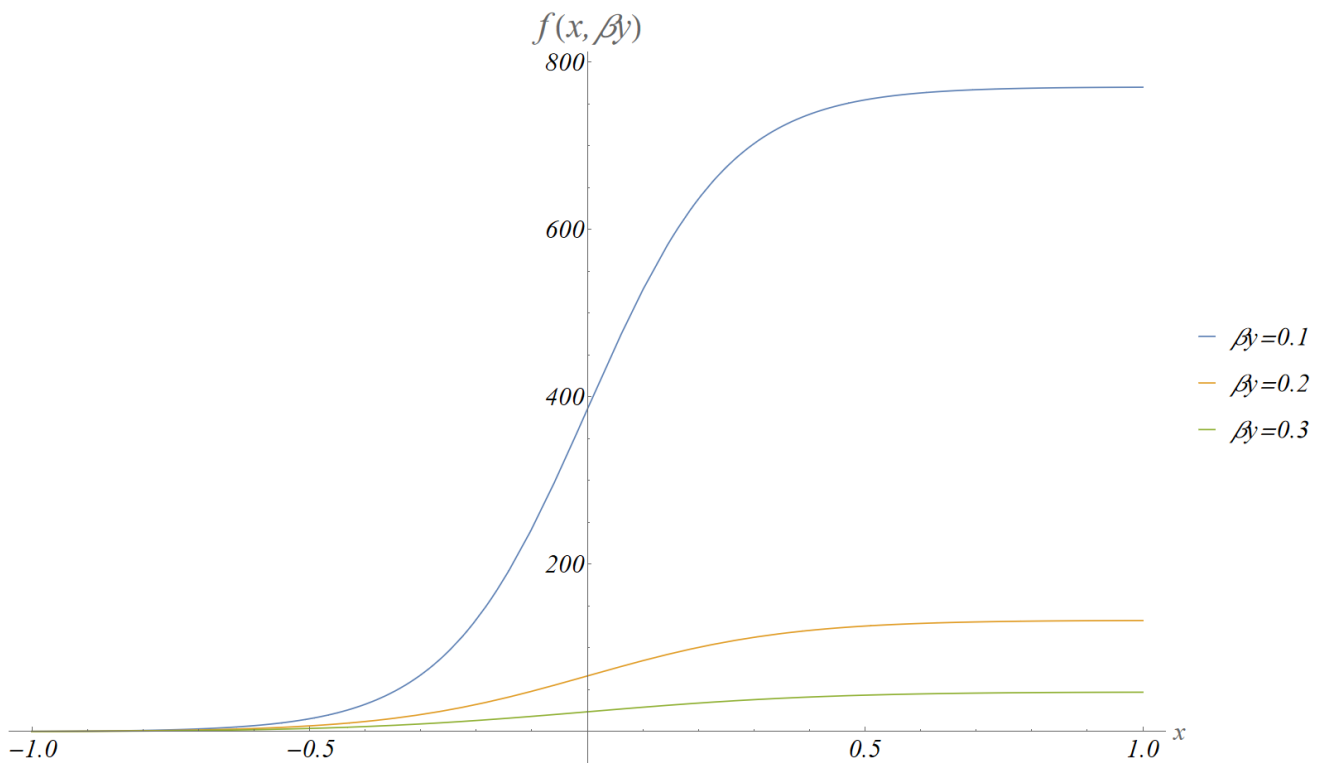


Fig. 17

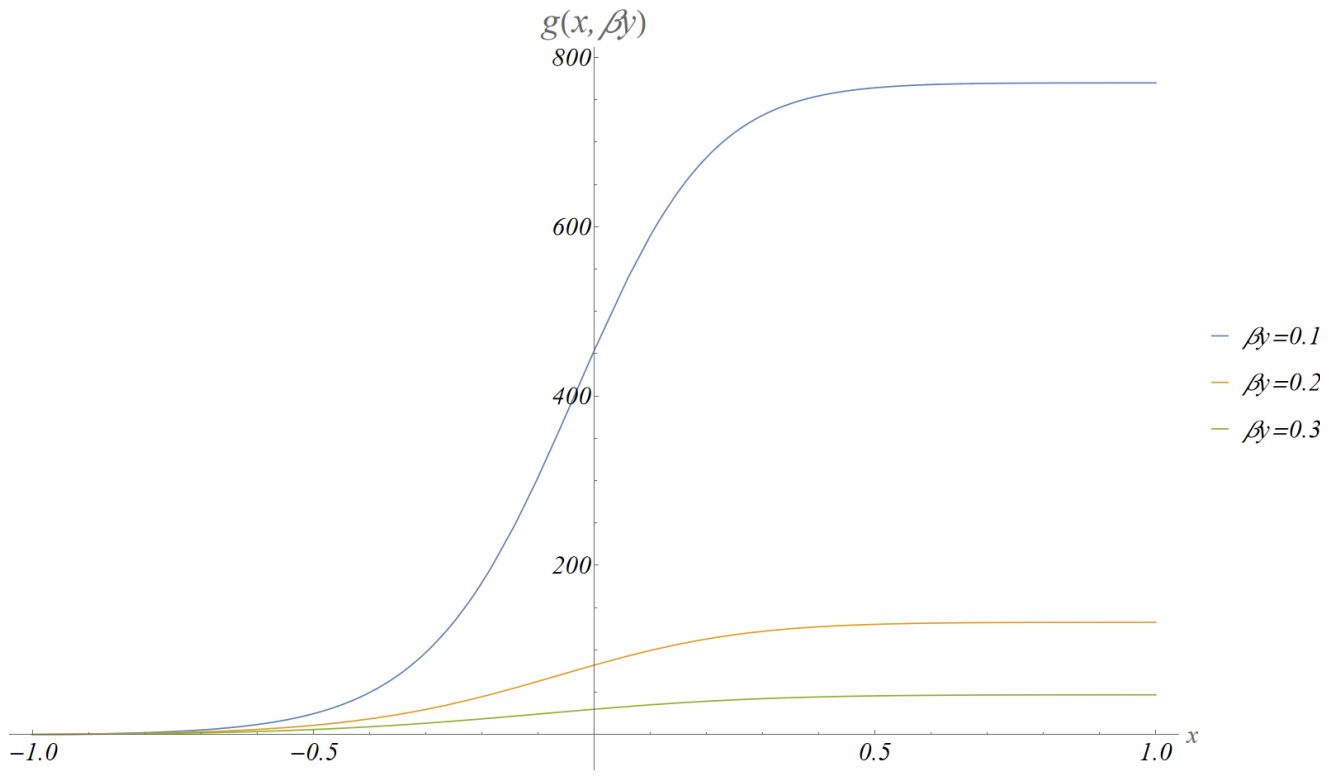


Fig. 18

2.5 Trattazione analitica della posizione finale

Fino adesso è stato condotto lo studio analitico sulla rotazione θ

Considerando sempre la trave incastrata ad un estremo e soggetta ai carichi che abbiamo definito precedentemente, essa si deformerà fino ad assumere una configurazione di equilibrio.

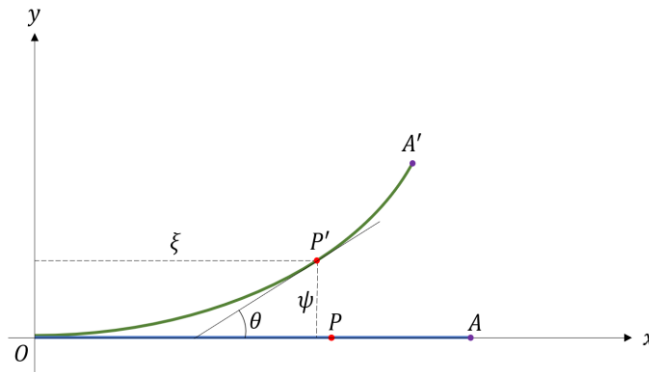


Fig. 19

Dalla letteratura abbiamo che il piazzamento della trave nella configurazione deformata è descritto dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\xi'(x) &= [1 + \varepsilon(x)] \cos[\theta(x)] \\ \psi'(x) &= [1 + \varepsilon(x)] \sin[\theta(x)]\end{aligned}\quad (19)$$

Dove:

- ξ e ψ sono le coordinate del generico punto P' dell'asse medio della trave deformata;
- x è la coordinata assiale del punto P nella configurazione indeformata;
- ε è la deformazione assiale della trave;
- θ è l'angolo compreso tra l'asse medio della trave nella configurazione indeformata e la tangente alla trave nella configurazione deformata nel punto P' .

La risoluzione dell'equazione differenziale di (20) può essere ottenuta se accompagnata da opportune condizioni al contorno.

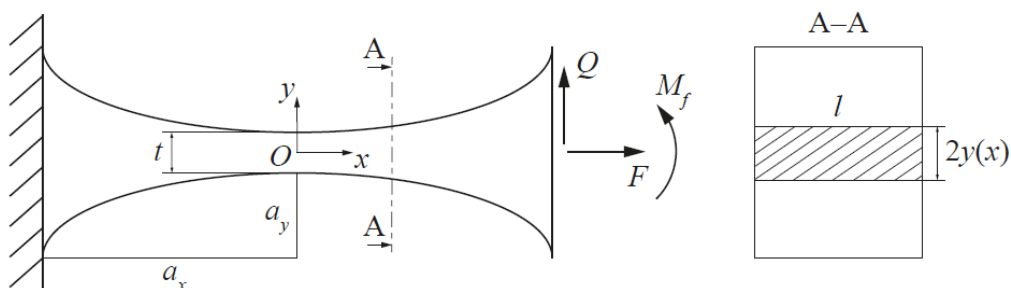


Fig. 20

Con riferimento alla Fig.25 è stata trovata, sotto alcune ipotesi, una formula che permette di calcolare l'angolo $\tilde{\theta}$ in funzione della coordinata \tilde{x} .

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) = \frac{\rho^3 M_F}{E a_x^2 l} f(\tilde{x}, \beta_y) + \mu \rho^3 g(\tilde{x}, \beta_y) \quad (20)$$

Dove:

- $\rho = \frac{a_x}{a_y}$
- $\beta_y = \frac{t}{2a_y}$
- $\mu = \frac{Q}{E l a_x}$

In cui:

-t è il minimo spessore del flexure;

-Q è il carico verticale applicato;

-I è la profondità del flexure;

-E è il modulo di Young;

-Mf è il momento applicato.

Per risolvere il sistema (20) utilizziamo le stesse semplificazioni che abbiamo considerato per la determinazione dell'angolo, ovvero deformazione assiale ε trascurabile e Θ piccolo.

Quindi, espandendo in serie di Taylor otteniamo:

$$\cos[\tilde{\theta}(\tilde{x})] \cong 1 - \frac{[\tilde{\theta}(\tilde{x})]^2}{2}$$
$$\sin[\tilde{\theta}(\tilde{x})] \cong \tilde{\theta}(\tilde{x}) - \frac{[\tilde{\theta}(\tilde{x})]^3}{6}$$

Il problema rimane ancora difficile da risolvere perché le $f(\tilde{x}, \beta_y)$ e $g(\tilde{x}, \beta_y)$ sono espressioni che contengono combinazioni di funzione trigonometriche e goniometriche.

Se andiamo ad osservare l'andamento dell'angolo per un determinato valore di ρ al variare di β_y , abbiamo:

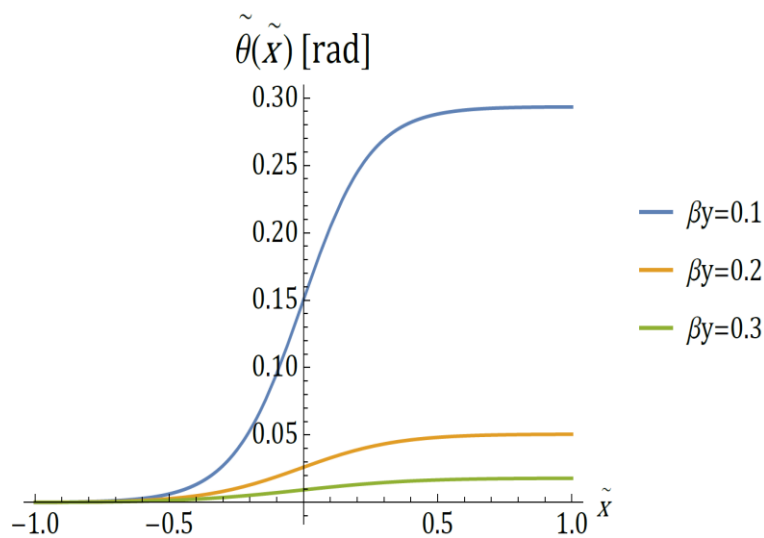


Fig.27

Questo grafico è stato ottenuto per $\rho=5$ e per i βy indicati in figura.

L'andamento è sempre lo stesso, quello che cambia è l'abbassarsi della curva all'aumentare di βy .

Alla luce di questo particolare comportamento, possiamo semplificare la curva mediante tre spezzate, in modo da poter rappresentare la curva con una matematica più semplice e lineare.

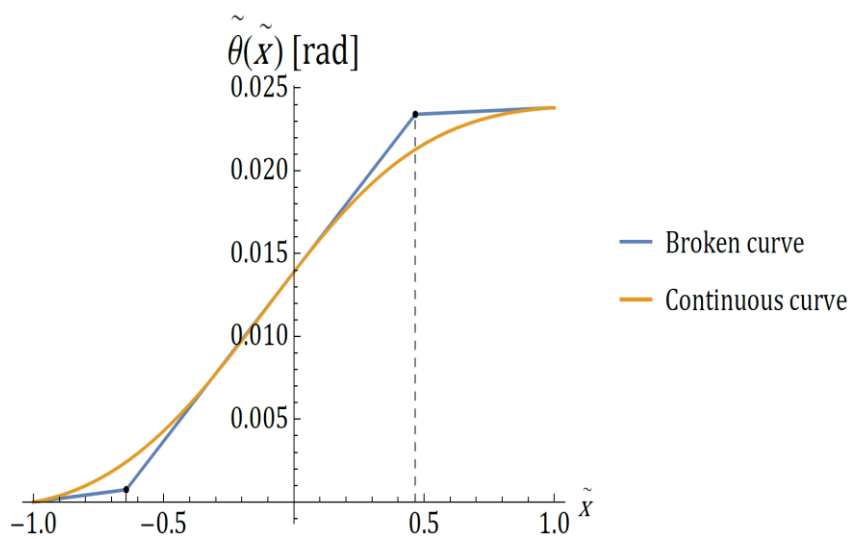


Fig. 28

Per costruire queste tre rette, partiamo dal presupposto che la curva continua e la spezzata abbiano gli stessi valori in $\tilde{x} = -1$, in $\tilde{x} = 0$ e in $\tilde{x} = 1$.

Si può procedere quindi con la determinazione delle equazioni delle tre rette che sono:

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) = \begin{cases} \tilde{\theta}_{pm}(\tilde{x} + 1) & -1 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_1 \\ \tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_{p0}\tilde{x} & \tilde{x}_1 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_2 \\ \tilde{\theta}_F + \tilde{\theta}_{pF}(\tilde{x} - 1) & \tilde{x}_2 \leq \tilde{x} \leq 1 \end{cases}$$

Fig.28

Dove:

- $\tilde{\theta}_{pm} = \tilde{\theta}'(\tilde{x})|_{\tilde{x}=-1} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1+\beta_y)^3} \rho^3 \left(\frac{M_F}{a_x^2 l E} + 2\mu \right)$
- $\tilde{\theta}_0 = \tilde{\theta}(\tilde{x})|_{\tilde{x}=0} = \frac{3 \rho^3 M_F}{8 a_x^2 l E} \frac{6\sqrt{\beta_y \gamma_y} + 8\sqrt{\beta_y^3 \gamma_y} + 4\sqrt{\beta_y^5 \gamma_y} + 3\delta_y^2 [\pi + 2 \operatorname{csc}^{-1}(\delta)]}{\delta_y (\beta_y \gamma_y)^{\frac{5}{2}}} +$
 $\frac{3}{8} \rho^3 \mu \frac{14\sqrt{\beta_y \gamma_y} + 16\sqrt{\beta_y^3 \gamma_y} + 6\sqrt{\beta_y^5 \gamma_y} + 3\delta_y^2 [\pi + 2 \operatorname{csc}^{-1}(\delta)]}{\delta_y (\beta_y \gamma_y)^{\frac{5}{2}}}$
- $\tilde{\theta}_{p0} = \tilde{\theta}'(\tilde{x})|_{\tilde{x}=0} = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta_y^3} \rho^3 \left(\frac{M_F}{a_x^2 l E} + 2\mu \right)$
- $\tilde{\theta}_F = \tilde{\theta}(\tilde{x})|_{\tilde{x}=1} = \frac{3}{4} \rho^3 \left(\frac{M_F}{a_x^2 l E} + \mu \right) \frac{3\pi\delta_y^2 + 6\sqrt{\beta_y \gamma_y} + 8\sqrt{\beta_y^3 \gamma_y} + 4\sqrt{\beta_y^5 \gamma_y} + 6\delta_y^2 [\pi + 2 \operatorname{csc}^{-1}(\delta)]}{\delta_y (\beta_y \gamma_y)^{\frac{5}{2}}}$
- $\tilde{\theta}_{pF} = \tilde{\theta}'(\tilde{x})|_{\tilde{x}=1} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1+\beta_y)^3} \frac{\rho^3 M_F}{a_x^2 l E}$

$$\tilde{x}_1 = -\frac{\tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_{pm}}{\tilde{\theta}_{p0} - \tilde{\theta}_{pm}} \quad ; \quad \tilde{x}_1 = \frac{\tilde{\theta}_F - \tilde{\theta}_0 - \tilde{\theta}_{pF}}{\tilde{\theta}_{p0} - \tilde{\theta}_{pF}} \quad (21)$$

A questo punto possiamo andare a risolvere il sistema delle due equazioni differenziali, considerando le opportune condizioni al contorno.

$$\begin{cases} \xi'(\tilde{x}) = 1 - \frac{[\tilde{\theta}(\tilde{x})]^2}{2} \\ \xi(-1) = -1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \tilde{\psi}'(\tilde{x}) = \rho \left\{ \tilde{\theta}(\tilde{x}) - \frac{[\tilde{\theta}(\tilde{x})]^3}{6} \right\} \\ \tilde{\psi}(-1) = 0 \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto analiticamente e numericamente in modo tale da poter fare dei confronti tra le due soluzioni, come fatto in precedenza.

Verranno ora mostrate alcune immagini in cui è possibile osservare come risolvere analiticamente il sistema mediante l'utilizzo di Matlab.

```

syms x csi1(x) csi2(x) csi3(x) psi1(x) psi2(x) psi3(x) ro tetapm tetap0 tetaf tetapf tetapf

%definisco le teta(x) in funzione di tetapm,tetap0,tetap0,tetaf e tetapf e x
teta1(x)=tetapm*(x-1);
teta2(x)=tetap0+tetap0*x;
teta3(x)=tetaf+tetapf*(x-1);
%imposto le 6 eq.differenziali che legano csi e psi alle teta(x)
ode1(x)= diff(csi1,x)==1-(teta1(x))^2/2+(teta1(x))^4/24;
ode2(x)= diff(csi2,x)==1-(teta2(x))^2/2+(teta2(x))^4/24;
ode3(x)= diff(csi3,x)==1-(teta3(x))^2/2+(teta3(x))^4/24;
ode4(x)= diff(psi1,x)==ro*(teta1(x)-(teta1(x)^3/6));
ode5(x)= diff(psi2,x)==ro*(teta2(x)-(teta2(x)^3/6));
ode6(x)= diff(psi3,x)==ro*(teta3(x)-(teta3(x)^3/6));
%risolvo le 6 eq.differenziali e trovo le soluzioni in funzione delle syms
%e delle costanti C1,C2,C3,C4,C5,C6 delle rispettive equazioni
csi1=dsolve(ode1(x));
csi2=dsolve(ode2(x));
csi3=dsolve(ode3(x));
psi1=dsolve(ode4(x));
psi2=dsolve(ode5(x));
psi3=dsolve(ode6(x));

```

Fig. 21

In fig.17 è stato impostato il codice che permette a Matlab di comprendere il problema.

ODE sta per *Order differential equation* ed è il nome con cui abbiamo indicato le varie equazioni differenziali da risolvere.

Con *dsolve* abbiamo provveduto a risolvere le equazioni differenziali. La soluzione analitica verrà fornita nella seguente forma:

In essa compare la costante C1 che dobbiamo determinare sfruttando la conoscenza delle condizioni al contorno.

```

val =
C1 + (ro*tetapm^3*x^3)/6 - (ro*tetapm^3*x^4)/24 - (ro*tetapm*x^2*(tetapm^2 - 2))/4 + (ro*tetapm*x*(tetapm^2 - 6))/6

```

Fig. 22

```

cond1=[csi1(-1,C1)==-1];
cond2=[csi1(x1,C1)==csi2(x1,C2)];
cond3=[csi2(x2,C2)==csi3(x2,C3)];
cond4=[psi1(-1,C4)==0];
cond5=[psi1(x1,C4)==psi2(x1,C5)];
cond6=[psi2(x2,C5)==psi3(x2,C6)];

[C11, C21, C31, C41, C51, C61]=solve(cond1, cond2, cond3, cond4, cond5, cond6, C1, C2, C3, C4, C5, C6);

csi11(x)=subs(csi1(x,C1),{x,C1},{x,C11});
csi21(x)=subs(csi2(x,C2),{x,C2},{x,C21});
csi31(x)=subs(csi3(x,C3),{x,C3},{x,C31});
psi11(x)=subs(psi1(x,C4),{x,C4},{x,C41});
psi21(x)=subs(psi2(x,C5),{x,C5},{x,C51});
psi31(x)=subs(psi3(x,C6),{x,C6},{x,C61});

```

Fig. 31

Si conclude poi sostituendo nel sistema iniziale le condizioni al contorno trovate e si arriverà a una soluzione analitica delle ξ e ψ in cui non è presente alcuna costante di integrazione.

Quello che a noi interessa è determinare il valore di ξ e ψ nell'estremo libero del flexure:

$$\begin{aligned}
\xi_{F,A} &= a_x \tilde{\xi}_A(1) \\
&= a_x \\
&+ a_x \sum_{i=0}^4 \left(\rho^3 \frac{M_F}{a_x^2 l E} \right)^i (\rho^3 \mu)^{4-i} \left[f_{2i}(\beta_y) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{\rho^3 \mu} \right)^2 f_{2i+1}(\beta_y) \right] \\
\psi_{F,A} &= \frac{a_x}{\rho} \tilde{\psi}_A(1) \\
&= a_x \sum_{i=0}^4 \left(\rho^3 \frac{M_F}{a_x^2 l E} \right)^i (\rho^3 \mu)^{3-i} \left[g_{2i}(\beta_y) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{\rho^3 \mu} \right)^2 g_{2i+1}(\beta_y) \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

Dove F sta per *Final position* e A per *Analytical solution*.

Compare il segno di sommatoria perché le ξ e Ψ finali sono ottenute dalla somma dei termini $\xi_0 \dots \xi_4$ e $\Psi_0 \dots \Psi_4$ che costituiscono l'espansione in serie di Taylor.

```
%csi e psi in funzione di f e g
csi0=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^0*((ro^3)*mu)^4*(f0+(1/((ro^3)*mu))^2*f1);
psi0=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^0*((ro^3)*mu)^3*(g0+(1/((ro^3)*mu))^2*g1);
csi1=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^1*((ro^3)*mu)^3*(f2+(1/((ro^3)*mu))^2*f3);
psi1=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^1*((ro^3)*mu)^2*(g2+(1/((ro^3)*mu))^2*g3);
csi2=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^2*((ro^3)*mu)^2*(f4+(1/((ro^3)*mu))^2*f5);
psi2=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^2*((ro^3)*mu)^1*(g4+(1/((ro^3)*mu))^2*g5);
csi3=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^3*((ro^3)*mu)^1*(f6+(1/((ro^3)*mu))^2*f7);
psi3=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^3*((ro^3)*mu)^0*(g6+(1/((ro^3)*mu))^2*g7);
csi4=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^4*((ro^3)*mu)^0*(f8+(1/((ro^3)*mu))^2*f9);
psi4=ax*((ro^3)*Mf/((ax^2)*1*E))^4*((ro^3)*mu)^(-1)*(g8+(1/((ro^3)*mu))^2*g9);

csifa1=csi4+csi3+csi2+csi1+csi0+ax;
psifa1=psi4+psi3+psi2+psi1+psi0;
```

Fig. 32

Per ottenere le altre ξ_{fa} e Ψ_{fa} dobbiamo fare esattamente la stessa cosa.

3.CONFRONTO TRA SOLUZIONE ANALITICA E SOLUZIONE NUMERICA

3.1 Angolo Θ

Un aspetto importante che si vuole evidenziare è lo scostamento che c'è tra la soluzione analitica e quella numerica della $\tilde{\theta}(\tilde{x})$.

Per fare ciò basta andare a risolvere direttamente l'equazione differenziale iniziale, sfruttando l'ausilio di un software (ad esempio Matlab) e ponendo le semplificazioni di cui è stato discusso precedentemente.

Si può procedere andando definire un flexure con profilo ellittico con una determinata geometria, un certo materiale e i valori dei carichi.

a_x [mm]	l [mm]	E [MPa]	σ_{sn} [MPa]	η
20	10	$2.1 \cdot 10^{11}$	600	0.3

Una volta definiti le geometria e i carichi, si vanno a fissare dei valori per ρ e βy e si può procedere con la risoluzione numerica dell'equazione.

```
%coefficienti
l=10*10^-3;
ssn=-6*10^8;
E=2.1*10^11;
x0=0.02;
eta=0.3;
eps=10;
by=0.05;
mumax=2/3*(by/eps)^3*1/sqrt(1+eta^2);
mu=mumax/100;
A=abs(mu)*E*l*x0*sqrt(1+(eta)^2);
cf=sqrt(1/(1+(1/eta)^2));
sf=sqrt(1/(1+eta^2));
I0=2/3*1*(x0/eps)^3;
Mf=-1*x0^2*(2/3*(by/eps)^2*ssn+E*mu);
```

Fig. 23


```

%risoluzione problema
f=@(x,y) [y(2); -(Dinerzia(x,by)/inerzia(x,by))*y(2)+(A*(x0^2)*cf/E/I0/inerzia(x,by))*y(1)-A*(x0^2)*sf/E/I0/inerzia(x,by)];
bc=@(ya,yb) [ya(1);yb(2)-x0*Mf/E/I0/inerzia(1,by)];
xmesh=linspace(-1+10^-12,1-10^-12,100);
solinit = bvpinit(xmesh,[0 0]);
sol=bvp4c(f,bc,solinit);
plot(sol.x, sol.y);

```

Fig. 24

In Fig.19 sono indicati i valori che caratterizzano i parametri principali del giunto.

In Fig.20 troviamo il codice implementato per ottenere una soluzione numerica della nostra equazione differenziale.

Per semplicità di trattazione, con y viene indicato il parametro θ . Siccome abbiamo a che fare con equazioni differenziali di secondo grado, per la risoluzione è opportuno andare ad effettuare un cambio di variabile per ricondurre l'equazione del secondo ordine ad una del primo ordine.

Trovata la soluzione, è possibile riportarla su un grafico attraverso il comando *plot*.

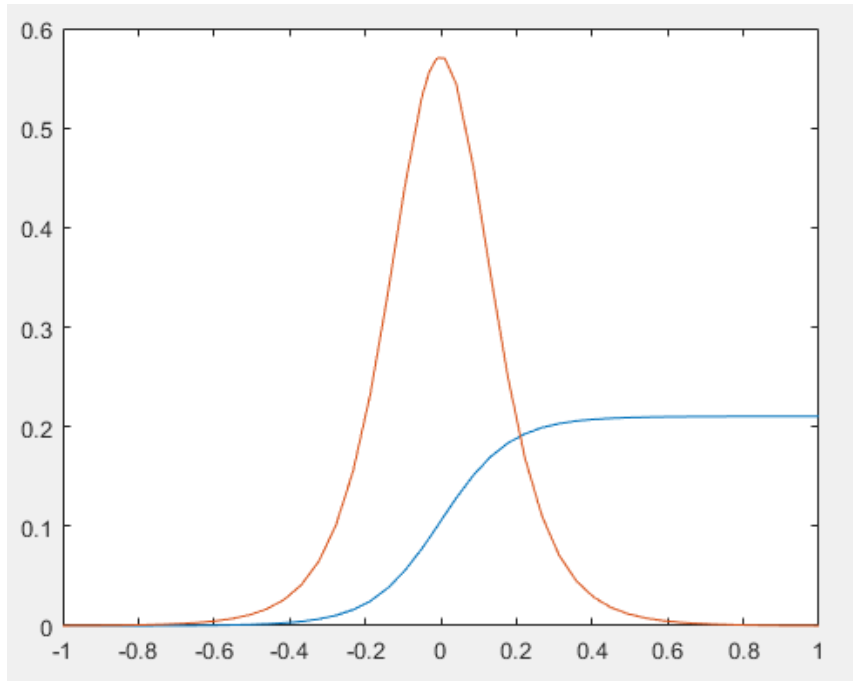


Fig. 25

Se fissiamo i parametri μ e ρ e facciamo diminuire β_y , otteniamo:

β_y	μ	θ_F [°]		$\Delta\%$
		analytical	numerical	
20	5,3E-02	0,159	0,161	1,46
15	2,3E-02	0,209	0,210	0,21
10	6,7E-03	0,308	0,307	0,36
5	8,3E-04	0,583	0,581	0,45
1	6,7E-06	2,138	2,132	0,30
0,5	8,3E-07	3,386	3,377	0,25
0,1	6,7E-09	8,403	8,390	0,16
0,01	6,7E-12	27,206	27,194	0,04

Fig. 26

fissando invece βy e μ facendo variare ρ , abbiamo:

ε	μ	θ_F [°]		$\Delta\%$
		analytical	numerical	
0,5	6,7E-06	0,602	0,602	0,08
1	8,3E-07	1,204	1,203	0,09
2	1,0E-07	2,408	2,406	0,10
5	6,7E-09	6,021	6,014	0,11
10	8,3E-10	12,042	12,027	0,13
15	2,5E-10	18,063	18,038	0,14
20	1,0E-10	24,084	24,047	0,16
30	3,1E-11	36,126	36,061	0,18

Fig. 27

Ottenute la soluzione analitica e quella numerica, si può andare a trovare quanto vale l'errore, cioè quant'è lo scostamento tra le due soluzioni.

Per avere una visione chiara del risultato, andiamo a mappare ρ e βy per diversi valori di μ .

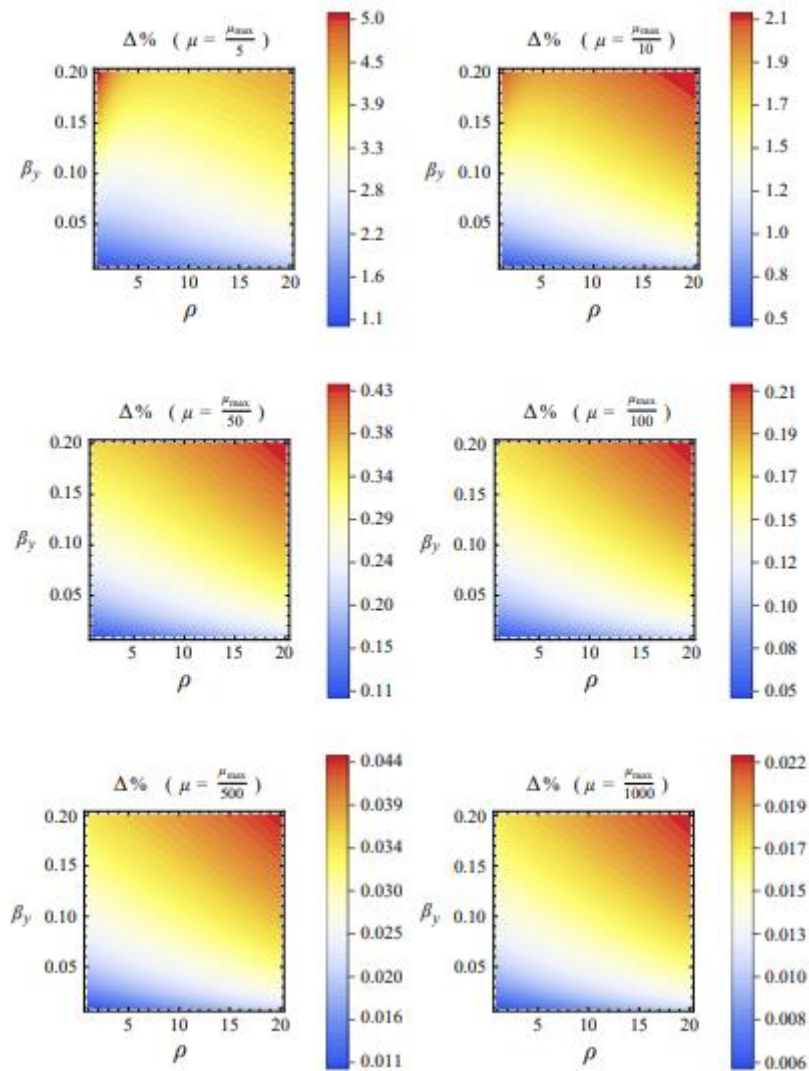


Fig. 28

Dalla figura precedente possiamo notare che l'errore percentuale è minore se ci troviamo nella zona corrispondente a valori alti di ρ e bassi di β_y .

Questo conferma quanto è stato mostrato nelle immagini precedenti, in cui si vede come l'errore tra le due soluzioni diminuisce al crescere di ρ e al decrescere di β_y .

Lo studio che è stato mostrato finora riguarda un singolo flexure di sezione ellittica. Adesso, per proseguire, si intende realizzare ed analizzare un sistema di quattro giunti con lo scopo di capire quale possa essere il suo comportamento sottoposto a certe condizioni di carico ed analizzarne le possibili soluzioni.

3.2 Posizione finale

Come è stato fatto per la rotazione, facciamo anche in questo caso un confronto tra la soluzione analitica e quella numerica.

Consideriamo che la trave è soggetta ad un momento pari a

$$M_{F,max} = -l a_x^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\beta_y}{\varepsilon} \right)^2 \sigma_{sn} + \mu E \right] \quad (24)$$

inoltre

$$\mu = \frac{\mu_{max}}{\alpha}$$
$$\mu_{max} = \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_y}{\varepsilon} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

Consideriamo i seguenti parametri:

$$a_x = 20 \text{ mm} ; \quad l = 10 \text{ mm} ; \quad E = 210 \text{ GPa} ; \quad |\sigma_{sn}| = 600 \text{ MPa} ; \quad \eta = 0.3 ; \quad \alpha = 100$$

Dove abbiamo definito

$$\Delta_\xi = \left| \frac{\xi_{F,A} - \xi_{F,N}}{\xi_{F,N}} \right| 100$$
$$\Delta_\psi = \left| \frac{\psi_{F,A} - \psi_{F,N}}{\psi_{F,N}} \right| 100$$

Caso 1

$\beta_y = 0.05$ e ρ variabile

ρ	$\xi_{F,A}[mm]$	$\xi_{F,N}[mm]$	$\psi_{F,A}[mm]$	$\psi_{F,N}[mm]$	Δ_ξ	Δ_ψ
1	19.9958	19.996	0.422	0.421	9.3e-4	0.126
2	19.9834	19.984	0.842	0.840	3.07e-3	0.225
5	19.8963	19.9002	2.099	2.05	0.019	0.25
10	19.5864	19.6019	4.77	4.171	0.079	0.140
15	19.073	19.1084	6.212	6.207	0.187	0.073
20	18.3593	18.4248	8.184	8.183	0.355	0.002

Fig. 33

Caso 2

$\rho = 10$ e β_y variabile

ρ	$\xi_{F,A}[mm]$	$\xi_{F,N}[mm]$	$\psi_{F,A}[mm]$	$\psi_{F,N}[mm]$	Δ_ξ	Δ_ψ
1	19.9958	19.996	0.422	0.421	9.3e-4	0.126
2	19.9834	19.984	0.842	0.840	3.07e-3	0.225
5	19.8963	19.9002	2.099	2.095	0.019	0.215
10	19.5853	19.6019	4.177	4.171	0.085	0.140
15	19.067	19.1084	6.212	6.207	0.217	0.073
20	18.3414	18.4248	8.184	8.183	0.453	0.002

Fig. 34

Nelle seguenti mappe possiamo osservare la differenza tra la soluzione analitica e quella numerica relativa alla posizione finale del giunto.

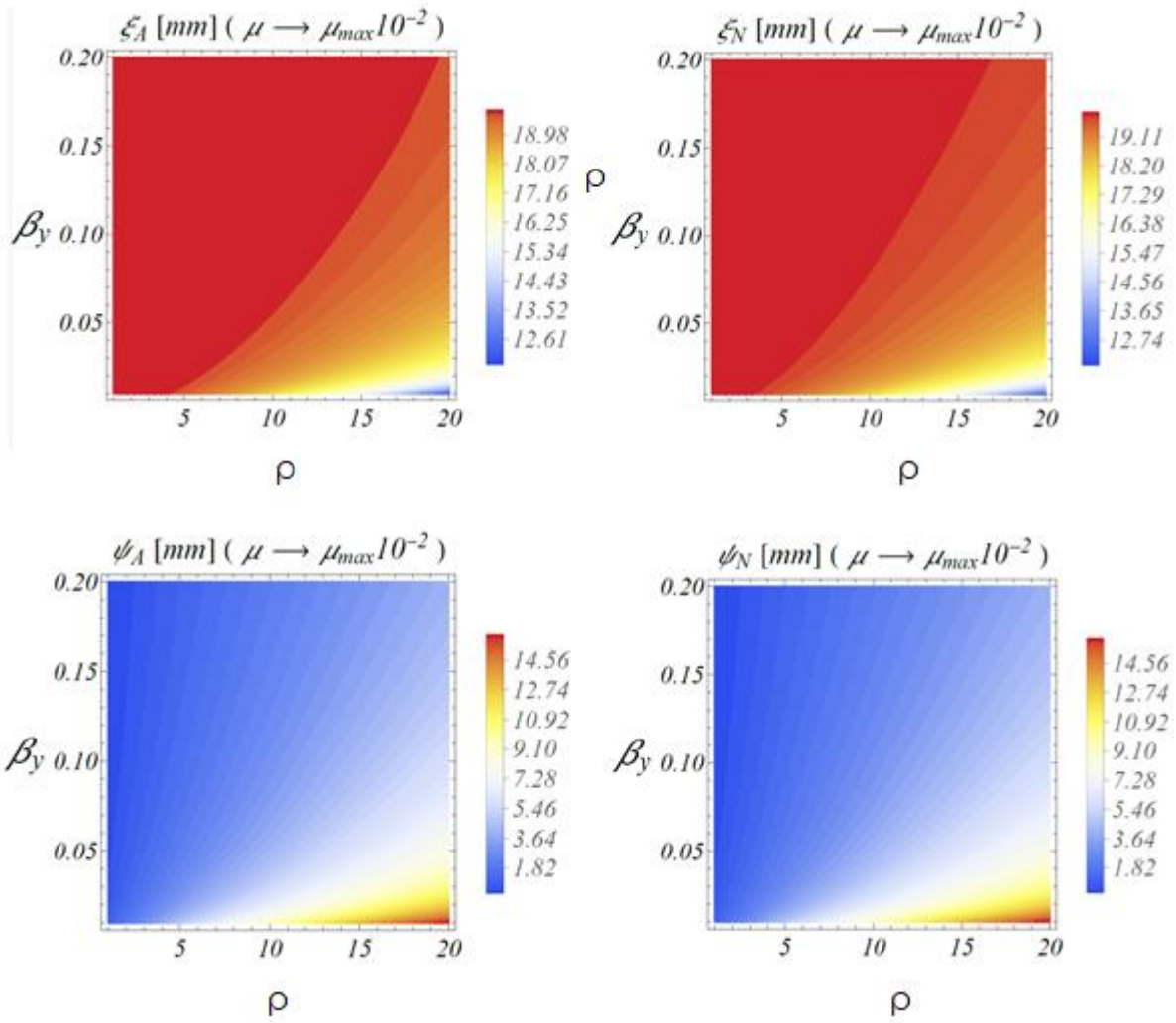


Fig. 35

Possiamo osservare che le mappe sono praticamente uguali e non ci sono grandi differenze tra le due soluzioni per quanto riguarda la deformazione.

4. SISTEMA DI FLEXURE

4.1 Definizione del numero di equazioni ed incognite

Il passo successivo consiste nell'andare a definire un sistema di quattro flexure e il relativo modello matematico che possa essere rappresentativo della situazione. Per procedere in questa direzione ci possiamo servire inizialmente del software Matlab, che ci consente di effettuare calcoli e diverse operazioni in maniera più rapida.

Quali sono i passi da seguire per definire un modello matematico?

Prima di tutto dobbiamo capire qual è l'oggetto dello studio e in base a questo bisogna scrivere le equazioni che descrivono il nostro problema.

Dalla meccanica del continuo sappiamo che ci sono tre gruppi importanti di equazioni che permettono di rappresentare in maniera precisa il comportamento statico di un corpo o di un sistema meccanico.

Le tre equazioni sono:

- 1. EQUAZIONI DELLA STATICA**
- 2. EQUAZIONI DI CHIUSURA**
- 3. EQUAZIONI DI CONGRUENZA**

Prima di procedere e definire nel dettaglio le varie equazioni, dobbiamo capire con che tipo di sistema abbiamo a che fare.

Andiamo ora a rappresentare uno schizzo del sistema di flexure che stiamo trattando. Come possiamo vedere esso è costituito da quattro flexure e da tre corpi rigidi, perché il corpo alla base è vincolato a telaio.

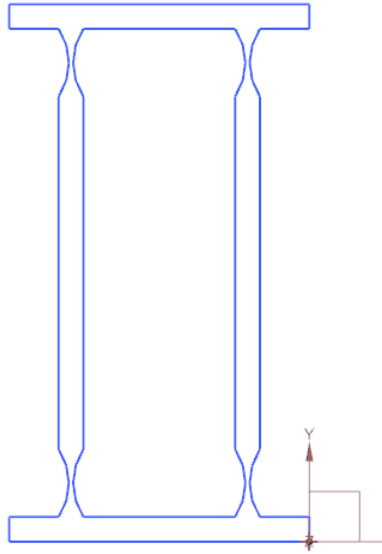


Fig. 36

Numero di incognite

Possiamo dire, quindi, che complessivamente abbiamo un sistema che per essere descritto necessita di 36 equazioni e quindi per essere risolvibile, devono esserci esattamente 36 incognite.

Le incognite sono:

- 24 tra forze e momenti
- 4 spostamenti orizzontali
- 4 spostamenti verticali
- 4 angoli

In tutto sono 36 incognite. Il sistema è risolvibile.

Numero di equazioni necessarie

Statica

4(flexure)+3(corpi rigidi) → 7 corpi in totale

Equazioni per ciascun corpo:

- 1) Traslazione orizzontale
- 2) Traslazione verticale
- 3) Equilibrio dei momenti

In totale abbiamo bisogno di 21 equazioni della statica.

Chiusura

Le equazioni di chiusura ci consentono di partire da un certo punto del nostro sistema e definire vettorialmente un percorso chiuso, sia in direzione x che y.

Quindi le equazioni in questo caso sono 2 per tutto il sistema.

Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive sono molto importanti perché mettono in relazione i carichi con gli spostamenti.

Gli spostamenti nel nostro caso sono:

-4 orizzontali

-4 verticali

-4 rotazioni

Quindi, in totale, 12 equazioni costitutive.

Vincolo di corpo rigido

In aggiunta a tutte queste, dobbiamo anche inserire una ulteriore equazione che potremmo chiamare *equazione di vincolo di corpo rigido* che ha la funzione stabilire una relazione fra gli angoli del sistema.

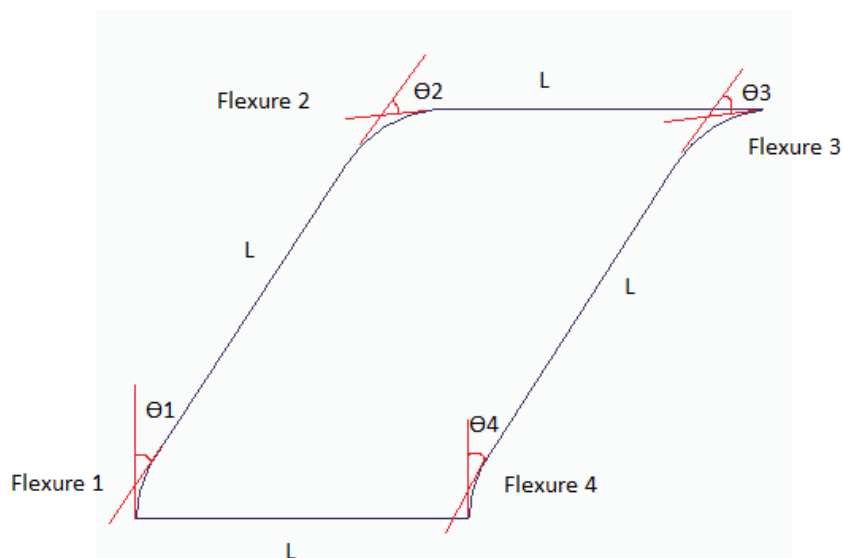


Fig. 37

In figura è mostrato un possibile modo in cui sistema può deformarsi, ma il verso della rotazione potrebbe essere l'opposto. Il reale comportamento sarà ottenuto una volta che saranno fatte le simulazioni che ci diranno i versi delle rotazioni di ciascun flexure.

4.2 Modello

-Nello scrivere le equazioni apportiamo delle semplificazioni:

- $\sin(\theta) \approx \theta$
- $\cos(\theta) \approx 1$
- $\xi \approx a_x$
- $\psi\theta \approx 0$

La prima e la seconda sono ottenute considerando piccole le rotazioni del flexure.

La terza deriva dall'ipotesi di spostamento assiale trascurabile e la quarta dal fatto che le rotazioni e gli spostamenti trasversali sono ipotizzati piccoli e per questo il loro prodotto è trascurabile rispetto agli altri termini del sistema.

Considerando queste ipotesi semplificative, il sistema risulta composto da 32 equazioni e 32 incognite, perché vengono trascurate le equazioni relative alle ξ per il fatto che ξ stessa non è più un'incognita, ma bensì un dato.

-Un altro aspetto importante da considerare è che l'analisi del singolo flexure è stata inizialmente effettuata nella seguente maniera:

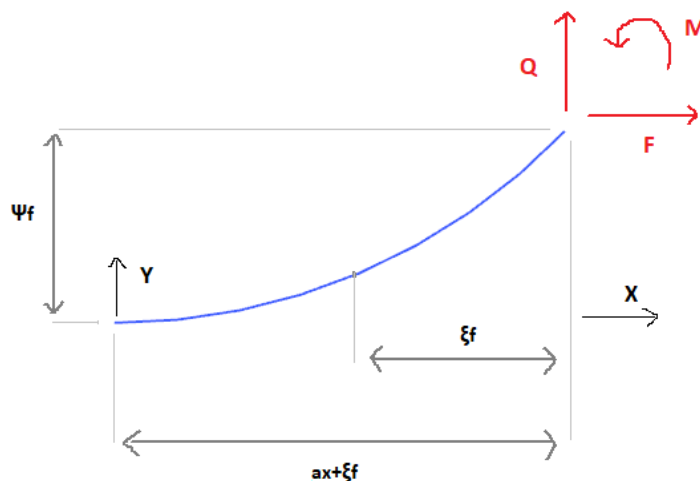


Fig. 38

Però, i giunti del meccanismo sono posizionati diversamente e per questo è opportuno andare a fare delle considerazioni di tipo geometrico per caratterizzare correttamente tutto il sistema.

Il giunto presente nel sistema può essere schematizzato nel seguente modo:

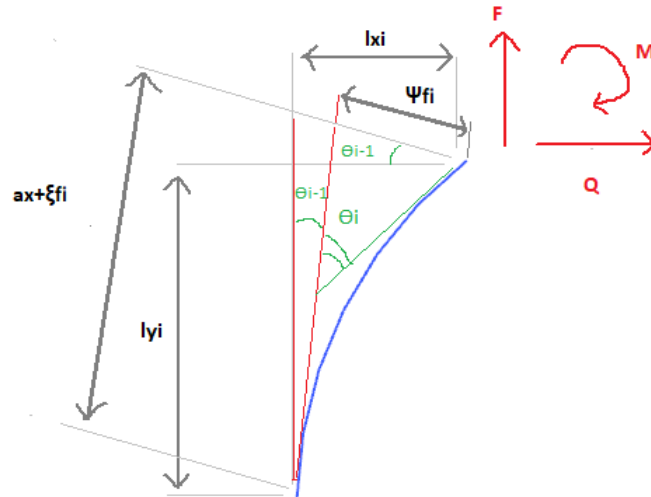


Fig. 39

Da questo possiamo dedurre alcune espressioni:

$$l_{xi} = (a_x + \xi_{fi}) * \sin(\theta_i - 1) + \psi_{fi} * \cos(\theta_i - 1) \quad (25)$$

$$l_{yi} = (a_x + \xi_{fi}) * \cos(\theta_i - 1) - \psi_{fi} * \sin(\theta_i - 1) \quad (26)$$

con $i=1,2,3,4$

Applicando le semplificazioni sul sin e cos, otteniamo:

$$l_{xi} = (ax + \xi) \vartheta_{i-1} + \psi_{fi}$$

$$l_{yi} = (ax + \xi) \psi_{fi} \vartheta_{i-1}$$

Equazioni della statica

Per scrivere le equazioni di equilibrio dobbiamo considerare singolarmente ogni giunto ed ogni corpo rigido.

Per semplicità e compattezza di trattazione verrà mostrato l'equilibrio del primo flexure (per gli altri è esattamente analogo), l'equilibrio per uno dei due corpi rigidi laterali e quello del corpo rigido che si trova nella parte alta del meccanismo.

•**Q, F e M_f** indicano i carichi e i momenti che agiscono sulla struttura

•**H, V e M** indicano le reazioni vincolari

Facciamo in modo che ci sia coerenza nella considerazione delle forze: nei 4 flexure le forze e i momenti vanno presi con la stessa direzione e verso e analogamente facciamo per i due corpi rigidi laterali. Di conseguenza, per il corpo rigido in alto, nell'espressione dell'equilibrio, compariranno solamente i carichi. Le forze orizzontali sono positive verso destra e quelle verticali verso l'alto. I momenti sono positivi per rotazioni in senso antiorario.

Flexure 1

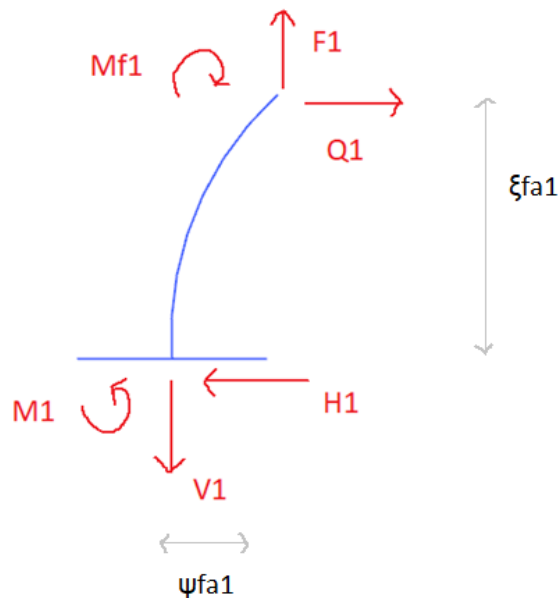


Fig.40

Corpo rigido 1

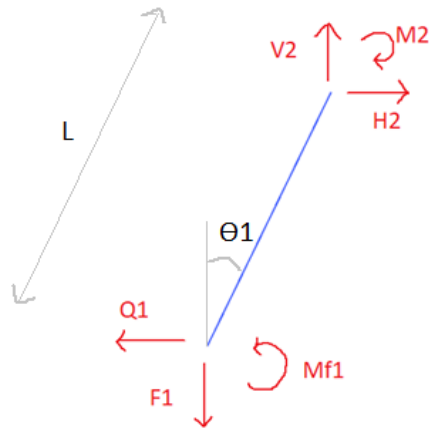


Fig. 41

Corpo rigido 2

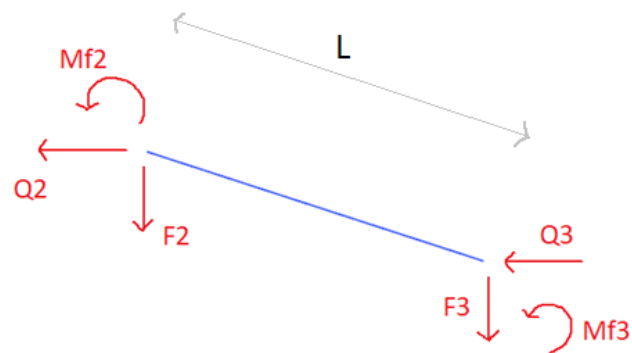


Fig. 42

```

%flexure 1
eq1=-H1+Q1==0;
eq2=-V1+F1==0;
eq3=-Mf1+M1-Q1*(2*ax)+F1*psifa1==0;|
%flexure 2
eq4=-H2+Q2==0;
eq5=-V2+F2==0;
eq6=M2-Mf2-Q2*(2*ax)+F2*((2*ax)*tetaf1+psifa2)==0;
%flexure 3
eq7=Q3-H3==0;
eq8=-V3+F3==0;
eq9=-Mf3+M3-Q3*(2*ax)+F3*((2*ax)*tetaf4+psifa3)==0;
%flexure 4
eq10=-H4+Q4==0;
eq11=-V4+F4==0;
eq12=-Mf4+M4+F4*psifa4-Q4*(2*ax)==0;
%corpo 1
eq13=-Q1+H2==0;
eq14=-F1+V2==0;
eq15=Mf1-M2+V2*L1*tetaf1-H2*L1==0;
%corpo 2
eq16=-Q2-Q3+F==0;
eq17=-F2-F3==0;
eq18=Mf3+Mf2-F3*L2-Q3*L2*(tetaf3+tetaf4)-F*a*(tetaf1+tetaf2)==0;
%corpo 3
eq19=H3-Q4==0;
eq20=-F4+V3==0;
eq21=Mf4-M3+V3*L3*tetaf4-H3*L3==0;

```

Fig. 29-Statica

Equazioni di chiusura

Le equazioni di chiusura, alla luce delle considerazioni fatte sopra, sono:

```

%CHIUSURA
eq22=psifa1+L1*tetaf1+((2*ax)*tetaf1+psifa1)+L2-((2*ax)*tetaf4+psifa3)-L3*tetaf4-psifa4-L0==0;
eq23=(2*ax)+L1+(2*ax)-L2*(tetaf1+tetaf2)-(2*ax)-L3-(2*ax)==0;

```

Fig. 44-Chiusura

Le equazioni di chiusura consentono di definire due percorsi vettoriali chiusi, uno lungo x e l'altro lungo y.

Equazioni costitutive

```
%EQUAZIONI COSTITUTIVE
eqe=psifa1-((ro^3)*Mf1/(ax*1*E)*g3)==0;
eqf=psifa2-((ro^3)*Mf2/(ax*1*E)*g3)==0;
eqg=psifa3-((ro^3)*Mf3/(ax*1*E)*g3)==0;
eqh=psifa4-((ro^3)*Mf4/(ax*1*E)*g3)==0;
eqi=tetaf1-((3/4)*(ro^3)*(Mf1/((ax^2)*1*E)))*h==0;
eqj=tetaf2-((3/4)*(ro^3)*(Mf2/((ax^2)*1*E)))*h==0;
eqk=tetaf3-((3/4)*(ro^3)*(Mf3/((ax^2)*1*E)))*h==0;
eql=tetaf4-((3/4)*(ro^3)*(Mf4/((ax^2)*1*E)))*h==0;
eqo=csifa1+1/ax*((ro^3)*Mf1/(ax*1*E))^2*f5==0;
eqp=csifa2+1/ax*((ro^3)*Mf2/(ax*1*E))^2*f5==0;
eqq=csifa3+1/ax*((ro^3)*Mf3/(ax*1*E))^2*f5==0;
eqr=csifa4+1/ax*((ro^3)*Mf4/(ax*1*E))^2*f5==0;
```

Fig.45

Crea un legame matematico tra mondo statico (sforzi) e mondo cinematico (deformazioni).

Vi sono tre comportamenti fondamentali:

- elastico, il legame è reversibile, lo sforzo quindi dipende solo dal valore corrente della deformazione; la maggior parte dei materiali presenta inizialmente un comportamento di questo tipo.

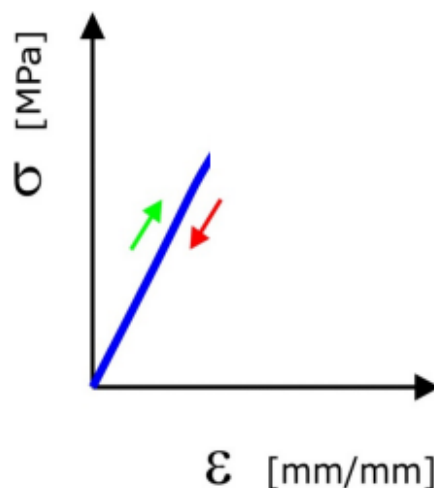


Fig. 46

- plastico, le deformazioni non sono più totalmente reversibili, ma una parte di esse è irreversibile per effetto di una avvenuta modifica della microstruttura (reticolo cristallino nei metalli); lo sforzo dipende dal valore corrente della deformazione e dalla storia seguita per raggiungerla.

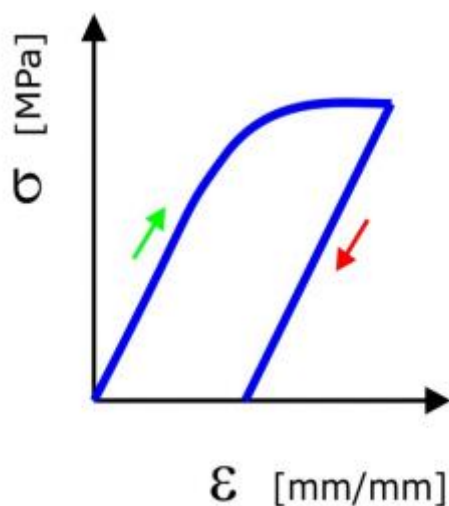


Fig. 47

- viscoso, nei primi due la deformazione consegue istantaneamente all'applicazione del carico; nei materiali viscosi sforzi e deformazioni variano nel tempo a condizioni esterne immutate; il creep è l'aumento della deformazione a sforzo costante (calcestruzzo); il rilassamento è la diminuzione di sforzo a deformazione costante.

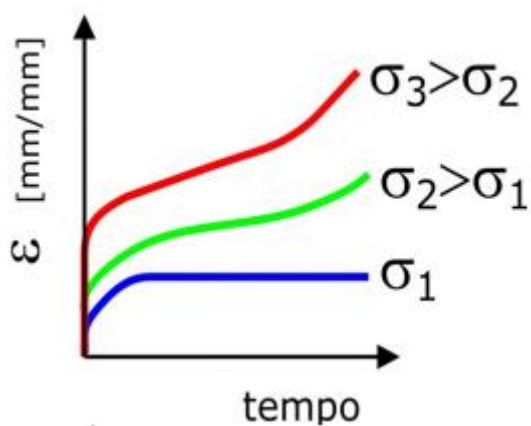


Fig. 48

Infine abbiamo:

```
%COMPATIBILITA' CINEMATICA
eqs=tetaf1+tetaf2-tetaf3-tetaf4==0;
```

Fig. 49

Dove l'ultima equazione *eqo* è quella che abbiamo chiamato *equazione di vincolo di corpo rigido* e dove *g3* e *h* hanno delle espressioni che possono essere ottenute con dei software di calcolo.

$$g3=3*(512*by^{(5/2)}-15*\sqrt{2}*pi*(-32+by*(8+5*by)))/(2560*by^{(5/2)});$$

$$h=(3*pi*(1+by)^2+6*\sqrt{by*(2+by)}+8*\sqrt{(by^3)*(2+by)}+4*\sqrt{(by^5)*(2+by)}+(6*(1+by)^2)*\operatorname{acsc}(1+by))/((1+by)*(by*(2+by))^{(5/2)});$$

Fig. 50

Risolvendo questo sistema analiticamente otterremo la soluzione in funzione di ρ e βy , costituita dalle 36 espressioni delle 36 incognite che avevamo definito inizialmente mediante l'analisi statica del problema. Infatti le semplificazioni sono state adottate per avere un sistema più semplice da risolvere, poi però le ξ vengono riconsiderate come soluzioni da determinare e questo viene fatto sfruttando le relazioni costitutive.

Soluzione analitica

$$\xi fa1 = -\frac{1}{ax} \left(\rho^3 \frac{Mf1}{ax l E} \right)^2 f(\beta y) \quad (27)$$

$$\Psi fa1 = \left(F (2ax + L) \rho^3 \frac{g(\beta y)}{4 ax l E} \right) \quad (28)$$

$$\theta fa1 = 3F(2ax + L) \rho^3 \frac{h}{16 ax^2 l E} \quad (29)$$

$$Q1 = \frac{1}{32} F \frac{16 + (F2 ax + L) \rho^3 (-4 ax g3 + 3(2ax + L) h(\beta_y))}{(ax^2 l L E)} \quad (30)$$

$$H1 = \frac{1}{32} F \frac{16 + F(2ax + L) \rho^3 (-4 ax g3 + 3(2ax + L) h(\beta_y))}{(ax^2 l L E)} \quad (31)$$

$$V1 = F \left(\frac{1}{2} + \frac{ax}{L} \right) \quad (32)$$

$$V3 = -F \frac{2ax + L}{2L} \quad (33)$$

$$F1 = F \left(\frac{1}{2} + \frac{ax}{L} \right) \quad (34)$$

$$F3 = -F \frac{2ax + L}{2L} \quad (35)$$

$$Mf1 = \frac{1}{4} F(2ax + L) \quad (36)$$

$$M1 = \frac{1}{16} F \left(4(6ax + L) + \frac{(F(2ax + L)\rho^3(-2(4ax + L)g3 + 3(2ax + L)h(\beta_y)))}{ax l L E} \right) \quad (37)$$

Sono state indicate le soluzioni relative al primo giunto perché per gli altri sono esattamente uguali. Quelle relative agli altri flexure sono:

- $\xi_2 = -\xi_1$; $\xi_3 = -\xi_1$; $\xi_4 = \xi_1$
- $\psi_2 = -\psi_1$; $\psi_3 = -\psi_1$; $\psi_4 = \psi_1$
- $\theta_2 = -\theta_1$; $\theta_3 = -\theta_1$; $\theta_4 = \theta_1$

4.3 Forza massima applicabile

Un aspetto molto importante consiste nel trovare quale sarà la forza massima che può essere applicata al meccanismo per ogni combinazione di ρ e β_y .

Possiamo sfruttare una relazione molto utilizzata nella Scienza delle Costruzioni, quella che lega momento applicato, momento d'inerzia, sezione e tensione di snervamento.

$$\sigma_{sn} = \frac{Mf}{I(x)} y(x) \quad (38)$$

Sappiamo che la tensione deve essere pari a 600 Mpa (tensione di snervamento), conosciamo le espressioni della sezione e del momento di inerzia avendo studiato il singolo flexure ellittico e l'espressione del momento applicato è nota in quanto soluzione del nostro sistema.

$$y(x) = a_y \left[(1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_x}\right)^2} \right] \quad (39)$$

$$\bar{I}_z(\tilde{x}) = \frac{2}{3} l a_y^3 \left[(1 + \beta_y) - \sqrt{1 - \tilde{x}^2} \right]^3 \quad (40)$$

Come trovare la forza applicabile?

All'interno dell'espressione del momento compare la forza F applicata al sistema, quindi lavorando con i termini dell'equazione arriviamo alla soluzione del nostro problema.

$$F = 4\sigma \frac{I_z(x)}{y(x) + (2 * ax + L)} \quad (41)$$

Con la precedente equazione siamo in grado di trovare la massima forza applicabile in corrispondenza di qualsiasi coppia di valori ρ e β_y .

Possiamo implementare questo codice su Matlab per rendere più immediato il calcolo della forza. Andiamo a calcolarla per 3 casi principali.

ρ	β_y	F max [N]
15	0,1	0,2209
10	0,1	0,4582
10	0,2	2,5922

5.MODELLAZIONE CAE

Il prossimo passo per proseguire il lavoro consiste nell'andare realizzare e successivamente a simulare il modello geometrico su un software apposito. Verrà utilizzato Ansys Workbench che è uno dei migliori programmi per la simulazione FEM.

L'obiettivo è quello di verificare se il modello matematico definito in precedenza sia coerente con quello che accade con la simulazione FEM e quale sia il suo grado di precisione.

5.1 Analisi FEM

L'**analisi FEM (Analisi agli elementi Finiti**, oppure **FEA per Finite Element Analysis**) è una tecnica di **simulazione a computer** all'avanguardia applicabile a molti settori dell'ingegneria.

L'analisi FEM consente di descrivere un sistema reale in maniera accurata e affidabile, al fine di poter ricavare in tempi rapidi le grandezze fisiche di interesse.

- Resistenza strutturale e rigidità componenti
- Deformazioni
- Distribuzione temperatura e deformazioni termiche
- Ottimizzazione geometrica
- Riduzione peso dei componenti
- Ottimizzazione smaltimento termico
- Ottimizzazione perdite di carico
- Cinematismi complessi
- Pressione specifica di accoppiamenti
- Potenze e forze meccanismo

Uno dei vantaggi che possiamo ottenere con l'analisi FEM riguarda la possibilità di studiare fenomeni fisici complessi che, se analizzati sperimentalmente, richiederebbero molta più fatica e tempo. Inoltre ci permette di individuare eventuali problematiche del

sistema che stiamo studiando, con la possibilità di risolverle attraverso rimozione o aggiunta di materiale o distribuzione più accurata del peso.

5.1.2 Mesh

Uno degli aspetti più importanti dell'analisi FEM è senza dubbio la **mesh**. Si tratta di una griglia geometrica che suddivide il modello in tanti piccoli elementi che rendono più facile il calcolo al software. La soluzione finale viene determinata sommando tutte le soluzioni che sono individuate per ognuno di questi elementi.

Praticamente la mesh consente di passare da un modello continuo ad un modello discretizzato. Il principio ingegneristico su cui si basa l'analisi può essere espresso dalla frase nota "divide et impera", ovvero un problema complesso può essere scomposto in tanti problemi più semplici le cui soluzioni portano alla soluzione complessiva.

La mesh è composta da geometrie primitive (elementi finiti) con una forma matematica ben definita: solitamente sono quadrati o triangoli per domini 2D ed esaedri e tetraedri per domini 3D.

Un elemento è costituito da **nodi**, **spigoli** e **facce**. Su Ansys, ma anche su altri software, dall'inglese i nodi vengono indicati come vertex, gli spigoli come edge e le facce come faces.

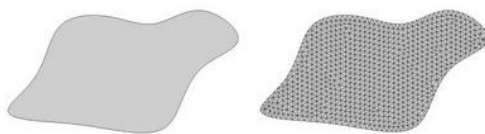


Fig. 51

La scelta di queste geometrie è importante perché a seconda dello studio che si sta effettuando sarà necessario adottare un certo tipo di elemento. Più il numero dei nodi è elevato, più preciso sarà il risultato che otterremo e quindi dovremo cercare di utilizzare mesh con dimensioni piccole e forme che permettano di avere un maggior numero di spigoli.

Negli ultimi anni, a tal proposito, sono stati introdotti elementi che a parità di tipologia hanno un maggior numero di nodi (es. Fig.52).

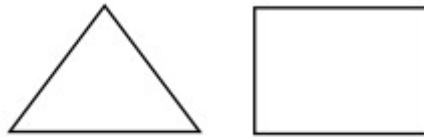


Fig. 52

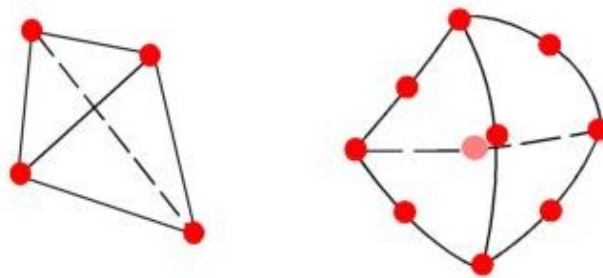


Fig. 53

5.2 Parametri ingegneristici

Come detto, utilizziamo Ansys per realizzare il nostro modello virtuale.

Una volta aperta la schermata principale, andando su *Engineering Data* abbiamo a disposizione una sezione in cui possiamo impostare diversi parametri che caratterizzeranno il nostro modello.

Ad esempio, come mostrato in Fig.54 è possibile scegliere il materiale. In questo caso abbiamo lasciato lo *Structural Steel* già presente di default, ma è possibile sceglierne qualsiasi altro a seconda dell'esigenza.

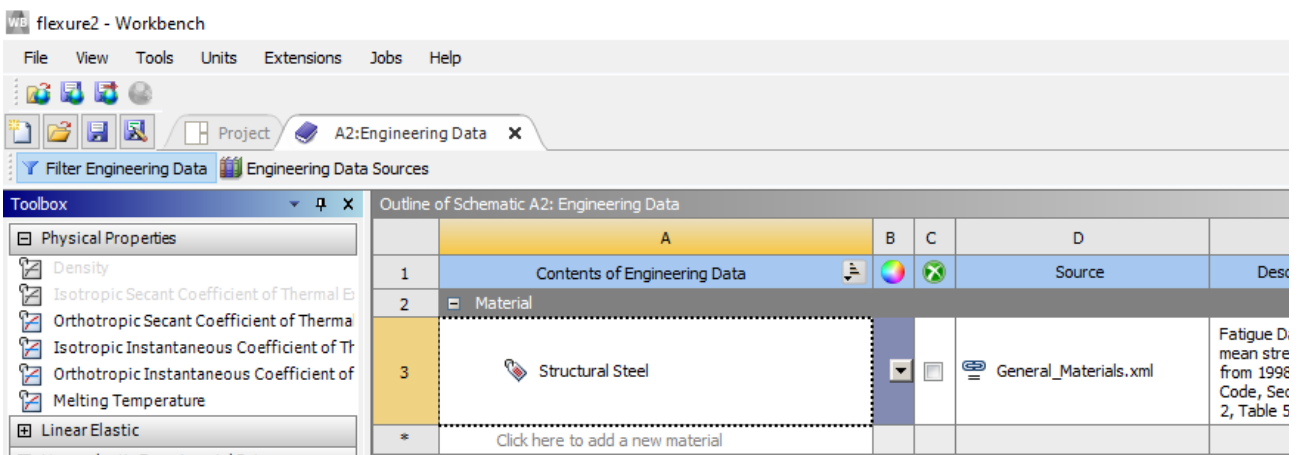


Fig. 54

	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Material Field Variables	Table			
3	Density	7850	kg m ⁻³		
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
6	Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Young's Modulu...			
8	Young's Modulus	2E+11	Pa		
9	Poisson's Ratio	0,3			
10	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa		
11	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa		
12	Strain-Life Parameters				
20	S-N Curve	Tabular			
24	Tensile Yield Strength	2,5E+08	Pa		
25	Compressive Yield Strength	2,5E+08	Pa		
26	Tensile Ultimate Strength	4,6E+08	Pa		
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa		

Fig.55

Sempre nella stessa sezione, ma nella parte immediatamente sottostante, abbiamo una serie di parametri che possiamo impostare. Tra i più importanti, per il nostro caso, ci sono il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e la densità del materiale.

5.3 Creazione della geometria

Ansys possiede due interfacce grafiche che consentono la realizzazione delle geometrie desiderate: *SpaceClaim* e *New Design Modeler*.

In questa trattazione utilizzeremo *New Design Modeler*, ma i due permettono di eseguire lo stesso tipo di operazioni e dispongono entrambi degli stessi strumenti di lavoro, quindi la scelta di uno o dell'altro è indifferente.

Il nostro scopo è riuscire a disegnare una struttura del tipo rappresentato in Fig.36 (Cap.3).

Anche se apparentemente semplice, per disegnare tale geometria bisogna prestare molta attenzione e fare le giuste considerazioni. La parte più critica sta nel realizzare i quattro giunti, perché sono tutti di forma ellittica e quindi non si possono generare utilizzando il comando *Arco*.

Anche se ci possono essere diversi modi, in questo caso si è generato dapprima una forma ellittica e poi attraverso l'introduzione di linee di costruzione e l'utilizzo di comandi(ad esempio *split*) si è riusciti a generare il flexure di profilo ellittico.

Una volta realizzato un singolo flexure, per gli altri tre il procedimento è esattamente lo stesso e si può quindi proseguire definendo l'intera geometria.

Le dimensioni principali che caratterizzano la struttura sono:

$a_x=20\text{mm}$

$L=100\text{mm}$

Dove a_x è la lunghezza del semiasse maggiore del flexure ellittico ed L è la lunghezza dei due corpi rigidi. Come abbiamo visto precedentemente, ci sono delle formule che legano le dimensioni fra loro attraverso i due parametri principali dello studio: ρ e β_y .

$$a_y = \frac{a_x}{\rho} \quad (42)$$

che è il semiasse minore del flexure

$$t = 2 \frac{a_x}{\rho} \beta_y \quad (43)$$

che è lo spessore del flexure

$$s = 2 \frac{a_x}{\rho} + t \quad (44)$$

che è lo spessore dei corpi rigidi

Per quanto riguarda ρ e β_y sono stati studiati i seguenti valori.

ρ	β_y
15	0,1
10	0,1
10	0,2

Ad ogni coppia di ρ e β_y corrisponderà una geometria con determinate caratteristiche in termini di a_x , a_y e t .

Uno dei nostri obiettivi è individuare che effetto ha la variazione dei due parametri principali della trattazione sulle dimensioni del meccanismo e in particolare sul suo comportamento.

Questo aspetto sarà poi trattato nei capitoli successivi, quindi ora ci si sofferma sulla realizzazione della geometria e del modello.

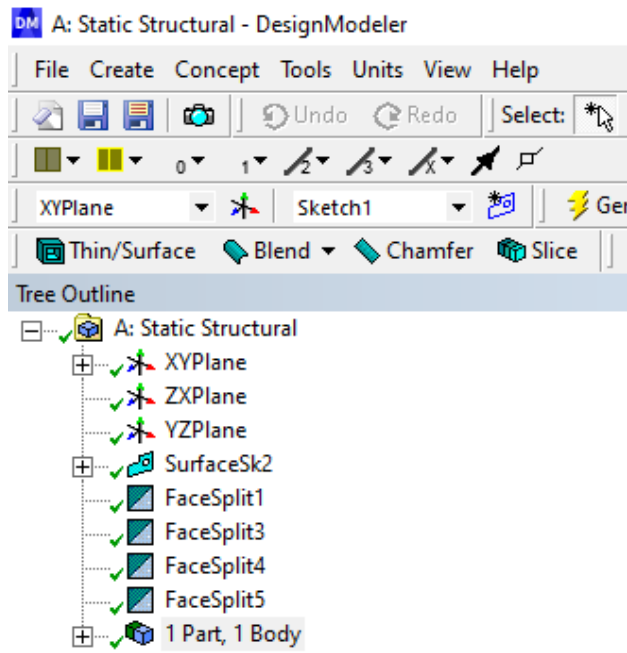


Fig.56

In fig.56 è mostrata la sezione in cui è presente l'albero delle operazioni effettuate per generare la geometria. Si può notare come Ansys, quindi, sia dotato di strumenti di modellazione molto simili a quelli che troviamo dei software CAD veri e propri.

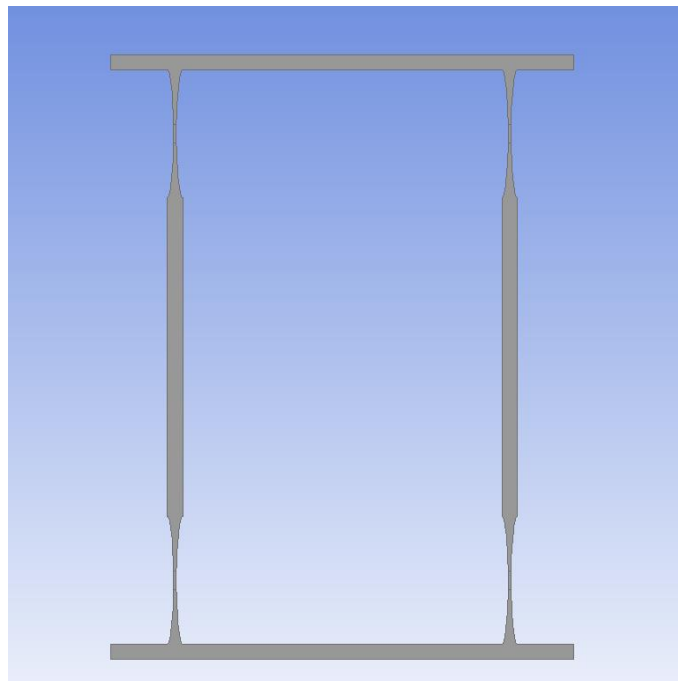


Fig. 57

5.4 Quotatura parametrica

Definita la geometria, l'altro aspetto molto importante, forse il principale, riguarda la quotatura. Infatti le varie quote che verranno inserite dovranno poi essere rese parametriche così da poter fare le simulazioni.

Se il disegno non è quotato in modo corretto, quando viene avviata una simulazione il software darà origine a degli errori e quindi non si riesce a proseguire.

Ansys ci aiuta a capire se abbiamo quotato correttamente la geometria perché in tal caso le quote assumono tutte lo stesso colore.

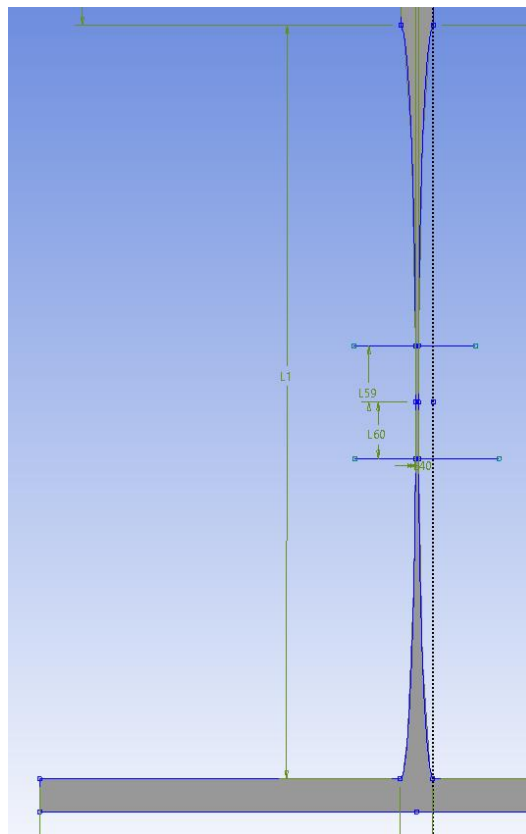


Fig.58

5.5 Creazione del modello

Terminata la parte della geometria, dobbiamo andare nella sezione successiva *Model*.

Qui è possibile visualizzare in nostro sistema di flexure come un modello vero e proprio

al quale possiamo applicare carichi, tensioni ed altro ancora ed osservare come si comporta il meccanismo attraverso l'analisi FEM.

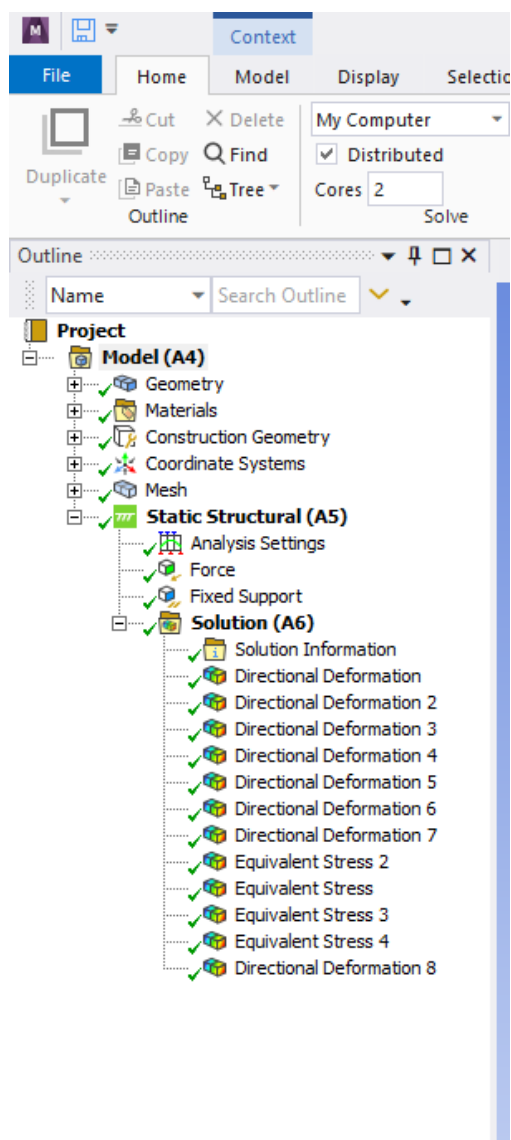


Fig.59

Sulla sinistra è presente l'albero delle sezioni (Fig.59) che ci permette di definire il nostro modello.

In *Geometry* possiamo andare a visualizzare la superficie che abbiamo creato precedentemente e possiamo anche andare ad impostare alcune voci, come per esempio il tipo di comportamento che vogliamo assegnare alla nostra simulazione.

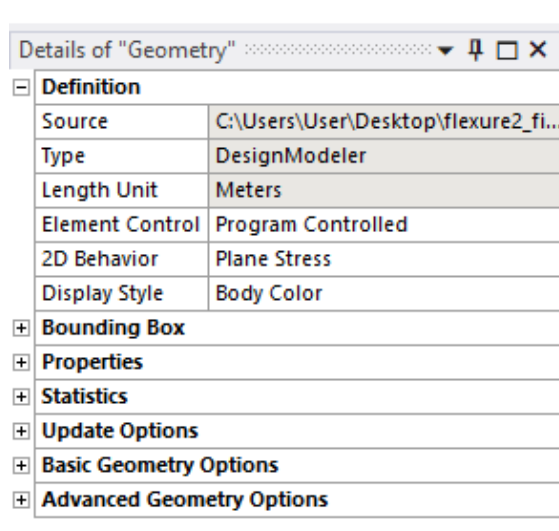


Fig. 60

Nel nostro caso vogliamo un comportamento di *tensione piana (plane stress)*, cioè assumiamo che la tensione normale al piano sia nulla. Poi come si può vedere, ci sono altre voci che si possono impostare che non verranno descritte in questa trattazione.

In *Materials* possiamo vedere il tipo di materiale che abbiamo scelto all'inizio, *Structural Steel*.

Una delle sezioni più importanti è quella che riguarda la *Mesh* per i motivi che abbiamo spiegato sopra.

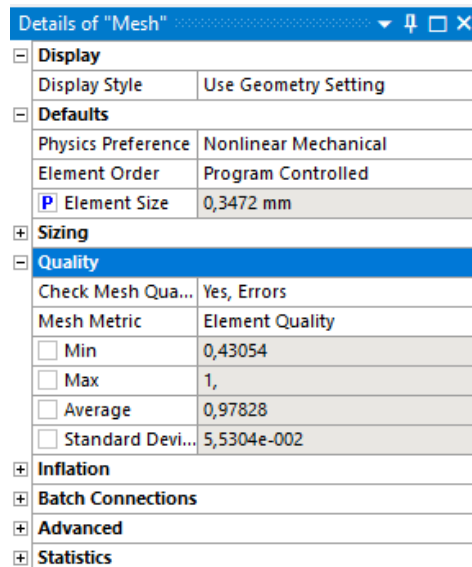


Fig. 61

È possibile definire il tipo di mesh che si desidera. Abbiamo impostato la *Physics Preference* in *Nonlinear Mechanical* ed *Element Order* in *Quadratic*.

Una mesh con elementi quadratici ci permette di creare un numero maggiore di nodi a parità di elementi e di conseguenza la soluzione ottenuta sarà più accurata.

Inoltre sono state generate due mesh distinte: una per la parte rigida ed un'altra per le zone centrali dei giunti che costituiscono la parte più critica. Avendo reso parametrica anche la mesh, così che possa adattarsi alle variazioni degli altri parametri, abbiamo definito l'*Element size* della prima mesh pari a

$$\mathbf{Mesh\ Element\ Size} = \frac{t + 2 * ay}{10} \quad (45)$$

E quello del secondo tipo di mesh pari a

$$\mathbf{Face\ Sizing\ Element\ Size} = \mathbf{Mesh\ Element\ Size}/2 \quad (46)$$

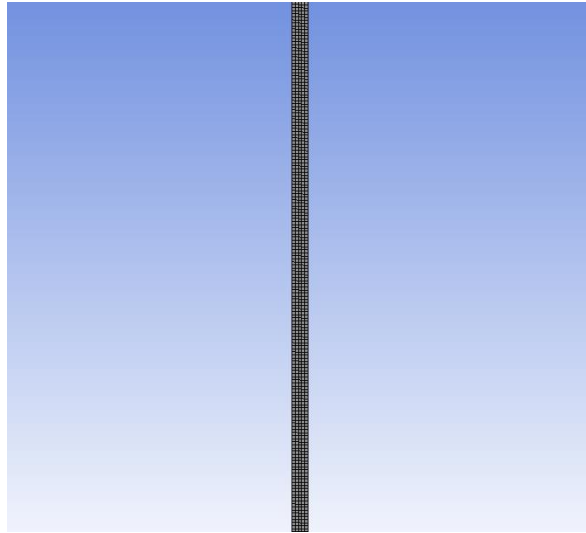


Fig. 62

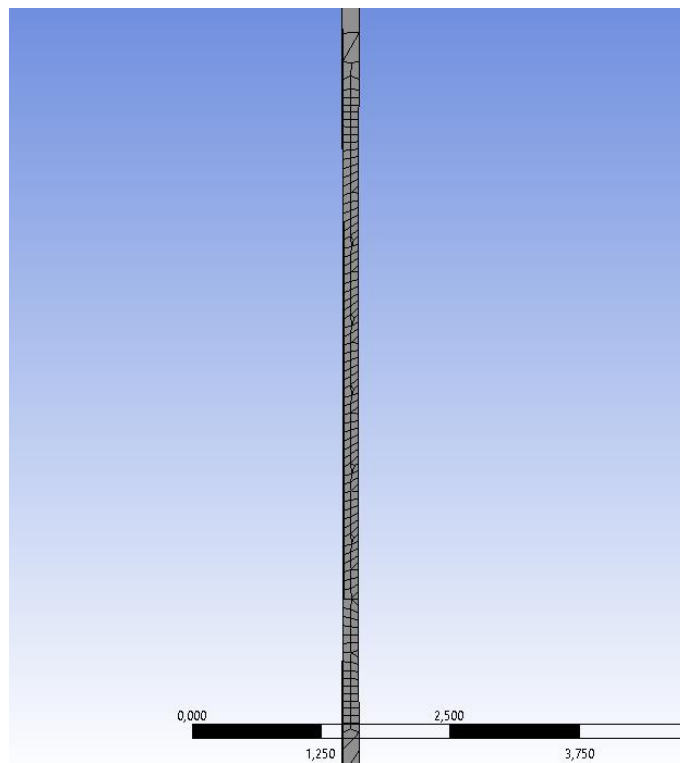


Fig. 63

Uno tra i vari metodi per valutare la qualità della mesh che è stata generata, consiste nell'andare su *Quality* e vedere il valore *Average* che viene indicato. Il massimo può essere 1, quindi un valore che sia vicino all'unità è indice di una buona mesh.

Una volta che ci troviamo in *Static Structural*, se andiamo in *Environment* abbiamo a disposizione forze, momenti, pressioni ed altro ancora che può essere applicato al modello.

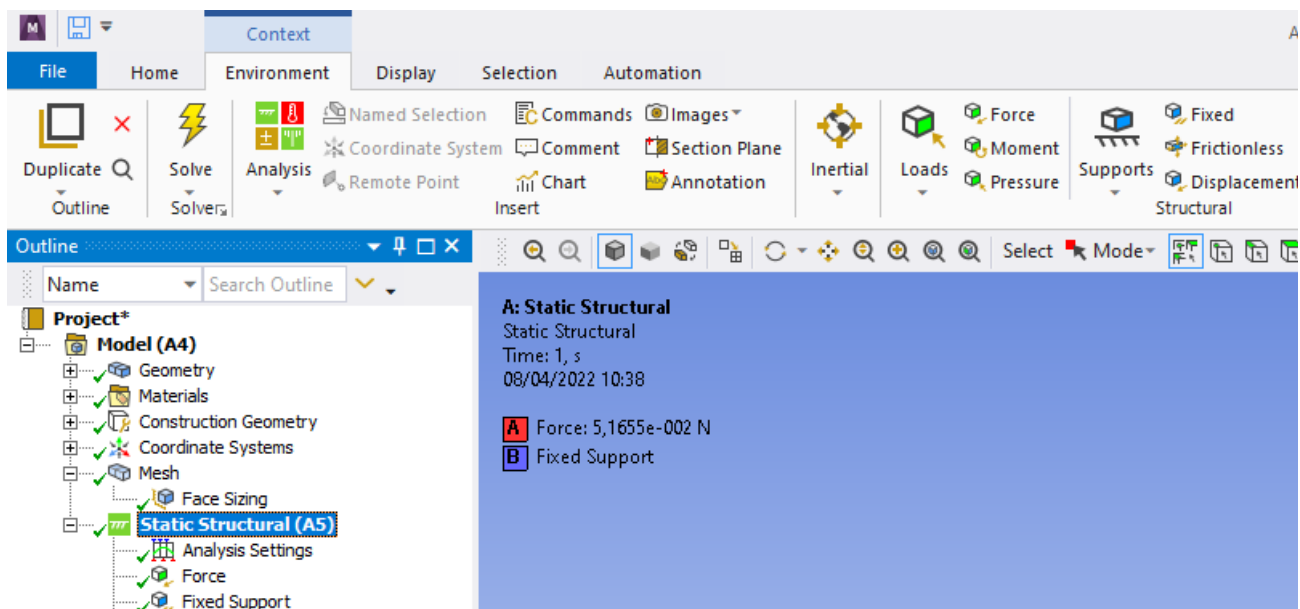


Fig. 64

Oppure cliccando con il tasto destro su *Static Structural*, si aprirà una tendina e possiamo decidere ciò che vogliamo applicare.

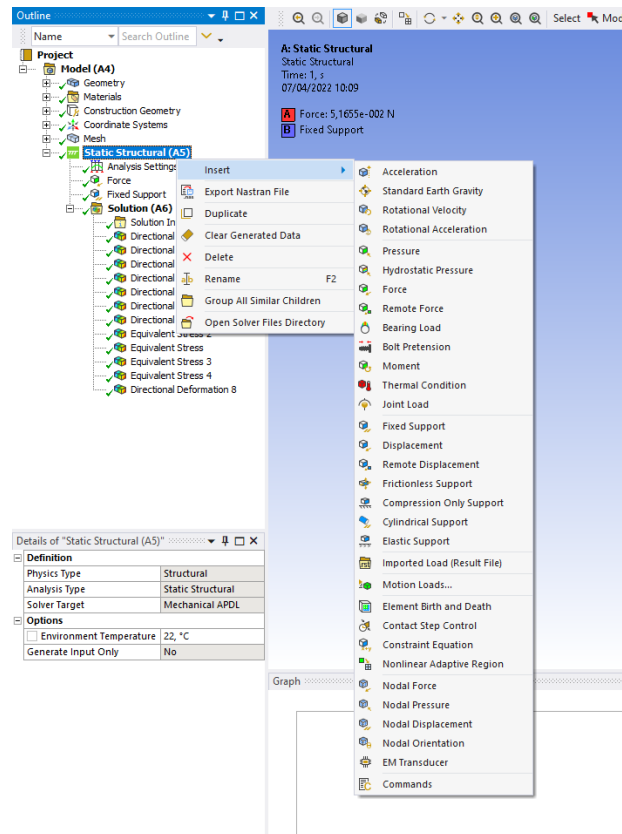


Fig. 65

Facendo riferimento a questa situazione, vogliamo vedere come si deforma la struttura se soggetta ad una forza agente nell'estremo in alto a sinistra qualora fosse vincolata a telaio alla base.

In Fig.66 possiamo vedere ciò che abbiamo appena descritto. La forza è rappresentata da un vettore in rosso che agisce verso destra e l'etichetta blu alla base indica che è stato inserito un vincolo. Se andassimo ad ingrandire la visuale sulla base, vedremmo che anche i segmenti che la costituiscono sono colorati in blu.

Avendo precedentemente spiegato come calcolare la forza massima applicabile al sistema per le varie combinazioni di p e βy , su *Force* possiamo impostare il valore della forza e avviando la simulazione possiamo osservare come si deforma la struttura.

Quando si va ad inserire una forza, possiamo scegliere lungo quale direzione essa deve essere applicata. Quindi basterà selezionare *Components* in 'Define By' e potremo così inserire il valore della forza lungo la direzione desiderata (nel nostro caso lungo x).

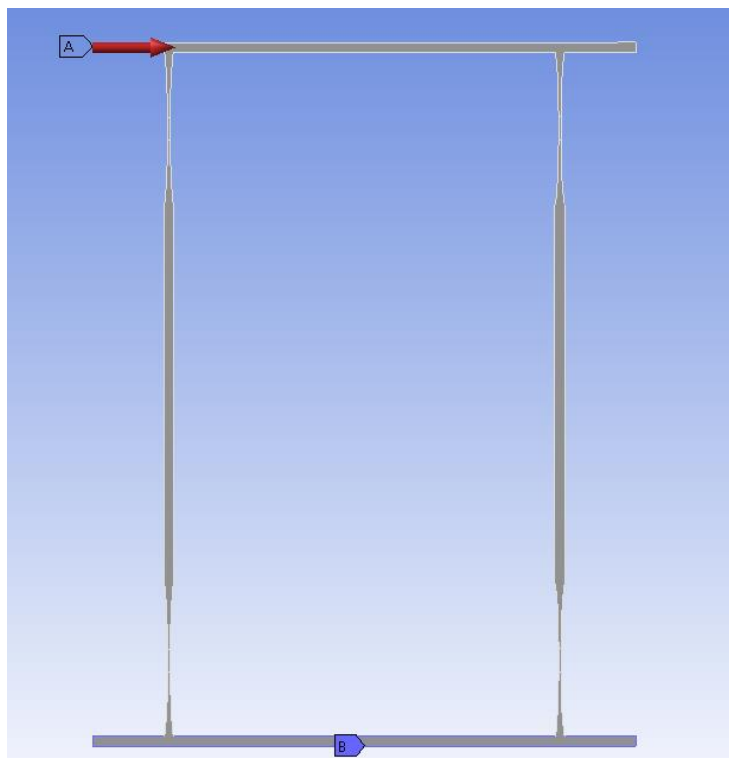


Fig. 66

In base ai valori che abbiamo assegnato alla geometria (ρ e β_y), la deformazione sarà più o meno evidente.

In base alle formule che abbiamo scritto prima possiamo prevedere che all'aumentare di ρ lo spessore della struttura diminuirà e invece aumenterà all'aumentare di β_y .

Impostato anche il modello, quello che ci interessa è capire come varia il sistema al variare dei parametri ρ e β_y e per fare questo dobbiamo andare a parametrizzare le quote che avevamo definito nella geometria.

Per effettuare la parametrizzazione bisogna cliccare sul quadratino bianco alla sinistra del nome di ogni quota e in questo modo noteremo che comparirà un P.

Una volta che le quote sono state parametrizzate, cambiando ρ e β_y si modificheranno anch'esse di conseguenza.

Dobbiamo poi anche definire gli spostamenti lungo x e lungo y di ciascuno di quattro giunti. Per fare questo bisogna andare nella sezione *Coordinate Systems* e creare uno alla volta quattro sistemi di riferimento, uno per ogni flexure. Questi nuovi sistemi di riferimento avranno origine sui vertici in alto a destra dei flexure.

Come seconda cosa, si vanno a creare dei percorsi (path) andando in *Construction Geometry*. Questi path devono partire dal vertice in cui abbiamo posizionato il sistema di riferimento e devono arrivare fino al vertice sinistro.

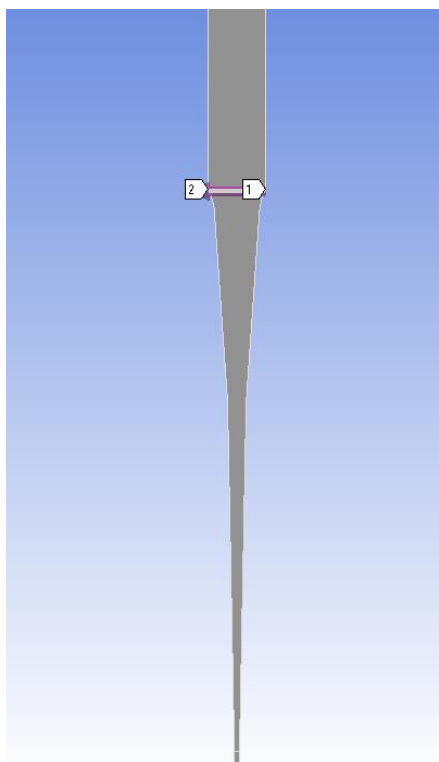


Fig. 67

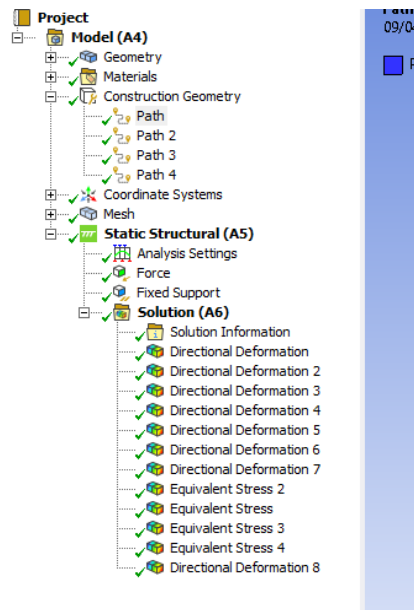


Fig. 68

Nelle figure sovrastanti è illustrato il path generato per uno dei giunti e come si può ben vedere è rappresentato da un vettore che parte dal vertice destro (indicato con 1) e arriva al vertice opposto.

Details of "Path"	
Definition	
Path Type	Two Points
Path Coordinate System	Global Coordinate Sys...
Number of Sampling Points	47,
Suppressed	No
Start	
Coordinate System	Coordinate System
Start X Coordinate	0, mm
Start Y Coordinate	0, mm
Location	Click to Change
End	
Coordinate System	Coordinate System
End X Coordinate	-10, mm
End Y Coordinate	0, mm
Location	Click to Change

Fig. 69

Quando si va a generare il path bisogna fare attenzione ad inserire in *Start* ed *End* il sistema di riferimento che è stato creato prima per il giunto corrispondente.

Successivamente si può andare ad inserire tra le soluzioni la *Directional Deformation* relativa ad ogni path che abbiamo generato. Otterremo così 8 *Directional Deformation*: una lungo x e una lungo y per ogni giunto flessibile.

Oltre alle deformazioni un'altra grandezza che ci interessa studiare è la tensione relativa ad ogni giunto, in particolare la zona centrale. Basta inserire un'*Equivalent Stress* per ciascuno dei giunti. In questo modo, andando a parametrizzare tutte le soluzioni, possiamo visualizzarle in *Outline of All Parameters*, insieme a tutte le altre quote che abbiamo reso parametriche.

Outline of All Parameters				
	A	B	C	D
1	ID	Parameter Name	Value	Unit
2	[-] Input Parameters			
3	[-] [Static Structural (A1)]			
4	[P] P1	L1	141,74	mm
5	[P] P2	ay	0,8	mm
6	[P] P3	L	100	mm
7	[P] P4	axmenoaymenotmezzi	19,132	mm
8	[P] P5	dueax	40	mm
9	[P] P6	t	0,136	mm
10	[P] P7	ax	20	mm
11	[P] P8	s	1,736	mm
12	[P] P15	Force X Component	0,051655	N
13	[P] P23	Mesh Element Size	0,3472	mm
14	[P] P24	Face Sizing Element Size	0,068	mm
15	[P] P9	ro	25	
16	[P] P10	by	0,085	
17	[P] P25	cf	1	
18	[P] P26	Fmax	0,051655	
*	[P] New input parameter	New name	New expression	
20	[+] Output Parameters			
21	[+] [Static Structural (A1)]			
22	[P] P11	Equivalent Stress Maximum	589,22	MPa
23	[P] P12	Equivalent Stress 2 Maximum	585,62	MPa
24	[P] P13	Equivalent Stress 3 Maximum	567,48	MPa
25	[P] P14	Equivalent Stress 4 Maximum	574,07	MPa
26	[P] P16	Directional Deformation Average	8,1043	mm
27	[P] P17	Directional Deformation 2 Average	-1,4866	mm

Fig. 70

5.6 Simulazioni

A questo punto è possibile procedere con le simulazioni per diverse combinazioni dei valori di ρ e β_y . Il nostro obiettivo è trovare prima di tutto la forza massima sopportata dal sistema, cioè la forza oltre la quale si ha snervamento, per poi diminuire gradualmente la forza e osservare l'andamento delle deformazioni.

Per trovare la forza massima accettabile possiamo adottare due metodi.

Un primo modo consiste nell'inserire una σ equivalente del sistema, impostarla a 600 MPa e facendo un'analisi di ottimizzazione chiediamo al software di restituirci il valore della forza corrispondente.

Altrimenti potremmo impostare la σ_{max} di ogni giunto a 600 MPa e andiamo poi a vedere quale dei 4 flexure arriva prima a snervamento.

Una volta trovata la forza massima per ogni combinazione di ρ e β_y dobbiamo scalare in maniera costante la forza massima fino ad arrivare ad un valore minimo.

Per scalare le forze massime, possiamo introdurre un coefficiente moltiplicativo della forza che chiamiamo *cf*.

Esso va da un minimo di 0,05 ad un massimo di 1 con un passo di 0,05.

Il *cf* rappresenta la percentuale di forza massima che stiamo considerando applicata al sistema: quando è pari a 1 stiamo prendendo il 100% della forza, quando è pari a 0,05 al sistema è applicata una forza corrispondente al 5% di quella massima.

Questo significa che avremo 20 valori di *cf* e quindi 20 forze per ogni combinazione di ρ e β_y .

J	K	L	M	N	O
P9 - ro	P10 - by	P15 - Force X Component	P23 - Mesh Element Size	P24 - Face Sizing Element Size	P25 - cf
		N	mm	mm	
20	0,1	0,1112	0,44	0,1	1
20	0,1	0,10564	0,44	0,1	0,95
20	0,1	0,10008	0,44	0,1	0,9
20	0,1	0,09452	0,44	0,1	0,85
20	0,1	0,08896	0,44	0,1	0,8
20	0,1	0,0834	0,44	0,1	0,75
20	0,1	0,07784	0,44	0,1	0,7
20	0,1	0,07228	0,44	0,1	0,65
20	0,1	0,06672	0,44	0,1	0,6
20	0,1	0,06116	0,44	0,1	0,55
20	0,1	0,0556	0,44	0,1	0,5
20	0,1	0,05004	0,44	0,1	0,45
20	0,1	0,04448	0,44	0,1	0,4
20	0,1	0,03892	0,44	0,1	0,35
20	0,1	0,03336	0,44	0,1	0,3
20	0,1	0,0278	0,44	0,1	0,25
20	0,1	0,02224	0,44	0,1	0,2
20	0,1	0,01668	0,44	0,1	0,15
20	0,1	0,01112	0,44	0,1	0,1
20	0,1	0,00556	0,44	0,1	0,05
25	0,1	0,0728	0,352	0,08	1
25	0,1	0,06916	0,352	0,08	0,95

Fig. 71

In figura è riportato il caso dell'accoppiamento $\rho=20$ e $\beta y=0,1$. La forza massima trovata dall'analisi di ottimizzazione è pari a 0,1112 N e quindi abbiamo proceduto moltiplicando la forza per tutti i valori di cf fino ad arrivare ad una forza pari a 0,00556 N. Dall'immagine possiamo anche vedere la grandezza dell'elemento delle due mesh create. Per un'altra combinazione avremo valori differenti.

Dobbiamo fare questo per ogni coppia $\rho-\beta y$ e una volta che Ansys avrà terminato le simulazioni avremo a disposizione tutti i valori delle forze, tensioni e deformazioni per ogni singolo accoppiamento.

Possiamo anche fare un confronto tra le forze massime restituite da Ansys e quelle ricavate analiticamente con Matlab. Possiamo in questo modo determinare quale sia lo scostamento tra i due tipi di risultati ottenuti.

ρ	βy	F max analitica [N]	F max fem [N]	Errore[%]
25	0,085	0,0528	0,0516	2,3
15	0,1	0,2032	0,1937	4,9
10	0,2	1,8286	1,7585	3,9
10	0,3	4,1143	3,959	3,9

6. CONFRONTO TRA SOLUZIONE ANALITICA E SOLUZIONE FEM

Terminate le simulazioni, come abbiamo fatto per il singolo flexure, vogliamo determinare l'errore tra la soluzione fornita analiticamente da Matlab e quella FEM ricavata con Ansys.

Si può utilizzare Excel per tabulare tutti i dati relativi alle soluzioni e per tracciare eventuali grafici.

Possiamo calcolare l'errore degli spostamenti globali visto che Ansys ci restituisce proprio quello. Partendo dal valore fornito da Matlab, attraverso alcune considerazioni di tipo geometrico otteniamo l'espressione analitica dello spostamento globale da confrontare con quella Ansys.

Gli spostamenti globali verranno indicati con s_x per quanto riguarda gli spostamenti lungo x e s_y , per gli spostamenti lungo la direzione y.

Questo ragionamento vale per i due flexure superiori, mentre per quelli inferiori lo spostamento globale e quello calcolato con Matlab coincidono.

Di seguito verranno mostrati gli errori sugli spostamenti globali.

Errore spostamento - x

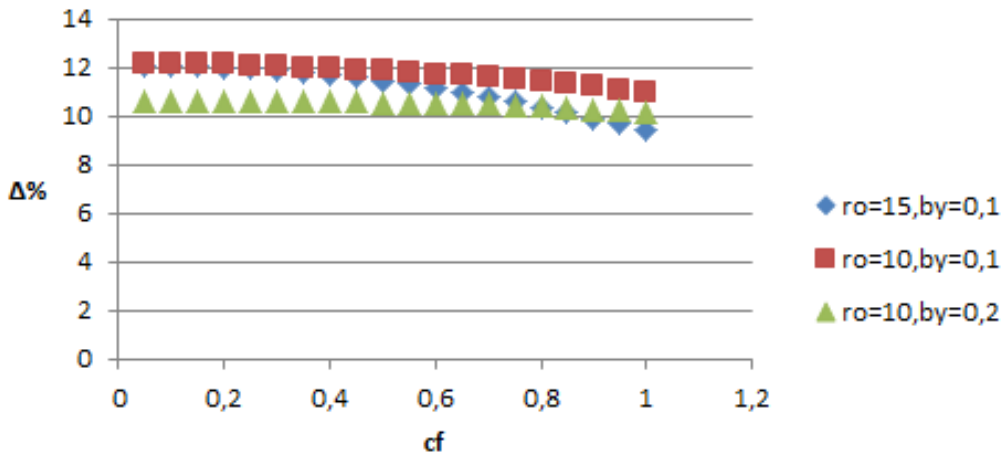


Fig.72 - Errore $sx1(=\Psi fa1)$

L'errore diminuisce man mano che il cf aumenta, quindi all'aumentare della criticità della forza applicata al sistema. Inoltre possiamo vedere che l'errore arriva a valori più bassi in corrispondenza di bassi β_y e alti ρ . Questo comportamento è conforme a quello che è stato verificato per il singolo flexure.

Errore spostamento - y

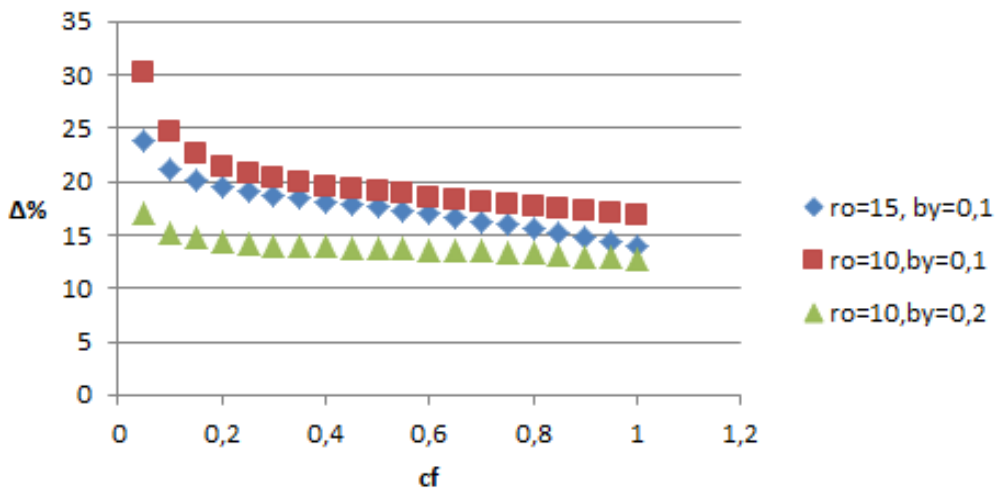


Fig. 73 - Errore $sy1(=\xi fa1)$

Errore spostamento - x

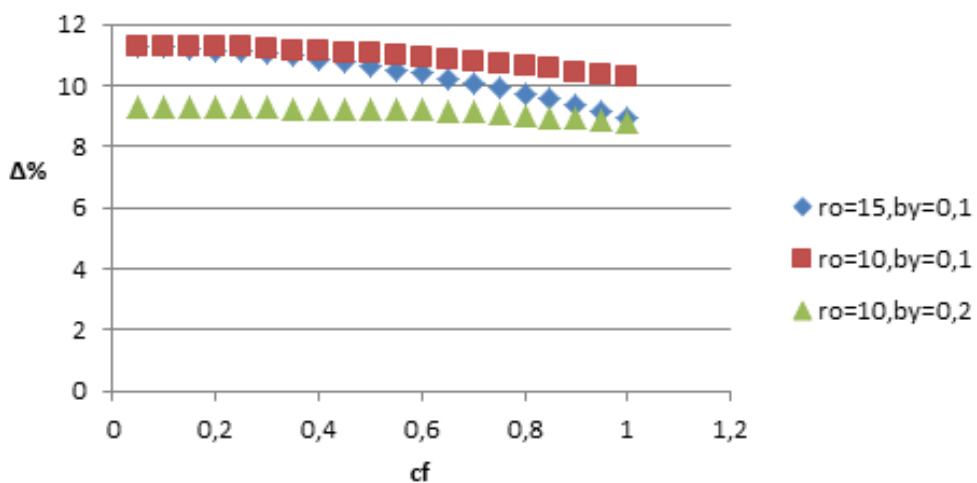


Fig. 74- Errore sx2

Errore spostamento - y

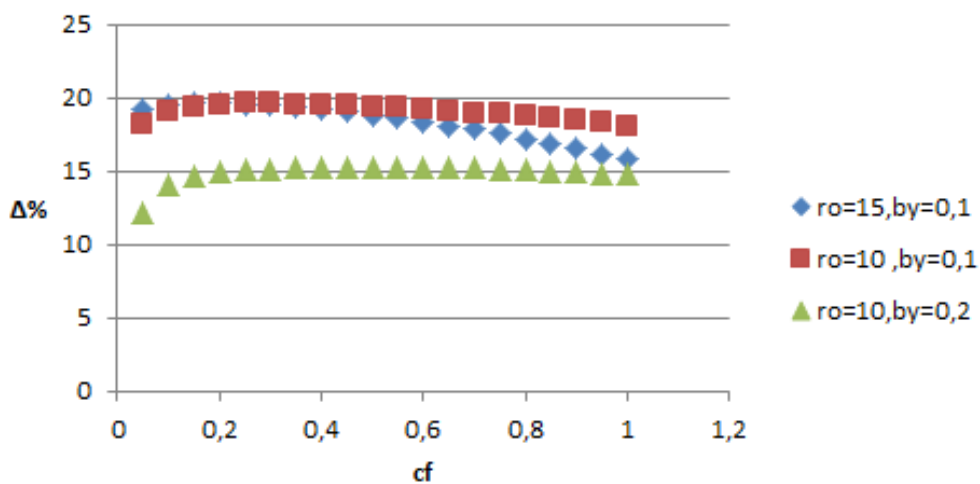


Fig. 75- Errore sy2

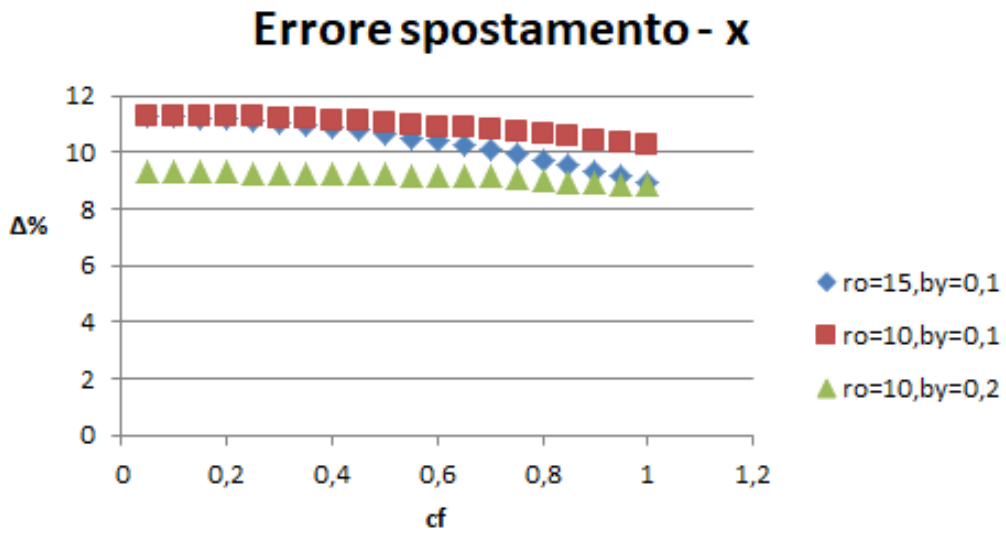


Fig. 76- Errore sx3

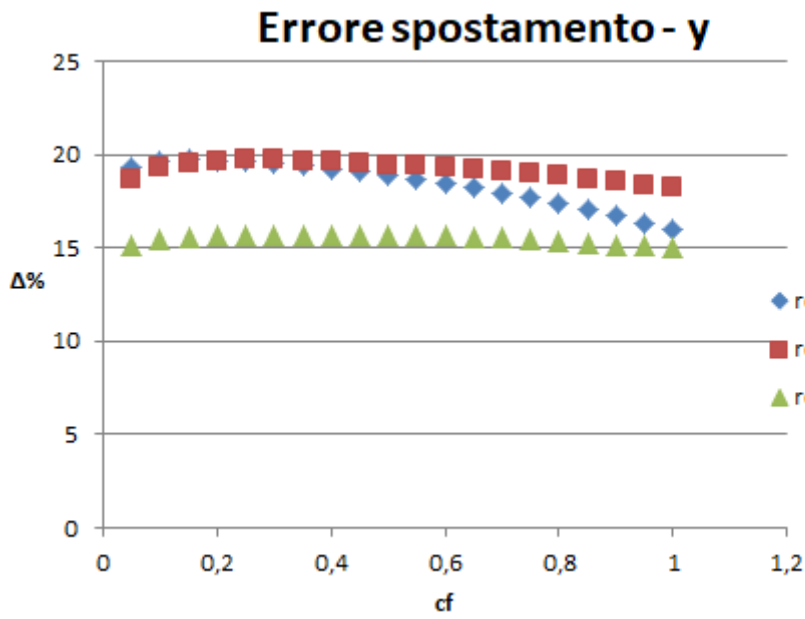


Fig. 77- Errore sy3

Errore spostamento - x

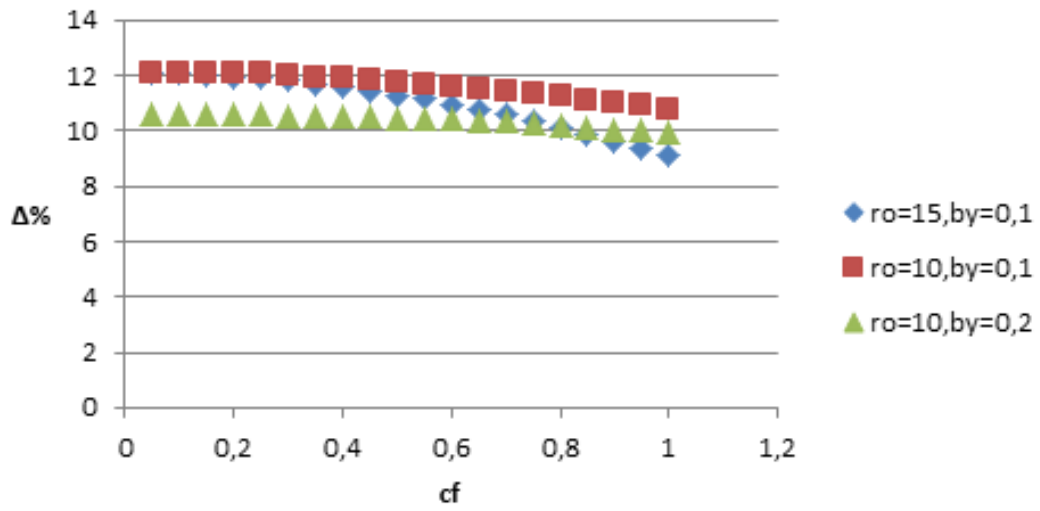


Fig. 78- Errore sx4 (=Ψfa4)

Errore spostamento - y

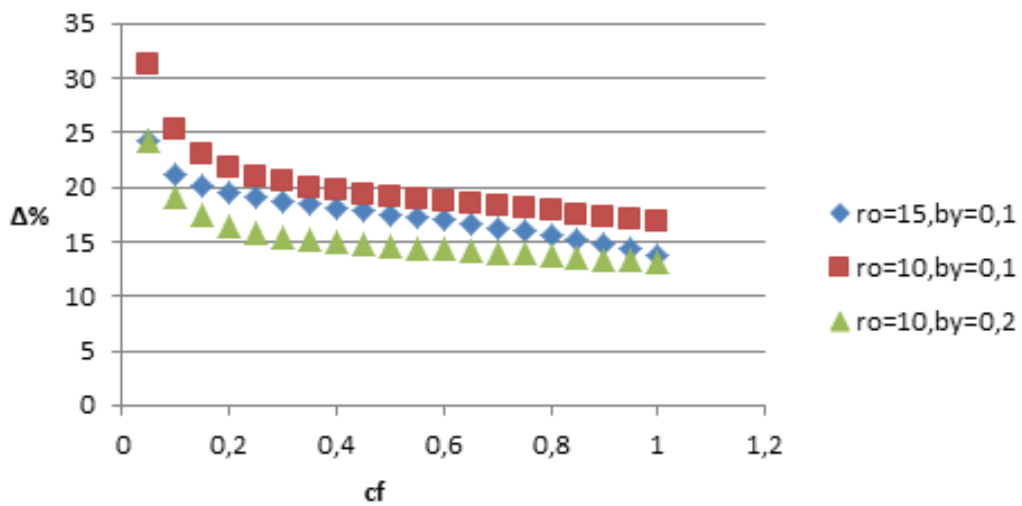


Fig.79 - Errore sy4 (=ξfa4)

Errore Θ - Flexure inferiore

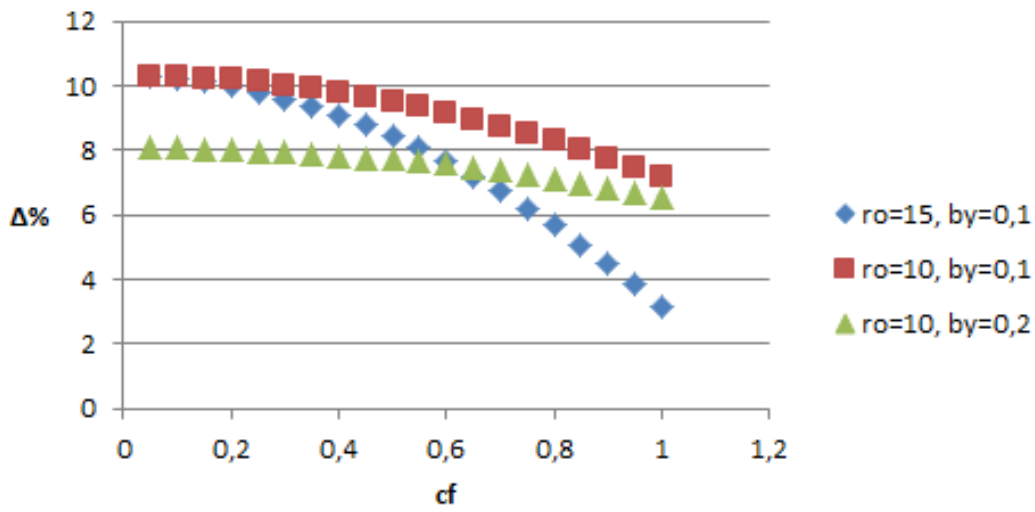


Fig. 80 - Errore Θ fa1

Θ fa1[°]	teta fem[°]	$\Delta\%$	Θ fa1[°]	teta[°]	$\Delta\%$	Θ fa1[°]	teta fem[°]	$\Delta\%$
1,118114	1,21558	8,018062	0,601017	0,669661	10,25062	0,221318	0,23089	4,145596
2,236228	2,425664	7,809661	1,202034	1,338622	10,20364	0,442637	0,461729	4,135042
3,354342	3,625767	7,485987	1,80305	2,006014	10,11777	0,663955	0,692483	4,119744
4,472456	4,810768	7,032382	2,404067	2,670257	9,96871	0,885273	0,923119	4,099733
5,59057	5,976465	6,456909	3,005084	3,331698	9,80323	1,106591	1,153601	4,075012
6,708684	7,118641	5,758919	3,606101	3,989141	9,60208	1,32791	1,383897	4,045622
7,826798	8,233575	4,940459	4,207118	4,641845	9,365406	1,549228	1,613975	4,011631
8,944912	9,318272	4,006749	4,808135	5,289091	9,093367	1,770546	1,843803	3,973114
10,06303	10,36985	2,95884	5,409151	5,929806	8,780298	1,991865	2,073351	3,930171
11,18114	11,3858	1,797457	6,010168	6,56401	8,437556	2,213183	2,302592	3,882959
12,29925	12,36512	0,532689	6,611185	7,190792	8,060406	2,434501	2,531499	3,831647
13,41737	13,31117	0,797842	7,212202	7,809563	7,649098	2,65582	2,760051	3,776438
14,53548	14,21264	2,271527	7,813219	8,419807	7,204308	2,877138	2,988226	3,717519
15,6536	15,07459	3,840911	8,414235	9,021013	6,726272	3,098456	3,216004	3,655095
16,77171	15,89211	5,534837	9,015252	9,612724	6,215424	3,319774	3,443368	3,589336
17,88982	16,67752	7,269071	9,616269	10,19453	5,672275	3,541093	3,670302	3,520389
19,00794	17,41984	9,116589	10,21729	10,76606	5,09723	3,762411	3,896788	3,448402
20,12605	18,1285	11,01886	10,8183	11,3272	4,492731	3,983729	4,12281	3,373452
21,24417	18,79786	13,01375	11,41932	11,87703	3,853778	4,205048	4,348352	3,295613
22,36228	19,43146	15,08288	12,02034	12,41638	3,189658	4,426366	4,573399	3,214958

Fig. 81

In fig.48 sono mostrati gli spostamenti angolari del primo giunto in corrispondenza dei tre accoppiamenti di ρ e βy . Le colonne Θ_{fa1} esprimono gli angoli trovati analiticamente, le teta esprimono gli angoli ricavati con Ansys e l'ultima colonna di ognuno dei tre gruppi esprime l'errore tra la soluzione analitica e quella Ansys.

Possiamo notare una particolarità dell'andamento dell'errore. Inizialmente diminuisce all'aumentare del coefficiente cf per poi riaumentare da $cf=0,5$ fino a $cf=1$. Questo vale per l'accoppiamento $\rho=25$ e $\beta y=0,085$, invece per gli altri valori l'errore diminuisce gradualmente fino al $cf=1$. La stessa cosa accade per il flexure 4, cioè quello in basso a destra.

Invece per i due flexure nella parte alta del meccanismo, abbiamo che l'errore si mantiene molto basso per i primi due accoppiamenti $\rho-\beta y$, mentre tende ad aumentare per $\rho=10$ e $\beta y=0,3$.

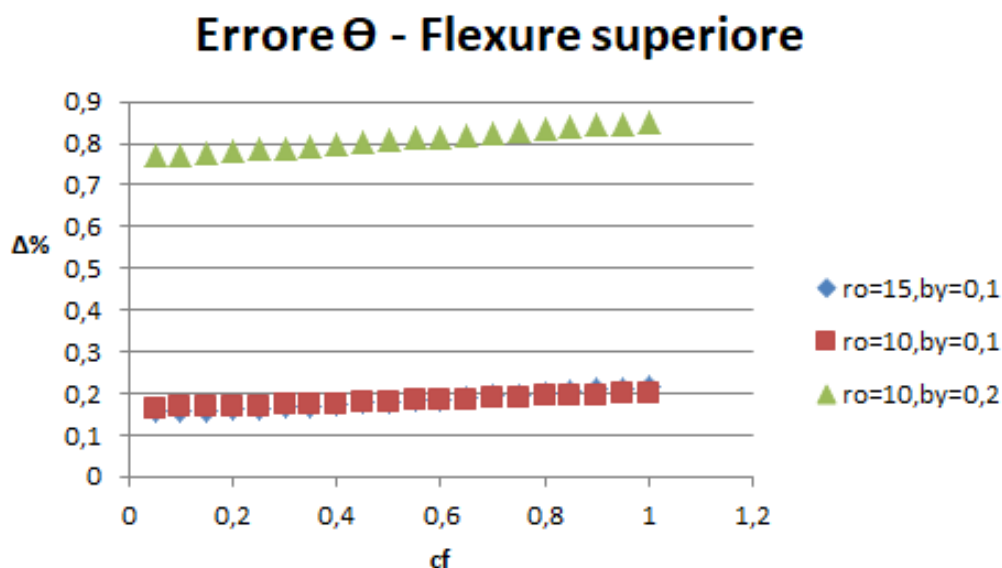


Fig. 82 - Errore Θ_{fa2}

Errore Θ - flexure 3

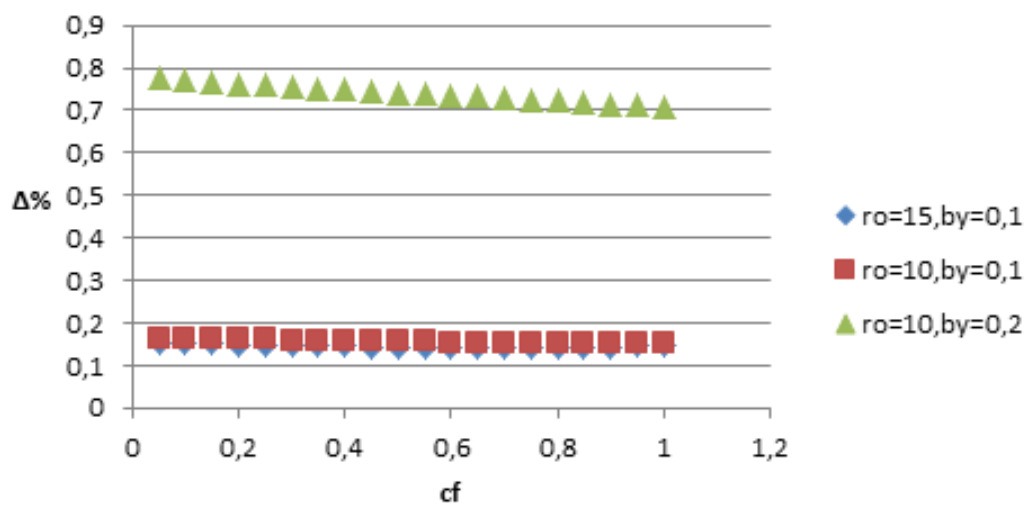


Fig. 83 - Errore Θ fa3

Errore Θ - Flexure 4

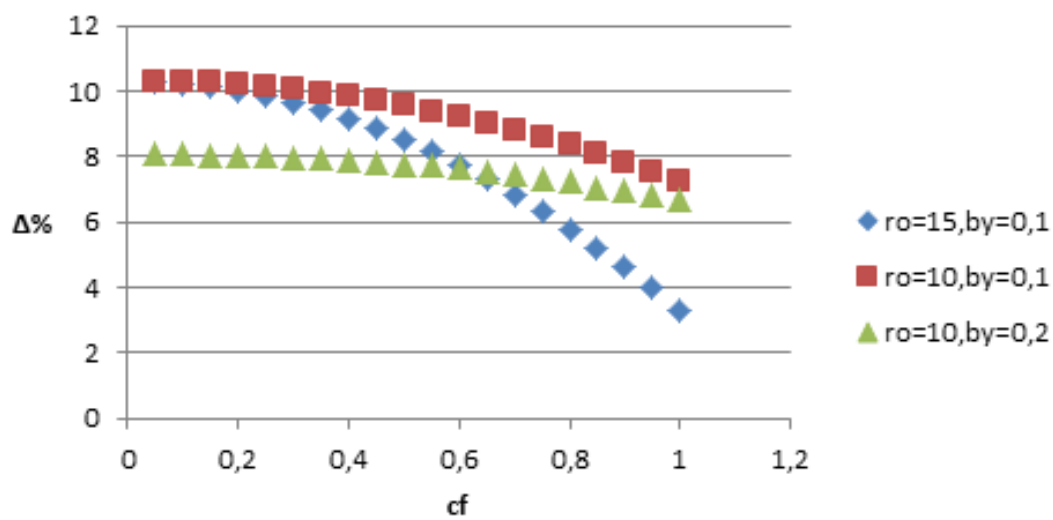


Fig. 84 - Errore Θ fa4

7.MODELLO 3D

Fino a questo momento abbiamo considerato solamente un modello bidimensionale, ma vogliamo capire che cosa accade nel momento in cui andiamo a studiare un modello 3D.

Il modello matematico funzionerà?

Per generare un modello 3D basta semplicemente estrarre di un certo spessore la geometria generata in precedenza. Il valore dello spessore non deve essere casuale, ma sarà espresso da una formula ricavata appositamente e sarà poi reso parametrico in modo che potrà modificarsi per ogni valore di ρ e β_y .

Su Ansys abbiamo chiamato l la terza dimensione della nostra struttura generata con l'estrusione. L'espressione di l è la seguente:

$$l = \frac{a_x}{10} \rho^{\frac{1}{5}} \beta_y^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

Per capire se il modello 3D rispetta il modello matematico che abbiamo definito, possiamo andare a confrontare i risultati delle simulazioni con quelli relativi al caso 2D.

Senza rifare le simulazioni per ogni accoppiamento ρ - β_y , andiamo a prendere in considerazione i tre casi principale che abbiamo descritto in precedenza.

Su matlab andiamo a calcolare le forze che portano a snervamento la struttura nel caso tridimensionale, considerando però i valori l calcolati secondo la (27). Queste forze sono state poi utilizzate in Ansys per fare le simulazioni ed ottenere i risultati in termini di spostamenti e tensioni.

I risultati di queste simulazioni sono quelli ottenuti quando il sistema supera il limite di snervamento (vediamo infatti che le tensioni superano i 600MPa).

ρ	β_y	F_{max} [N]
15	0,1	0,2209
10	0,1	0,4582
10	0,2	2,5922

MECCANISMO 2D			MECCANISMO 3D			ERRORI		
σ_{max} [MPa]	s_x [mm]	s_y [mm]	σ_{max} [MPa]	s_x [mm]	s_y [mm]	$\Delta\sigma\%$	$\Delta s_x\%$	$\Delta s_y\%$
628,08	4,84	0,85	630,43	4,80	0,84	0,3	0,8	1
636,22	3,28	0,59	636,44	3,26	0,59	0,03	0,9	0
623,24	2,24	0,37	623,53	2,23	0,36	0,04	0,4	2,7

Per curiosità, possiamo vedere anche quanto valgono le tensioni minime nel caso 2D. Vengono mostrato nella tabellina sottostante e corrispondono al flexure 3, quello superiore sinistro.

σ_{min} [MPa]
606,64
615,97
609,37

Dalla tabella del confronto vediamo che i risultati dei due casi non sono poi così differenti tra loro. Le tensioni e gli spostamenti sono simili e per questo possiamo concludere dicendo che il modello elaborato non vale solo per una situazioni bidimensionale, ma anche per quelle 3D.

Le simulazioni fino a questo momento sono state fatte considerando un coefficiente di Poisson pari a 0,3. Vogliamo vedere se e come cambiano i risultati considerando ν pari a 0.

Basta semplicemente rendere parametrico il coefficiente dalla sezione Engineering Data e potremo così modificare il valore in ambiente di simulazione.

$\nu = 0$			$\nu = 0,3$		
σ_{\max} [MPa]	s_x [mm]	s_y [mm]	σ_{\max} [MPa]	s_x [mm]	s_y [mm]
628,44	4,8421	0,5111	628,08	4,8422	0,5112
636,44	3,2884	0,2355	636,22	3,2884	0,2355
623,65	2,2436	0,1026	623,24	2,2435	0,1026

In tabella è mostrato un confronto tra i risultati ottenuti nei due casi distinti.

Come è possibile vedere, la situazione cambia veramente pochissimo, soprattutto per quanto riguarda gli spostamenti. Le tensioni sono leggermente più alte nel caso in cui Poisson è 0, ma ci troviamo di fronte ad una differenza di circa 0,05%, quindi praticamente trascurabile.

8.CONCLUSIONI

Facendo le simulazioni con Ansys si è visto che la struttura, soggetta ad una forza orizzontale, si deforma in maniera differente tra i flexure in basso e quelli nella parte superiore.

Quelli a telaio si deformano ruotano in senso orario, quelli superiori invece ruotando in senso antiorario. Questo risultato lo avevamo anche considerato durante la fase di modellazione del sistema.

Inoltre è visibile anche dalle deformazioni lungo x che hanno segno negativo per i flexure superiori.

Per quanto abbiamo visto nella trattazione, i parametri geometrici che caratterizzano la struttura di flexure sono **ax, ay, s e t**. Questi sono legati a dei coefficienti numerici che rappresentano il fulcro di tutta la trattazione: **ρ e βy** .

Modificando ρ e βy si modificano anche s, ay e t e di conseguenza la struttura nel suo complesso aumenta o diminuisce le proprie dimensioni. Questo ha degli effetti, come abbiamo visto, sulle tensioni e sulle deformazioni della struttura quando viene sottoposta a un certo carico.

	ρ	βy	s [mm]	t [mm]	a_y [mm]
CASO 1	15	0,1	2,93	0,26	1,33
CASO 2	10	0,1	4,4	0,4	2
CASO 3	10	0,2	4,8	0,8	2

Nella tabella viene mostrato cosa accade modificando i parametri ρ e β_y .

Possiamo osservare che:

- **mantenendo ρ costante ed aumentando β_y le dimensioni della struttura aumentano. Cresce lo spessore s del corpo rigido e cresce lo spessore t del singolo flexure.**
- **mantenendo costante β_y ed aumentando ρ diminuiscono s e t , ma aumenta invece a_y , quindi il semiasse minore del flexure ellittico.**

I casi che sono riportati in tabella sono corrispondenti a $cf=1$, quindi nella situazione di massima criticità. A tal proposito, se andassimo a osservare il valore della forza in ciascuno di questi 3 casi vedremo che essa è più alta laddove la struttura assume una geometria più robusta, mentre è più bassa nelle situazioni in cui gli spessori diminuiscono. Questo risultato è immediato da comprendere: se β_y aumenta (a parità di ρ) la forza necessaria a portare a snervamento la struttura aumenta e viceversa.

CASO 1 $F=0,2209N$ $\rho=15$ $\beta_y=0,1$

CASO 2 $F=0,4582N$ $\rho=10$ $\beta_y=0,1$

CASO 3 $F=2,59N$ $\rho=10$ $\beta_y=0,2$

Possiamo notare che in corrispondenza di cf bassi l'errore risulta a volta relativamente alto. Questo fatto però non deve preoccuparci perché a bassi cf gli spostamenti risultanti sono molto piccoli e quindi anche se l'errore percentuale relativo risulta elevato, in realtà la differenza in termini di spostamento o di rotazione è abbastanza trascurabile.

Esaminiamo i casi degli spostamenti lungo x e lungo y per il flexure 2 nei tre casi principali di ρ e β_y che abbiamo discusso in precedenza.

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	sx2 an	sx2 an	sx2 an
0,05	1,468535182	0,967046231	0,679720742
0,1	2,93691475	1,934048027	1,359426281
0,15	4,404983119	2,900960954	2,039101413
0,2	5,872584761	3,867740587	2,718730939
0,25	7,33956423	4,834342511	3,398299657
0,3	8,805766197	5,800722326	4,077792371
0,35	10,27103547	6,766835647	4,757193885
0,4	11,73521703	7,732638113	5,43648901
0,45	13,19815606	8,698085385	6,115662558
0,5	14,65969796	9,663133154	6,794699346
0,55	16,11968838	10,62773714	7,473584198
0,6	17,57797327	11,5918531	8,152301943
0,65	19,03439887	12,55543683	8,830837416
0,7	20,48881178	13,51844417	9,509175459
0,75	21,94105894	14,480831	10,18730092
0,8	23,39098771	15,44255325	10,86519866
0,85	24,83844585	16,4035669	11,54285355
0,9	26,28328157	17,36382799	12,22025045
0,95	27,72534358	18,32329263	12,89737426
1	29,16448106	19,28191697	13,57420988

Fig. 85

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	sx2 fem	sx2 fem	sx2 fem
0,05	1,654644302	1,090058191	0,749430795
0,1	3,308835294	2,179896253	1,498784999
0,15	4,961569975	3,269422076	2,247987144
0,2	6,610058367	4,358639519	2,996966579
0,25	8,25624833	5,447523044	3,745663863
0,3	9,898244847	6,533535005	4,494038829
0,35	11,53522665	7,616898879	5,242073833
0,4	13,16637966	8,700219996	5,98976769
0,45	14,78994266	9,781629326	6,737126489
0,5	16,40683287	10,86089402	7,484156634
0,55	18,01557195	11,93778389	8,230860901
0,6	19,61540212	13,01207046	8,977236853
0,65	21,20568932	14,08352785	9,722139472
0,7	22,78572137	15,15193115	10,46486034
0,75	24,35484339	16,21705827	11,2059419
0,8	25,91246752	17,27712608	11,94473166
0,85	27,45797259	18,33483951	12,67885853
0,9	28,99142324	19,38864462	13,41685143
0,95	30,5105295	20,43834205	14,15352182
1	32,01771873	21,48373942	14,88880075

Fig. 86

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	$\Delta\%$	$\Delta\%$	$\Delta\%$
0,05	11,24768146	11,28489841	9,301733238
0,1	11,24022536	11,27797831	9,298112713
0,15	11,21795839	11,26991602	9,292122996
0,2	11,15683955	11,26266419	9,283908669
0,25	11,10291338	11,25613473	9,27376878
0,3	11,03709463	11,21617439	9,262190973
0,35	10,95939608	11,16022735	9,249773332
0,4	10,86982653	11,12134962	9,237064093
0,45	10,76262861	11,07733594	9,224465834
0,5	10,64882497	11,02819769	9,212224186
0,55	10,52358245	10,97395265	9,200455602
0,6	10,3868829	10,9146147	9,189185082
0,65	10,23918823	10,85020054	9,167756324
0,7	10,08047781	10,78071809	9,132323339
0,75	9,910901137	10,70617888	9,090186142
0,8	9,730759172	10,61850697	9,037733383
0,85	9,540131692	10,5333489	8,959836416
0,9	9,341182194	10,44331189	8,918642272
0,95	9,128605658	10,34843928	8,875158974
1	8,91143337	10,24878586	8,829393933

Fig. 87

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	sy2 an	sy2 an	sy2 an
0,05	0,007512562	0,003257677	0,001593819
0,1	0,030049223	0,013030513	0,006375229
0,15	0,067606901	0,029317931	0,014344092
0,2	0,120180462	0,052118964	0,025500178
0,25	0,18776272	0,081432261	0,039843165
0,3	0,270344439	0,117256084	0,057372639
0,35	0,367914331	0,159588311	0,078088094
0,4	0,480459066	0,208426431	0,101988931
0,45	0,607963264	0,263767551	0,129074461
0,5	0,750409508	0,325608391	0,159343901
0,55	0,907778341	0,393945286	0,192796377
0,6	1,080048271	0,468774188	0,229430924
0,65	1,267195778	0,550090663	0,269246484
0,7	1,469195313	0,637889894	0,312241907
0,75	1,686019308	0,732166679	0,358415953
0,8	1,917638181	0,832915435	0,407767289
0,85	2,164020336	0,940130195	0,46029449
0,9	2,425132176	1,05380461	0,51599604
0,95	2,700938105	1,173931951	0,574870331
1	2,991400537	1,300505105	0,636915665

Fig. 88

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	sy2 fem	sy2 fem	sy2 fem
0,05	0,0092987	0,003983949	0,001814319
0,1	0,037356956	0,016109461	0,007414483
0,15	0,084133362	0,036370794	0,016798159
0,2	0,14946708	0,06476369	0,02996187
0,25	0,233346685	0,101284279	0,046901287
0,3	0,335594656	0,145816667	0,067611751
0,35	0,456039978	0,198314848	0,092088874
0,4	0,594481978	0,258883233	0,12032887
0,45	0,750593114	0,327404562	0,152328556
0,5	0,924277416	0,403829327	0,188085169
0,55	1,115187764	0,488102586	0,227596161
0,6	1,323014983	0,580164016	0,270859013
0,65	1,547440497	0,679947966	0,317796295
0,7	1,788110827	0,78738355	0,368338621
0,75	2,044656319	0,902394667	0,422497486
0,8	2,316696274	1,024713254	0,48019894
0,85	2,603822614	1,154589447	0,541208512
0,9	2,905745074	1,291782408	0,606235838
0,95	3,22167517	1,436198709	0,674845655
1	3,551793203	1,587741004	0,747015833

Fig. 89

	$\rho=15, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,1$	$\rho=10, \beta\gamma=0,2$
cf	$\Delta\%$	$\Delta\%$	$\Delta\%$
0,05	19,2084678	18,22997151	12,1533252
0,1	19,56190819	19,11266562	14,0165478
0,15	19,6431729	19,3915559	14,6091421
0,2	19,59402583	19,52440564	14,89123381
0,25	19,53486711	19,60029585	15,04888674
0,3	19,44316354	19,5866378	15,14398266
0,35	19,32410555	19,5278052	15,20355242
0,4	19,18021348	19,49017786	15,24151132
0,45	19,00228591	19,43681257	15,26574889
0,5	18,81122534	19,36980082	15,28098596
0,55	18,59860998	19,29047337	15,29014554
0,6	18,36462286	19,19971331	15,29507491
0,65	18,1102097	19,09812363	15,27702222
0,7	17,83533264	18,98612903	15,22965836
0,75	17,5402099	18,86402864	15,16731695
0,8	17,22530908	18,71721857	15,08367576
0,85	16,890639	18,5745031	14,95061887
0,9	16,54009164	18,42243679	14,88526289
0,95	16,16354963	18,26117488	14,81454654
1	15,77773912	18,09085348	14,7386659

Fig. 90

Come vediamo dalle figure per cf bassi gli spostamenti sono dell'ordine del millesimo di millimetro e quindi una differenza contenuta contribuisce ad aumentare l'errore percentuale.

Sono un po' più grandi gli spostamenti lungo x e in certi casi il discostamento tra la soluzione analitica e fem aumenta rispetto alla media, ma bisogna tenere in considerazione che il modello che abbiamo descritto è molto semplificato e quindi è comprensibile un certo grado di errore nella soluzione.

Inoltre è possibile notare che l'errore nella maggior parte dei casi diminuisce all'aumentare di cf , quindi più gli spostamenti sono grandi più la soluzione fem si avvicina a quella analitica.

Osservando i grafici vediamo che:

- L'andamento dell'errore è uguale per coppia di giunti: quelli inferiori hanno lo stesso andamento e la stessa cosa vale per quelli superiori.
- A parità di ρ , aumentando βy l'errore relativo percentuale diminuisce
- A parità di βy , aumentando ρ l'errore relativo percentuale diminuisce, in maniera più marcata per alti cf e quindi per spostamenti più grandi.
- Questi andamenti caratterizzano sia gli spostamenti che le rotazioni, eccetto la rotazione per i flexure superiori. Infatti dai grafici possiamo notare che gli errori su questi angoli hanno un andamento diverso rispetto al resto degli errori calcolati.
- Come accennato precedentemente, in certi casi l'errore è più elevato per piccoli spostamenti e tende invece a diminuire per spostamenti di maggiore entità.

È un aspetto positivo? Dipende dalle applicazioni in cui si intende sfruttare un sistema di giunti flessibili di questo tipo. Per applicazioni in cui si vuole che il sistema subisca spostamenti consistenti avremo che l'errore tra la soluzione analitica e fem sarà relativamente più basso rispetto a situazioni in cui il flexure deve muoversi di quantità contenute.

L'obiettivo di questa tesi, oltre a quanto spiegato nelle pagine precedenti, è quello di stabilire un metodo, un approccio secondo cui procedere per creare un modello più o meno accurato che possa essere impiegato anche in situazioni differenti.

Inizialmente è stato analizzato e caratterizzato il singolo flexure di forma ellittica e successivamente si è passati a definire un sistema costituito da più giunti.

Una degli aspetti più importanti per definire un modello valido consiste nel trovare un sistema di equazioni risolvibile.

EQUAZIONI DELLA STATICA

EQUAZIONI DI CHIUSURA

LEGAME COSTITUTIVO

Questi sono i tre blocchi principali di equazioni che sono stati utilizzati per l'analisi del sistema di flexure.

Risolvendo il sistema analiticamente, otteniamo le diverse soluzioni. Nel nostro caso, il sistema di soluzione risultante è piuttosto grande in quanto rappresentativo di tutti e quattro i flexure del meccanismo.

Per rendere più ordinati i risultati ottenuti, è possibile raggrupparli in matrici in modo tale che sarà anche più comodo per lavorare con altri software come Excel.

Per fare ciò, si potrebbe procedere implementando un *ciclo for* su Matlab. Inizialmente andiamo a scrivere in forma vettoriale i valori dei due parametri principali che caratterizzano il problema.

```
rho=[10 ;15; 20; 25];  
betay=[0.085; 0.1; 0.2; 0.3];
```

Fig. 91

Creiamo poi il vettore che contiene tutti i valori delle forze massime ottenuti con Ansys e il vettore relativo al coefficiente moltiplicativo cf. I valori delle forze F1,F2,...F16 devono essere scritti come dati su Matlab.

```
effemax=[F1 F5 F9 F13;F2 F6 F10 F14;F3 F7 F11 F15;F4 F8 F12 F16];  
ceffe=[0.05:0.05:1];
```

Fig. 92

Si prosegue creando delle matrici vuote relative alle soluzioni del nostro sistema. Per semplicità in figura verrà mostrato solo il caso di Ψ , ma per le altre bisogna fare esattamente uguale.

```
matpsifa1=[];  
matpsifa2=[];  
matpsifa3=[];  
matpsifa4=[];
```

Fig. 93

A questo punto si può implementare il ciclo for vero e proprio.

```
for i=1:4  
    ro=rho(i);  
    for j=1:4  
        by=betay(j);  
        Fmax=effemax(i,j);
```

Fig.94

In questo modo abbiamo indicizzato gli elementi di rho e betay e abbiamo definito la matrice delle forze come una combinazione degli elementi i e j. Infatti, come sappiamo, ad ogni accoppiamento di ρ e β_y corrisponde un certo valore della forza.

Dobbiamo poi riscrivere, con un nome differente, una matrice vuota per ogni soluzione come fatto poco prima. Per coerenza, viene mostrato solo il caso delle Ψ .

```
vetpsifa1=[];  
vetpsifa2=[];  
vetpsifa3=[];  
vetpsifa4=[];
```

Fig. 95

Si va ora ad indicizzare il coefficiente cf e si definisce la matrice delle forze F, data come prodotto tra ma matrice delle forze massime applicabili per il coefficiente cf.

```
for k=1:20  
    cf=ceffe(k);  
    F=Fmax*cf;
```

Fig. 96

Ora, si prosegue implementando tutte le espressioni delle soluzioni che sono state trovate analiticamente e le espressioni di h,g3 e f5.

Fatto questo, bisogna scrivere la soluzione in questa forma.

```
vettpsifa1=[vetpsifa1;psifa1];  
vettpsifa2=[vetpsifa2;psifa2];  
vettpsifa3=[vetpsifa3;psifa3];  
vettpsifa4=[vetpsifa4;psifa4];
```

Fig.97

Si scrive la matrice finale nel modo seguente.

```
mattpsifa1=[matpsifa1, vetpsifa1];  
mattpsifa2=[matpsifa2, vetpsifa2];  
mattpsifa3=[matpsifa3, vetpsifa3];  
mattpsifa4=[matpsifa4, vetpsifa4];
```

Fig. 98

Si chiude il ciclo for con end.

Andando a risolvere il ciclo, Matlab ci restituirà le soluzioni in matrici 20x16, in cui ogni riga corrisponde a un determinato valore di cf e ogni colonna a un certo accoppiamento di ρ e βy .

I valori che costituiscono le matrici delle varie soluzioni rappresentano le i valori analitici. Questi sono poi confrontati con i valori ottenuti con le simulazioni fem. Così si va a calcolare l'errore tra le due soluzioni.

BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA

- A non-dimensional large displacement model for flexure of elementary geometry, Moschini, Palpacelli
- http://web.inge.unige.it/DidRes/MApMac2/5_realizzazione_coppie0708.pdf
- <https://www.phidrive.eu/analisi-fem/>
- <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X18303562#>
- <https://www.compliantmechanisms.byu.edu/about-compliant-mechanisms>
- <https://www.engineering3d.it/mesh-elementi-finiti.html>