UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea triennale in

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE ED APPLICAZIONI ECONOMICHE

METHOD OF LAGRANGE MULTIPLIERS AND ECONOMIC APPLICATIONS

Relatore:
Prof. Luca Guerrini

Rapporto Finale di :
Burian Zollo

Anno Accademico 2021/2022

INDICE

Introduzione

In molti contesti è spesso utile studiare e analizzare una determinata funzione per conoscere meglio un fenomeno e capirne il comportamento.

I moltiplicatori di Lagrange, vengono utilizzati nella programmazione matematica per ritrovare i punti che massimizzano, o minimizzano a seconda del caso, una determinata funzione.

Cercheremo di far presente come i metodi lagrangiani possano essere utilizzati anche in ambito economico.

Verranno inoltre sottolineati i collegamenti esistenti con il teorema di Dini, e quanto sia importante predisporre i giusti vincoli di regolarità.

Infine, verranno poi presentati alcuni esempi di applicazione dei moltiplicatori nell'ambito economico.

CAPITOLO 1

EVOLUZIONE DELLA PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

1.1 LA NASCITA DELL'OTTIMIZZAZIONE MATEMATICA

Non solo in matematica, ma anche in molti altri contesti (in informatica, o anche nella semplice vita quotidiana) ci si può imbattere nel problema dell'ottimizzazione.

Cosa si intende con problema di ottimizzazione?

Spesso ci si trova davanti a situazioni in cui bisogna trovare la soluzione migliore (che può essere quella di massimizzare o quella di minimizzare) ed è in questa situazione che entra in gioco la ricerca dell'ottimizzazione.

Il termine programmazione matematica è stato introdotto da Robert Dorfman nel 1949 per indicare problemi in cui occorre trovare soluzioni ottimali di una funzione obiettivo mentre le sue variabili indipendenti, o decisionali, sono soggette a determinati vincoli.

La programmazione matematica è possibile collegarla e ritrovarla in molte altre circostanze come l'analisi convessa, l'analisi non-smooth, l'algebra lineare, il calcolo numerico, la teoria dei giochi, la teoria delle decisioni, … tutto questo per affermare come essa abbia una forte importanza in ambito economico.

La programmazione matematica nasce alla fine del XVIII secolo, ma solo durante la guerra, e successivamente nel dopoguerra, essa ha trovato sviluppo ed espansione.

Tra il XVIII e il XIX secolo un altro importante contributo venne dal matematico e fisico francese J. B. J. Fourier, che ha aperto la strada alla programmazione "moderna".

Fourier si occupò, tra l'altro, dell'analisi delle disuguaglianze: in particolare, in due articoli pubblicati rispettivamente nel 1826 e nel 1827, mostrò metodi per risolvere sistemi di disequazioni lineari basati sulla successiva eliminazione di variabili.

L' effettiva nascita della programmazione matematica è stata accompagnata dallo sviluppo di specifici strumenti matematici e di studi effettuati nel corso degli anni.

Con l'avvento della Seconda guerra mondiale, si dovevano ricercare e analizzare dei precisi obbiettivi, tutto questo poteva essere fatto solo se si prendevano in esame simultaneamente più variabili, tutto ciò portò gli studiosi alla ricerca di metodi tali da poter risolvere non un singolo problema alla volta, ma più di uno.

L'URSS e gli USA furono i creatori della programmazione lineare per rispondere alle problematiche economiche e belliche che furono costretti a fronteggiare in quegli anni, favorendo lo sviluppo delle basi della disciplina.

Nell'Unione Sovietica l'economista Kantorovich11 fu il primo a cimentarsi nella risoluzione di tali problemi.

A differenza della Russia, l’Occidente aveva ritmi più lenti e lunghi per quanto riguarda lo sviluppo della Programmazione Lineare.

Bisogna infatti attendere l’opera di B. Dantzig, il quale utilizzo per il suo studio il metodo noto come metodo del simplesso.

Infatti George Bernard Dantzig (Portland, 8 novembre 1914 – Palo Alto, 13 maggio 2005) è stato un matematico e statistico statunitense, noto soprattutto per avere introdotto l'algoritmo del simplesso e per essere considerato il padre della programmazione lineare.

In aggiunta al suo lavoro, significativo nello sviluppo del metodo del simplesso e nell'approfondimento della programmazione lineare, Dantzig esplorò anche i campi della teoria della scomposizione, dell'analisi della sensitività, dei metodi pivot complementari, dell'ottimizzazione su larga scala, della programmazione non lineare, e della programmazione nelle condizioni di incertezza.

1.2 LA PROGRAMMAZIONE MATEMATICA IN ITALIA

Una volta finita la Seconda Guerra Mondiale, in Italia solo tra gli anni 50 e gli anni 60 emergeranno i primi studi rivolti a problemi di programmazione matematica, soprattutto programmazione lineare.

Infatti, la Ricerca Operativa, nata negli Stati Uniti e in Inghilterra durante la Seconda guerra mondiale e soprattutto negli anni immediatamente successivi alla fine del confitto, in Italia arrivò con almeno una decina di anni di ritardo.

I principali studiosi che diedero via agli studi di codesta materia in Italia furono, Giuseppe Pompilj a Roma e Mario Volpato a Venezia.

Il primo, studioso di Calcolo delle Probabilità e di Statistica, fino dalla seconda metà degli anni 50 collaborò con la Marina Militare, in collegamento con le forze armate statunitensi.

Nel 1961 fu poi tra i fondatori dell'Associazione Italiana di Ricerca Operativa (AIRO), assieme a Benedetto Barberi, allora direttore dell'Istituto Centrale di Statistica, e a Bruno de Finetti.

Pompilj istituì nel 1962 la Scuola di Perfezionamento in Ricerca Operativa, presso l'Università di Roma, tra le prime sedi universitarie realizzate per queste tipologie di studi.

Mario Volpato, successivamente presidente onorario dell'AMASES, alla fine degli anni 50 e durante gli anni 60, assieme ad alcuni suoi collaboratori, aveva tenuto rapporti di ricerca scientifica con la Ing. C. Olivetti & C., dando quindi l'avvio ad una nutrita schiera di ricercatori interessati ai modelli matematici della Ricerca Operativa.

Furono contributori della disciplina e degli studi ad essa inerente anche, Elio Canestrelli, Piera Mazzoleni ed Elena Moretti, anche loro formatisi alla scuola della Cà Foscarina.

Tra i libri italiani che fanno rifermento alla programmazione matematica e pubblicati negli anni 60, deve essere sicuramente reso noto e ricordato "Programmazione Matematica" di L. Muracchini.

L'autore (Università di Bologna) è uno dei pochi che si è dedicato allo studio delle applicazioni della Ricerca Operativa, dopo avere svolto studi in altri campi della matematica. Nel 1974, si era tenuto un convegno internazionale dedicato alla Programmazione Matematica e alle sue Applicazioni.

È una delle prime volte in cui gli studiosi italiani di ottimizzazione si aprono verso incontri che coinvolgono anche famosi ricercatori stranieri. Nel 1978, si svolge un altro importante incontro internazionale per l'ottimizzazione matematica, alla Cà Foscari di Venezia, questo convegno fu promosso dalla locale Facoltà di Economia e sponsorizzato dall'AMASES.

Vi partecipano parecchi docenti italiani e tra i nomi più importanti degli stranieri Ögurano E. Blum, A. Brody, G. B. Dantzig, B. Korte, W. Oettli, R. T. Rockefellar, R. J. B. Wets.

Fa gli onori di casa M. Volpato che presenta i suoi studi sul principio di ottimalità di Bellman, finora noti solo ai lettori di lingua italiana.

Nello stesso periodo, in Italia inizia a prendere gamba un ulteriore tema, che non è da meno di quello dell'ottimizzazione, stiamo parlando della teoria della convessità generalizzata.

Importante fu il contributo di de Finetti, che attraverso un articolo pubblicato nel 1949, definì e denomino le funzioni quasi convesse e le funzioni quasi concave.

Il contributo di de Finetti viene quasi subito reso noto e riconosciuto sia in Italia, che all'estero.

Negli anni 80 iniziano a formarsi gruppi omogenei di studio sull'ottimazione, con lo scopo di realizzare e creare "cordate" per partecipare alle esigenze dei fondi ministeriali di finanziamento alla ricerca.

Negli anni 90 codesti gruppi di ottimizzatori iniziano a stabilizzarsi.

Importante fu il convegno tenuto nel 1987, ad Aosta il 9-11 settembre, dove A. Cambini presenta una "relazione invitata "sullo stato dell'arte della concavità generalizzata (tale conferenza verrà pubblicata sugli atti del convegno).

Allo stesso modo del convegno del 1980 a Vancouver, vengono organizzati, ad intervalli abbastanza regolari, altri convegni internazionali sulla stessa problematica, incontri che vedono la partecipazione italiana sempre crescente e sempre molto attiva (alcuni di questi incontri si terrano in Italia, come quello avvenuto a Pisa).

Un ruolo importante in questo ambito è ricoperto dal Centro di Cultura Scientifica Ettore Majorana di Erice (Trapani), nell'ambito della sua International School of Mathematics G. Stampacchia, diretta da F. Giannessi. Qui si svolgono dal 1970, degli incontri periodici su varie tematiche, come quello dell'ottimizzazione.

Questi convegni vedono la partecipazione di matematici italiani ma non solo; infatti, vi partecipano anche molti studiosi stranieri affermati (ad esempio, F. H. Clarke, V. F. Demyanov, A. D. Ioffe, A. M. Rubinov, R. T. Rockefellar, J. P. Penot, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal, B. Mordukhovich).

Oltre ai convegni nominati nel corso del trattato, bisogna ricordarsi che gli incontri sono fatti in maniera periodica e fissa.

Bisogna inoltre citare i numerosi studi italiani di Teoria del Controllo Ottimo.

La Teoria del Controllo Ottimo rappresenta l'evoluzione moderna del Calcolo delle Variazioni, settore ove la matematica italiana, soprattutto ad opera di L. Tonelli, aveva raggiunto risultati di eccellenza.

Tra gli studiosi italiani che opera attualmente o che sono vicini al giorno d'oggi, che si sono occupati di controllo ottimo, devono essere nominati Bruno Viscolani (Padova) e Fausto Gozzi (Roma), che hanno anche creato un buon gruppo di giovani ricercatori.

A questi due matematici possiamo poi aggiungere i nomi di A. Buratto (Padova), D. Favaretto (Venezia), L. Grosset (Padova). S. Faggian (Venezia), L. De Cesare e A. Liddo (Foggia), P. Zezza (Firenze), E. Barucci (Milano).

Vanno inoltre citati anche i nomi di G. Di Pillo e F. Facchinei della Facoltà di Ingegneria dell'università di Roma La Sapienza, soprattutto per i loro studi concernenti le disequazioni variazionali.

Segnaliamo anche il nome di R. Lucchetti del Politecnico di Milano, per i suoi studi sull'analisi convessa.

CAPITOLO 2

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

2.1 TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Joseph Louis Lagrange, nasce a Torino nel 1736, primo di undici fratelli, da Giuseppe Luigi Lagrange.

Lagrange è stato un grande matematico e astronomo italiano , ha vissuto per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi. Viene unanimemente considerato tra i maggiori e più influenti matematici europei del XVIII secolo; inoltre sono importanti da ricordare anche i suoi studi e il suo contributo alla fisica matematica.

La sua più importante opera è la Mécanique analytique, pubblicata nel 1788, con cui nasce convenzionalmente la meccanica razionale e quella analitica.

Importante è stato il suo apporto dato alla teoria dei numeri, inoltre è stato fondatore del calcolo delle variazioni, ed anche ricordato per i risultati ottenuti nelle equazioni differenziali e nell'analisi infinitesimali. Lagrange è stato un precursore della teoria dei gruppi e della teoria classica dei campi.

Inoltre, famosi sono anche i suoi studi sulla meccanica celeste, con le ricerche apportate sui movimenti dei satelliti del pianeta Giove e sul fenomeno della librazione lunare.

Tra i suoi allievi più famosi troviamo Jean-Baptiste Joseph Fourier, Giovanni Plana e Siméon-Denis Poisson.

Tra le più importanti scoperte da lui apportate, ce sicuramente il celebre METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

Il metodo dei moltiplicatori è una tecnica per studiare i massimi e i minimi vincolati di una funzione a più variabili, ponendo un vincolo espresso con una o più equazioni.

Questo metodo lo si utilizza tendenzialmente qualora non vi sia possibile applicare il metodo di sostituzione.

Prima di andare a definire con precisione il Metodo di Lagrange, è importante fare un focus sui punti di massimo, minimo e su quelli stazionari.

PUNTO STAZIONARIO

Per le funzioni ad una variabile, il punto stazionario è quel punto che fa parte del dominio, e che annulla la derivata prima della funzione stessa.

Data una funzione f: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con Ω sottoinsieme non vuoto e aperto di $\mathbb{R}^n$, un punto $p \in \Omega$ si dice stazionario per la funzione f se in esso si annulla il gradiente di f, $\nabla f(\boldsymbol{p}) = 0$.

PUNTO DI MASSIMO

Quando si parla dei punti di massimo, bisogna dividerli in due sottocategorie, i punti massimo assoluto, e i punti di massimo relativo.

I punti di massimo assoluto sono punti in cui la funzione realizza il massimo valore su tutto il dominio; mentre quelli locali, sono punti di massimo non su tutto il domino, ma solo all’interno di un intorno.

Ovviamente i punti massimo assoluto sono anche punti di massimo relativo o locale.

Massimo globale: $M \in \mathbb{R}$ è detto massimo globale di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se $M \geq f(x)$, per ogni $x \in \Omega$ con $f(x^*) = M$.

Massimo locale: $M_0 \in \mathbb{R}$ è detto massimo locale18 di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se esiste un intorno I di x*, e si scriverà I(x*), tale per cui $f(x^*) \geq f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = M_0$.

PUNTI DI MINIMO

Anche in questo caso, come per i punti di massimo, anche quelli di minimo si suddividono in punti di minimo locale e globale.

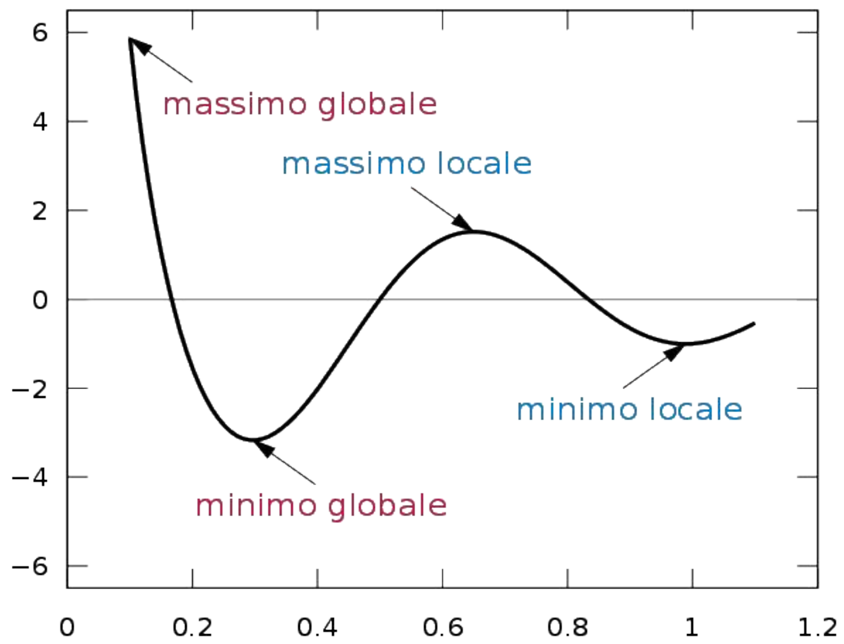
I punti di minimo assoluto/ globale sono quei punti che fanno riferimento all'intero domino della funzione, mentre quelli locali si riferiscono ad un intorno all'interno del dominio stesso.

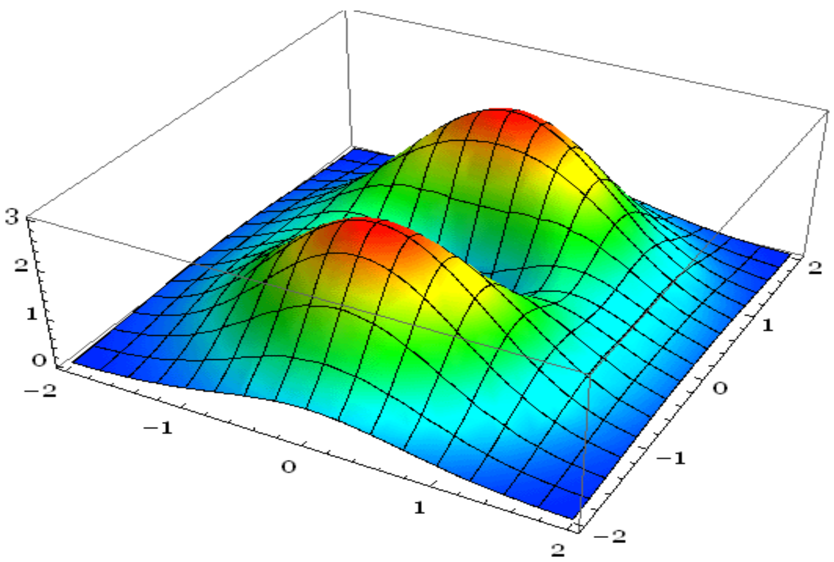
Minimo assoluto: $M \in \mathbb{R}$ è detto massimo globale di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se $M \geq f(x)$, per ogni $x \in \Omega$ con $f(x^*) = M$.

Minimo relativo/locale: $m_0 \in \mathbb{R}$ è detto minimo locale di $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$) se esiste un intorno I di x*, e si scriverà I(x*), tale per cui $f(x^*) \leq f(x)$, per ogni $x \in I$ con $f(x^*) = m_0$.

Ovviamente anche in questo caso, i punti di minimo assoluto sono anche punti di minimo relativo/locale.

Per comprendere meglio queste definizioni, illustreremo un paio di immagini per semplificare il tutto:





Come detto in precedenza nel momento in cui non si può applicare il metodo della sostituzione, si utilizzerà il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Questo metodo

Siano f, g : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni differenziabili in (x*, y*) e sia (x*, y*) un estremante per f (x, y), vincolato dalla condizione g (x, y) = 0; sia inoltre ∇g (x*, y*) ≠ 0; allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la terna (x*, y*, λ) sia un punto stazionario della funzione Lagrangiana L(x, y, λ) = f (x, y) + λ g (x, y) ossia valgono le condizioni: g (x*, y*) = 0, ∇f (x*, y*) + λ ∇g (x*, y*) = (0, 0). In altre parole, definita la funzione lagrangiana come nel teorema, se f, g sono differenziabili in (x*, y*), se si sa già che (x*, y*) è un punto di minimo o di massimo vincolato per f (x, y), ed esso si trova quindi sul vincolo g(x, y) = 0 e se inoltre soddisfa ∇g (x*, y*) ≠ (0, 0), allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il punto (x*, y*, λ) sia soluzione del sistema di equazioni.

-$\partial L/\partial x$ = 0, ossia $\partial f/\partial x = -\lambda\, \partial g/\partial x$

-$\partial L/\partial y$ = 0, ossia $\partial f/\partial y = -\lambda\, \partial g/\partial y$

-$\partial L/\partial \lambda$ = 0, ossia g(x, y) = 0

L'elenco appena fatto introduce e rappresenta quelle che prendono il nome come condizioni di Lagrange, e la variabile λ è il moltiplicatore di Lagrange.

Il risultato di Lagrange è una condizione necessaria del primo ordine per un punto di massimo o di minimo condizionato. In altre parole, si afferma che se c'è un punto di massimo o di minimo vincolato, allora la funzione Lagrangiana deve essere stazionaria in questo punto, per un determinato valore di λ.

Essendo una condizione necessaria, quando individuiamo un punto stazionario della Lagrangiana non si può ancora dire di aver trovato un punto di massimo o di minimo condizionato, ma solo un possibile "candidato".

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si basa sul teorema di Dini, chiamato anche come teorema della funzione implicita.

È infatti vero che non sempre il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è sempre applicabile; si richiede che le funzioni f (x, y) e g (x, y) siano differenziabili, con g (x, y) avente derive prime non nulle contemporaneamente.

Un altro argomento a cui si può far riferimento quando si parla dei moltiplicatori di Lagrange, è quello della matrice hessiana orlata.

In senso economico, il moltiplicatore di L. può essere interpretato come il valore marginale, o valore ombra, misurato in termini della funzione obiettivo che si vuole massimizzare o minimizzare e della variazione del vincolo che limita l'insieme delle scelte possibili.

Se volessimo fare un esempio, basti pensare ad un consumatore che ha il problema di scegliere due o più beni per massimizzare la propria utilità, con un vincolo che è quello economico, cioè di non poter spendere oltre una cera cifra. Una volta trovate la scelta ottimale, il moltiplicatore di Lagrange misura l'utilità marginale che il consumatore riceve se il suo reddito aumenta, allentando il vincolo di bilancio.

2.2 ESEMPIO NUMERICO

Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione:

$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$

nell'insieme $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per trovare gli estremi della funzione f nell'insieme descritto dal vincolo di uguaglianza $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Il gradiente di $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ si annulla solo nell'origine (0, 0, 0), che non appartiene all'insieme A. f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, quindi il metodo è applicabile.

La funzione Lagrangiana è $L = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ risolviamo quindi il sistema :

$1 - 2\lambda x = 0$

$-2 - 2\lambda y = 0$

$2 - 2\lambda z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

che ha come soluzioni: $\lambda = 1/2$, $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$

dove $f(1, -2, 2) = 9$, e $\lambda = -1/2$, $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$ dove $f(-1, 2, -2) = -9$.

Quindi 9 è il valore massimo e -9 è il valore minimo.

2.3 METODI ALTERNATIVI A QUELLO DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

METODO DI SOSTITUZIONE

Il metodo più semplice da utilizzare quando si ricercano i punti di massimo e di minimo, è il metodo di sostituzione.

Questo metodo è applicabile quando nel vincolo è possibile esplicitare una variabile. Quindi il vincolo verrà direttamente sostituito direttamente nella funzione obbiettivo.

Il metodo di sostituzione non è possibile applicarlo nel momento in cui la funzione non è esplicitabile rispetto ad una delle due variabili presenti nella funzione stessa, poiché non dà luogo ad una funzione (per essere definita tale ad ogni valore di una delle variabili all'interno della funzione, deve corrispondere un solo e unico valore dell'altra variabile presente all'interno della funzione).

AD ESEMPIO:

$f(x, y) = x-y$

con vincolo $x^2 + y^2 = 4$

Non è agevole sostituire il vincolo perché la funzione;

$x^2 + y^2 - 4 = 0$

non è esplicitabile rispetto a x o y, poiché non dà luogo ad una funzione.

METODO DELLE CURVE DI LIVELLO

Un ulteriore metodo oltre a quello di sostituzione e a quello del moltiplicatore di Lagrange, è il metodo delle curve di livello.

Questo metodo si basa sulla rappresentazione grafica, infatti il suo unico vincolo di applicazione è che la funzione da noi presa in considerazione non sia troppo difficile da disegnare.

In questo caso il tutto viene esaminato da un punto di vista geometrico. Graficamente è possibile vedere che i punti di massimo e minimo si hanno in corrispondenza dei punti in cui le curve di livello della funzione $f(x, y) = c$ risultano tangenti alla curva $g(x, y) = 0$.

Se lo volessimo spiegare il tutto in maniera semplificata, si tratta di porre la nostra funzione uguale ad una costante, e ripetere questo procedimento più volte.

Così facendo andrò poi a disegnare le diverse curve di livello.

In base a come vengono disposte tali curve saremmo in grado di capire se avremmo punti di massimo o di minimo.

Se all'aumentare di k le curve si allontanano dal punto P allora P è un punto di minimo, se invece all'aumentare di k le curve si stringono intorno al punto P allora è un punto di massimo.

CAPITOLO 3

IL TEOREMA DI DINI

3.1 TEOREMA DI DINI O TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

Quando ci si imbatte nel tema dei moltiplicatori di Lagrange è impossibile non far riferimento al Teorema di Dini o Teorema della funzione Implicita.

Ulisse Dini è stato un importante matematico e politico italiano.

Dini nasce il 14 novembre del 1845 a Pisa, e muore il 28 ottobre del 1918 sempre nella sua città natale.

Prima di introdurre il teorema da lui formulato è importante fornire delle nozioni.

FORMA ESPLICITA / FORMA IMPLICITA

Spesso in economia le funzioni sono espresse in forma implicita, mentre in matematica è ricorrente trovare le funzioni in forma esplicita.

$y = g(x_1, \dots x_n)$ FORMA ESPLICITA

$f(x_1, \dots x_n) = 0$ FORMA ESPLICITA

ESEMPI

1) $y = x + 1$ Forma esplicita

   $y - x - 1 = 0$ Forma implicita

2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

In questo caso, ottenuto “x “, esistono due valori diversi di y per i quali l’equazione è soddisfatta.

Quindi $f(x,y) = 0$ non definisce una relazione implicita tra x e y come funzione, cioè in questo caso non è possibile esprimere y come funzione di x .

Il teorema del Dini permette di stabilire quando una curva descritta in forma implicita si può esprimere, localmente, in forma esplicita.

Inoltre, il teorema fornisce una formula per calcolare la derivata prima della funzione esplicita in un punto che annulla la funzione di partenza.

Sia $F : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, e

1) F, F'_2 siano continue in A;

2) nel punto $x^* = (x1^*, x2^*)$ risulti $F(x^*) = 0$, $F'_2(x^*) \neq 0$.

Esistono allora un intorno I di $x1^*$ e un’unica funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continua in I, tale che $\varphi(x1^*) = x2^*$ ed inoltre $F(x1, \varphi(x1)) = 0$ per ogni $x_1 \in I$.

Se poi F ha derivate parziali continue in A, allora φ è derivabile, e vale la formula

$\varphi'(x_1) = -[F'_1(x_1, \varphi(x_1)) / F'_2(x_1, \varphi(x_1))]$ per ogni $x \in I$.

Il teorema appena esposto è un teorema di esistenza, che è applicabile anche nel caso di un’equazione a più variabili.

Nel caso in cui la relazione tra le due variabili (x, y) espressa nell’equazione $f(x,y) = 0$ è una funzione, allora y è esplicitabile globalmente come funzione della variabile x.

Nel caso contrario, nel momento in cui non darà luogo ad una funzione, il teorema di Dini permette sotto delle adeguate ipotesi, di esplicitare almeno localmente.

Esempio:

Se $f_y (x_o, y_o)= 0$, il teorema Dini non è applicabile.

In questo caso si potrà procedere andando a calcolare l'altra derivata parziale: $f_x (x_0, y_0)$.

Se risulta diversa da zero, e se le altre ipotesi del teorema di dini sono rispettate, allora l'equazione $f (x,y) = 0$ definisce un'unica funzione continua $x = h (y)$ in un intorno di y_0, tale che $h (y_0) = x_0$, cioè che x sia esplicitabile rispetto a y.

Nel caso in cui entrambe le derivate delle due variabili siano uguali a zero, allora nulla si può dire in generale relativamente all'esistenza ed unicità di una funzione definita implicitamente.

Quindi per concludere questo discorso, si può affermare che il teorema di Dini presuppone che almeno una delle due derivate parziali sia diversa da zero, nel caso contrario allora siamo di fronte ad un punto stazionario.

PUNTO REGOLARE E PUNTO SINGOLARE

Un punto (x_0, y_0) è definito come PUNTO REGOLARE per la funzione f se almeno una delle due derivate parziali sia diversa da zero.

Si parla invece di punto singolare, quel punto che invece ha entrambe le derivate parziali diverse da zero.

CAPITOLO 4

OTTIMIZZAZIONE

4.1 OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Un agente che deve operare una scelta tra diversi panieri in base all'utilità che da essi ne trarrebbe; un'azienda che vuole riorganizzare capitale e lavoro per il processo di produzione affinché vi sia un incremento di profitto ed un abbattimento dei costi; ecc. Sono soltanto due dei numerosi esempi in Economia, che ci permettono di comprendere l'importanza della ricerca degli stadi privilegiati di un processo economico a cui corrispondono il valore più alto del fenomeno oppure il suo valore più basso.

Tale ricerca è chiama problema di ottimizzazione.

Come abbiamo già riportato nel primo capitolo, l'ottimizzazione
(o programmazione matematica) è una branca della matematica che analizza teorie e metodi per la ricerca di massimi e minimi di una funzione all'interno di un dominio.

Analizzando bene la vita quotidiana, si può osservare come il problema di ottimizzazione la si ritrovi molte più volte di quanto ci si possa aspettare (basta pensare a quante volte si ricerca il miglior risultato con il minimo sforzo).

È possibile suddividere l'ottimizzazione in due sottogruppi:

1) OTTIMIZZAZIONE LIBERA
2) OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Partendo dalla prima, e ben facile capire che essa si distingue perché non presenta dei vincoli che invece troveremo nella seconda.

L'ottimizzazione libera è spesso utilizzata dalle imprese per ricercare la quantità ottimale da produrre al fine di massimizzare il profitto.

Naturalmente per arrivare alla soluzione della quantità ottimale, bisognerà conoscere la funzione di costo, e in che tipologia di mercato opera l'impresa da noi considerata.

ESEMPI:

Un'impresa che opera in un regime di monopolio produce due beni (x e y), e li vende in regime di concorrenza perfetta con i prezzi fissi di $p_1 = 64$ e $p_2 = 32$.

La funzione di costo è uguale a: $C(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 4xy - 14$

Determinare la quantità di x e y tali da avere il massimo del profitto.

Come prima cosa è importante essere a conoscenza del fatto che operando in un regime di concorrenza perfetta, le imprese non hanno potere per poter influenzare il prezzo di mercato dei loro prodotti.

Come secondo passaggio andiamo a ricercare la funzione dei profitti, cioè quella funzione data dalla sottrazione trai ricavi e i costi dell'esercizio.

$U(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4xy + 64x + 32y - 14$

Ora come richiesto dall'esercizio vado a ricercare quei valori di x e y che mi massimizzano la funzione dell'utile.

Per fare ciò andrò a ricercare le due derivate parziali, le porrò uguali a zero e le metterò a sistema.

U_x =-4x+4y+64

U_y=-8y+4x+32

Dal sistema otterremo un punto stazionario che è x= 40 e y= 24.

Ora ci è rimasto di vedere se il punto stazionario da noi trovato è un massimo, un minimo o un punto di sella.

Andremo quindi a ricercare le derivate seconde, le metteremo all'interno della nostra matrice, e vedremo che siccome il determinate è maggiore di zero e la derivate seconda rispetto la variabile x è inferiore di zero, possiamo dire che il punto da noi trovato è un punto di massimo.

Infine, andando a sostituire i valori da noi trovati possiamo calcolare il nostro massimo utile che è uguale a 1650.

Un altro esempio che si differenzia leggermente da quello appena presentato, è quello in cui non ci viene fornito direttamente il prezzo dei due beni, ma lo dovremmo andare a ricercare nelle funzioni che esprimono le quantità.

4.2 OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

La seconda categoria/ sottogruppo dell'ottimizzazione, è l'ottimizzazione vincolata.

La differenza sostanziale, come già avevo accennato, è che qui in questo caso troveremo dei vincoli che prima non avevamo.

L'ottimizzazione vincolata consiste nella ricerca dei punti stazionari e dell'analisi della loro tipologia, ma in un dominio soggetto ad un vincolo: una relazione necessaria tra le variabili. Di conseguenza si ricercano i punti in un dominio di dimensione inferiore a quello di partenza.

In questo caso "l'ottimalità" allude alla ricerca dei valori estremi di certe grandezze, la scarsità implica che tali grandezze non siano libere di assumere qualsiasi valore, bensì soggette a limitazioni.

Per esempio, il consumo di una famiglia sarà limitato dal loro reddito, oppure la produzione di un'impresa è vincolata dal costo e dalla disponibilità dei fattori.

Quindi è facile capire come questa tematica abbia una forte importanza e un forte rilievo in ambito economico. In termini più analitici, si tratta di massimizzare o minimizzare nel caso di costi, una funzione di più variabili, dovendo tali variabili soddisfare relazioni che ne vincolano i valori.

Ora andremo a presentare un esempio in cui utilizzeremo l'ottimizzazione vincolata.

ESEMPIO:

Data la funzione di produzione:

$z= 10x^{0,3}y^{0,5}$

soggetta al vincolo

$60x+20y=3840$

Trova la massima quantità che rispetti il vincolo.

In questo caso x rappresenterebbe il fattore capitale, mentre y rappresenterebbe il lavoro; quindi, il problema ci richiede di ricercare la combinazione migliore per ottenere la massima quantità producibile dall'impresa.

In questo caso avremo un vincolo, che è dato dal vincolo di costo, questo vincolo lo introduciamo tramite il moltiplicatore di Lagrange all'interno della funzione Lagrangiana.

Una volta scritta e trovata la funzione Lagrangiana, procederemo come fatto nell'esempio precedente, cioè andremo a calcolare derivate prime, che ora saranno tre, visto che abbiamo una variabile in più.

Poi le andremo a mettere a sistema, e ricercheremo i valori che annullano le medesime derivate.

Una volta trovati i punti stazionari, applicheremo la matrice orlata per vedere se si tratta o meno di un punto di massimo della funzione.

Applicando tutti questi passaggi è possibile vedere che il punto di massimo lo avremo per i valori di $x = 24$ e $y = 120$, con una quantità massima producibile di 284 unità.

Lo stesso problema analizzato da un punto di vista di un soggetto che nell'esempio era un'impresa, è possibile applicarlo e ritrovarlo nel caso del consumatore, che vuole massimizzare la sua funzione di utilità, ma deve far conto di alcuni vincoli come può essere quello della sua disponibilità finanziaria, o come quello della reperibilità dei beni.

CAPITOLO 5

APPLICAZIONI ECONOMICHE DEL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

5.1 POSSIBILI APPLICAZIONI ECONOMICHE

Per concludere questo breve scritto inerente all'ottimizzazione e al moltiplicatore di Lagrange, andremo a trattare ora le loro applicazioni in campo economico, fornendo anche degli esempi.

Come abbiamo già accennato, in senso economico, il moltiplicatore di Lagrange. può essere interpretato come il valore marginale, o valore ombra, misurato in termini della funzione obiettivo che si vuole massimizzare o minimizzare e della variazione del vincolo che limita l'insieme delle scelte possibili.

Si consideri, per esempio, il problema di un consumatore che sceglie due o più beni per massimizzare la propria utilità, sotto il vincolo di bilancio che impone che non possa spendere più del proprio reddito. Allora, una volta risolto il problema di scelta ottima, il moltiplicatore di L. misura l'utilità marginale che il consumatore riceve se il suo reddito aumenta, allentando il vincolo di bilancio.

Ebbene fare chiarezza che l'utilità marginale è l'incremento di utilità conseguita a seguito di una piccola variazione nella quantità consumata di un bene.

Come abbiamo visto nel corso del trattato, il moltiplicatore di Lagrange lo si utilizza nell'ottimizzazione vincolata, andando ad introdurre il vincolo all'interno della funzione (tramite il moltiplicatore Lagrangiano).

Alcuni esempi in merito alle applicazioni economiche dell'ottimizzazione vincolata (con la funzione Lagrangiana) e non, sono state presentate già nel capitolo precedente (Capitolo 4).

Gli esempi da noi già riportati facevano riferimento alla ricerca della massimizzazione dell'utilità del consumatore e della massimizzazione del profitto d'impresa.

Naturalmente il tutto può essere analizzato da una prospettiva inversa, cioè che andremo ad utilizzare questi metodi non per la ricerca di massimizzazione, ma per trovare una soluzione che ci permette di avere i costi più bassi, sia nel caso in cui il soggetto da noi considerato sia un'impresa, sia un consumatore.

Come già visto in alcuni esempi numerici riportati, in questo campo, diventa fondamentale avere ed essere a conoscenza di tutte le informazioni necessarie.

Cosa intendiamo con il termine "informazioni necessarie "?

Intendiamo ad esempio, conoscere le caratteristiche del mercato in cui si opera, conoscere le funzioni di costo e di profitto, avere notizie in merito ai nostri concorrenti (nel momento in cui fossero presenti).

Naturalmente se stiamo analizzando un'impresa, andremo ad utilizzare e ricercare le funzioni di costo e di profitto, mentre se siamo di fronte ad una persona fisica, utilizzeremo come base di studio la sua funzione di utilità.

La funzione di utilità è una legge che assegna a ogni possibile paniere di consumo un numero, in modo che i panieri preferiti ricevono numeri maggiori dei panieri non preferiti.

Quindi la funzione di utilità va a mostrare le scelte migliori (quelle che comporta loro una maggiore soddisfazione, una maggiore utilità) che i vari soggetti vanno ad apportare in base alle proprie caratteristiche, ed i propri gusti.

Quindi un consumatore è una persona che acquista dei beni per destinarli all'utilizzo personale.

Il consumatore dispone di una determinata somma che lui andrà ad allocare per la spesa di due beni (per esempio). Ogni possibile coppia di beni viene detta paniere; la scelta tra un paniere ed un altro dipende dalla funzione di utilità.

Naturalmente si andrà a ricercare quella coppia di beni che comporta un valore della funzione di utilità superiore rispetto le altre.

È importate ricordarsi che la funzione di utilità deve essere continua, così come le sue derivate prime e seconde (che coincidono con le funzioni di utilità marginale).

Inoltre, le derivate prime dei vari beni devono essere maggiori di zero, questo perché maggiore è la quantità di un bene che il consumatore può acquistare, maggiore è il valore della funzione di utilità.

Tra i vari modelli e tipologie di funzioni di utilità possiamo trovare:

1) Funzione quadratica

   $U(q_1,q_2) = Aq_1+Bq_2+Cq_1q_2$

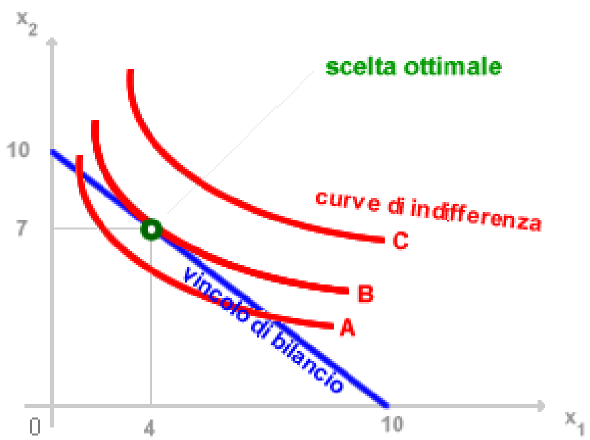
2) Funzione Cobb Douglas

   $U(q_1,q_2) = Aq^a{}_1q^b{}_2$

Come è possibile vedere, q_1 e q_2 indicano le quantità dei due beni appartenenti al paniere. Il nostro obbiettivo è quello di ricercare quelle due quantità che ci rendono massima l'utilità, ma che allo stesso tempo soddisfino il vincolo dato dalla somma che ci viene fornita per acquistare i due beni :

$S = p_1q_1+p_2q_2$

Il tutto può essere analizzato sia da un punto di vista analitico, andando ad effettuare i vari calcoli già visti e rivisti, oppure si può risolvere il tutto vedendolo anche graficamente, come riportato nella prossima immagine:



Nel rispetto del principio di razionalità il consumatore effettua le proprie scelte di consumo cercando di raggiungere la curva di indifferenza più esterna possibile, ossia quella che gli consente di ottenere una utilità maggiore dalle proprie scelte. Nell'esempio precedente la curva di indifferenza C si trova al di fuori delle possibilità di consumo del consumatore, è troppo esterna, mentre le curve di indifferenza A e B sono fattibili. La curva di indifferenza B è quella più esterna tra le curve di indifferenza raggiungibili ed è, pertanto, la migliore.

$SMS_{x1,x2} = Px_1/Px_2$

Dal punto di vista matematico la tangenza della curva di indifferenza con il vincolo di bilancio equivale a dire che nel punto di ottimo devono avere la medesima pendenza. La pendenza della retta di bilancio è data dal rapporto dei prezzi dei beni $-p2/p1$.

Essendo i prezzi dei beni determinati dal mercato (e non dal consumatore) il rapporto dei prezzi è il saggio in base al quale il mercato scambia i due beni.

Il saggio marginale di sostituzione, consiste nel saggio in base al quale il consumatore è disposto a scambiare un bene con l'altro, ed è spesso abbreviato con la sigla SMS.

Dal punto di vista analitico la scelta ottima del consumatore consiste in un sistema di due equazioni, la prima equazione individua la condizione di ottimo mentre la seconda equazione identifica il vincolo di bilancio.

$$\begin{cases} \dfrac{U'_2}{U'_1} = \dfrac{p_2}{p_1} & \text{condizione di ottimo} \\[2ex] R = p_1x_1 + p_2x_2 & \text{vincolo di bilancio} \end{cases}$$

Per concludere questo capitolo, possiamo ancora una volta affermare e ribadire l'importanza che la ricerca di ottimizzazione, anche attraverso l'utilizzo del moltiplicatore di Lagrange, ha in campo non solo matematico, ma anche e soprattutto economico.

Abbiamo visto come l'utilità la si riscontra non solo nei soggetti fisici come le persone, ma anche da enti come le imprese.

È importante ricordare come tutti gli esempi apportati e presentati (dalla ricerca di ottimo con la funzione di utilità per il singolo soggetto, fino alle scelte in merito ai costi e alla produzione per le imprese) siano solo alcuni degli innumerevoli campi in cui si può riscontrare l'utilizzo di questa tematica.

CONCLUSIONE

La prima cosa su cui mi sono soffermato, prima di iniziare a scrivere il trattato, è stato chiedermi come mai troppo spesso non si diano le giuste importanze a determinate tematiche che sembrano inutilizzabili e non rilevati, ma che infine si rilevano fondamentali in determinati campi e in particolari contesti.

Un esempio tra tutti è proprio la ricerca dell'ottimo e il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che se lo si va ad analizzare e studiare senza apportare degli esempi (in cui queste tematiche possano essere utilizzate), se ne può sottovalutare il contenuto e la reale importanza.

Proprio per questo il punto cruciale del trattato deve si essere l'introduzione e la spiegazione della ricerca di ottimo e dei moltiplicatori di Lagrange, ma deve sostanzialmente render noto come questi temi siano fondamentali nella vita di tutti giorni, sia nel singolo, sia nell'impresa.

Quindi il focus principale che si è cercato di trasmettere è sostanzialmente quello di cercar di dare più importanza possibile a questi due temi a cui troppo spesso non gli si viene fornito il giusto peso (perché non si comprende a pieno la loro importanza).

BIBLIOGRAFIA

Barozzi G.C. e Corradi C. 1997. Matematica generale per le scienze economiche.

De Marco G., 1999. Analisi due. Bologna: Zanichelli.

Enciclopedia europea, volume IV, 1977. Milano: Garzanti

Simon C.P. e Blum L.E., 2015. Matematica per le scienze economiche, Egea

Katz M., Rosen H., Bollino C.A. e Morgan W., 2011. Microeconomia. McGraw-Hill.

Buratto A., Grosset L. e Viscolani B., 2017. Ottimizzazione Dinamica, Modelli. Economici e Gestionali, McGraw-Hill.

Vercellis C., 2008. Ottimizzazione. Teoria, metodi e applicazioni. McGraw-Hill

Grippo L. e Sciandrone M., 2011. Metodi di ottimizzazione non vincolata, Springer

Colorni A., Baldissera C. e Ceri S., 1981. Metodi di ottimizzazione e programmi di calcolo, Clupguide.

Schoen F., 1991, Teoria e metodi di ottimizzazione lineare, Carocci.

Impedovo M., 2005. Matematica generale con il calcolatore, Springer

RINGRAZIAMENTI

Infine, vorrei ritagliare un piccolo spazio per ringraziare tutte quelle persone che mi hanno aiutato e sostenuto in questo percorso.

In primis, vorrei ringraziare il Prof. Luca Guerrini, Relatore di questa Tesi di laurea, per la sua disponibilità, per il suo supporto e per la comprensione fornita.

In seconda battuta vorrei ringraziare mio padre e mia madre per il sostegno espresso negli anni, per le spese sostenute da loro per farmi raggiugere questo obbiettivo, e per essermi stati accanto, nel bene e nel male, sia nei momenti felici, che nei momenti tristi.

Ringrazio mia sorella Aurora, che si è sempre dimostrata presente nel momento del bisogno, e che ha sempre cercato di tranquillizzarmi e di assecondarmi nelle mie scelte.

Ringrazio la mia ragazza Aurora e la sua famiglia, per la continua e costante presenza da loro fornita e dimostrata nel corso degli anni, come ho sempre detto vi considero parte di me e della mia famiglia.

Ringrazio mio zio, mia zia, i miei cugini, e tutti i familiari che non hanno mai dubitato di me, anche quando ero io stesso a farlo.

Ringrazio infine tutti gli amici, da Daniele e Arianna con cui ho intrapreso e finito insieme questo percorso, a tutti gli altri che nonostante avessimo percorsi differenti

si sono sempre mostrati interessati nel sapere come stessi proseguendo il mio cammino di studio.

Dedico questo risultato a Marziano e Serenella (i miei nonni) che mi hanno sempre assistito nel mio percorso di studio.

Mi dispiace che in questo momento così importante per me, e così tanto atteso anche da voi, voi non ci siate.

Festeggiare questo traguardo senza la vostra presenza fa perdere valore a tutto ciò.

Vi ringrazio per tutto, e spero che ad oggi voi siate fieri di me, come io lo sono di voi.