



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Meccanica

---

**Onde di deformazione in  
materiali iperelastici con fibre di  
rinforzo**

**Deformation waves in  
hyperelastic fiber-reinforced  
materials**

Relatore:  
**Prof. Marco Coco**

Tesi di Laurea di:  
**Matteo Saracini**

A.A. 2022/2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminari teorici</b>	<b>3</b>
<b>2 Lamina iperelastica anisotropa ed incomprimibile</b>	<b>9</b>
2.1 Approssimazione a piccoli angoli . . . . .	19
<b>3 Discussione dei risultati numerici</b>	<b>21</b>
3.1 Caso $M_2 = 0; G = 0$ . . . . .	25
3.2 Caso $M_2 \neq 0; G = 0$ . . . . .	30
3.3 Caso $M_2 \neq 0; G \neq 0$ . . . . .	37
3.4 Altri possibili casi di studio . . . . .	43
<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>



# Elenco delle figure

3.1	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) in funzione di $\chi$ e $\tau$ . . .	25
3.2	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	26
3.3	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	26
3.4	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	27
3.5	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	27
3.6	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b), con $\phi = \frac{\pi}{3}$ . . . . .	28
3.7	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	28
3.8	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	29
3.9	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b), in funzione di $\chi$ e $\tau$ . . .	30
3.10	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	31
3.11	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	31
3.12	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	32
3.13	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	32
3.14	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . .	33
3.15	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	33
3.16	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	34
3.17	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	34
3.18	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ . . . . .	35
3.19	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{\pi}{4}$ , $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . .	35
3.20	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ , $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . .	36
3.21	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{\pi}{4}$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . .	36
3.22	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) . . . . .	37

3.23	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	38
3.24	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	38
3.25	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) . . . . .	39
3.26	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	39
3.27	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	40
3.28	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{\pi}{4}$ , $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . .	41
3.29	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ , $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . .	41
3.30	Grafici delle deformazioni $F$ , (a), e $G$ , (b) con $\phi = \frac{\pi}{4}$ , $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . .	42
3.31	Deformazione lungo $Y$ con fibre inclinate di $\frac{\pi}{4}$ rispetto agli assi $X$ e $Y$ . . . . .	46
3.32	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ . . . . .	46
3.33	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = 0$ e $\theta = 0$ . . . . .	49
3.34	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = 0$ e $\theta = 0$ . . . . .	50
3.35	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = \text{con } \phi = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = 0$ . . . . .	50
3.36	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{3}$ e $\theta = 0$ . . . . .	50
3.37	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	52
3.38	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	52
3.39	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	52
3.40	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	53
3.41	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	54
3.42	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	54
3.43	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	55
3.44	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	55
3.45	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	55
3.46	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	56
3.47	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	57
3.48	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	57
3.49	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	58
3.50	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	58
3.51	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	58
3.52	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	59

3.53	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	60
3.54	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	60
3.55	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	61
3.56	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	61
3.57	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	61
3.58	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	62
3.59	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	63
3.60	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	64
3.61	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	64
3.62	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	64
3.63	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	65
3.64	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	65
3.65	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	65
3.66	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	66
3.67	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	66
3.68	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{8}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	66
3.69	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	67
3.70	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	67
3.71	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	68
3.72	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	68
3.73	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	68
3.74	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$ . . . . .	69
3.75	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	70
3.76	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	70
3.77	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	71
3.78	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	71
3.79	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	71
3.80	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{3\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	72
3.81	Deformazione F in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	73
3.82	Deformazione G in $\tau = 2$ e $\chi = 0.2$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	73
3.83	Deformazione F in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	74

3.84	Deformazione G in $\tau = 5$ e $\chi = 0.5$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$	. . . . .	74
3.85	Deformazione F in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$	. . . . .	74
3.86	Deformazione G in $\tau = 10$ e $\chi = 1$ con $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$	. . . . .	75



# Introduzione

Lo scopo del presente elaborato di laurea è studiare l'effetto che hanno le fibre di rinforzo sulla deformazione di un materiale iperelastico. L'oggetto di studio è una lamina costituita da un materiale iperelastico ed incomprimibile. Si definisce materiale iperelastico un materiale che mostra una risposta elastica alla deformazione molto elevata; si definisce incomprimibile se durante la deformazione il volume del materiale rimane costante.

L'elaborato svolto tende a dimostrare come la presenza delle fibre di rinforzo, opportunamente orientate, possa generare una deformazione della lamina lungo una direzione in cui non è imposta una deformazione iniziale al materiale. Questa deformazione, frutto delle sole fibre di rinforzo si manifesta durante un campo di moto ben definito. In modo particolare si sono studiati vari casi di interesse in relazione al diverso orientamento delle fibre di rinforzo rispetto ad un determinato sistema di riferimento. Il presente studio è costituito principalmente da due macro-sezioni: una prima parte teorica che permette di ricavare le equazioni delle onde di deformazione; una seconda parte in cui si analizzano le immagini ottenute dalla risoluzione numerica delle equazioni differenziali delle onde di deformazione. Le immagini rappresentano l'andamento nello spazio e nel tempo delle onde di deformazione nel materiale iperelastico.

Nella progettazione di un nuovo materiale è fondamentale lo studio del comportamento alla deformazione dello stesso poiché è direttamente correlato alle proprietà meccaniche del materiale in progettazione. Infine i risultati ottenuti da questo studio hanno la possibilità di essere spendibili in una vasta gamma

di applicazioni pratiche di interesse ingegneristico: come principale esempio si possono citare i materiali intelligenti. I materiali intelligenti sono dei particolari materiali che modificano le loro caratteristiche in relazione agli stimoli esterni.

Lo studio è stato svolto durante il periodo dedicato all'attività di tirocinio: "Analisi e modelli dell'elastodinamica non lineare per applicazioni di interesse ingegneristico" ed è stato terminato scrivendo il presente elaborato. L'attività di tirocinio è stata svolta presso il DIISM (Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche) dell'Università Politecnica delle Marche sotto la supervisione del professore Marco Coco che ha rivestito il ruolo di tutor aziendale ed accademico.

# Capitolo 1

## Preliminari teorici

Il presente studio rientra nella teoria della meccanica del continuo. La meccanica del continuo studia i comportamenti di un corpo continuo. Per corpo continuo si intende un corpo deformabile nel tempo e quindi può essere oggetto di variazioni di volume e forma. In modo particolare il presente studio può collocarsi all'interno della branca dell'elastodinamica, a sua volta facente parte della meccanica del continuo. Lo studio della propagazione delle onde nei materiali è di fondamentale importanza tecnologica. Tale disciplina trova applicazioni pratiche nello studio delle proprietà dei materiali, nell'acustica, nello studio delle vibrazioni in una struttura meccanica.

Si analizza di seguito il contesto teorico utile per la comprensione dell'intero elaborato svolto.

Si considera un corpo continuo  $\mathcal{C}$  come un corpo composto da un insieme di particelle che in ogni istante di tempo  $t$  occupano univocamente un punto in una regione chiusa dello spazio  $\Omega$ . Per la seguente trattazione si sceglie un punto  $P$  del corpo  $\mathcal{C}$  che occupa una posizione  $\mathbf{X}$  all'istante di tempo  $t_0$ . All'istante di tempo  $t_0$  il corpo  $\mathcal{C}$  si trova in una configurazione iniziale  $\mathcal{R}$  che è definita configurazione indeformata. Per configurazione si intende il modo in cui sono distribuiti i punti che costituiscono il corpo nello spazio. La scelta della configurazione iniziale ed indeformata è del tutto arbitraria, tuttavia in

molti problemi pratici la scelta è guidata dalla necessità di semplificare matematicamente il problema. Si definisce ora il moto  $\mathcal{M}$  che fa passare il corpo dalla configurazione iniziale indeformata  $\mathcal{R}$  alla configurazione attuale deformata  $\mathcal{R}'$ . Il moto  $\mathcal{M}$  è un diffeomorfismo per il corpo  $\mathcal{C}$ . Un diffeomorfismo è una funzione tra due varietà differenziabili con la particolare caratteristica che risulta differenziabile ed invertibile con anche la funzione inversa differenziabile. In questo particolare caso risulta invertibile e differenziabile due volte. Nella configurazione deformata  $\mathcal{R}'$  il punto  $P$  occupa una posizione  $\mathbf{x}$  all'istante di tempo  $t$ .

Si considera un elemento di materiale infinitesimo  $d\mathbf{X}$  nella configurazione indeformata, che nella configurazione deformata è definito come  $d\mathbf{x}$ . La relazione che sussiste tra  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{x}$  è la seguente:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

dove  $\mathbf{F}$  è il tensore gradiente di deformazione. Il tensore gradiente di deformazione è una grandezza fondamentale che descrive la deformazione subita da un elemento infinitesimo che passa dalla configurazione iniziale alla configurazione deformata. Il tensore  $\mathbf{F}$  è definito come segue:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Nel caso più generale quando un elemento infinitesimo di materiale  $d\mathbf{X}$  passa dalla configurazione iniziale alla configurazione deformata, può allungarsi o accorciarsi e ruotare a causa dell'azione del tensore  $\mathbf{F}$ . Per approfondire l'effetto dell'allungamento si possono definire due vettori unitari,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{n}$ , rispettivamente lungo la direzione di  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{x}$ . E' possibile quindi scrivere:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{N}dS$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{n}ds$$

dove  $dS > 0$  e  $ds > 0$  sono le lunghezze infinitesime di  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{x}$ . Definendo il rapporto  $\frac{ds}{dS} = \lambda$  attraverso semplici sostituzioni si può scrivere la seguente relazione:

$$\lambda\mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{N}$$

Per determinare il valore di  $\lambda$  si possono fare i seguenti passaggi:

$$\lambda\mathbf{n} \cdot \lambda\mathbf{n} = \lambda^2$$

$$\lambda\mathbf{n} \cdot \lambda\mathbf{n} = (\mathbf{F}\mathbf{N}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F})\mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}\mathbf{N}$$

Si può inoltre definire la seguente relazione in accordo alla definizione di  $\lambda$ :

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}$$

Analogamente si possono eseguire i seguenti passaggi matematici:

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{N} \cdot \frac{1}{\lambda}\mathbf{N} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{N} \cdot \frac{1}{\lambda}\mathbf{N} = (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-T})\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}$$

Alla luce delle precedenti relazioni ricavate si definiscono quindi due nuovi

tensori che prendono rispettivamente il nome di tensore destro di Cauchy-Green e tensore sinistro di Cauchy-Green. Risultano così definiti:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$$

Data una generica direzione  $D$  nella configurazione di riferimento, la sola conoscenza del tensore  $\mathbf{C}$  permette di determinare l'allungamento di un elemento di materiale infinitesimo lungo  $D$  quando si passa dalla configurazione iniziale a quella deformata. Diametralmente opposta la definizione di  $\mathbf{B}$ . Data un generica direzione  $d$  nella configurazione attuale, la conoscenza di  $\mathbf{B}$  permette di determinare l'allungamento di un un elemento di materiale infinitesimo lungo  $d$  che è descritto a partire dalla configurazione di riferimento. [1]

Un'altra grandezza fisica fondamentale per la trattazione della meccanica del continuo è la densità d'energia di deformazione  $W$ . La densità d'energia di deformazione è il rapporto tra l'energia accumulata dal materiale durante la deformazione e il suo volume. In altri termini rappresenta la quantità d'energia che il materiale riesce ad immagazzinare durante una deformazione. Come discusso in [5] per i materiali iperelastici fibro-rinforzati esiste un modello per la densità d'energia di deformazione, chiamato modello standard, definito come segue:

$$W = \frac{\mu_0}{2}(I_1 - 3) + \frac{\mu_1}{4}(I_4 - 1)^2$$

Come ultima grandezza tensoriale è fondamentale definire il tensore delle tensioni  $\mathbf{T}$  di Cauchy. Il tensore di Cauchy fornisce una misura dello stato di tensione a cui è sottoposto un materiale durante una deformazione. Il tensore di Cauchy è un tensore simmetrico ed è composto da tre componenti delle tensioni

normali e da sei componenti delle tensioni tangenziali.

Infine è possibile enunciare, una volta definito il tensore delle tensioni, l'equazione di bilancio del momento lineare:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{a}.$$

L'operatore  $\nabla$  è l'operatore matematico divergenza; la grandezza  $\rho$  è la densità del materiale iperelastico ed infine  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione del corpo in esame. Nel successivo capitolo si studia il caso pratico di una lamina iperelastica fibro-rinforzata in deformazione.





## Capitolo 2

# Lamina iperelastica anisotropa ed incomprimibile

Si considera una lamina iperelastica fibro-rinforzata ed incomprimibile. La lamina si trova all'istante di tempo  $t_0$  nella configurazione indeformata  $\mathcal{R}$ . Si definisce il seguente campo locale degli spostamenti:

$$\begin{cases} x = X + f(Z, t) \\ y = Y + g(Z, t) \\ z = Z \end{cases} \quad (2.1)$$

che rappresenta il moto  $\mathcal{M}$  a cui è sottoposta la lamina iperelastica. Come anche spiegato nella sezione precedente, il campo locale degli spostamenti è un diffeomorfismo e risulta quindi differenziabile e invertibile. Il campo di moto (2.1) permette di far passare il corpo dalla configurazione iniziale indeformata  $\mathcal{R}$  alla configurazione attuale deformata  $\mathcal{R}'$ . Il vettore  $(X, Y, Z)$  rappresenta il vettore posizione di un generico punto del corpo rispetto ad un sistema di

riferimento arbitrario nella configurazione iniziale  $\mathcal{R}$ . Il vettore  $(x, y, z)$  rappresenta il vettore posizione del precedente punto nella configurazione attuale  $\mathcal{R}'$ . Le funzioni  $f(Z, t)$  e  $g(Z, t)$  rappresentano gli spostamenti di X e Y dovuti alla deformabilità del corpo.

Si considera ora la deformazione subita da un elemento infinitesimo del corpo.

E' fondamentale a tal proposito introdurre il tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  definito come segue:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Il tensore gradiente di deformazione è indice della deformazione di un corpo e indica la deformazione di un elemento infinitesimo che passa dalla configurazione indeformata  $\mathcal{R}$  alla configurazione attuale  $\mathcal{R}'$ .

Per quanto concerne il campo di moto (2.1) definito in precedenza il tensore gradiente di deformazione assume la seguente forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f'(Z, t) \\ 0 & 1 & g'(Z, t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per un materiale incomprimibile, come quello preso in analisi, si ha che il determinante del tensore gradiente di deformazione è pari ad 1.

Si può calcolare infatti che:

$$\det \mathbf{F} = F_{11}F_{22}F_{33} + F_{12}F_{23}F_{31} + F_{13}F_{21}F_{32} - F_{13}F_{22}F_{31} - F_{12}F_{21}F_{33} - F_{11}F_{23}F_{32} = 1$$

A questo punto si può ottenere facilmente anche la trasposta del tensore  $\mathbf{F}$  come segue:

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f'(Z, t) & g'(Z, t) & 1 \end{bmatrix}$$

Definire la trasposta di  $\mathbf{F}$  risulta fondamentale per introdurre due nuovi tensori: il tensore destro di Cauchy-Green  $\mathbf{C}$  e il tensore sinistro di Cauchy-Green  $\mathbf{B}$ , come definiti nel capitolo precedente. Le derivate rispetto alla variabile  $Z$  delle funzioni  $f$  e  $g$  vengono scritte da ora in poi facendo uso dell'apice.

Il tensore  $\mathbf{C}$  è definito rispetto alla configurazione indeformata  $\mathcal{R}$ ; nello specifico moto preso in analisi assume la seguente forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \\ f' & g' & f'^2 + g'^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Il tensore  $\mathbf{B}$  invece è definito nella configurazione attuale  $\mathcal{R}'$  ed assume la seguente forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 + f'^2 & f'g' & f' \\ f'g' & 1 + g'^2 & g' \\ f' & g' & 1 \end{bmatrix}$$

Si definisce a questo punto un versore  $\mathbf{M}$  lungo una generica direzione dello spazio nella configurazione indeformata in cui sono orientate le fibre di rinforzo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

I termini  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  sono le componenti del versore  $\mathbf{M}$  rispettivamente lungo gli assi  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Con  $\mathbf{m}$  si definisce un versore che indica la direzione nello spazio delle fibre di rinforzo nella configurazione deformata. La direzione  $\mathbf{m}$  non coincide con la direzione  $\mathbf{M}$  in quanto il corpo si è deformato in accordo con il moto (2.1).

Si introducono di seguito il primo e quarto invariante del tensore  $\mathbf{B}$ , alla luce delle definizioni in [8], utili poi per definire la densità d'energia di deformazione.

Il primo invariante è definito come:

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{B});$$

mentre il quarto invariante si definisce:

$$I_4 = (\mathbf{FM})^T \cdot (\mathbf{FM}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}.$$

Nel caso analizzato i valori assunti dal primo e quarto invariante sono:

$$I_1 = 3 + f'^2 + g'^2$$

$$I_4 = M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2.$$

Definiti quindi il primo e quarto invariante del tensore  $\mathbf{B}$ , si introduce un modello standard per la densità d'energia di deformazione di un solido iperelastico fibro-rinforzato. Dal modello generale della referenza [5] la densità d'energia di deformazione per un materiale come quello preso in analisi è data da:

$$W = \frac{\mu_0}{2}(I_1 - 3) + \frac{\mu_1}{4}(I_4 - 1)^2 \quad (2.2)$$

come analizzato anche in [2].

La densità d'energia di deformazione rappresenta l'energia immagazzinata da un corpo per unità di volume quando viene sottoposta a dei carichi che portano ad una deformazione del corpo stesso.  $\mu_0$  e  $\mu_1$  sono i moduli elastici rispettivamente del materiale e delle fibre di rinforzo.

Utilizzando le precedenti definizioni di  $I_1$  e  $I_4$ , la densità d'energia di deformazione per il caso analizzato risulta essere pari a:

$$W = \frac{\mu_0}{2}(f'^2 + g'^2) + \frac{\mu_1}{4}(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1)^2.$$

Per un materiale incomprimibile anisotropo iperelastico fibro-rinforzato il tensore  $\mathbf{T}$  è definito come segue [4]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{B} + 2W_4(\mathbf{FM} \otimes \mathbf{FM}), \quad (2.3)$$

in cui  $\mathbf{I}$  è la matrice identità mentre  $W_1$  e  $W_4$  sono le derivate parziali di  $W$  rispetto al primo e quarto invariante:

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu_0}{2},$$

$$W_4 = \frac{\partial W}{\partial I_4} = \frac{\mu_1}{4}(I_4 - 1).$$

Come spiegato in [3], il termine  $p$  è la pressione idrostatica e rappresenta la reazione al vincolo di incomprimibilità.  $p$  è un moltiplicatore di Lagrange indeterminato legato propriamente al vincolo di isocoricità ovvero volume costante.

In seguito sono riportate le sei componenti indipendenti del tensore  $\mathbf{T}$ :

$$T_{11} = -p + \mu_0(1 + f'^2) + \mu_1(M_1 + f'M_3)^2(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{22} = -p + \mu_0(1 + g'^2) + \mu_1(M_2 + g'M_3)^2(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{33} = -p + \mu_0 + \mu_1 M_3^2(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{12} = \mu_0 f' g' + \mu_1(M_1 + f'M_3)(M_2 + g'M_3)(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{21} = T_{12};$$

$$T_{13} = \mu_0 f' + \mu_1 M_3(M_1 + f'M_3)(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{31} = T_{13};$$

$$T_{23} = \mu_0 g' + \mu_1 M_3(M_2 + g'M_3)(M_3^2 + (M_1 + f'M_3)^2 + (M_2 + g'M_3)^2 - 1);$$

$$T_{32} = T_{23}.$$

Dalla (2.3) è possibile estrarre la sola parte del tensore  $\mathbf{T}$  dovuta alle sollecitazioni esterne:

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = 2W_1\mathbf{B} + 2W_4(\mathbf{FM} \otimes \mathbf{FM}).$$

Si possono quindi esplicitare le componenti  $\hat{T}_{13}$ ,  $\hat{T}_{23}$  e  $\hat{T}_{33}$ , in funzione di  $W_1$  e  $W_4$  ed in funzione di  $f$  e  $g$  che saranno utili per i successivi passaggi:

$$\hat{T}_{13} = 2f'W_1 + 2M_3(M_1 + f'M_3)W_4,$$

$$\hat{T}_{23} = 2g'W_1 + 2M_3(M_2 + g'M_3)W_4,$$

$$\hat{T}_{33} = 2W_1 + 2M_3^2W_4.$$

Nelle successive tre equazioni, poiché  $\mathbf{M}$  è un versore vale la proprietà  $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 1$ , inoltre si sostituiscono i valori di  $W_1$  e  $W_4$  esplicitati in precedenza

e si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{T}_{13} &= \mu_0 f' + \mu_1 M_3^2 (M_1 + f' M_3) (f'^2 M_3 + 2M_1 f' + g'^2 M_3 + 2M_2 g'); \\ \hat{T}_{23} &= \mu_0 g' + \mu_1 M_3^2 (M_2 + g' M_3) (f'^2 M_3 + 2M_1 f' + g'^2 M_3 + 2M_2 g'); \\ \hat{T}_{33} &= \mu_0 + \mu_1 M_3^3 (f'^2 M_3 + 2M_1 f' + g'^2 M_3 + 2M_2 g').\end{aligned}$$

A questo punto è possibile scrivere l'equazione di bilancio del momento lineare:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{a} \quad (2.4)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale e  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione del corpo. Poiché il moto (2.1) è un diffeomorfismo, abbiamo che l'accelerazione è definita come:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} f_{tt} \\ g_{tt} \\ 0 \end{bmatrix}$$

con il pedice  $tt$  che indica la derivata parziale seconda rispetto al tempo.

Dalla equazione di bilancio del momento lineare si ottiene un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} -p_x + \frac{\partial \hat{T}_{13}}{\partial Z} = \rho f_{tt} \\ -p_y + \frac{\partial \hat{T}_{23}}{\partial Z} = \rho g_{tt} \\ -p_z + \frac{\partial \hat{T}_{33}}{\partial Z} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

dove i pedici  $x, y, z$  indicano le derivate parziali rispetto ad  $x, y$  e  $z$ .

Da (2.5) è possibile esplicitare il campo di pressione. Poiché deve valere che  $(\nabla p)_x = \text{cost}$ , si ha che  $p(x) = \Phi(t)x$  dove  $\Phi$  è una generica funzione del tempo. Allo stesso modo affinché  $(\nabla p)_y = \text{cost}$ , si definisce  $p(y) = \Psi(t)y$ . Infine  $p(z) =$

$2 \int (W_1 + 2M_3^2 W_4) dZ$  ottenuta sostituendo i risultati precedenti. Il campo di pressione è dunque così definito:

$$p(x, y, z, t) = \Phi(t)x + \Psi(t)y + 2 \int (W_1 + 2M_3^2 W_4) dZ.$$

Da (2.5) si considerano le prime due equazioni e si esegue la derivata rispetto alla variabile  $Z$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{T}_{13}}{\partial Z^2} = \rho \frac{\partial f_{tt}}{\partial Z} \\ \frac{\partial^2 \hat{T}_{23}}{\partial Z^2} = \rho \frac{\partial g_{tt}}{\partial Z} \end{cases}$$

osservando che  $p_x$  e  $p_y$  non dipendono dalla variabile  $Z$ .

Le variabili  $Z$  e  $t$  da cui dipendono le funzione  $f$  e  $g$  sono indipendenti e quindi vale il Teorema di Schwarz. Risulta possibile definire due nuove variabili  $F$  e  $G$  tali che

$$\begin{cases} F = \frac{df}{dZ} \\ G = \frac{dg}{dZ} \end{cases}$$

Queste due nuove funzioni  $F$  e  $G$  risultano essere incognite e rappresentano le deformazioni subite dalla lamina, rispettivamente lungo la direzione  $X$  e  $Y$ . Di conseguenza il sistema che si ottiene, alla luce di tali sostituzioni, è:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{T}_{13}}{\partial Z^2} = \rho F_{tt} \\ \frac{\partial^2 \hat{T}_{23}}{\partial Z^2} = \rho G_{tt} \end{cases}$$

Queste ultime due equazioni hanno la stessa forma di un'equazione delle onde, difatti descrivono il campo di deformazione subito dal corpo.

Le due equazioni di partenza in forma estesa sono:

$$\begin{cases} \rho F_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} [\mu_0 F + \mu_1 M_3^2 (M_1 + F M_3) (F^2 M_3 + 2M_1 F + G^2 M_3 + 2M_2 G)] \\ \rho G_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} [\mu_0 G + \mu_1 M_3^2 (M_2 + G M_3) (F^2 M_3 + 2M_1 F + G^2 M_3 + 2M_2 G)] \end{cases}$$

E' possibile sviluppare in termini di un parametro  $\varepsilon$  come ampiamente discusso in [6] in modo tale da ottenere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho F_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} [(\mu_0 F + 2\mu_1 M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1 M_1 M_2 M_3^2 G) + \\ \varepsilon(\mu_1 M_1 M_3^3 F^2 + \mu_1 M_1 M_3^3 G^2 + 2\mu_1 M_1 M_3^3 F^2 + 2\mu_1 M_2 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1 M_3^4 F^3 + \mu_1 M_3^4 FG^2)] \\ \\ \rho G_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial Z^2} [(\mu_0 G + 2\mu_1 M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1 M_1 M_2 M_3^2 F) + \\ \varepsilon(\mu_1 M_2 M_3^3 G^2 + \mu_1 M_2 M_3^3 F^2 + 2\mu_1 M_2 M_3^3 G^2 + 2\mu_1 M_1 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1 M_3^4 G^3 + \mu_1 M_3^4 F^2 G)] \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Il passo successivo è quello di riscrivere il precedente sistema in forma adimensionale, utilizzando le seguenti grandezze adimensionali:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t}{T}; \\ \zeta &= \frac{Z}{L} \end{aligned}$$

dove  $T$  è un tempo caratteristico e  $L$  è una lunghezza caratteristica. Le grandezze caratteristiche sono delle costanti tipiche del problema preso in considerazione. Una scelta opportuna delle grandezze caratteristiche permette di semplificare ulteriormente le equazioni.

Il sistema adimensionalizzato è dunque definito:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{t't'} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [(\mu_0^* F + 2\mu_1^* M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 G) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + \mu_1^* M_1 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 F^3 + \mu_1^* M_3^4 FG^2)] \\ \\ G_{t't'} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [(\mu_0^* G + 2\mu_1^* M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 F) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + \mu_1^* M_2 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 G^3 + \mu_1^* M_3^4 F^2 G)] \end{array} \right. \quad (2.7)$$



dove il pedice  $t't'$  indica la derivata seconda rispetto alla nuova variabile tempo adimensionale, inoltre si è definito  $\mu^* = \mu \frac{T^2}{\rho L^2}$ . Scegliendo opportunamente i parametri caratteristici, quest'ultimi possono essere definiti in modo tale che risulti:  $\mu_0^* = 1$ . Si sceglie quindi il rapporto  $\frac{T^2}{L^2}$  affinché  $\frac{\mu_0}{\rho} = 1$ ; così facendo  $\mu_1^* = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ .

Successivamente dal sistema in forma adimensionale è possibile operare un cambiamento di variabili nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\tau &= \varepsilon^2 t'; \\ \chi &= ct' - \zeta\end{aligned}$$

in cui  $c$  ha le dimensioni di una velocità.

Alla luce delle nuove variabili le derivate parziali assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial}{\partial \chi}, \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= c \frac{\partial}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi \partial \tau} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\end{aligned}$$

I precedenti risultati si dimostrano facilmente come segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} = -\frac{\partial}{\partial \chi}, \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t'} = c \frac{\partial}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( -\frac{\partial}{\partial \chi} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'} \left( c \frac{\partial}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi \partial \tau} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\end{aligned}$$

Trascurando i termini superiori al secondo ordine rispetto ad  $\varepsilon$  si ottiene il nuovo sistema delle equazioni delle onde con le nuove variabili  $\chi$  e  $\tau$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \chi^2} + 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \chi \partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [(\mu_0^* F + 2\mu_1^* M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 G) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + \mu_1^* M_1 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 F^3 + \mu_1^* M_3^4 FG^2)] \\ \\ c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \chi^2} + 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \chi \partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [(\mu_0^* G + 2\mu_1^* M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 F) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + \mu_1^* M_2 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 G^3 + \mu_1^* M_3^4 F^2 G)] \end{array} \right.$$

Poiché vale che  $c^2 = \mu_0^*$ , come dimostrato in [6], allora il sistema si riduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \chi \partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [(2\mu_1^* M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 G) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + \mu_1^* M_1 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 F^3 + \mu_1^* M_3^4 FG^2)] \\ \\ 2c\varepsilon^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \chi \partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} [(2\mu_1^* M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 F) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + \mu_1^* M_2 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 G^3 + \mu_1^* M_3^4 F^2 G)] \end{array} \right.$$

Integrando rispetto a  $\chi$  entrambi i membri si passa ad un sistema di equazioni differenziali al primo ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c\varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \chi} [(2\mu_1^* M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 G) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + \mu_1^* M_1 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 F^3 + \mu_1^* M_3^4 FG^2)]; \\ \\ 2c\varepsilon^2 \frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \chi} [(2\mu_1^* M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 F) + \\ \varepsilon(\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + \mu_1^* M_2 M_3^3 F^2 + 2\mu_1^* M_2 M_3^3 G^2 + 2\mu_1^* M_1 M_3^3 FG) + \\ \varepsilon^2(\mu_1^* M_3^4 G^3 + \mu_1^* M_3^4 F^2 G)] \end{array} \right.$$

## 2.1 Approssimazione a piccoli angoli

Si analizza ora il caso di piccoli angoli per studiare l'anisotropia del corpo. Si definiscono le componenti del vettore  $\mathbf{M}$  in coordinate sferiche:

$$M_1 = \sin(\phi), \quad M_2 = \cos(\phi) \sin(\theta), \quad M_3 = \cos(\phi) \cos(\theta) \quad (2.8)$$

in cui  $\phi$  è l'angolo che si ottiene ruotando ortogonalmente  $Z$  verso l'asse  $X$  e  $\theta$  l'asse  $Z$  verso l'asse  $Y$ . Si definiscono quindi  $\phi$  e  $\theta$  gli angoli d'inclinazione delle fibre di rinforzo rispetto all'asse  $X$  e all'asse  $Y$ .

Il presente elaborato analizza il comportamento della lamina in deformazione nel caso di piccoli angoli. E' possibile studiare anche il comportamento della lamina nel caso di angoli infinitesimi ma non vengono rilasciati risultati numerici di questo particolare caso.

Il caso in cui  $\phi = \theta = 0$  corrisponde alla completa isotropia in cui le fibre di rinforzo sono tutte dirette lungo l'asse  $Z$ , la direzione indeformata, e quindi ortogonali al piano  $(X, Y)$ .

Per studiare l'effetto dell'anisotropia introdotta dalla fuoriuscita delle fibre di rinforzo dal piano  $(Y, Z)$  si considera per semplicità di calcoli piccoli angoli. Si sviluppano le precedenti relazioni (2.8) in termini della grandezza infinitesima  $\varepsilon$  come segue:

$$M_1 \approx \varepsilon\phi, \quad M_2 \approx \varepsilon\theta, \quad M_3 \approx 1. \quad (2.9)$$

Sostituendo (2.9) nelle equazioni, semplificando  $\varepsilon^2$  presente da entrambi i lati e ponendo  $\gamma = F^2 + G^2$  si ha:

$$\begin{cases} 2c \frac{\partial F}{\partial \tau} = \mu_1^* \frac{\partial}{\partial x} [(F + \phi)(2(F\phi + G\theta) + \gamma)] \\ 2c \frac{\partial G}{\partial \tau} = \mu_1^* \frac{\partial}{\partial x} [(G + \theta)(2(F\phi + G\theta) + \gamma)] \end{cases} \quad (2.10)$$

Il sistema di equazioni (2.10) rappresenta le equazioni di Burger. Le equa-

zioni di Burger sono equazioni differenziali del primo ordine, nel caso inviscido, alle derivate parziali fondamentali per la meccanica del continuo. Le equazioni di Burger possono presentare soluzioni con discontinuità a tempo finito che richiederebbero metodi numerici risolutivi avanzati per la loro risoluzione.

## Capitolo 3

# Discussione dei risultati numerici

Per dimostrare l'effetto delle fibre di rinforzo sulla deformazione della lamina verranno presentate successivamente delle immagini ottenute dalla risoluzione del sistema di equazioni differenziali (2.7). La risoluzione del sistema di equazioni (2.7) è svolta per il caso in cui  $\varepsilon = 0$ : con questa opportuna scelta si esegue una approssimazione lineare delle due equazioni, trascurando le derivate di ordine superiore al primo per  $F$  e  $G$ . Le equazioni da risolvere sono dunque:

$$\begin{cases} F_{\nu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [(\mu_0^* F + 2\mu_1^* M_1^2 M_3^2 F + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 G)] \\ G_{\nu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [(\mu_0^* G + 2\mu_1^* M_2^2 M_3^2 G + 2\mu_1^* M_1 M_2 M_3^2 F)] \end{cases} \quad (3.1)$$

Le successive immagini tendono a rappresentare tre casi che si sono studiati. Il primo caso studia il comportamento alla deformazione della lamina in cui le fibre di rinforzo sono dirette solo lungo l'asse  $Z$  e non è imposta nessuna deformazione iniziale  $G$ . Il secondo caso è caratterizzato da una deformazione iniziale  $G$  nulla ma con le fibre di rinforzo dirette anche lungo  $X$  e  $Y$ . Infine il terzo caso studia il comportamento della lamina con le fibre di rinforzo dirette

lungo i tre assi con anche deformazione iniziale  $G$ . Per ottenere le varie immagini si è risolto il sistema di equazioni differenziali (3.1) attraverso il software Matlab e un metodo numerico per approssimare la soluzione: il metodo delle differenze finite.

Nel software Matlab si sono inseriti tutti i dati necessari per risolvere il problema e le due equazioni differenziali del sistema. Tra i principali dati si hanno i due angoli  $\phi$  e  $\theta$  che verranno fatti variare per osservare il comportamento alla deformazione del materiale in relazione al diverso orientamento delle fibre. Inoltre come dati ci sono le deformazioni iniziali  $F$  e  $G$ . La deformazione iniziale  $F$  è sempre presente mentre quella  $G$  è nulla solo per i primi due casi; viene posta uguale alla deformazione  $F$  nel terzo caso.

Il metodo delle differenze finite è un metodo numerico che permette di ricavare una soluzione approssimata delle due equazioni differenziali. In modo particolare per la risoluzione del sistema di equazioni (3.1) si è utilizzato lo schema leapfrog: è uno schema numerico esplicito che permette di ottenere il valore in un istante di tempo successivo basandosi solamente sugli istanti di tempo precedenti. Le equazioni del sistema (3.1) discretizzate assumono la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(i, j + 1) = 2 \left( 1 - (1 + 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_1^2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 \right) F(i, j) + \\ + (1 + 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_1^2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 (F(i + 1, j) + F(i - 1, j)) + \\ - F(i, j - 1) + (2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_1 M_2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 (G(i + 1, j) - 2G(i, j) + G(i - 1, j)); \\ \\ G(i, j + 1) = 2 \left( 1 - (1 + 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_2^2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 \right) G(i, j) + \\ + (1 + 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_2^2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 (G(i + 1, j) + G(i - 1, j)) + \\ - G(i, j - 1) + (2 \frac{\mu_1}{\mu_0} M_1 M_2 M_3^2) (\frac{dt}{dZ})^2 (F(i + 1, j) - 2F(i, j) + F(i - 1, j)). \end{array} \right.$$

In appendice D è spiegata la teoria e la classificazione delle equazioni differenziali e la classificazione dei vari metodi numerici risolutivi. L'idea alla base

che caratterizza il metodo delle differenze finite è quello di rendere il problema continuo delle PDE (partial differential equations) in un problema discreto e risolvere le equazioni differenziali in  $n$  punti. Come spiegato in appendice D è necessario suddividere il dominio delle equazioni differenziali in una griglia equi-spaziata di  $n$  punti. La distanza tra ogni punto della griglia è  $dZ$  lungo l'asse dello spazio e  $dt$  lungo l'asse temporale. Per la risoluzione del sistema di equazioni (3.2) si è scelto un passo di discretizzazione per lo spazio pari a  $dZ = 0.0001$  mentre il passo per il tempo  $dt$  è definito univocamente dalla condizione CFL. La condizione CFL impone un legame tra il passo di discretizzazione spaziale e quello temporale. E' definito dal rapporto tra la velocità di propagazione dell'onda e la velocità della griglia.

$$CFL = \frac{c}{dZ/dt}$$

La condizione CFL per la risoluzione del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali è posta pari a:  $CFL=0.8$ . Da cui il valore  $dt$  è univocamente definito dal valore della CFL e  $dZ$ . Imporre un valore della  $CFL < 1$  permette di avere uno schema numerico stabile.

Inoltre dalla risoluzione del sistema di equazioni (3.2) si ottengono delle matrici di valori per  $F$  e  $G$ . Il calcolo di queste matrici viene iterato dimezzando ogni volta il valore  $dZ$  di partenza fino al punto in cui l'errore relativo non supera il valore  $10^{-4}$ . L'errore relativo viene definito come il valore massimo tra le righe e le colonne della differenza tra i moduli della matrice  $F$  alla ennesima iterazione rispetto alla matrice  $F$  dell'iterazione precedente. Analogamente per i valori di  $G$ .

Dalla risoluzione del sistema di equazioni differenziali attraverso il metodo delle differenze finite con l'ausilio del software Matlab si ottengono tutte le figure necessarie per dimostrare il presente studio. In modo particolare si sono scelti alcuni punti da visualizzare a dei determinati istanti di tempo.

Le figure mostrano le onde di deformazione nei punti e negli istanti di tempo

scelti. Il vettore spazio ha lunghezza unitaria e si considerano le sezioni perpendicolari all'asse dello spazio  $\chi$  passanti per i punti  $\chi = 0.2$ ,  $\chi = 0.5$  e  $\chi = 1$ . Il tempo invece ha lunghezza 10 e si considerano le sezioni perpendicolari all'asse del tempo  $\tau$  passante per i punti  $\tau = 2$ ,  $\tau = 5$  e  $\tau = 10$ .

Di seguito verranno analizzati tre casi. Si distinguono per i valori assunti dagli angoli  $\phi$  e  $\theta$  e dal valore assunto dalla deformazione iniziale lungo  $Y$ :

- $M_2 = 0; G = 0$
- $M_2 \neq 0; G = 0$
- $M_2 \neq 0; G \neq 0$

in cui  $M_2 = 0$  implica che le fibre di rinforzo sono dirette solamente lungo l'asse  $Z$  mentre  $M_2 \neq 0$  implica che le fibre hanno le componenti dirette anche lungo  $X$  e  $Y$ . Imporre  $G = 0$  significa che non c'è nessuna deformazione iniziale lungo  $Y$  mentre  $G \neq 0$  significa che è imposta una deformazione iniziale in tale direzione. Per la risoluzione del sistema di equazioni (3.1) è stato posto il rapporto  $\mu_1^* = \frac{\mu_1}{\mu_0} = 2$ .



### 3.1 Caso $M_2 = 0; G = 0$

In questo primo caso si studia il comportamento del materiale iperelastico in cui le fibre di rinforzo sono dirette solamente lungo l'asse  $Z$  e non è presente una deformazione iniziale  $G$ .

In particolare si fissa  $\phi = 0$  e  $\theta = 0$ . Nelle figure 3.1a e 3.1b sono rispettivamente i grafici della deformazione  $F$  e  $G$  rispetto allo spazio adimensionale  $\chi$  e al tempo adimensionale  $\tau$ .

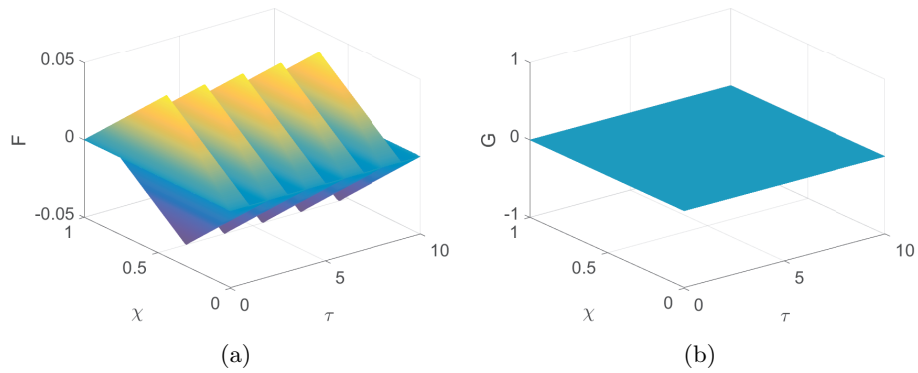


Figura 3.1: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) in funzione di  $\chi$  e  $\tau$

Come si nota in Figura 3.1b senza una deformazione iniziale e con le fibre orientate solamente lungo l'asse  $Z$  non si ha nessuna deformazione  $G$ . D'altra parte si ha la Figura 3.1a in cui si nota l'andamento nello spazio e nel tempo della deformazione  $F$ : questa deformazione non è dovuta alle fibre di rinforzo ma è solamente frutto della deformazione iniziale imposta per  $F$ .

Si possono osservare questi andamenti più nel dettaglio in alcune sezioni prescelte. Le seguenti immagini si riferiscono alla deformazione  $F$  per una sezione perpendicolare all'asse  $\tau$  passante per il punto  $\tau = 2$  e una sezione perpendicolare all'asse  $\chi$  passante per il punto  $\chi = 0.2$ .

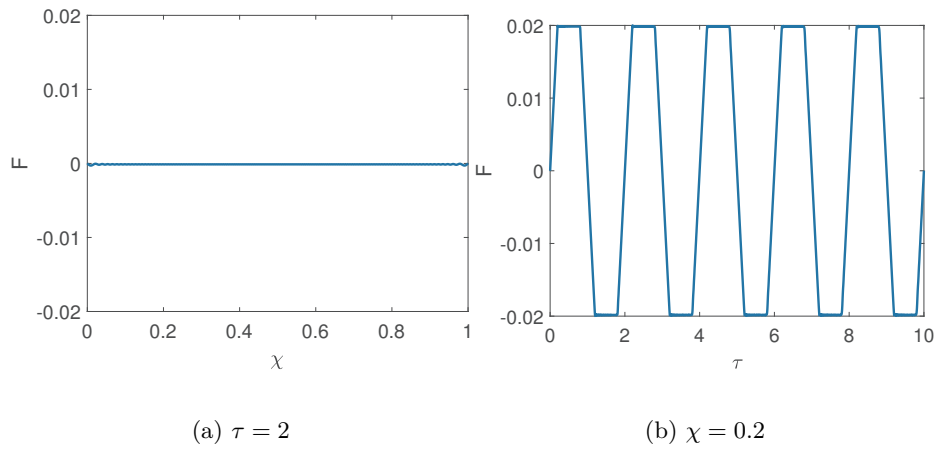


Figura 3.2: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Per quanto riguarda la deformazione  $G$  invece si nota in Figura 3.3 come non esiste alcun tipo di deformazione nel medesimo punto.

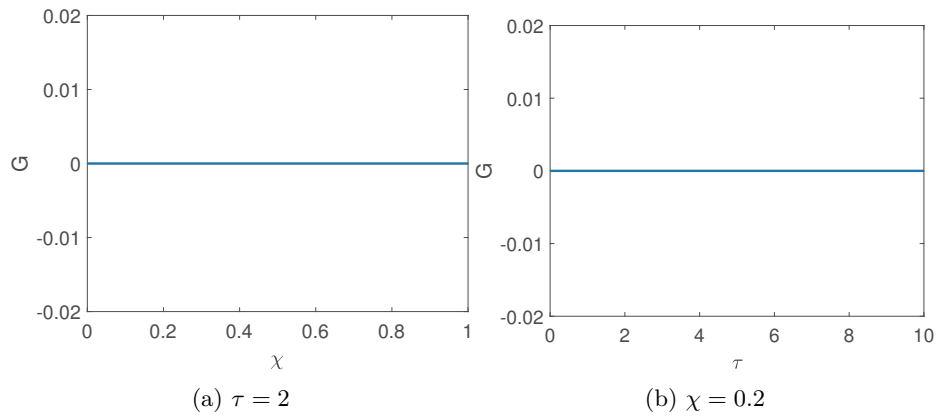


Figura 3.3: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Queste considerazioni non si limitano solamente alle determinate sezioni scelte ma possono essere estese a tutte le sezioni dello spazio e del tempo. A conferma di ciò vengono mostrate le figure 3.4a e 3.4b che rappresentano due sezioni perpendicolari a  $\tau$  e  $\chi$  passanti rispettivamente nei punti  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$ .

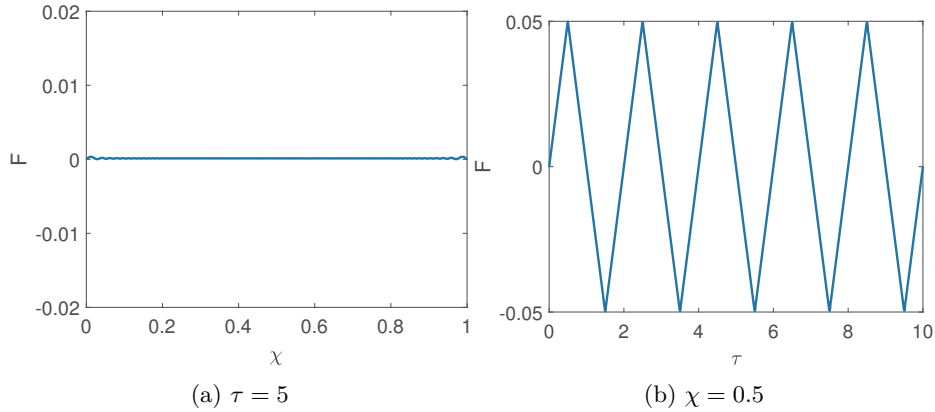


Figura 3.4: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

Analogamente si presentano le figure 3.5a e 3.5b per la deformazione  $G$ .

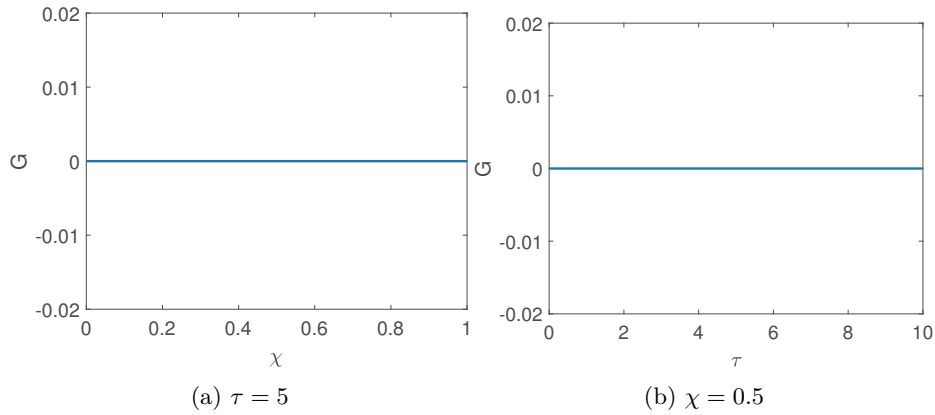


Figura 3.5: Deformazione  $G$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

Si può ripetere questo studio anche variando l'angolo  $\phi$ . Si può infatti prendere un angolo  $\phi = \frac{\pi}{3}$ , scelto in modo arbitrario, ed osservare come questa variazione dell'angolo  $\phi$  non incide in alcun modo sulla deformazione  $G$ . Di seguito vengono presentate i grafici 3.6a e 3.6b delle deformazioni.

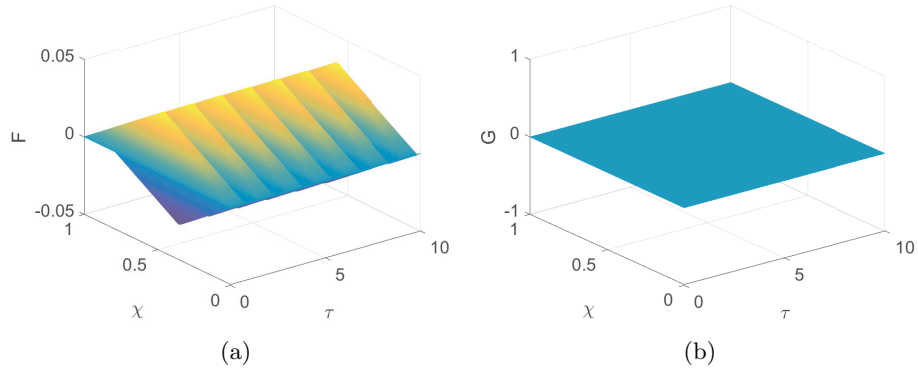


Figura 3.6: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b), con  $\phi = \frac{\pi}{3}$

Ancora una volta si nota in Figura 3.6 la presenza della deformazione  $F$  dovuta alla sola condizione iniziale mentre non è presente alcun tipo di deformazione  $G$ . Si può dimostrare quanto detto osservando nel dettaglio le sezioni passanti per i punti  $\chi = 0.2$  e  $\tau = 2$ .

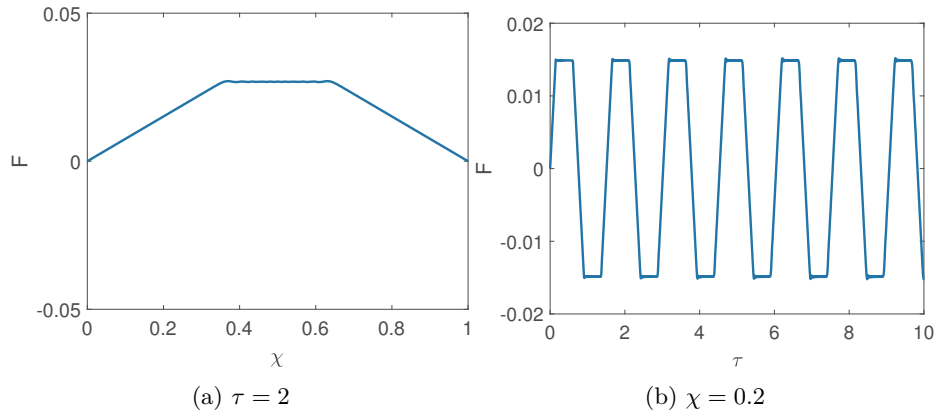


Figura 3.7: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

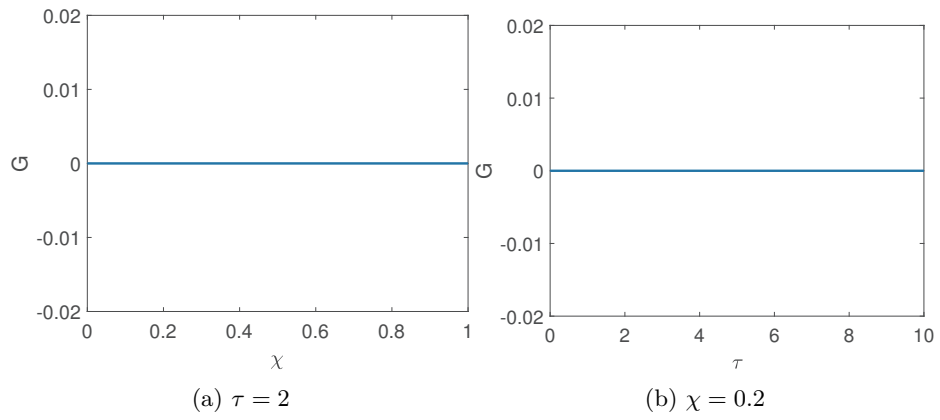


Figura 3.8: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Ulteriori immagini di altri punti in vari istanti di tempo sono in appendice A.

### 3.2 Caso $M_2 \neq 0; G = 0$

In questa sezione si ottengono i risultati più interessanti dello studio. Rispetto al primo caso si ha che i valori di  $\phi$  e  $\theta$  sono entrambi diversi da 0. Rimane invece nulla la condizione iniziale sulla deformazione per  $G$ .

Si considerano i seguenti valori per gli angoli:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Di seguito si presentano le figure 3.9a e 3.9b che mostrano la deformazione  $F$  e  $G$ .

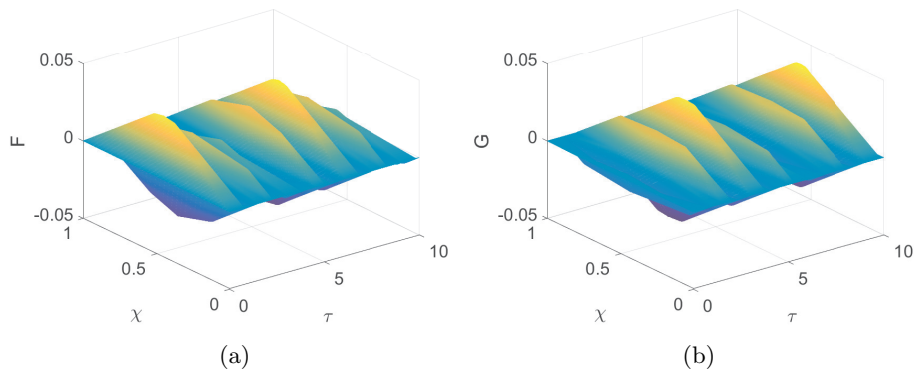


Figura 3.9: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b), in funzione di  $\chi$  e  $\tau$

Si può osservare nella Figura 3.9b come si manifesta una deformazione  $G$  nonostante non sia imposta nessuna deformazione iniziale. La deformazione  $G$  che si nota è frutto del solo orientamento delle fibre di rinforzo che non sono dirette solo lungo l'asse  $Z$  ma hanno delle componenti anche nelle direzioni  $X$  e  $Y$ . Si può analizzare questo risultato in modo più dettagliato osservando nuovamente determinate sezioni passanti per i punti prescelti.

Per analogia si considerano le sezioni perpendicolari all'asse  $\chi$  passante per  $\chi = 0.2$  e perpendicolari all'asse  $\tau$  passante per  $\tau = 2$ .

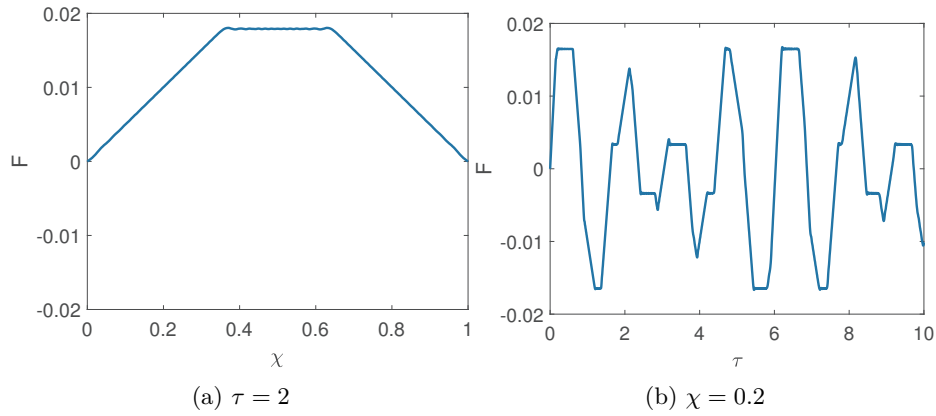


Figura 3.10: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

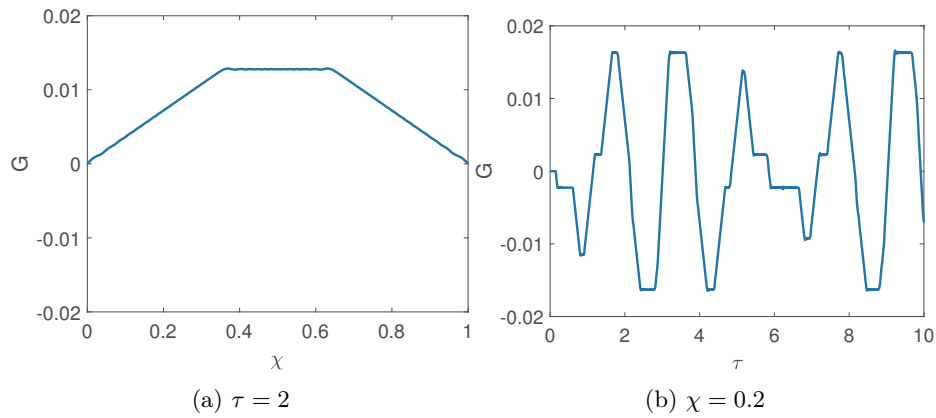


Figura 3.11: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Come già precedentemente osservato dalla Figura 3.9, si presenta la deformazione  $G$  che è solamente dovuta all'orientamento delle fibre di rinforzo. Si può quindi ribadire come esiste uno stretto legame fra l'orientamento delle fibre di rinforzo rispetto alla deformazione della lamina.

Questo risultato non si limita al solo punto considerato ma si ripetono considerazioni analoghe anche per altri punti mantenendo le fibre di rinforzo inclinate di  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Le immagini 3.12a, 3.12b, 3.13a e 3.13b rappresentano le deformazioni  $F$  e  $G$  nel punto  $\chi = 0.5$  e  $\tau = 5$ .

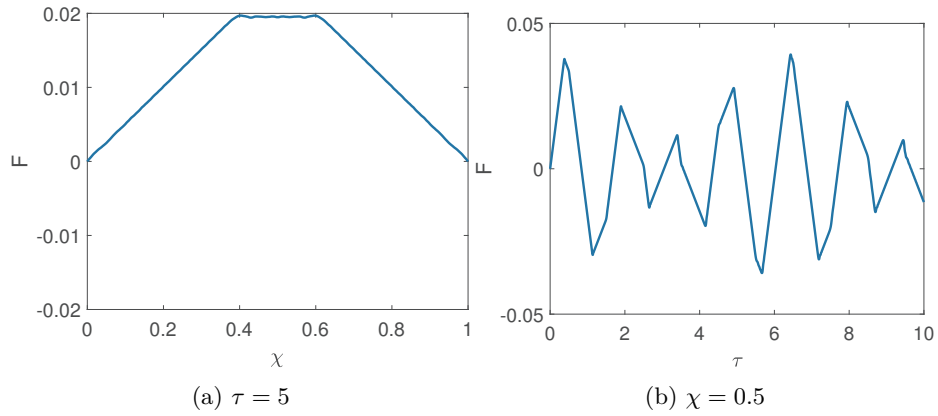


Figura 3.12: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

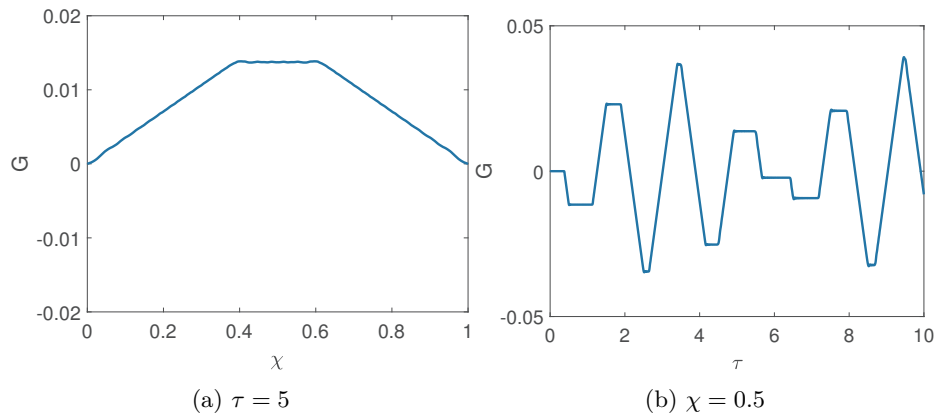


Figura 3.13: Deformazione  $G$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

Le precedenti immagini vogliono quindi dimostrare l'effetto che hanno le fibre di rinforzo, opportunamente orientate, sulla deformazione di materiali iperelastici. L'effetto che hanno le fibre di rinforzo è legato alla manifestazione della deformazione  $G$  nonostante non sia imposta nessuna deformazione iniziale in tale direzione.

Come considerazione aggiuntiva si può notare, confrontando la Figura 3.12a e la Figura 3.13a come la deformazione  $F$  assuma dei valori più grandi rispetto alla deformazione  $G$ . Questo risultato è frutto del fatto che per quanto riguarda  $F$  si ha sia una deformazione iniziale sia una deformazione legata alle fibre di



rinforzo.

Fino ad ora gli angoli  $\phi$  e  $\theta$  hanno assunto il valore  $\frac{\pi}{4}$  tuttavia è interessante osservare la deformazione del materiale anche quando si considerano valori differenti degli angoli.

Si osserva ora il caso in cui  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

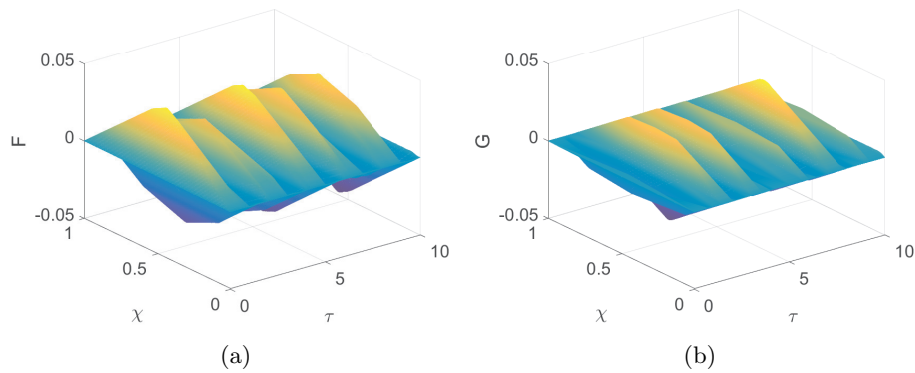


Figura 3.14: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Come primo punto d'analisi si scelgono nuovamente le sezioni perpendicolari all'asse  $\chi$  passante per  $\chi = 0.2$  e perpendicolare all'asse  $\tau$  passante per  $\tau = 2$ .

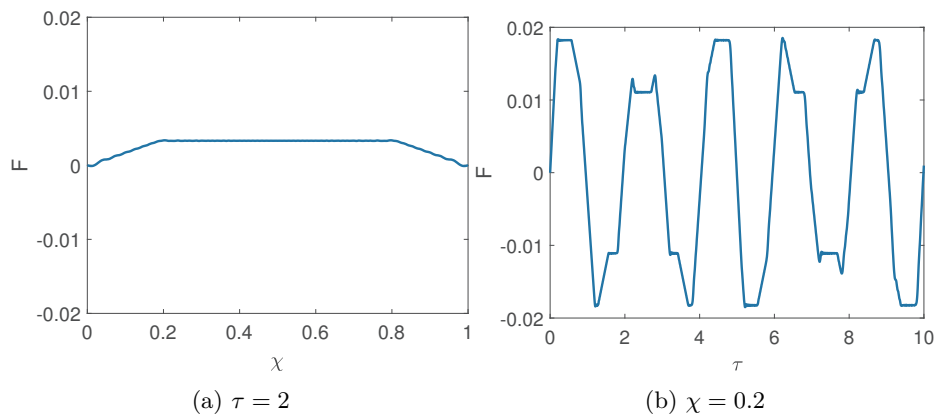


Figura 3.15: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

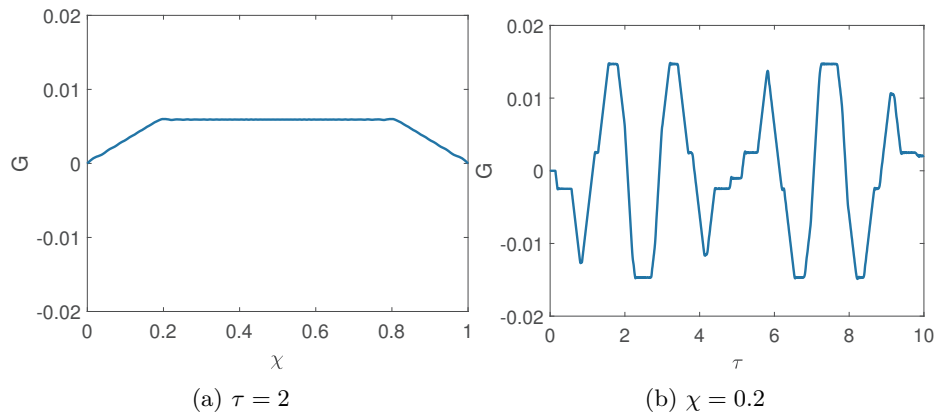


Figura 3.16: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Si nota che si manifesta nuovamente la deformazione  $G$ , questa volta con una entità minore rispetto al caso precedente. Possiamo quindi dire che la presenza di fibre di rinforzo non solo porta ad una deformazione del materiale ma anche l'entità della deformazione è correlata all'orientamento delle fibre di rinforzo. Come secondo punto si considera per analogia  $\chi = 0.5$  e  $\tau = 5$ .

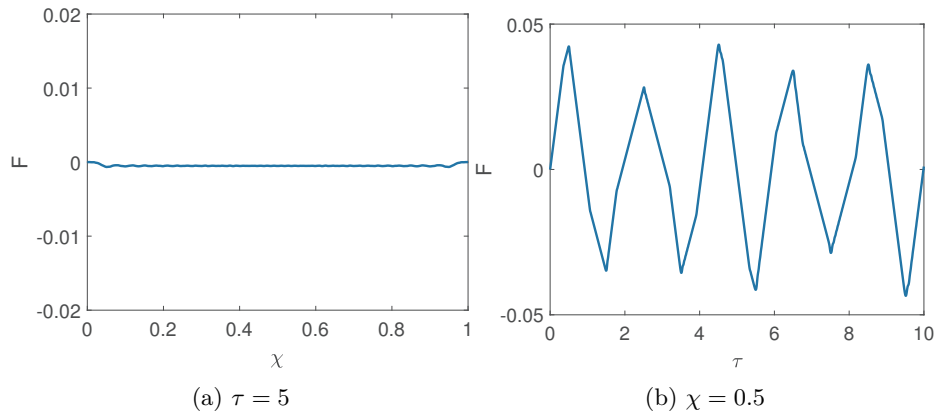


Figura 3.17: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

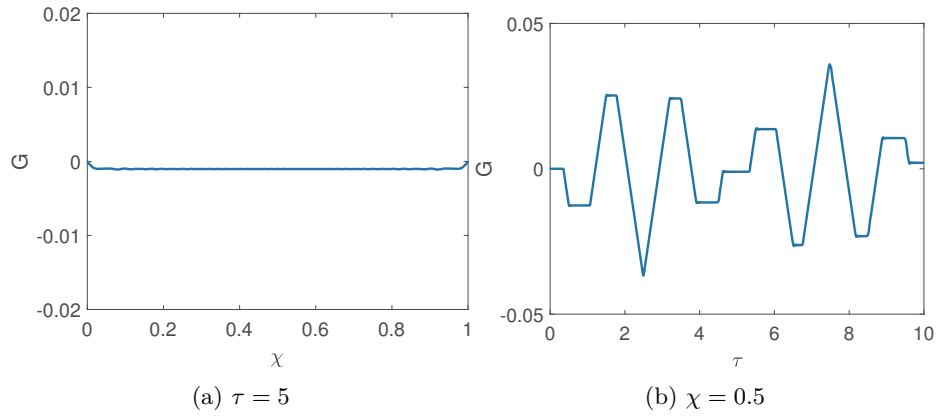


Figura 3.18: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$

Altri casi di studio sono quelli in cui  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$ ,  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ed infine  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

Per questi successivi casi si presentano di seguito i grafici delle deformazioni  $F$  e  $G$  e si lasciano in appendice B tutte le immagini delle sezioni passanti per i punti prescelti.

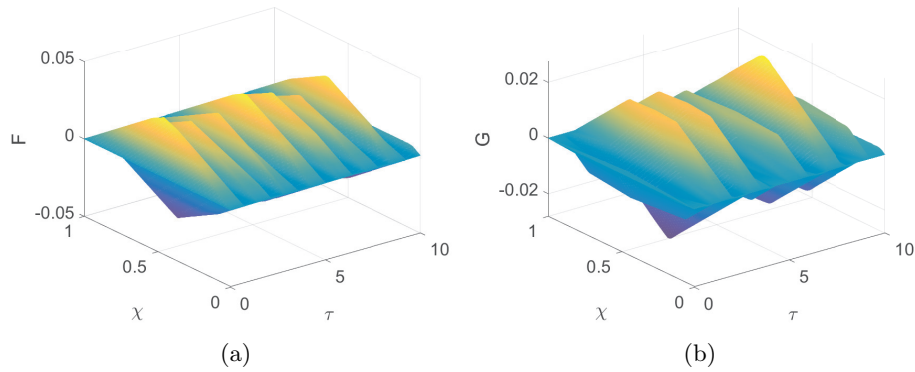


Figura 3.19: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{8}$

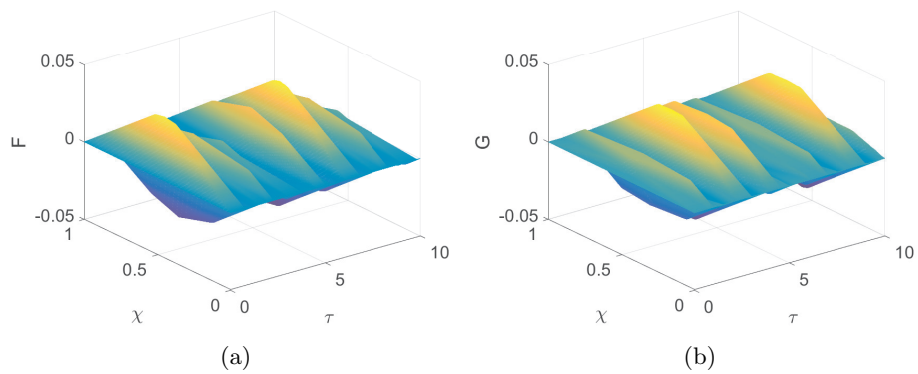


Figura 3.20: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$

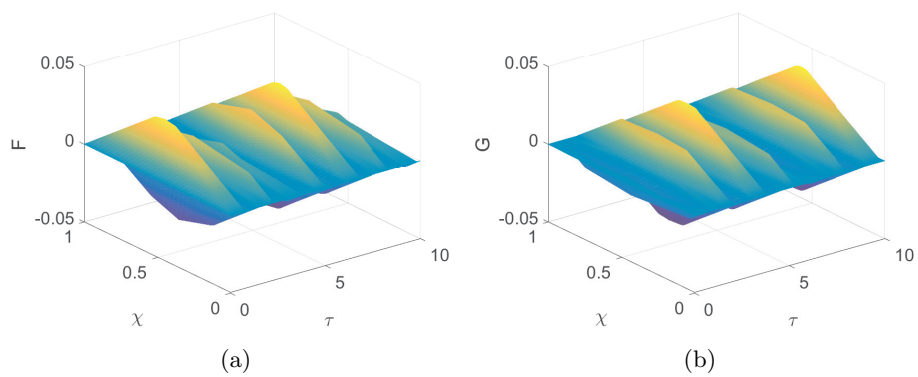


Figura 3.21: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

### 3.3 Caso $M_2 \neq 0; G \neq 0$

Questa sezione è dedicata all'ultimo caso di studio: caso in cui  $\phi \neq 0, \theta \neq 0$  ed è imposta anche una deformazione iniziale  $G$ . La deformazione iniziale  $G$ , per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali (3.1), viene posta identica alla deformazione  $F$ . Per avere un riscontro diretto rispetto ai casi precedentemente analizzati si pongono  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Di seguito i grafici di questo caso.

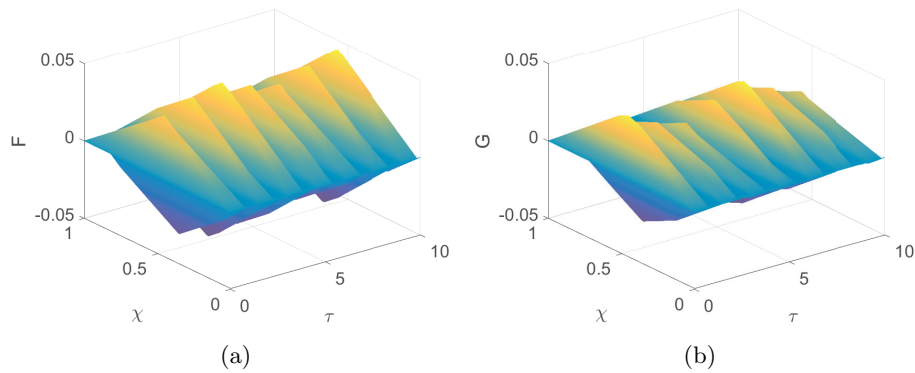


Figura 3.22: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b)

Questa volta la presenza della deformazione  $G$  è frutto di due contributi: la deformazione iniziale imposta e le fibre di rinforzo con componenti dirette anche lungo gli assi  $X$  e  $Y$ . Rispetto al secondo caso le deformazioni di Figura 3.22 hanno delle entità maggiori poichè c'è la sovrapposizione dei due effetti sopracitati. In analogia a quanto fatto nei casi precedenti si osservano in dettaglio alcune sezioni prescelte.

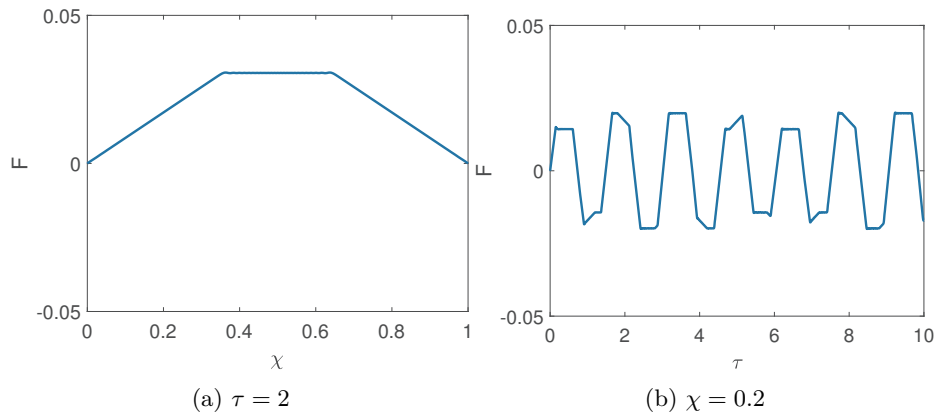


Figura 3.23: Deformazione F in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

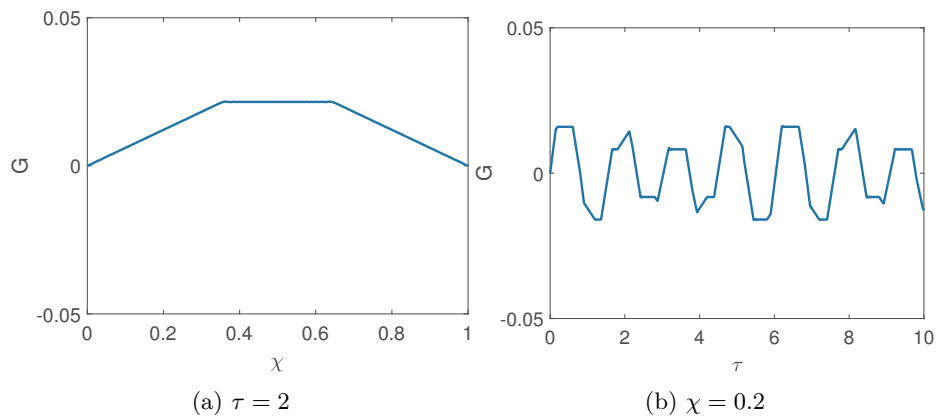


Figura 3.24: Deformazione G in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Questi dettagli della deformazione delle sezioni perpendicolari a  $\chi$  e  $\tau$  passanti per i punti  $\chi = 0.2$  e  $\tau = 2$  confermano quanto detto.

La scelta di  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  è del tutto arbitraria e si possono osservare i grafici tridimensionali anche con valori differenti di angoli.

Come primo esempio si scelgono nuovamente  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

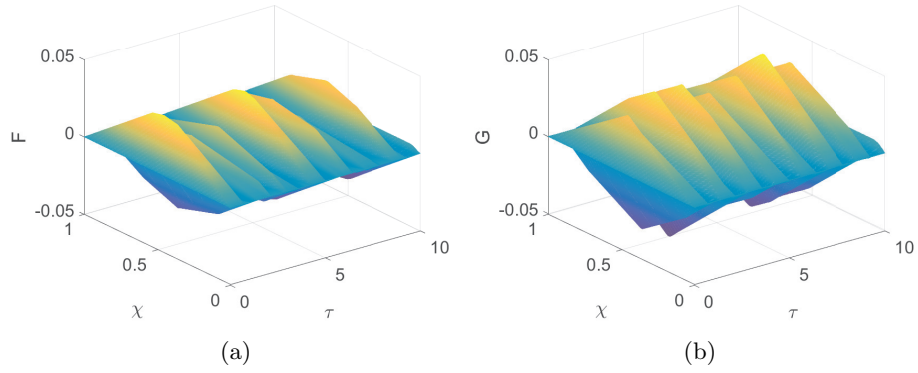


Figura 3.25: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b)

Si nota come in questo particolare esempio la deformazione  $G$  è più accentuata rispetto alla deformazione  $F$ . Lo si può osservare più in dettaglio considerando nuovamente la sezione passante per il punto  $\chi = 0.2$  e  $\tau = 2$

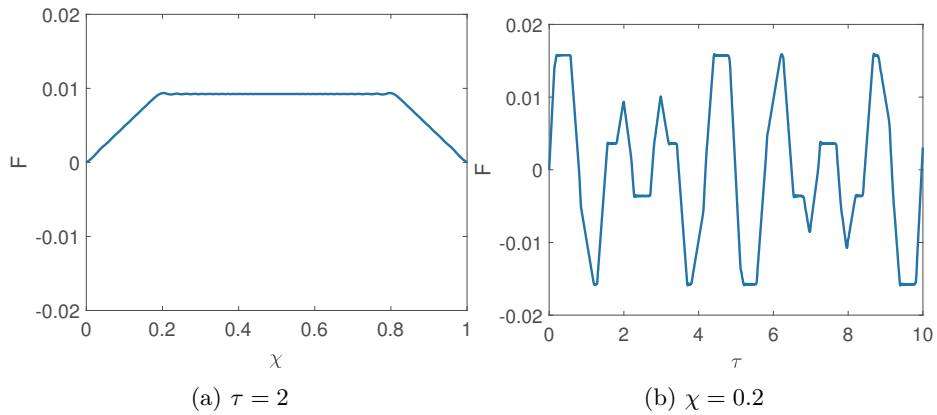


Figura 3.26: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

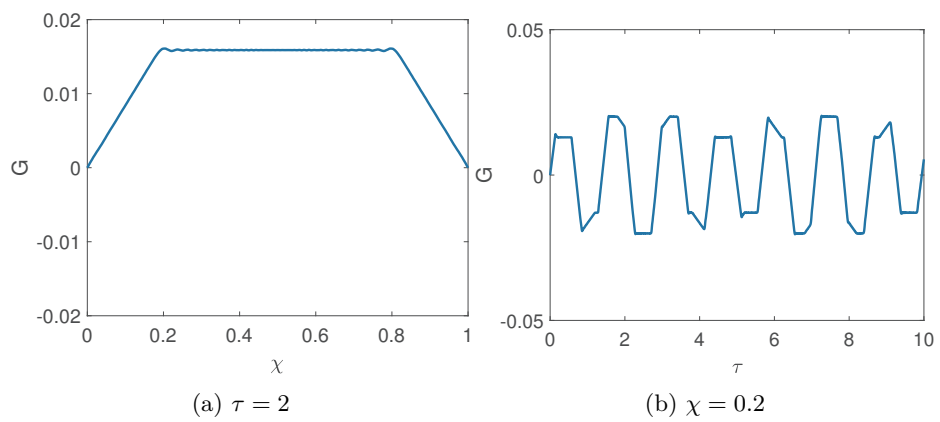


Figura 3.27: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$



Come visto anche nel secondo caso di studio si presentano ora i grafici dei casi in cui  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$ ;  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ed infine  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

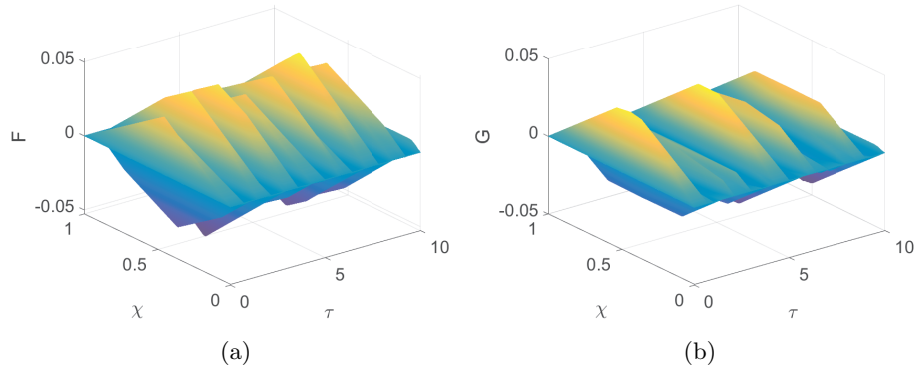


Figura 3.28: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{8}$

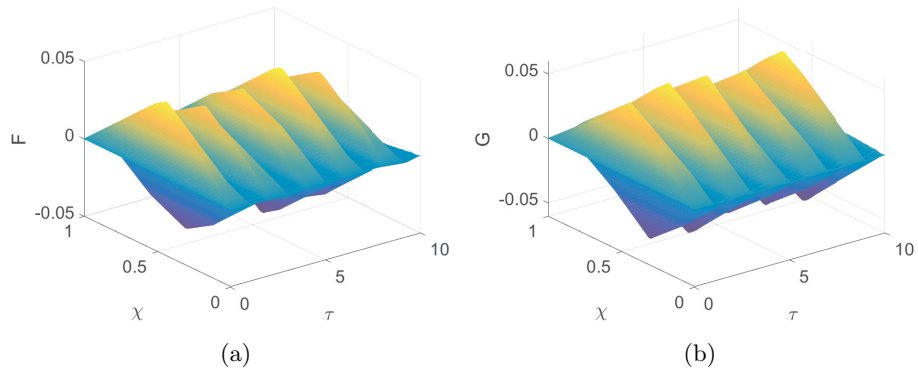


Figura 3.29: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$

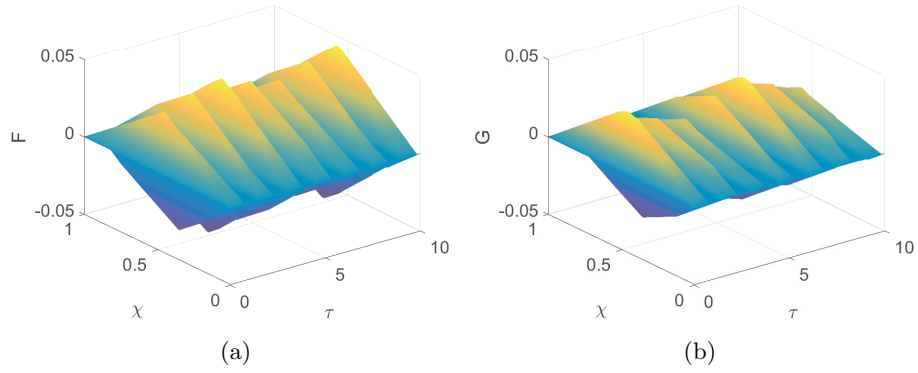


Figura 3.30: Grafici delle deformazioni  $F$ , (a), e  $G$ , (b) con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Si lasciano in Appendice C tutte le immagini bidimensionali delle altre sezioni di ogni caso studiato.

### 3.4 Altri possibili casi di studio

Per la descrizione dei tre precedenti casi si sono scelte sempre le stesse sezioni: quelle perpendicolari all'asse  $\chi$  passante per il punto  $\chi = 0.2$  e  $\chi = 0.5$ ; quelle perpendicolari all'asse  $\tau$  passante per  $\tau = 2$  e  $\tau = 5$ . Nelle appendici A, B e C si trovano anche altre sezioni passanti per altri punti ma la scelta di tutte queste sezioni è del tutto arbitraria. Si sarebbero potute considerare sezioni passanti per punti dello spazio diversi ed istanti di tempo diversi e tutte le precedenti considerazioni sarebbero state ancora valide.

Vale lo stesso ragionamento per quanto riguarda la scelta degli angoli  $\phi$  e  $\theta$ : come casi studio si sono scelti inizialmente  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e successivamente degli angoli simmetrici:  $\phi = \frac{\pi}{8}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  così come  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{8}$  e  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  ma nulla vietava una scelta diversa degli angoli. Infine per il presente studio è stato posto il rapporto  $\mu_1^* = \frac{\mu_1}{\mu_0} = 2$  ma poteva essere variato anche tale rapporto per ulteriori casi di studio, per esempio  $\mu_1^* = 4$ .

In conclusione in questo studio si sono scelti determinate sezioni da visualizzare ed angoli per dimostrare l'effetto delle fibre di rinforzo sulla deformazione di una lamina iperelastica ma possono essere fatti analoghi studi e considerazioni su diversi punti e angoli.



# Conclusioni

Dato l'obiettivo di studiare l'effetto che hanno le fibre di rinforzo sulla deformazione di una lamina iperelastica si può concludere che esiste uno stretto legame tra l'orientamento delle fibre e la deformazione subita dalla lamina.

In modo particolare si sono analizzate le deformazioni del materiale in tre casi. I tre casi di studio si sono differenziati per il diverso orientamento delle fibre di rinforzo rispetto alla terna di riferimento scelta. Inoltre si è impostata una deformazione iniziale lungo l'asse  $X$  della lamina mentre la deformazione iniziale lungo  $Y$  è stata posta nulla nei primi due casi ed è stata posta pari alla deformazione lungo  $X$  nel terzo caso studio. Nel primo caso è stato studiato il comportamento alla deformazione con le fibre di rinforzo dirette solamente lungo l'asse  $Z$  del corpo. Il secondo caso è stato caratterizzato da fibre di rinforzo inclinate rispetto agli assi  $X$  e  $Y$  di un angolo pari a  $\phi$  e  $\theta$ . Nell'ultimo caso è stato analizzato il comportamento della lamina iperelastica nelle stesse condizioni del secondo caso ma è stata imposta anche una deformazione iniziale lungo  $Y$ .

Attraverso l'ausilio del software Matlab si sono risolte numericamente le due equazioni differenziali alle derivate parziali delle onde di deformazione ottenute a partire da un moto del corpo che lo fa passare da una condizione indeformata ad una configurazione deformata. Come metodo risolutivo numerico si è scelto di risolvere l'equazioni con il metodo alle differenze finite sfruttando lo schema leap-frog. Dalla risoluzione delle due equazioni differenziali si sono ottenute tutte le immagini utili per visualizzare direttamente l'effetto delle fibre di rinforzo sulla

deformazione della lamina iperelastica.

Le rappresentazioni grafiche che sono state ottenute nel secondo caso di studio dimostrano come la presenza di fibre rinforzanti sul materiale generano una deformazione lungo una direzione del materiale stesso anche in assenza di una deformazione iniziale in tale direzione. Il grafico 3.31 mette in relazione la deformazione subita dalla lamina in direzione  $Y$ , asse verticale, con lo spazio  $\chi$  e il tempo  $\tau$ . La deformazione lungo l'asse  $Y$  è chiamata deformazione  $G$ .

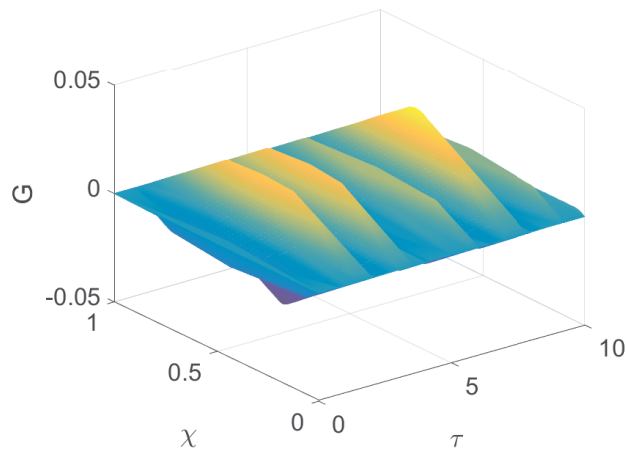


Figura 3.31: Deformazione lungo  $Y$  con fibre inclinate di  $\frac{\pi}{4}$  rispetto agli assi  $X$  e  $Y$

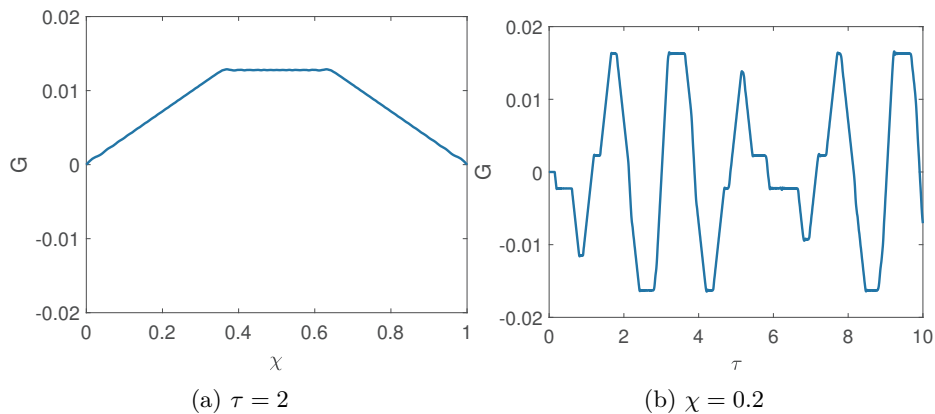


Figura 3.32: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$

Come dimostrato dalla figura 3.31 il materiale subisce una deformazione lungo  $Y$  nello spazio e nel tempo. Le figure 3.32a e 3.32b mostrano chiaramente l'andamento della deformazione  $G$ , deformazione lungo l'asse  $Y$  del corpo, rispetto allo spazio e al tempo. In conclusione si può affermare che esiste uno stretto legame tra l'inclinazione delle fibre di rinforzo e la deformazione del materiale iperelastico: in presenza di fibre, le cui componenti sono dirette lungo  $X$  e  $Y$ , nel materiale si genera una deformazione anche lungo una direzione in cui la deformazione iniziale è nulla.





# Appendice A: caso

$$M_2 = 0; G = 0$$

Per non rendere l'elaborato troppo pesante in questa sezione sono presenti tutte le immagini ottenute per dimostrare il primo caso di studio analizzato. Le immagini che seguono rappresentano le sezioni perpendicolari all'asse  $\chi$  e all'asse  $\tau$  passanti per determinati punti prescelti ed indicati in figura. I grafici presenti in questa appendice dimostrano come in assenza di una deformazione iniziale lungo l'asse  $Y$  e di fibre dirette solamente lungo l'asse  $Z$  non è presente nessuna deformazione lungo l'asse  $Y$ . La deformazione  $F$  è presente a causa della deformazione iniziale imposta.

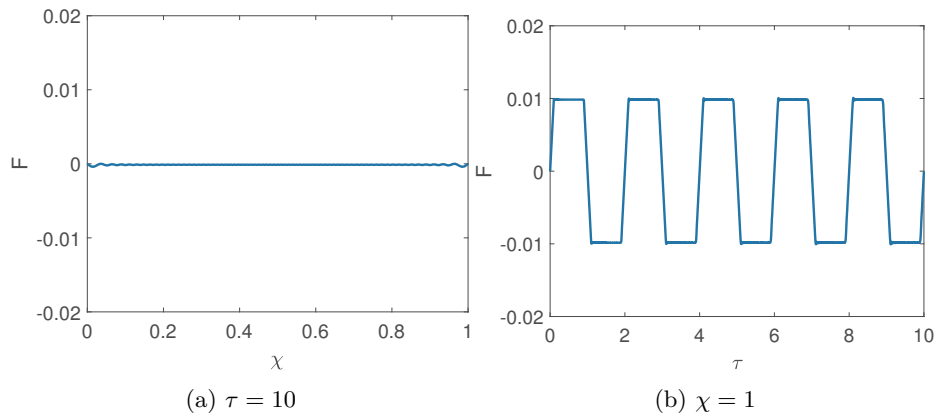


Figura 3.33: Deformazione  $F$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = 0$  e  $\theta = 0$

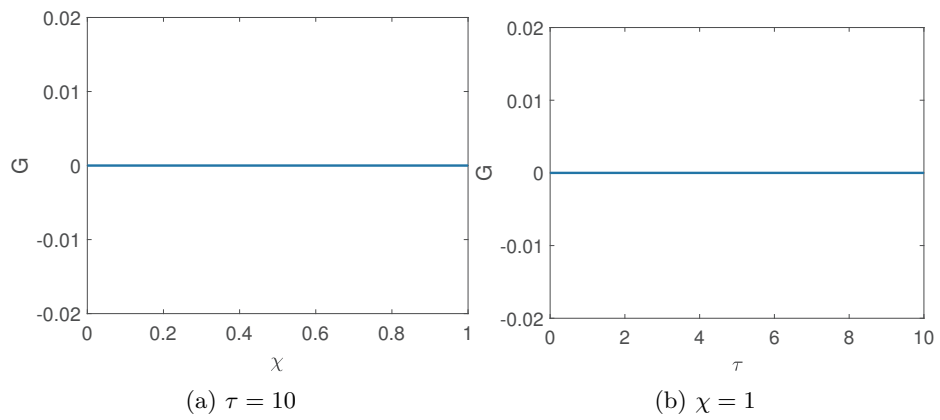


Figura 3.34: Deformazione G in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = 0$  e  $\theta = 0$

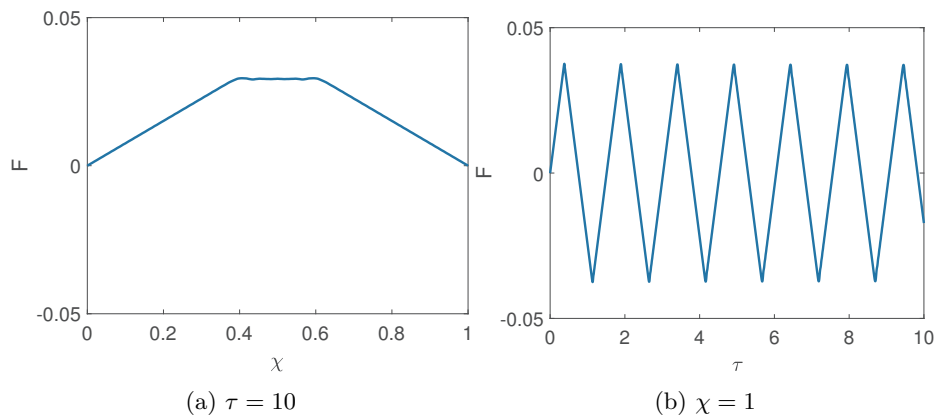


Figura 3.35: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = 0$

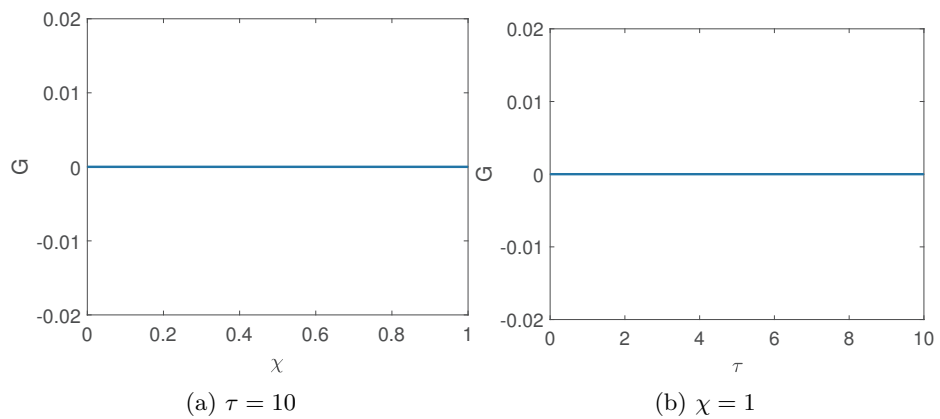


Figura 3.36: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = 0$

## Appendice B: caso

$$M_2 \neq 0; G = 0$$

In questa sezione si presentano tutte le immagini ottenute per dimostrare il secondo caso di studio. Come precedentemente affermato, questo caso è il più interessante da un punto di vista fisico. Nei grafici che seguono si nota la presenza della deformazione  $G$  lungo l'asse  $Y$ . Tale deformazione deriva dalla sola presenza delle fibre di rinforzo inclinate di un angolo  $\phi$  rispetto all'asse  $X$  e di un angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $Y$ . La presenza delle fibre di rinforzo porta una deformazione alla lamina iperelastica lungo una direzione in cui non è stata imposta nessuna deformazione iniziale. Di seguito si trovano tutte i grafici di varie sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti nel caso di:

$$\phi = \frac{\pi}{4} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Vengono ora mostrate tutte le immagini bidimensionali delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

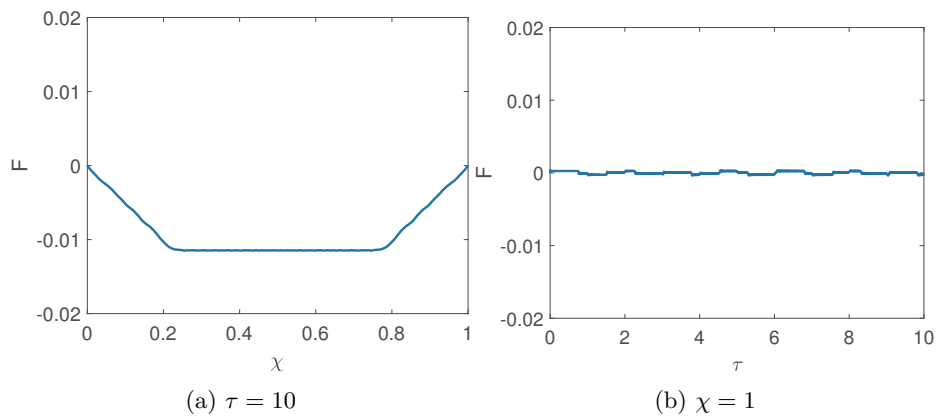


Figura 3.37: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

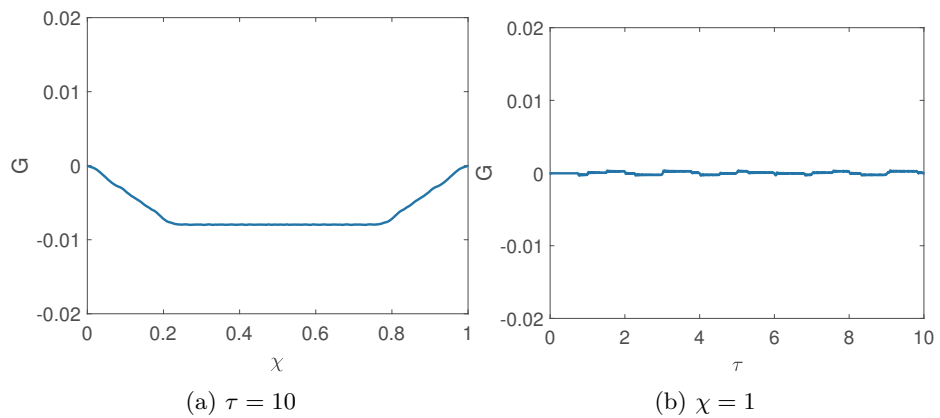


Figura 3.38: Deformazione G in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

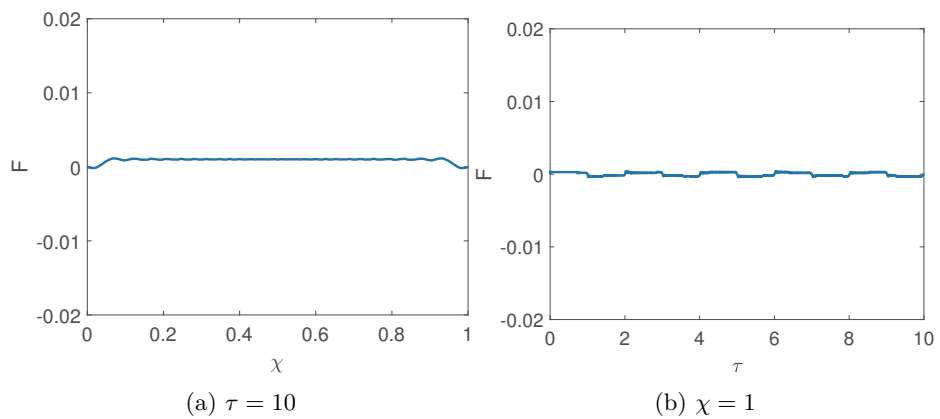


Figura 3.39: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

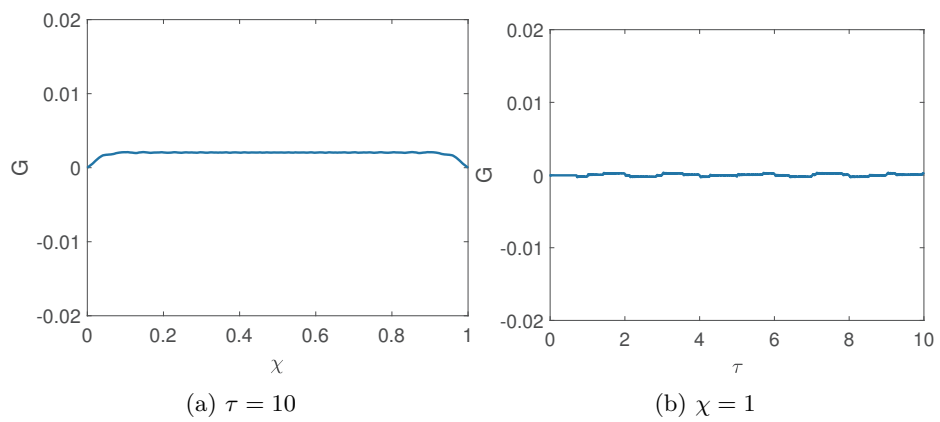


Figura 3.40: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Vengono ora mostrate gli andamenti della deformazione delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$ .

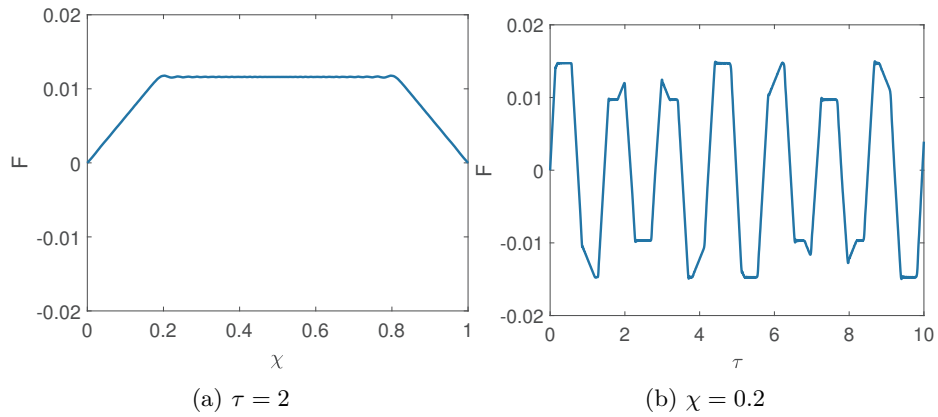


Figura 3.41: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

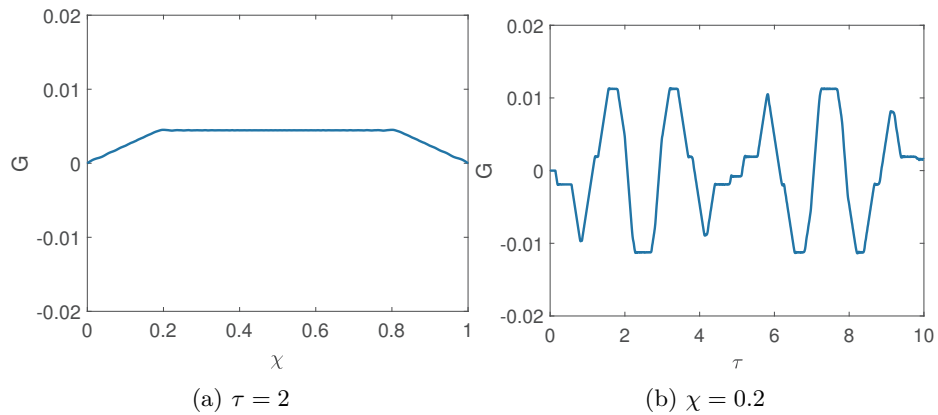


Figura 3.42: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

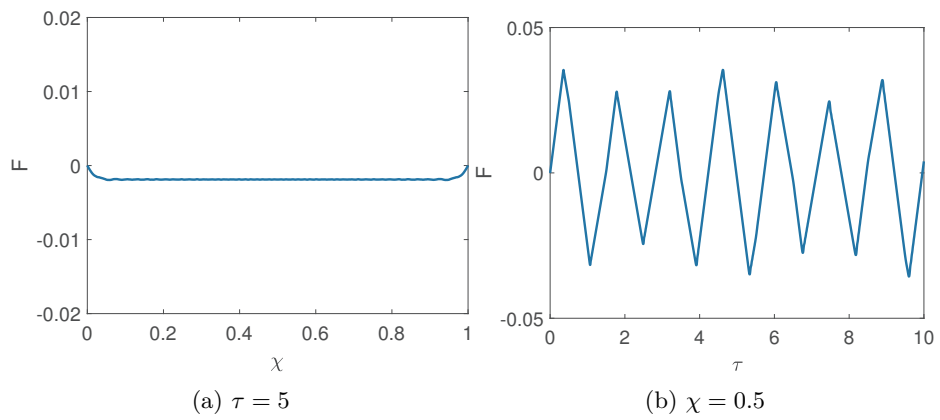


Figura 3.43: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

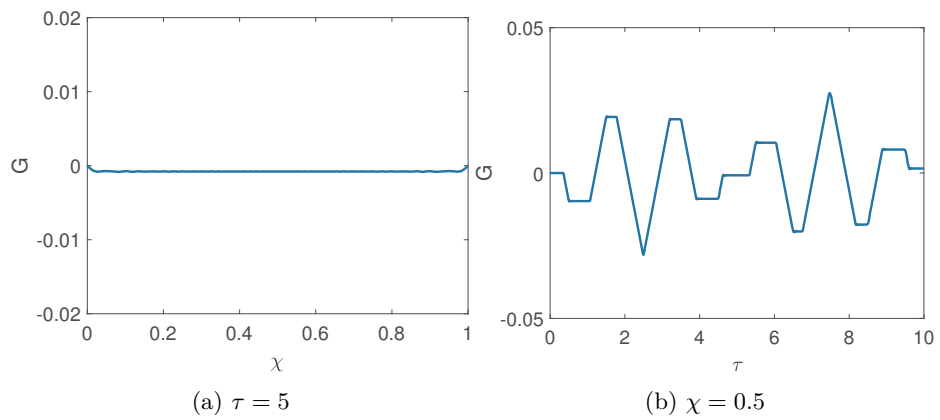


Figura 3.44: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

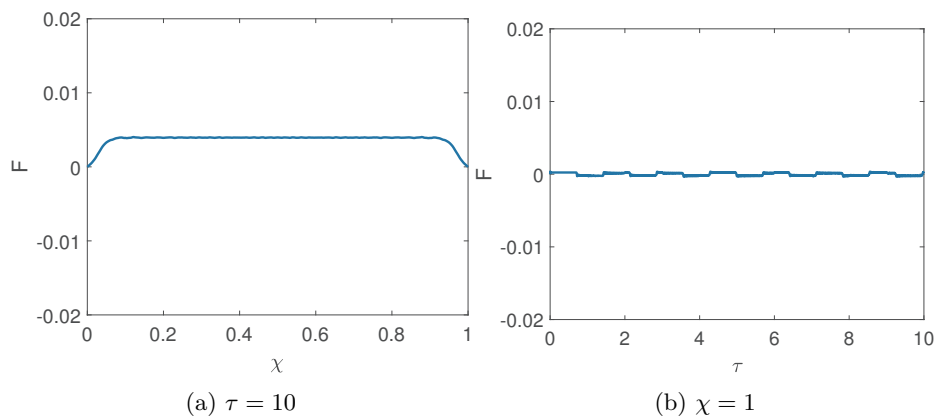


Figura 3.45: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

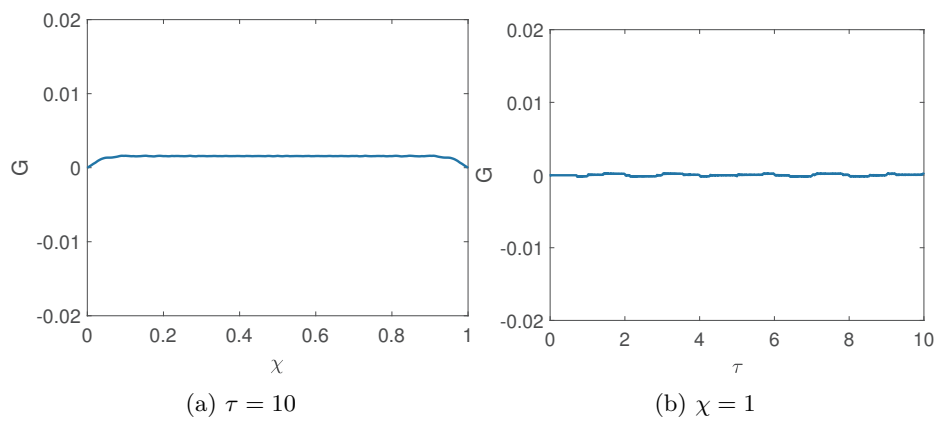


Figura 3.46: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$



Vengono ora mostrate i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

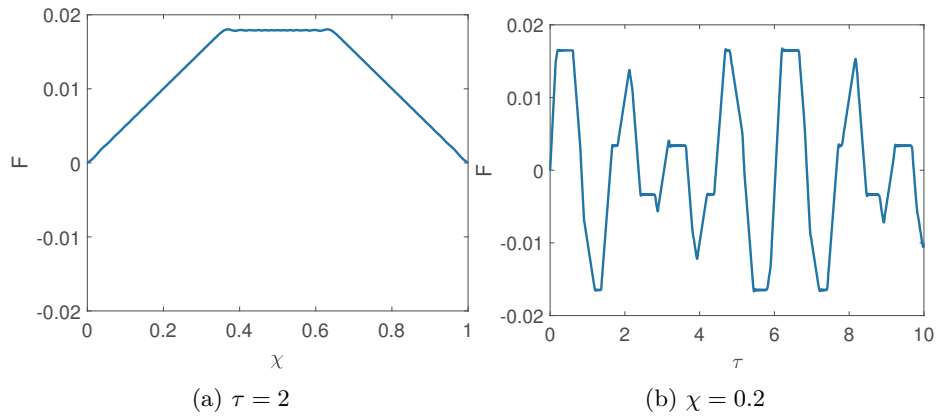


Figura 3.47: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

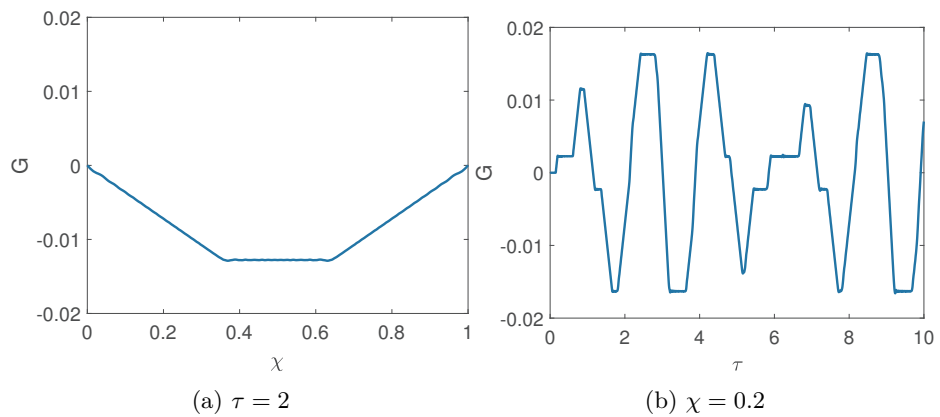


Figura 3.48: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

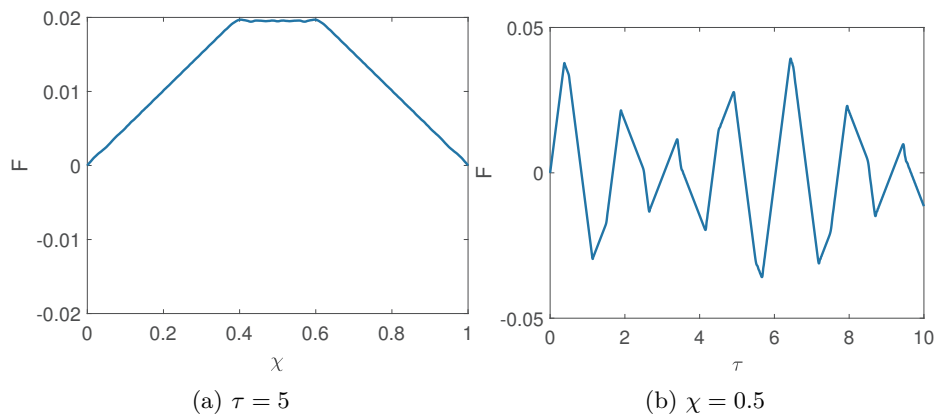


Figura 3.49: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

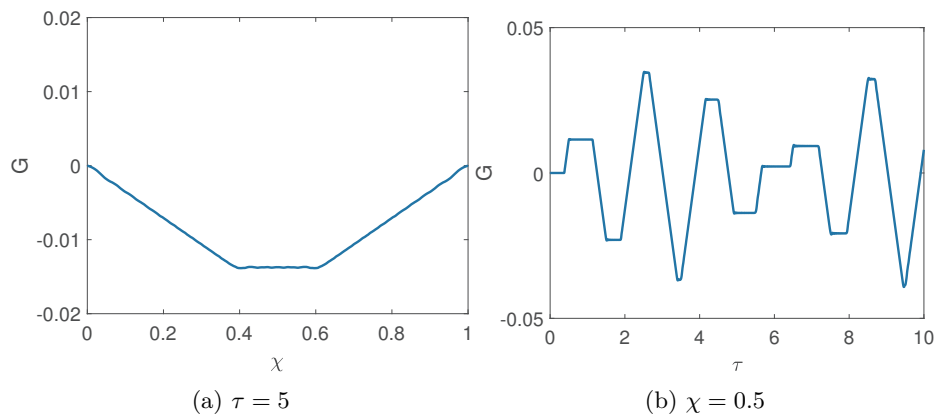


Figura 3.50: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

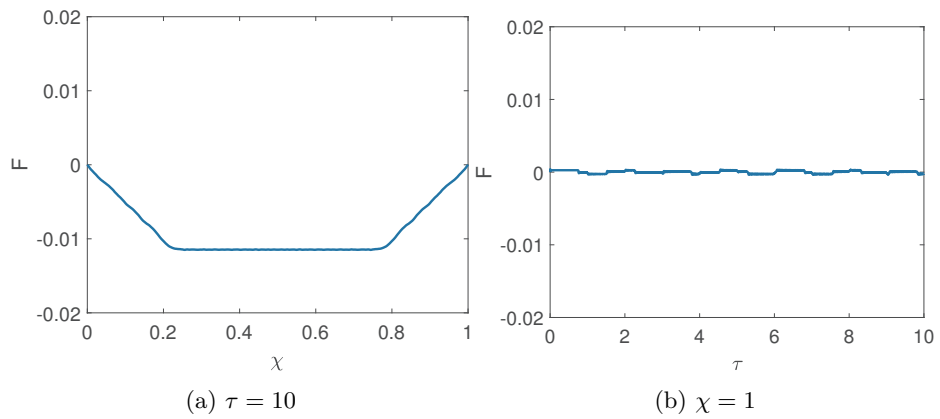


Figura 3.51: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

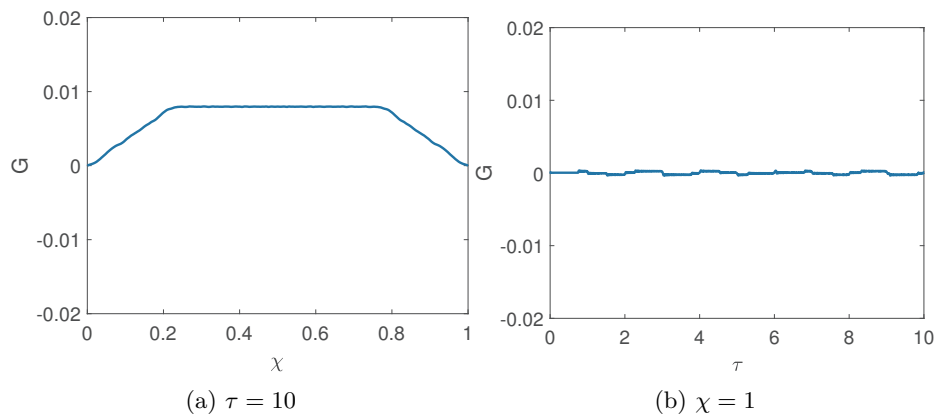


Figura 3.52: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Vengono ora mostrate i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

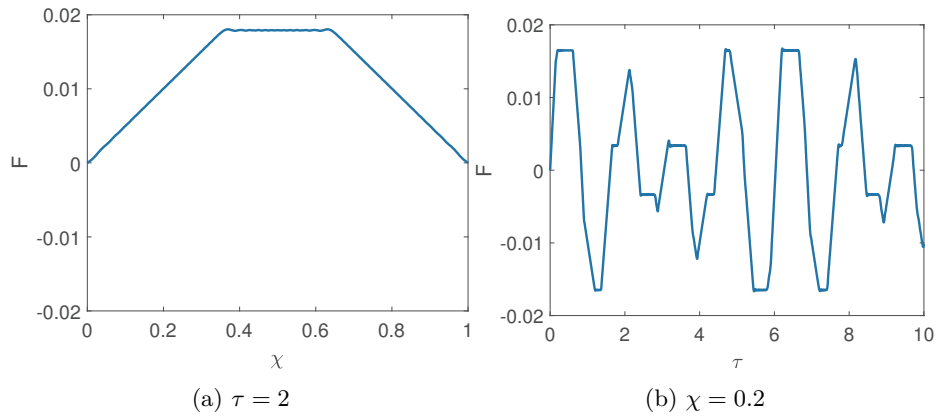


Figura 3.53: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

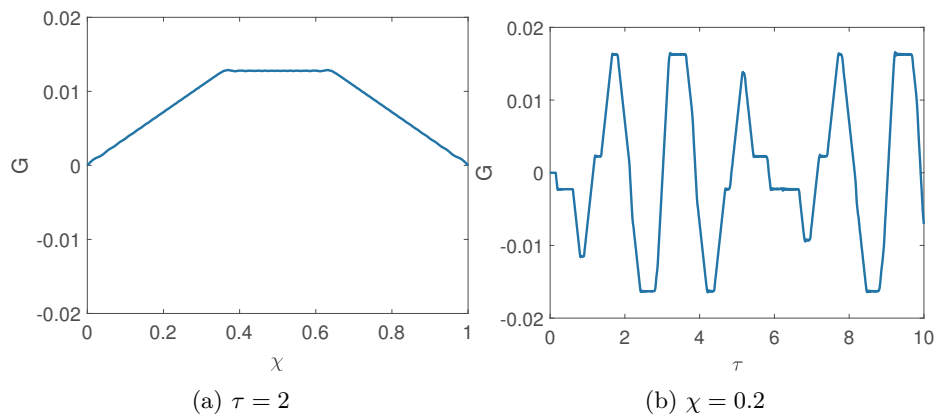


Figura 3.54: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

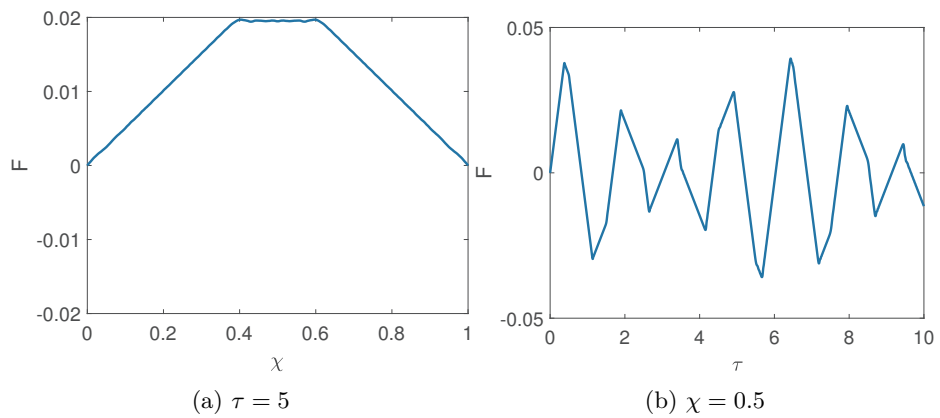


Figura 3.55: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

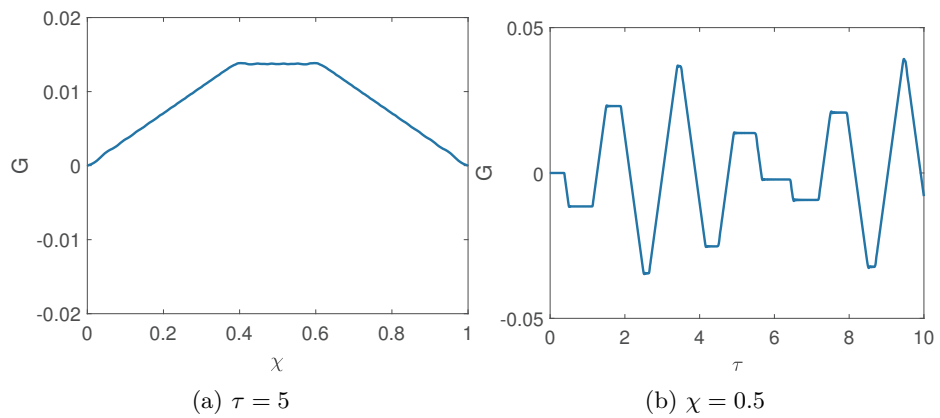


Figura 3.56: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

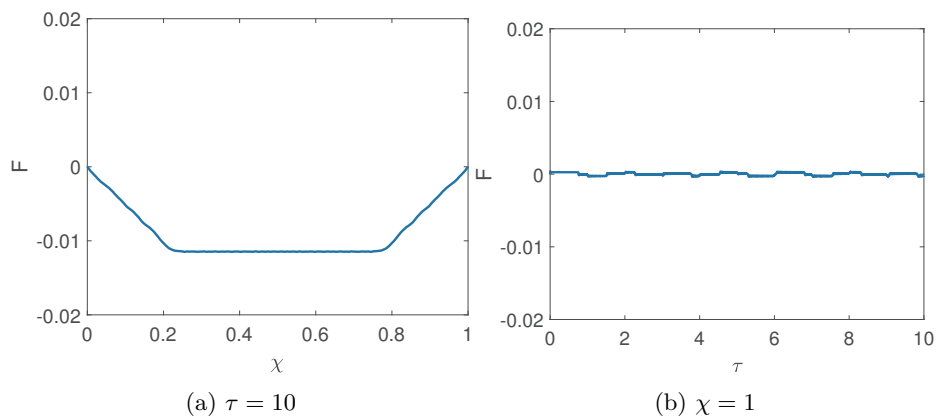


Figura 3.57: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

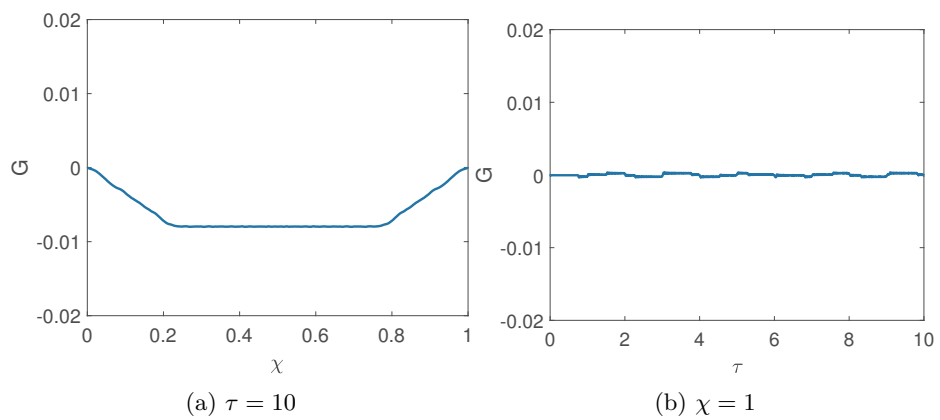


Figura 3.58: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

# Appendice C: caso

$$M_2 \neq 0; G \neq 0$$

In questa sezione vengono infine presentati i grafici del terzo caso di studio. Il terzo caso di studio si differenzia dal precedente perché viene imposta anche una deformazione iniziale lungo la direzione  $Y$ . In questo caso abbiamo quindi le fibre di rinforzo inclinate rispetto agli assi  $X$  e  $Y$  con anche una deformazione iniziale, posta uguale a quella lungo  $X$ . Si mostrano tutti i grafici delle sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

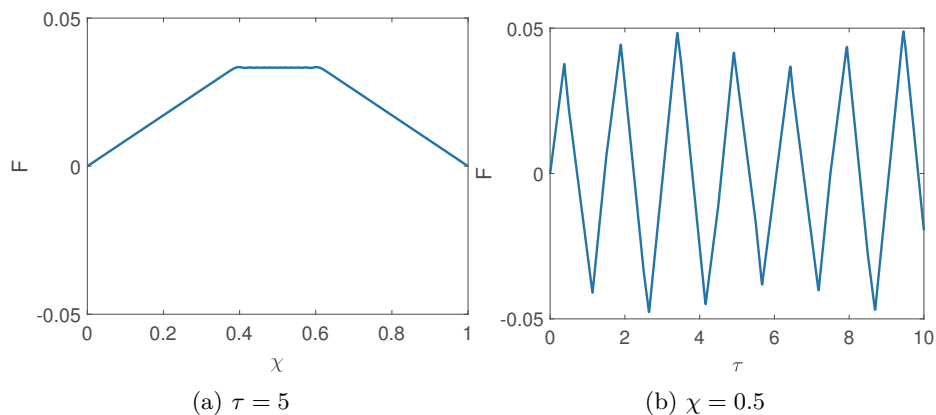


Figura 3.59: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Vengono ora mostrate tutti i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

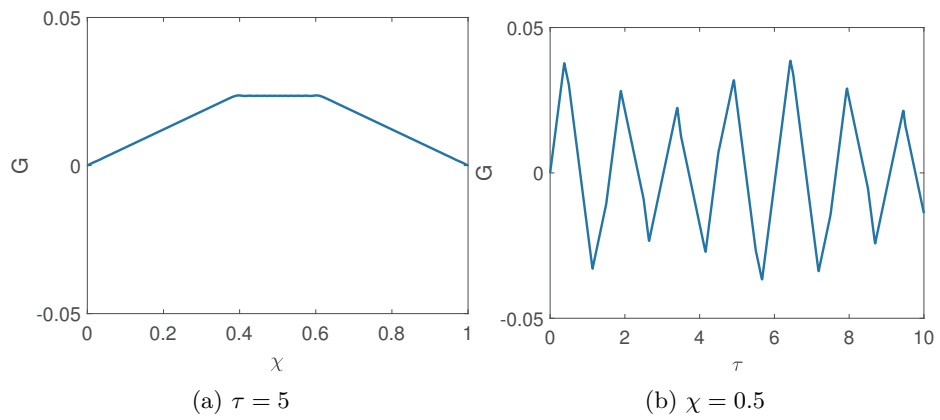


Figura 3.60: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

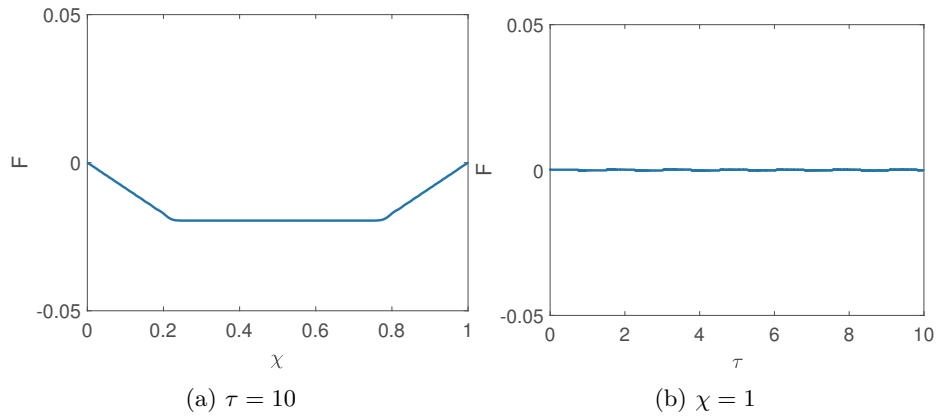


Figura 3.61: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

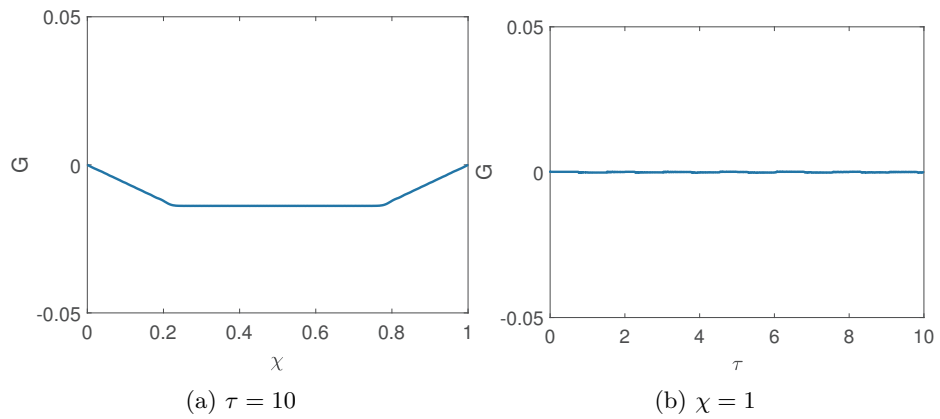


Figura 3.62: Deformazione G in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



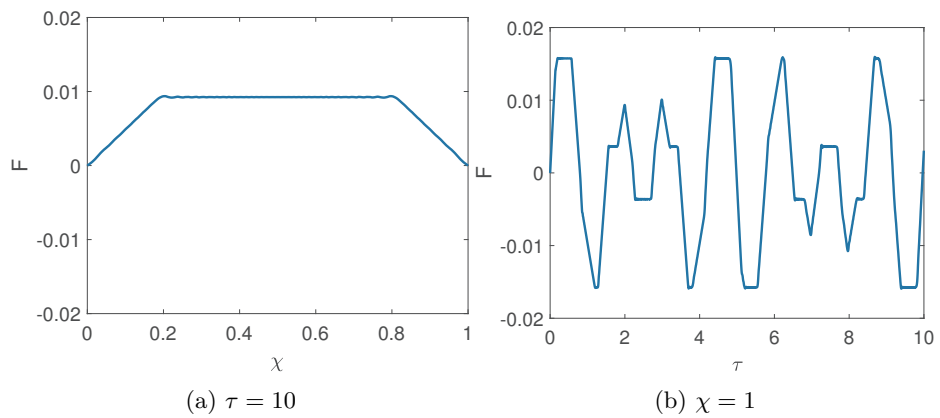


Figura 3.63: Deformazione F in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

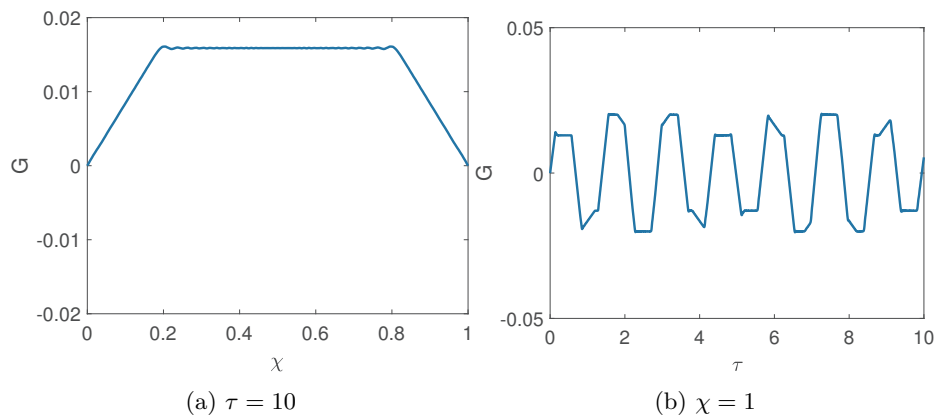


Figura 3.64: Deformazione G in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

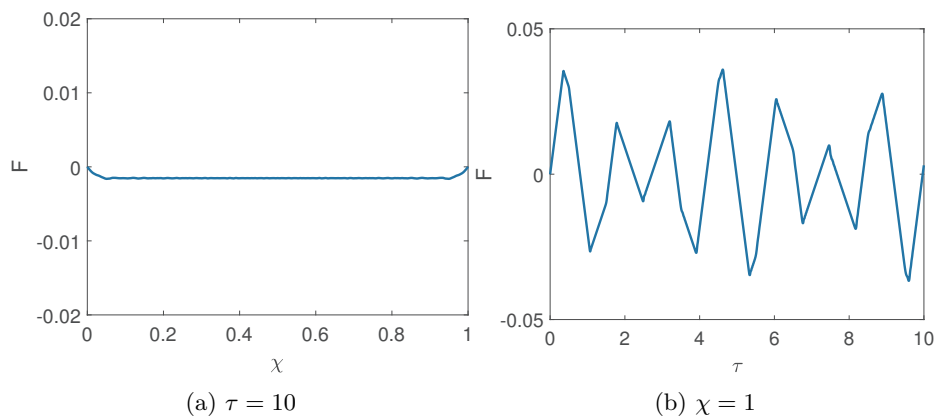


Figura 3.65: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

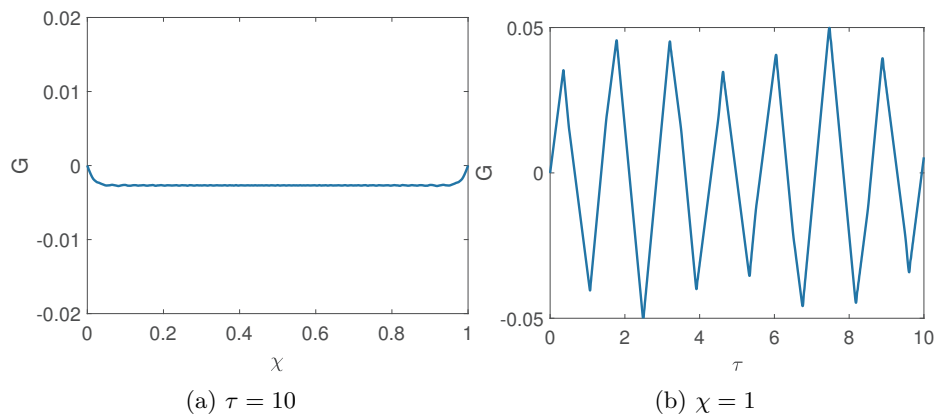


Figura 3.66: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

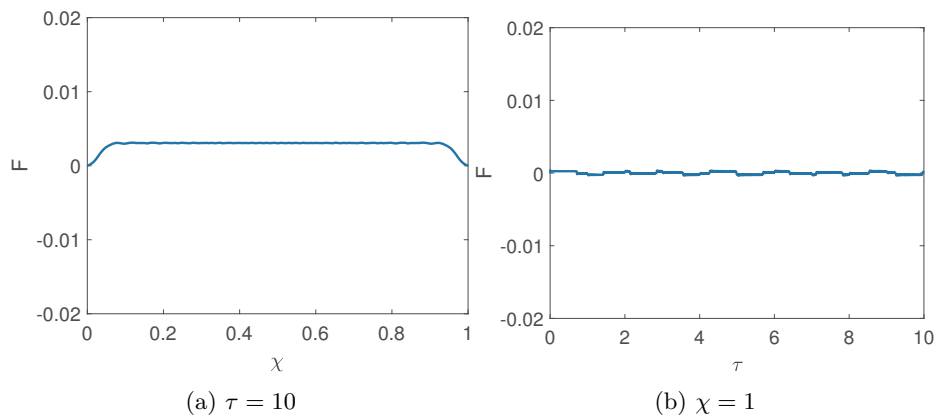


Figura 3.67: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

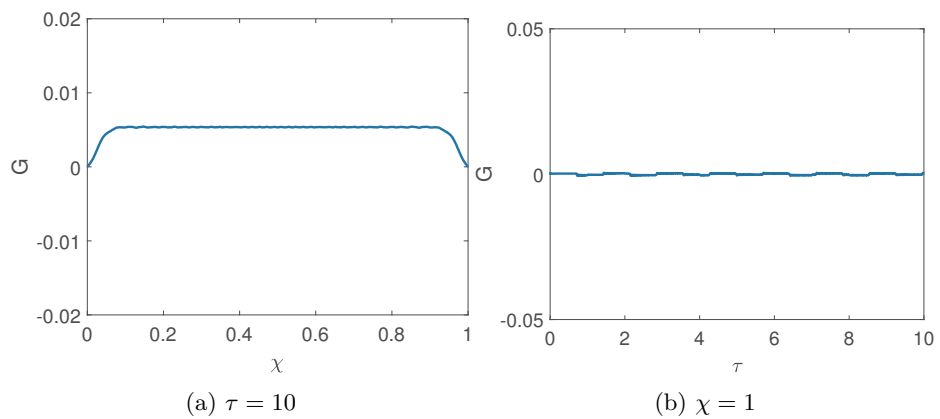


Figura 3.68: Deformazione G in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{8}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Vengono ora mostrate tutti i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$ .

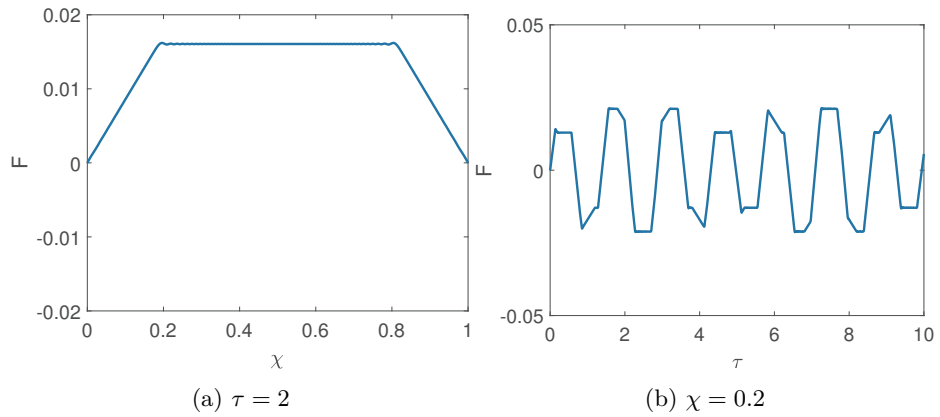


Figura 3.69: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

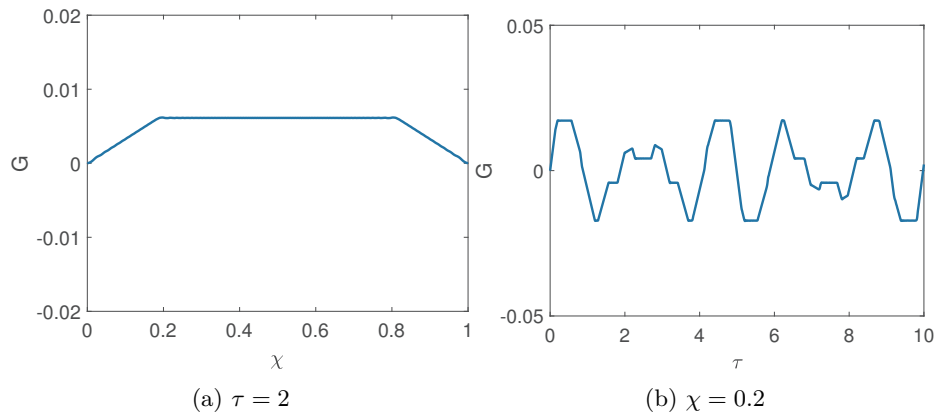


Figura 3.70: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

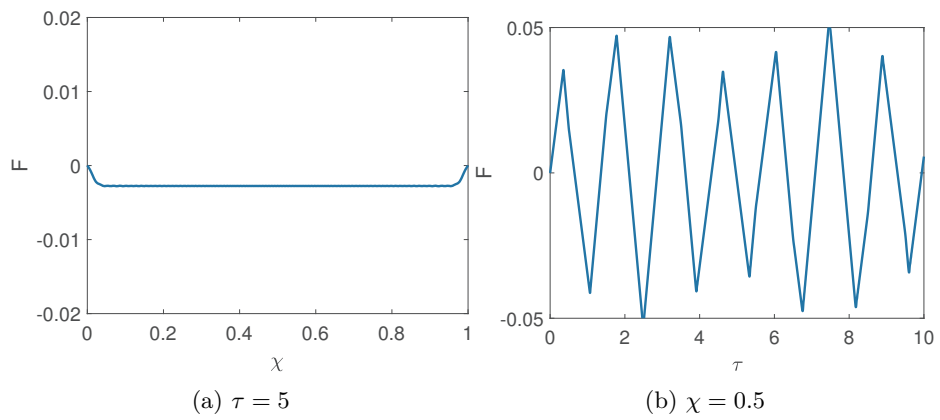


Figura 3.71: Deformazione F in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

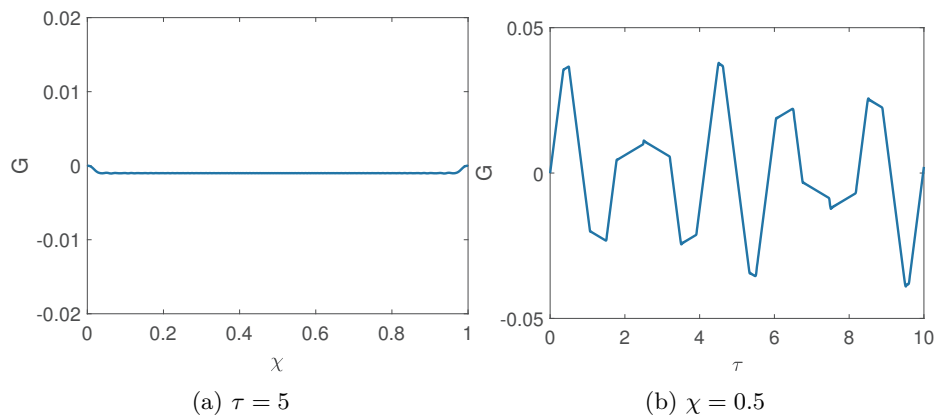


Figura 3.72: Deformazione G in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

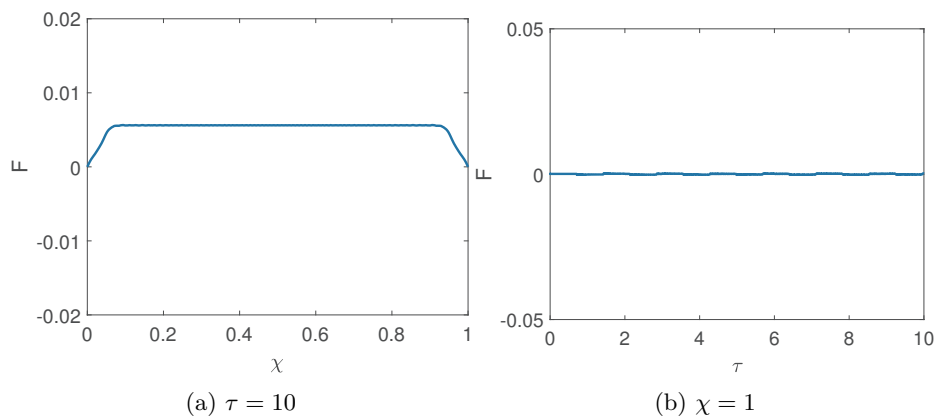


Figura 3.73: Deformazione F in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

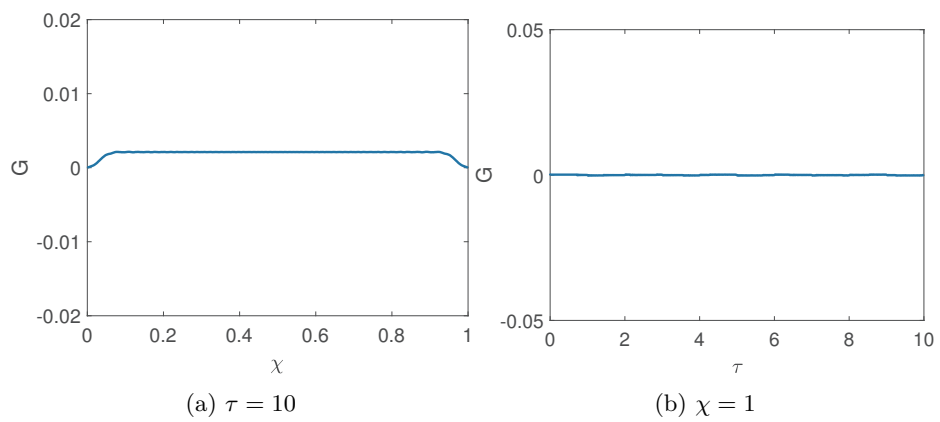


Figura 3.74: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{8}$

Vengono ora mostrate tutti i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

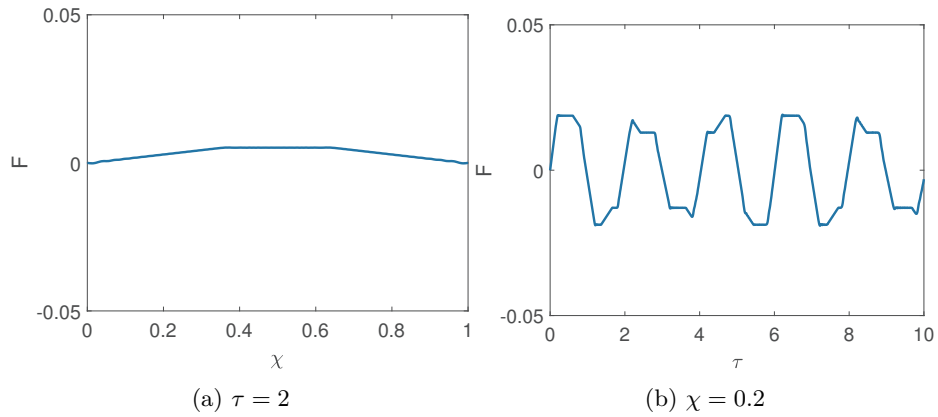


Figura 3.75: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

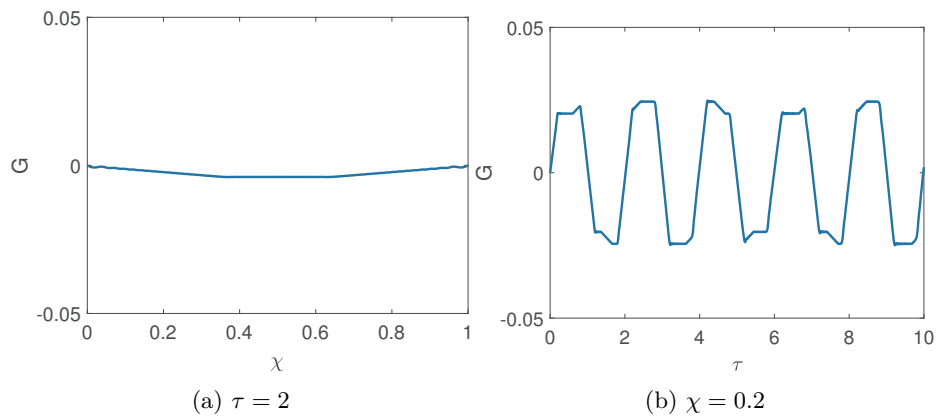


Figura 3.76: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

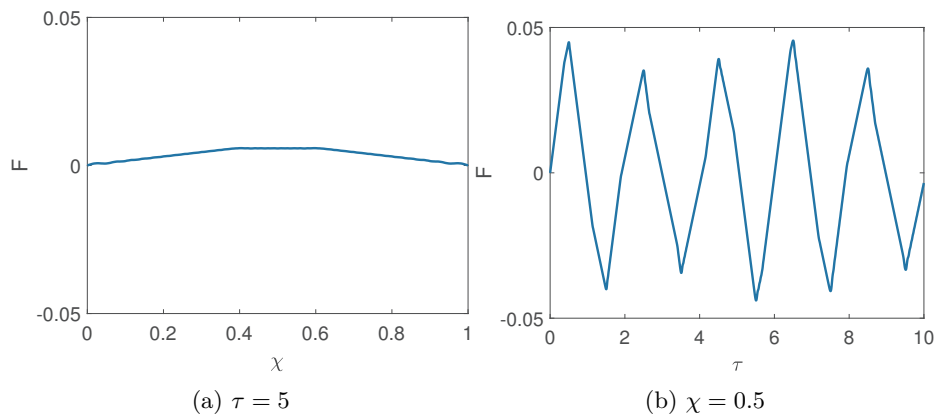


Figura 3.77: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

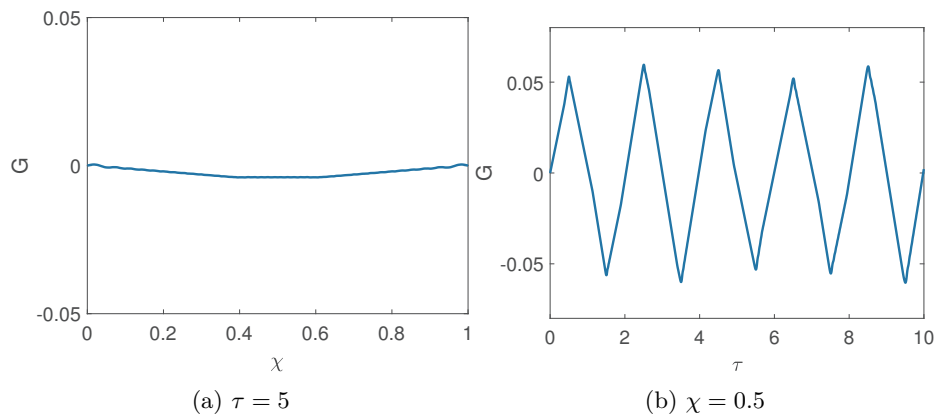


Figura 3.78: Deformazione  $G$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

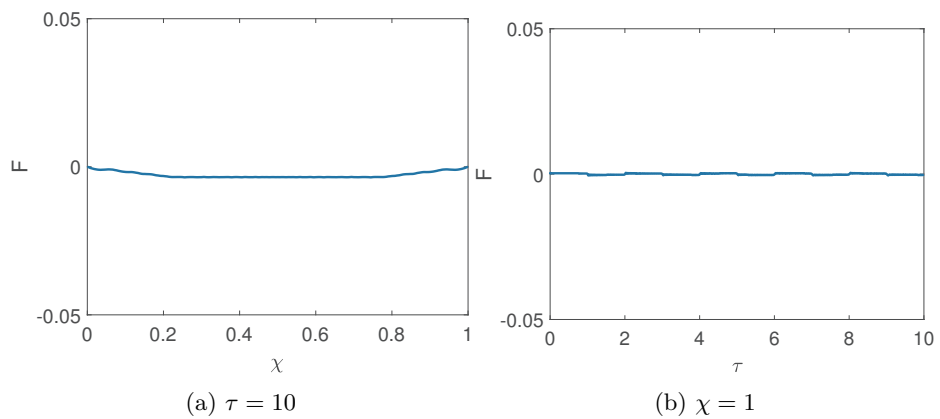


Figura 3.79: Deformazione  $F$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$

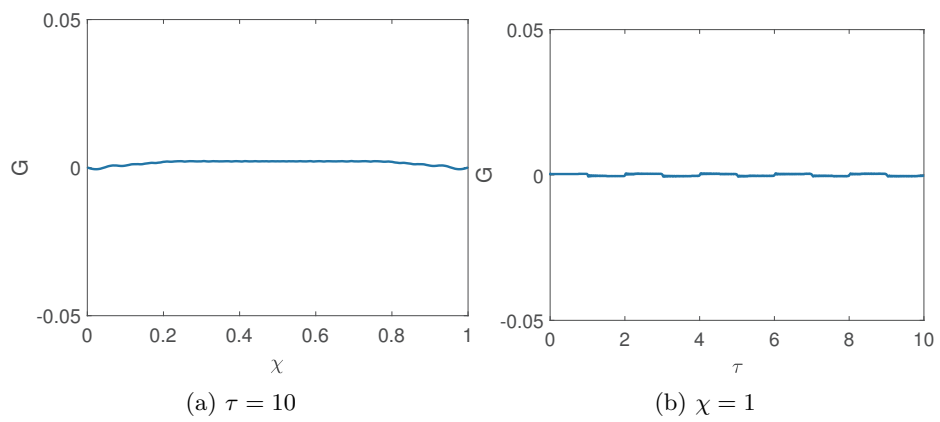


Figura 3.80: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$



Vengono ora mostrate tutti i grafici delle stesse sezioni passanti per i punti dello spazio e del tempo prescelti con:  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

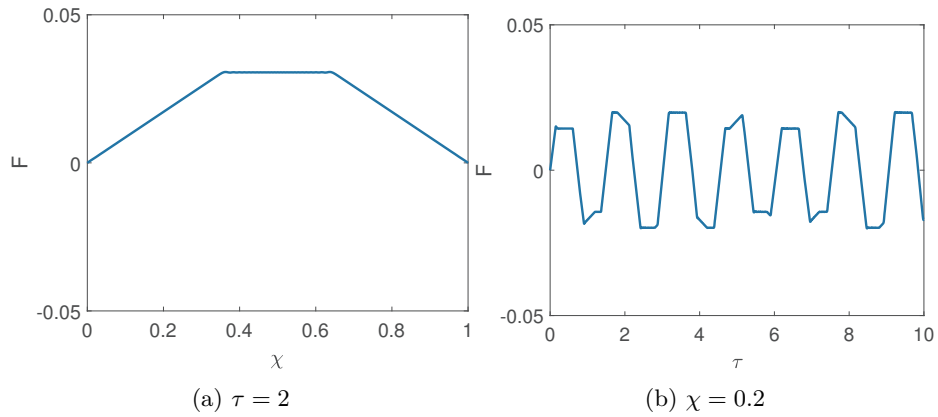


Figura 3.81: Deformazione  $F$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

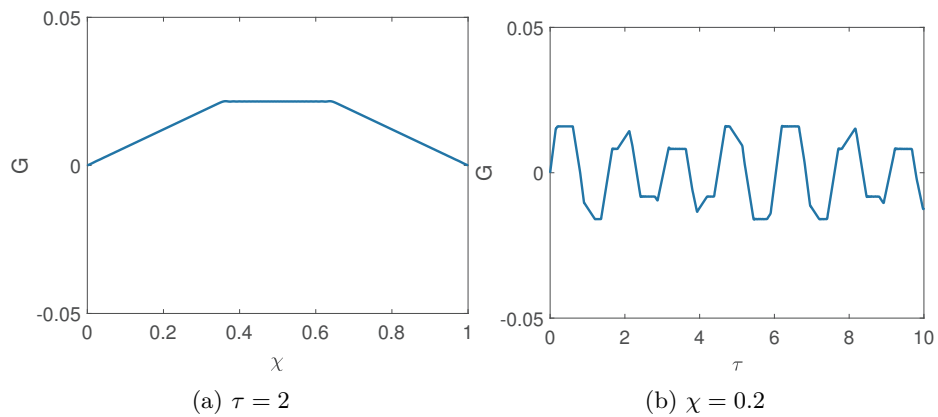


Figura 3.82: Deformazione  $G$  in  $\tau = 2$  e  $\chi = 0.2$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

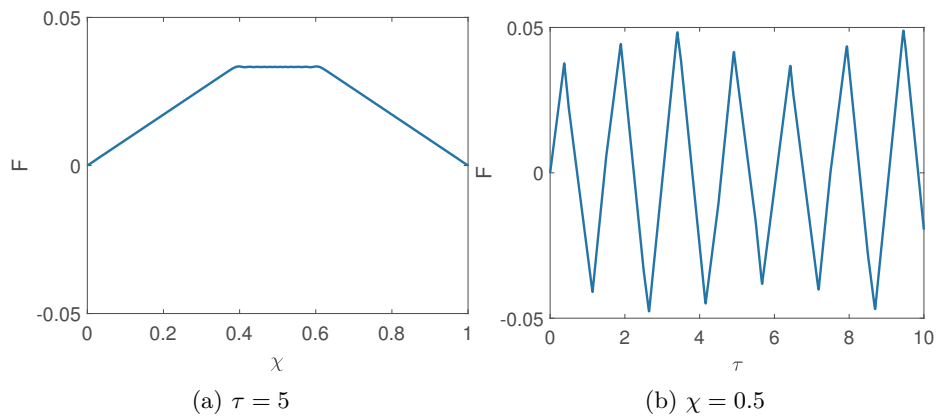


Figura 3.83: Deformazione  $F$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

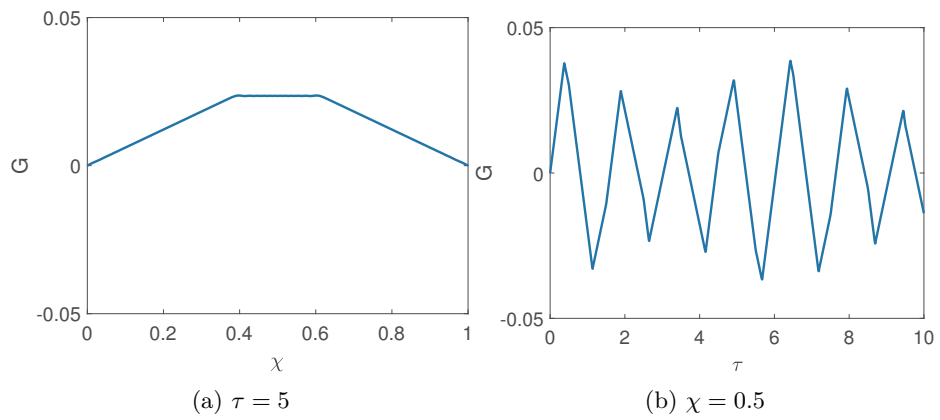


Figura 3.84: Deformazione  $G$  in  $\tau = 5$  e  $\chi = 0.5$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

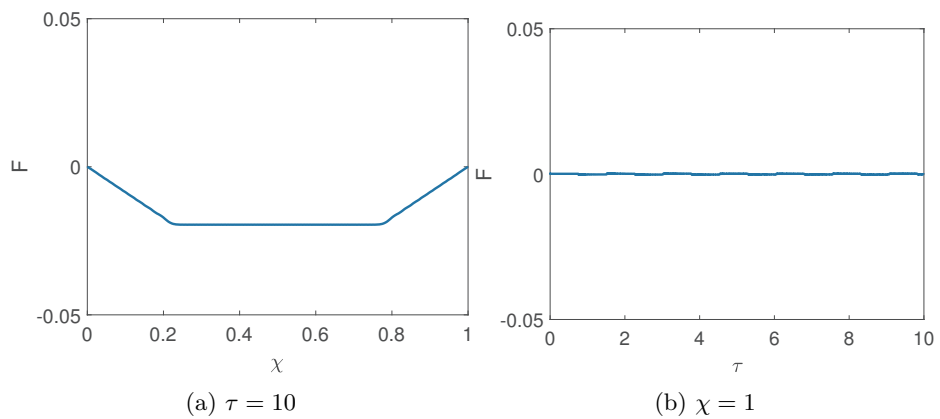


Figura 3.85: Deformazione  $F$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$

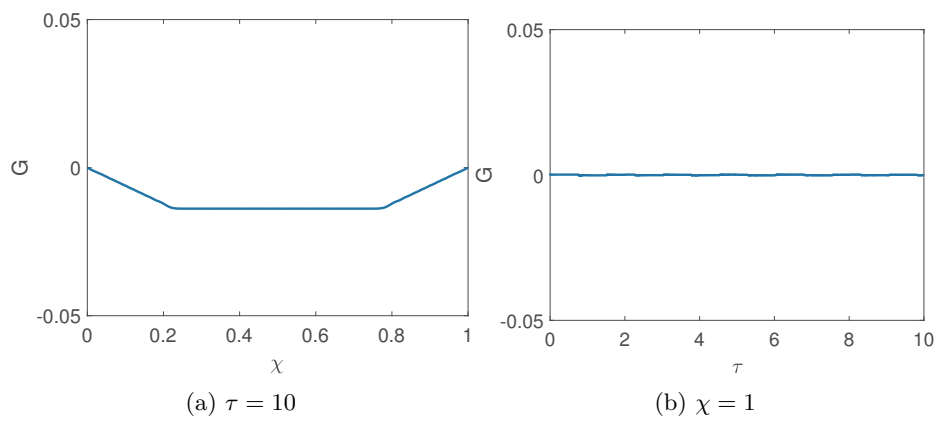


Figura 3.86: Deformazione  $G$  in  $\tau = 10$  e  $\chi = 1$  con  $\phi = \frac{\pi}{4}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{4}$



# Appendice D: equazioni differenziali alle derivate parziali

Per modellare i principali fenomeni scientifici di interesse tecnologico si fa uso di vari modelli matematici. Il principale modello matematico è costituito dalle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Le equazioni differenziali sono delle equazioni che mettono in relazione una funzione incognita con le sue derivate. Le equazioni differenziali sono utilizzate per descrivere una vasta gamma di fenomeni come: il trasporto di un inquinante, la diffusione del calore, le vibrazioni di una struttura e la propagazione di onde in un materiale.

Nella risoluzione delle equazioni differenziali sono necessarie le condizioni iniziali e le condizioni al bordo del dominio considerato. Dalla risoluzione delle equazioni differenziali è possibile trovare una soluzione generale in cui sono presenti costanti e funzioni arbitrarie. Attraverso le condizioni iniziali e le condizioni al bordo si ricava una soluzione specifica.

Le equazioni differenziali possono essere classificate in relazione all'ordine e alla linearità. L'ordine di un'equazione differenziale consiste nell'ordine massimo delle derivate nell'equazione. Per esempio nell'equazione del trasporto è presen-

te al massimo la derivata prima quindi è una equazione differenziale del primo ordine. Si definisce un'equazione differenziale lineare se compaiono solo funzioni lineari della funzione incognita e delle sue derivate mentre in un'equazione differenziale non lineare compaiono funzioni non lineari della funzione incognita e delle sue derivate.

La forma generale di una PDE a due variabili è:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u + G = 0$$

La PDE si definisce iperbolica se tutti gli autovalori associati all'equazione differenziale sono reali e hanno lo stesso segno.

La PDE si definisce parabolica se tutti gli autovalori sono reali e hanno segni opposti.

La PDE si definisce ellittica se almeno un autovalore è complesso.

L'equazione di Poisson è un esempio di una PDE ellittica, l'equazione del calore è un esempio di un'equazione alle derivate parziali parabolica e l'equazione delle onde è un esempio di una PDE iperbolica.

In modo particolare l'equazione delle onde è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili: spazio e tempo. L'equazione delle onde descrive come si propaga una generica onda come l'onda acustica, elettromagnetica o di deformazione all'interno di un materiale.

In generale l'equazione delle onde tridimensionale può essere scritta nella seguente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.$$

L'equazione delle onde unidimensionale è:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Nella precedente equazione  $u$  rappresenta la funzione d'onda,  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo materiale ed infine  $x$  e  $t$  sono lo spazio e il tempo. La velocità di propagazione  $c$  coincide con la velocità della luce se l'onda si propaga nel vuoto; se l'onda si propaga in un mezzo materiale  $c$  assume un valore minore rispetto alla velocità della luce.

La soluzione generale dell'equazione delle onde unidirezionale è:

$$u(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

Generalmente le condizioni iniziali definiscono lo stato iniziale dell'onda. Le condizioni al contorno descrivono il comportamento dell'onda ai bordi del dominio in esame. Ad esempio la condizione di Dirichlet impone un valore alla funzione d'onda al contorno mentre la condizione di Neumann impone un valore alla derivata della funzione d'onda ai bordi del dominio.

Se vengono definite le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = f(x)$$

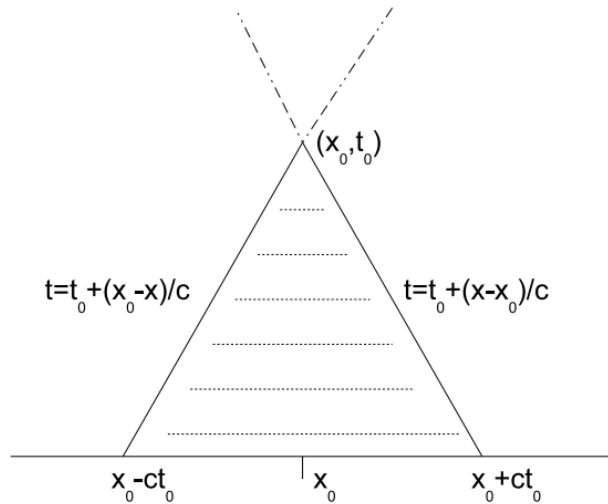
$$u_t(x, 0) = g(x)$$

si ricava la soluzione di D'Alambert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

La soluzione  $u(x, t)$  in un punto  $(x_0, t_0)$  dipende solamente dai dati iniziali sul segmento  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . Si definiscono inoltre due rette caratteristiche:

$x = x_0 + c(t - t_0)$  e  $x = x_0 - c(t - t_0)$ . Lo spazio compreso tra il segmento e le due rette caratteristiche è definito dominio di dipendenza. La soluzione nel generico punto  $(x_0, t_0)$  può essere dunque definita nel triangolo con vertici  $(x_0 - ct_0, 0)$ ,  $(x_0, t_0)$  e  $(x_0 + ct_0, 0)$ , come spiegato in [7].



La ricerca di una soluzione analitica per le equazioni differenziali non è sempre semplice e immediata. Talvolta si ricorre all'utilizzo di metodi numerici più o meno precisi per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali. Una possibile classificazione dei metodi risolutivi è: *metodi impliciti* e *metodi espliciti*. I metodi impliciti prevedono di ricavare il valore della funzione allo step successivo basandosi sul valore della funzione anche in un istante di tempo futuro. E' possibile prendere d'esempio il metodo di Eulero all'indietro:

$$u_{n+1} = u_n + hf_{n+1}$$

dove il punto  $n + 1$  della generica funzione  $u$  viene calcolato attraverso il valore di  $u$  nel punto  $n$ ,  $h$  passo di discretizzazione e  $f(t, u)$ .

I metodi espliciti invece prevedono di ricavare il valore della funzione allo step successivo basandosi solamente sui valori dei punti precedenti. Ad esempio



il metodo di Eulero all'avanti è un metodo esplicito:

$$u_{n+1} = u_n + hf_n$$

dove il punto  $n+1$  della generica funzione  $u$  viene calcolato basandosi solamente sul valore di  $u$  nel punto  $n$ ,  $h$  passo di discretizzazione e la funzione  $f$  nel punto  $n$ .

Il metodo alle differenze finite è un metodo per risolvere numericamente le equazioni differenziali parziali come l'equazione delle onde. Il metodo sostituisce il problema continuo delle equazioni differenziali parziali con un problema discreto rappresentando l'equazione con dei valori discreti. Affinché avvenga questa discretizzazione del problema è necessario in primis discretizzare l'intero dominio dell'equazione differenziale formando così una griglia di punti e successivamente discretizzare l'equazione differenziale sulla griglia. La griglia che si forma ha passo:  $\Delta x \times \Delta t$ . La griglia ha quindi dimensioni  $L \times T$ . Attraverso le condizioni iniziali, le condizioni al bordo e la funzione d'onda è possibile ricavare il valore di tutti i punti facenti parte della griglia e quindi trovare una soluzione numerica approssimata per l'equazione differenziale. In modo particolare il metodo alle differenze finite approssima la derivata della funzione di un punto della griglia facendo riferimento ai punti adiacenti. Dallo sviluppo in serie di Taylor è possibile ricavare le formule per le derivate parziali prime rispetto a  $x$  in avanti, all'indietro e centrate:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}.$$

Analogamente è possibile ottenere le derivate parziali rispetto al tempo.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t};$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t};$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta t}.$$

Nell'equazione delle onde sono presenti derivate parziali del secondo ordine. Dallo sviluppo in serie di Taylor è anche possibile ottenere la formula per approssimare la derivata seconda. Le formule per le derivate parziali seconde centrate sono:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2}.$$

La precisione del metodo alle differenze finite dipende strettamente dalla distanza dei punti sulla griglia ovvero dai valori assunti da  $\Delta x$  e  $\Delta t$ . Quanto più piccoli sono i valori di  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tanto maggiore è la precisione del metodo numerico ma aumenta di pari passo la complessità computazionale della risoluzione. Inoltre è necessario che il metodo numerico delle differenze finite risulti stabile. Affinché sia verificata la condizione di stabilità del metodo si definisce la CFL, numero di Courant-Friedrichs-Lewy. Esso è il rapporto tra la velocità di propagazione dell'onda e la velocità della griglia.

$$CFL = \frac{c}{\Delta x / \Delta t}$$

Se risulta verificata la condizione che  $CFL < 1$  allora il metodo è stabile numericamente. Il metodo alle differenze finite risulta stabile se l'errore numerico dovuto alle approssimazioni del metodo non cresce esponenzialmente al crescere del numero dei passi di discretizzazione.



# Bibliografia

- [1] Papadopoulos P.(2020), "Introduction to Continuum Mechanics", Department of Mechanical Engineering University of California, Berkeley
- [2] Coco M., Saccomandi G.(2022), "Superposing plane strain on anti-plane shear deformations in a special class of fiber-reinforced incompressible hyperelastic materials", International Journal of Solids and Structures, Volume 256, doi:10.1016/j.ijsolstr.2022.111994
- [3] Spencer A. J. M. (1984), "Constitutive theory for strongly anisotropic solids", Department of Theoretical Mechanics University of Nottingham
- [4] Destrade, M. , Saccomandi, G. (2010), "On the rectilinear shear of compressible and incompressible elastic slabs", International Journal of Engineering Science, 48, 1202-1211, doi:10.1016/j.ijengsci.2010.09.012.
- [5] Qiu G.Y., Pence T.J. (1997), "Remarks on the Behavior of Simple Directionally Reinforced Incompressible Nonlinearly Elastic Solids", Journal of Elasticity, 49, 1-30, doi:10.1023/A:1007410321319
- [6] Amendola A, Saccomandi G, Speranzini E. "On shear motions in nonlinear transverse isotropic elastodynamics. Mathematics and Mechanics of Solids." 2023;28(4):931-942. doi:10.1177/10812865221105452
- [7] De Marchi S. (2019), "Soluzione numerica di equazioni differenziali con condizioni in Matlab/Octave" Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Università di Padova

[8] Ogden R. W. (1984) "Non-Linear Elastic Deformations" , Università di Glasgow