



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Biomedica

**Termofluidodinamica delle malattie infettive: analisi delle forze agenti
sulle particelle di fluido mucosalivare.**

**Thermofluid dynamics of infectious diseases: analysis of the forces acting
on the mucous membrane fluid particles.**

Relatore:

Prof. Valerio D'Alessandro

Tesi di Laurea di:

Martina Aoife Greenwood

A.A. 2021/2022

INDICE

1. Introduzione.....	4
2. Conformazione del COVID-19.....	5
3. Caratterizzazione delle droplets.....	6
3.1 Composizione.....	7
3.2 Dimensioni e velocità in prossimità della cavità orale.....	9
3.3 Analisi del tempo di caduta.....	14
3.4 Metodi di formazione.....	15
4. Introduzione alle forze agenti sulle droplet.....	18
4.1 Ipotesi semplificative per lo studio del moto di una droplet.....	18
4.2 Forze Superficiali.....	19
4.3 Forze Volumetriche.....	19
5. Equazione della quantità di moto per una droplet.....	20
5.1 Forza F_G : combinazione di forza peso o forza di galleggiamento.....	21
5.2 Forza F_D : forza di drag o forza di resistenza aerodinamica.....	22
6. Equazione di Maxey-Riley.....	24
6.1 Stokes Drag.....	27
6.2 Gradiente di Pressione.....	28
6.3 Massa Aggiunta.....	28
6.4 Basset History Force.....	29
7. Campo di validità dell'Equazione di Maxey-Riley.....	33
7.1 Forze dominanti nel caso di $R=1000$	34
7.2 Forze dominanti nel caso di $R=10$	35
7.3 Forze dominanti nel caso di $R=1$	36
7.4 Ruolo della Basset History Force.....	36
8. Conclusioni.....	38
9. Bibliografia.....	40

1. INTRODUZIONE

Negli ultimi anni si è molto sentito parlare di trasmissione aerea di virus, soprattutto dopo la comparsa e la diffusione così rapida del “Coronavirus Disease 2019 (Covid-19)” causato da "Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2)".

Si è notato che tossire, starnutire e anche attività semplici come il parlare e il respirare provocano la produzione di particelle di saliva che rimangono disperse nell'aria per un determinato periodo di tempo. Il problema, oggetto del nostro studio, si pone quando queste particelle di saliva, che chiameremo Droplets, contengono virus.

Sarebbe in questo caso opportuno andare a studiare i vari fenomeni che caratterizzano l'evoluzione del cloud di particelle che viene immesso nell'aria da una persona infetta e valutare la fluidodinamica dell'aerosol, che può rimanere fluttuante nell'aria o può depositarsi sulle superfici, al fine di determinare il tempo di sopravvivenza del virus all'interno delle particelle e la quantità di tempo in cui le particelle di saliva rimangono in aria.

Nell'analisi della trasmissione di particelle, sia virulente che non, hanno un ruolo importante le forze agenti su ogni singola particella infetta, il processo evaporativo in cui vengono coinvolte, la convezione e la cristallizzazione.

Per semplificare l'analisi possiamo considerare trascurabili eventuali correnti d'aria esterne e la velocità di movimento delle particelle stesse.

In questo studio ci concentreremo soprattutto sulle forze agenti su una singola droplet, per capire come queste intervengono sul moto della droplet e che ruolo hanno sull'andamento nel tempo della particella.

2. CONFORMAZIONE DEL COVID-19

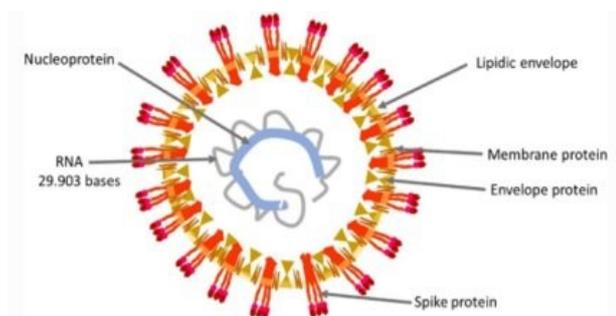


Fig. 1 Illustrazione schematica della struttura del virus SARS-CoV-2.

Il coronavirus è stato scoperto per la prima volta e isolato da un paziente apparentemente affetto da un semplice raffreddore nel 1966. Nel 2019, la diffusione molto rapida di un nuovo coronavirus ha allertato la World Health Organization (WHO) che ha dunque dichiarato l'epidemia in Cina una emergenza internazionale di salute pubblica. Il SARS-CoV-2 è un nuovo microrganismo proveniente dalla sottofamiglia orthocoronavirinae che causa perdita dell'olfatto e infezioni respiratorie e gastrointestinali nei pazienti affetti.

Il Coronavirus è una particella sferica oleosa, con un diametro di 0,125 (0,05–0,2) μm . Il guscio esterno (il pericapside) è costituito da tre glicoproteine strutturali: Spike, Envelope e Membrane e un rivestimento lipidico. La grande proteina Spike (S), che sporge sullo strato esterno, è costituita da due domini, S1 e S2. Il dominio

S1 più esterno, una regione nota come RBD (Receptor Binding Domain), contiene un'area che consente il legame del virus con le cellule umane. Sulla superficie di SARS-CoV-2, tre glicoproteine S si aggregano per formare un omotrimerico. Numerosi omotrimeri che sporgono al di fuori del pericapside danno origine ad un aspetto simile a una corona, da cui il nome Coronavirus.

All'interno del pericapside è presente un RNA a senso positivo a filamento singolo contenente 30.000 basi, un genoma virale a RNA molto grande (Chan et al. 2020). Una quarta proteina strutturale del virus, la proteina nucleocapside, avvolge l'RNA del virus mantenendolo stabile all'interno del pericapside.

3. CARATTERIZZAZIONE DELLE DROPLETS

Le droplets contenenti virus possono avere varie dimensioni e velocità a seconda della modalità di espulsione da parte del soggetto infetto: possono entrare nell'ambiente esterno tramite il respirare, parlare, tossire o starnutire. Queste particelle provengono dal tratto respiratorio in cui si trovano ad una temperatura di 31°C e un'umidità relativa quasi satura. Alcune di queste sono molto piccole e dunque rimangono nell'aria per diverso tempo, in cui si pongono in equilibrio con l'ambiente esterno e perdono acqua se l'umidità dell'ambiente esterno è minore del 100%.

Le caratteristiche dettagliate delle droplet nell'ambiente esterno, in cui sono soggette ad evaporazione, non sono del tutto chiare. Alcuni modelli di trasporto e

vitalità dei virus si basano sull'assunzione che il liquido di trasporto può essere considerato acqua, ma questa semplificazione ignora la complessa composizione del fluido respiratorio. I componenti della saliva, infatti, formano il microambiente del virione e non possono essere trascurati. Cambiamenti di concentrazione e fase delle maggiori componenti delle droplet (sale, proteine, e tensioattivi) possono influire sulla vitalità degli agenti patogeni in esse contenuti. Per compiere gli studi sono state generate droplet da una soluzione acquosa contenente NaCl (9 g l^{-1} , concentrazione fisiologica), mucina (3 g l^{-1} di mucina gastrica suina di tipo III, usata come surrogata della mucina umana, dal momento in cui hanno simili proprietà meccaniche) e 1,2-dihexadecanoyl-sn-glycero-3-phosphocholine (DPPC, 0.5 g l^{-1}). La DPPC è uno tra i fosfolipidi tensioattivi polmonari più abbondanti, che va a ridurre la tensione superficiale durante la respirazione. Dunque, sono stati usati NaCl, mucina e DPPC per rappresentare sali, proteine e tensioattivi, rispettivamente

3.1 Composizione delle droplets

Le droplets contenenti virioni sono caratterizzate da una struttura sferica molto piccola, dell'ordine di qualche nanometro. Partendo dall'esterno della particella andiamo ad analizzare le varie componenti:

- *Glicoproteina S ("spike")*: tre glicoproteine S si legano a formare un trimero; i trimeri di questa proteina si legano a formare una specie di

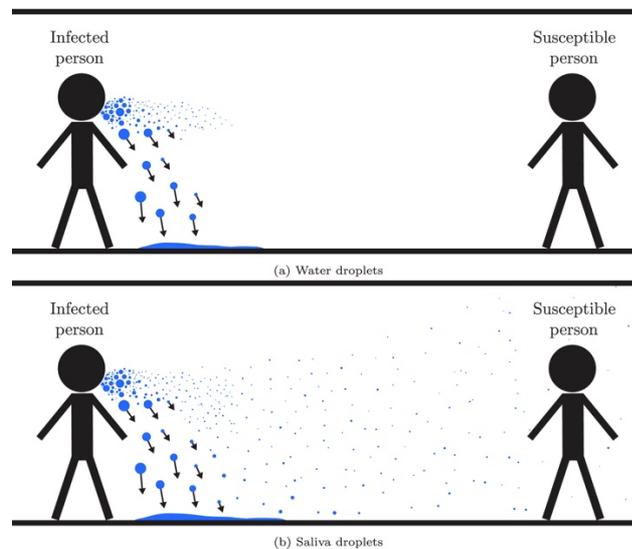
anello che avvolge il virione. È proprio la glicoproteina S a determinare la specificità del virus per le cellule epiteliali del tratto respiratorio, è infatti responsabile della fusione della membrana virale con la membrana della cellula ospite. Proprio in questo modo il virus riesce ad introdursi nelle cellule dell'organismo aggredito e diffonderci il suo genoma

- *Proteina M*: è la proteina di membrana che interagisce con il complesso RNA-proteina all'interno del virione
- *Dimero emoagglutina-esterasi (HE)*: proteina del rivestimento che ha un ruolo importante nel rilascio del virus nella cellula ospite
- *Proteina E*: aiuta la glicoproteina S ad allacciarsi alla membrana della cellula bersaglio
- *Envelope*: rivestimento del virus, chiamato anche pericapside. È l'involucro posto attorno al capsido del virus: è formato da fosfolipidi e glicoproteine.
- *RNA e proteina N*: il genoma del coronavirus ha un solo filamento di RNA a polarità positiva. L'RNA dà origine a 7 proteine virali e si associa alla proteina N che ne aumenta la stabilità.

Inoltre, grazie agli studi di Van Doremalen et al. Si è scoperto che i virioni all'interno delle droplets possono sopravvivere per un massimo di 3 ore, con vita media di 1.1/1.2 ore.

3.2 Dimensioni e velocità in prossimità della cavità orale

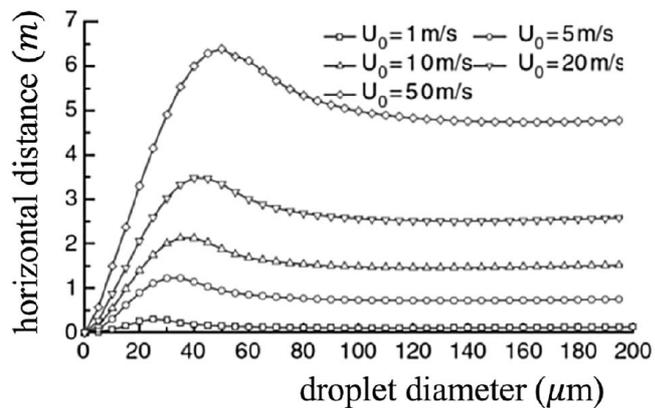
È possibile classificare le gocce in due categorie: aerosol se caratterizzate da un diametro inferiore ai 5 micrometri, o droplets di diverse dimensioni se hanno un diametro maggiore. Le droplets di grandezza maggiore tendono a cadere più velocemente sotto l'effetto della forza di gravità e di solito ricadono entro uno o due metri, ma essendo le più grandi contengono anche maggiori quantità di particelle patogene. Nonostante abbiano il maggior contenuto di particelle virulente, rimane comunque difficile essere contagiati da queste droplets perché appunto per le loro dimensioni fanno fatica a penetrare profondamente nel tratto respiratorio.



Le droplets più piccole invece, essendo anche più leggere tendono a rimanere più tempo sospese in aria, soprattutto i loro nuclei secchi, chiamati 'droplet nuclei', perché il contenuto di acqua evapora. Il rischio quindi di essere contagiati da queste particelle è nettamente più alto e c'è anche il

rischio di essere contagiati respirando queste piccole particelle a distanze superiori ai due metri.

La distanza orizzontale percorsa dalle droplet prima di cadere o evaporare è anche fortemente influenzata dalla velocità iniziale del cloud, oltre che ovviamente dalla dimensione delle droplet.



Nel grafico, infatti, si può notare che il diametro delle droplet che raggiungono la massima distanza aumenta da 30 μm a 50 μm , per velocità che vanno da 1 m/s a 50 m/s, rispettivamente.

Essendo quindi la grandezza di fondamentale importanza nello studio della trasmissione delle droplet, diventa fondamentale andare a studiare la dimensione delle droplets espulse tramite azioni respiratorie.

Negli scorsi decenni sono state utilizzate diverse tecniche per misurare i profili dimensionali delle droplet, ma la più recente e per il momento la più funzionale è stata la tecnica di imaging infero metrico. Questa utilizza immagini fuori fuoco delle droplets anziché immagini a fuoco in modo tale da ridurre il requisito di ingrandimento. Le proprietà di scattering delle

droplets sotto l'illuminazione di radiazione ottica coerente sono poi analizzate utilizzando la "Mie scattering theory" per determinarne le dimensioni. Questo è spesso chiamato metodo IMI (inferometric Mie imaging). Grazie a questo e al PIV (particle image velocimetry) è possibile stabilire la grandezza e la velocità delle droplets, ad esempio, durante il parlare e il tossire, il numero totale delle droplets emesse e la loro concentrazione.

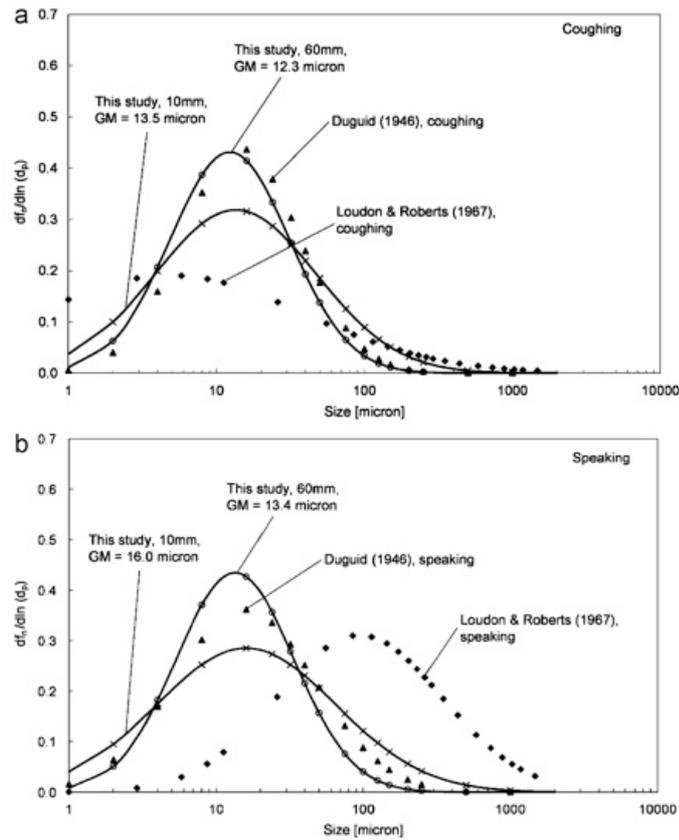
La massima velocità dell'aria nel tossire, per un uomo è 13.2m/s e per una donna è 10.2 m/s, dunque la media velocità dell'aria nel tossire è 11.7 m/s.

Nel parlare invece la velocità massima dell'aria per un uomo è 4.6 m/s mentre per una donna è 3.6 m/s che dà una media di 3.9 m/s.

Size range (μm)	Size class (μm)	Speaking (averaged number per person, counting 1-100 for 10 times)				Coughing (average number per person, coughing 50 times)			
		10mm	S.D.	60mm	S.D.	10mm	S.D.	60mm	S.D.
2-4	3	1.7	1.62	4.6	3.41	4.0	3.46	3.5	2.28
4-8	6	26.8	8.94	16.1	3.28	55.0	15.88	17.6	7.47
8-16	12	9.2	4.67	6.9	3.35	20.4	15.44	6.5	5.15
16-24	20	4.8	4.07	4.3	2.95	6.7	4.60	2.8	2.98
24-32	28	3.2	2.36	2.6	2.07	2.5	2.42	1.4	1.71
32-40	36	1.6	1.03	1.9	0.74	2.4	2.37	0.6	0.97
40-50	45	1.7	0.90	1.0	0.47	2.0	2.67	0.2	0.48
50-75	62.5	1.8	0.98	1.4	0.97	2.0	1.41	0.9	2.16
75-100	87.5	1.3	0.65	1.2	0.79	1.4	1.84	0.5	0.85
100-125	112.5	1.7	1.01	1.2	0.92	1.7	1.77	1.0	1.56
125-150	137.5	1.6	1.03	0.4	0.70	1.6	1.84	0.7	1.25
150-200	175	1.7	1.01	1.0	0.94	4.4	2.80	0.6	0.67
200-250	225	1.5	0.82	0.4	0.52	2.5	1.84	0.5	1.07
250-500	375	1.4	0.50	0.6	0.70	2.1	1.20	0.9	0.82
500-1000	750	0.5	0.82	0.1	0.32	1.4	0.97	0.4	0.71
1000-2000	1500	0.0	0.00	0.0	0.00	0.0	0.00	0.0	0.00

Nella tabella vediamo la quantità media di droplet espulse da una persona durante il parlare e il tossire a due diverse distanze dalla cavità orale. La quantità di droplet espulse durante il tossire sono state calcolate dopo 50 colpi di tosse, mentre la quantità di droplet prodotte durante il parlare sono

state calcolate facendo contare il volontario 10 volte da 1 a 100. Questo paragone tra le due distanze ci serve per capire che abbiamo maggiore accuratezza se studiamo la grandezza delle droplet a distanze minime dalla cavità orale, perché a distanze maggiori sono più facilmente soggette ad evaporazione. Le droplets sono state classificate in 16 classi di dimensioni come fatto da Duguid: classi di dimensioni più piccole erano utilizzate per indicare dimensioni più piccole delle droplet. Nel tossire e nel parlare, la classe di dimensioni che ha il maggior numero di droplets espulse è stata 6 micrometri, ovviamente ci sono state più droplet espulse nel tossire che nel parlare. In media sono state espulse circa 110 droplets dopo 50 colpi di tosse a 10mm di distanza dalla cavità orale, numero che è invece sceso a 42 a 60mm. Nel parlare invece c'è stata un'espulsione media di 61 droplets a 10mm di distanza dalla cavità orale e di 40 a 60mm.



Nelle figure possiamo rispettivamente vedere la distribuzione delle dimensioni delle droplet nel tossire e la distribuzione delle grandezze delle droplet nel parlare. I profili delle dimensioni delle droplet misurate sono presentati in termini di $\frac{df_n}{d \ln(d_p)}$ e sono adattati alla distribuzione log – normale come si può vedere nelle figure. Inoltre, sono inseriti la media geometrica (GM) dei diametri e i risultati ottenuti da Duguid (1946) e Loudon e Roberts (1967). Questa figura ci suggerisce che l’espulsione di aria a maggiore velocità durante il tossire potrebbe produrre particelle più piccole rispetto a quelle prodotte durante il parlare, questo potrebbe essere dovuto ad una rapida evaporazione delle droplets soggette a velocità più alte. Dopo tutti questi studi si è arrivato a dire che la media geometrica del

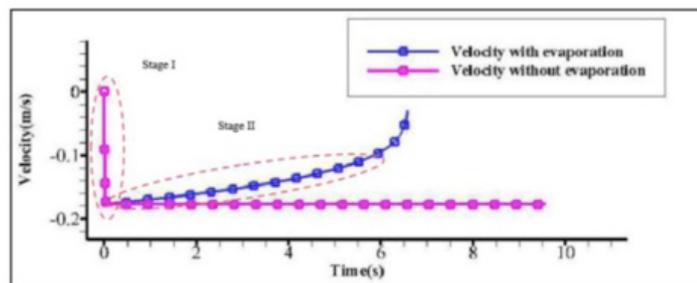
diametro di droplets espulse durante il tossire è di 13.5 micrometri e quella di droplets espulse durante il parlare è di 16.0 micrometri. Il numero totale di droplets espulse durante un colpo di tosse sono tra le 947 e le 2085, mentre nel parlare sono tra le 112 e le 6720.

3.3 Analisi del tempo di caduta

L'analisi del tempo di caduta di una droplet è basata sulla dinamica verticale: la droplet è soggetta a forza di gravità e forze di drag e cade a terra. Generalmente, per determinare un certo tempo di caduta c'è bisogno di una altezza di caduta che viene considerata essere, in media, 1.6m.

Per questa analisi è stata utilizzata una droplet di diametro 80 μm immessa in un ambiente esterno avente temperatura 25° C a velocità iniziale 0m/s.

I cambiamenti della velocità verticale sono mostrati nel grafico seguente.



La linea rosa di raffigura la velocità senza evaporazione, dunque rappresenta una caduta che non considera variazioni del diametro delle droplet. La linea blu, invece, raffigura la velocità con evaporazione e dunque rappresenta un moto complesso che considera l'evaporazione della

droplet. Il movimento verticale di una droplet può essere diviso in due momenti:

1. Il primo momento ha durata molto breve: circa 0.12 sec. In questo stadio la droplet è accelerata dalla forza di gravità e, come aumenta la velocità, aumenta la forza di drag. Quando la velocità relativa tra droplet e ambiente esterno raggiunge un certo valore, la forza di gravità e la forza di drag si bilanciano per la prima volta. A causa della brevità di questa prima fase, il diametro subisce cambiamenti minimi.
2. La durata della seconda fase è decisamente maggiore rispetto alla prima. Durante questa il diametro della particella si riduce a causa dell'evaporazione dopo che è raggiunta la velocità di equilibrio. La variazione del diametro ha un effetto importante sulla velocità di equilibrio della droplet che gradualmente decresce.

3.4 Metodi di formazione delle droplets

La formazione di goccioline deriva da una serie di processi dipendenti da una varietà di fattori. In primo luogo, il tipo di evento espiratorio: infatti i diversi eventi espiratori (tosse, starnuto, linguaggio) sono caratterizzati da velocità di flusso e composizione delle nubi che variano significativamente.

In secondo luogo, l'interazione tra i vari fluidi presenti nell'apparato respiratorio gioca un ruolo cruciale. Infatti, le vie aeree umane, nei primi 15 rami circa, sono ricoperte da un doppio strato liquido con una coperta di

muco esterna sovrapposta a uno strato di siero interno. Il siero è un fluido newtoniano, mentre il muco è un materiale complesso con proprietà viscoelastiche, snervamento e comportamento tissotropico. La reologia non newtoniana dei fluidi fisiologici è un serio ostacolo alla modellazione della formazione di goccioline attraverso metodi numerici adeguati. Questa difficoltà si aggiunge ad altre, in relazione alla modellazione numerica della turbolenza nella fase jet/puff. Lo spessore del doppio strato è tipicamente dell'ordine di 5–10 μm nelle grandi vie aeree. Lo strato liquido ha un effetto lubrificante protettivo per le cellule sottostanti nonché una funzione di intrappolamento per particelle inalate e microbi pericolosi. Il processo di rimozione dello strato di muco svolge un ruolo difensivo importante per i polmoni. Vari meccanismi contribuiscono a questo processo, alcuni dei quali direttamente rilevanti per la generazione di goccioline espulse da eventi espiratori: la clearance gravitazionale e la propulsione ciliare.

La formazione di goccioline è associata a eventi più violenti.

Osserviamo innanzitutto che, in condizioni normali, la velocità dell'aria nella trachea (una via aerea con un diametro di 14 mm) è di circa 6,5 m/s (Ross et al. 1955), con valore di picco misurato della portata di 1 l/s. Quando una persona tossisce questi valori aumentano notevolmente: la portata di picco raggiunge valori superiori a 7 l/s. Con la stessa area della sezione trasversale della trachea, ciò implicherebbe una velocità dell'aria di circa 46,5 m/s. Questi valori accrescono ulteriormente la necessità di tener

conto che la tosse è associata al cedimento della trachea con conseguente riduzione del suo diametro, che quasi si dimezza. Ciò suggerirebbe che la velocità dell'aria potrebbe raggiungere picchi superiori a 200 m/s e numeri di Reynolds intorno a 2×10^5 che sarebbero sicuramente associati a un carattere turbolento del flusso d'aria.

Un flusso d'aria caratterizzato da velocità dell'ordine delle decine di m/s è potenzialmente in grado di destabilizzare l'interfaccia aria-muco attraverso il noto meccanismo dell'instabilità idrodinamica di Kelvin-Helmholtz. In sostanza, il flusso d'aria genera un taglio all'interfaccia aria-muco che è sufficientemente intenso da consentire la crescita di perturbazioni essenzialmente viscide sotto forma di onde interfacciali. La loro ampiezza può crescere così tanto che il muco destabilizzato subisce un processo di frammentazione e atomizzazione in goccioline. L'instabilità di Kelvin-Helmholtz non è però l'unico meccanismo che può portare alla frammentazione dello strato di muco. Un ulteriore fattore è rappresentato dalla cosiddetta instabilità di Plateau-Rayleigh. Questa instabilità spiega il fenomeno osservato sperimentalmente da Plateau per cui un flusso d'acqua sufficientemente lungo in caduta verticale si rompe in gocce. Rayleigh (1879) ha mostrato che l'instabilità deriva dall'effetto della tensione superficiale all'interfaccia aria-liquido. Trascurando gli effetti viscosi, la lunghezza d'onda delle perturbazioni più instabili risulta essere uguale alla circonferenza della colonna d'acqua in caduta. Un

meccanismo simile può verificarsi nelle vie aeree umane: una piccola perturbazione dell'interfaccia aria-muco può crescere abbastanza da consentire all'interfaccia di raggiungere l'asse del condotto cilindrico. In queste condizioni, le vie aeree sono occluse (Romanò et al. 2019) e l'occlusione può propagarsi fino a disintegrarsi in piccole goccioline.

4. INTRODUZIONE ALLE FORZE AGENTI SU UNA DROPLET

4.1 Ipotesi semplificative per lo studio del moto di una particella

Si può comprendere molto della meccanica degli aerosol, dove con il termine aerosol si fa riferimento ad una serie di composti sospesi in aria con dimensioni molto variabili (dal millesimo di micrometro al millimetro), dallo studio del moto di una singola particella in un fluido.

Per studiare al meglio il moto di una particella in un fluido si fanno delle considerazioni che vanno a semplificare il modello:

- si assume la particella di forma sferica
- si suppone che la densità della particella sia molto maggiore della densità del fluido in cui è immersa ($\rho_{particella} \gg \rho_{fluido}$): semplifica l'analisi perché la drag force è molto maggiore di qualsiasi altra forza

applicata sulla particella dal fluido. Se la densità della particella fosse non troppo maggiore della densità del fluido, diventerebbero non trascurabili una serie di forze applicate dal fluido alla particella e l'analisi si farebbe più complessa.

4.2 Forze superficiali

Questa tipologia di forze riguarda l'interazione diretta tra le fasi e tra queste ricordiamo:

- *Drag Force*: forza che l'aria imprime direttamente sulla droplet. È anche chiamata resistenza aerodinamica
- *Lift Force*: la fase dispersa (gli aerosol) riceve dalla matrice continua (aria) una spinta proporzionale alla sua velocità in direzione perpendicolare ad essa. Questa risulta dalla teoria del galleggiamento.
- *Inertial force*: può anche essere trascurata e rappresenta l'inerzia della massa d'aria spostata dalla droplet nel suo tragitto.

4.3 Forze volumetriche

Queste forze sono ad esempio di natura elettromagnetica e chimica ma vale la pena nominare solo la più importante ovvero la forza di gravità. Analizzandola è possibile arrivare a 2 conclusioni:

- $f_{sup} > f_{vol}$: se le forze superficiali che spingono la droplet verso l'alto superano in valore assoluto la forza di gravità si parla di particella airborne.

Questo avviene soprattutto per particelle con diametri molto piccoli e dunque in questo caso la particella tende a seguire il moto del fluido in cui è immersa.

- $f_{sup} < f_{vol}$: se le dimensioni superano un valore critico, la forza di gravità ha la meglio e la particella avrà un moto parabolico verso il basso tanto più stretto quanto maggiore sarà il volume: queste sono le heavy droplets e rappresentano la maggioranza di particelle emesse dall'essere umano

5. EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UNA DROPLET

Andiamo a studiare come intervengono le forze nel moto della particella partendo dall'equazione della quantità di moto per una droplet che, seguendo il II principio della dinamica ($F = ma$), sarebbe:

$$m \frac{dV}{dt} = F_G + F_D$$

con:

- F_G combinazione della forza peso e della forza di galleggiamento
- F_D forza di drag o forza di resistenza aerodinamica
- m massa della particella

- $\frac{dV}{dt}$ accelerazione della particella

5.1 Forza F_G : combinazione di forza peso e forza di galleggiamento

La forza F_G è data dalla combinazione di forza peso e forza di galleggiamento.

Queste sono due forze di cui si parla molto, vediamo di cosa trattano:

- La forza peso è la forza che un campo gravitazionale esercita su un corpo avente massa. Dunque, descrive l'interazione gravitazionale che agisce tra due oggetti qualsiasi dotati di massa. È stata definita da Isaac Newton nel libro "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" nel 1687. La forza peso è $F_{peso} = mg$.
- Il galleggiamento in fisica è la condizione di equilibrio che hanno i corpi immersi o parzialmente immersi in un fluido, in cui la forza peso viene bilanciata dalla spinta di Archimede agente sul corpo. La condizione, dunque, per cui un corpo galleggia in un fluido è che la forza peso sia perfettamente bilanciata dalla spinta di Archimede, in questo modo le due forze parallele e di modulo uguale ma opposto si annullano e il corpo rimane in equilibrio statico. $F_{archimede} = \rho_f Vg$.

Dunque, la forza F_G sarà:

$$F_G = F_{archimede} + F_{peso} = \rho_f Vg - mg.$$

Scrivendola in maniera più ordinata avremo:

$$F_G = \rho_f Vg - mg = mg \left(\frac{\rho_f Vg}{mg} - 1 \right) = mg \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_p} \right)$$

con

- ρ_f la densità del fluido
- ρ_p la densità della particella
- V il volume della particella
- g accelerazione di gravità
- m massa della particella = $\rho_p V$

5.2 Forza di drag o forza di resistenza aerodinamica F_D

Questa forza si genera quando un corpo si muove in un fluido.

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho_f v_{rel}^2 = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi d^2}{4} \rho_f v_{rel}^2$$

Ma vediamo come si ricava: conoscendo il coefficiente di drag C_D si può

facilmente risalire alla forza: $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_f v_{rel}^2 A}$

La forza aerodinamica che si genera ha verso opposto alla velocità relativa quindi

avremo bisogno del versore $\hat{v} = \frac{v - v_{fluido}}{|v_{rel}|}$ per definirne la direzione.

Quindi la versione finale della Forza di drag sarà:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_f v_{rel}^2 A \hat{v}$$

con

- ρ_f densità del fluido
- v_{rel} velocità della particella relativa al fluido in cui è immersa
- A area della sezione trasversale della particella sferica $= \frac{\pi d^2}{4}$ dove d è il diametro della particella

- C_D coefficiente di resistenza aerodinamica o coefficiente di drag: è un coefficiente adimensionale usato per misurare la resistenza aerodinamica di un corpo in moto in un fluido e dipende fortemente dal numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho_f v_{rel} d}{\mu_f}$$

con ν viscosità cinematica del fluido che circonda

la particella $= \frac{\mu}{\rho}$ dove μ è la viscosità dinamica del fluido e ρ è la densità

del fluido, v_{rel} la velocità della particella relativa al fluido in cui è immersa

e d diametro della particella. La forza di Reynolds determina il tipo di moto

in un fluido: flusso laminare o turbolento, fisicamente è il rapporto tra le

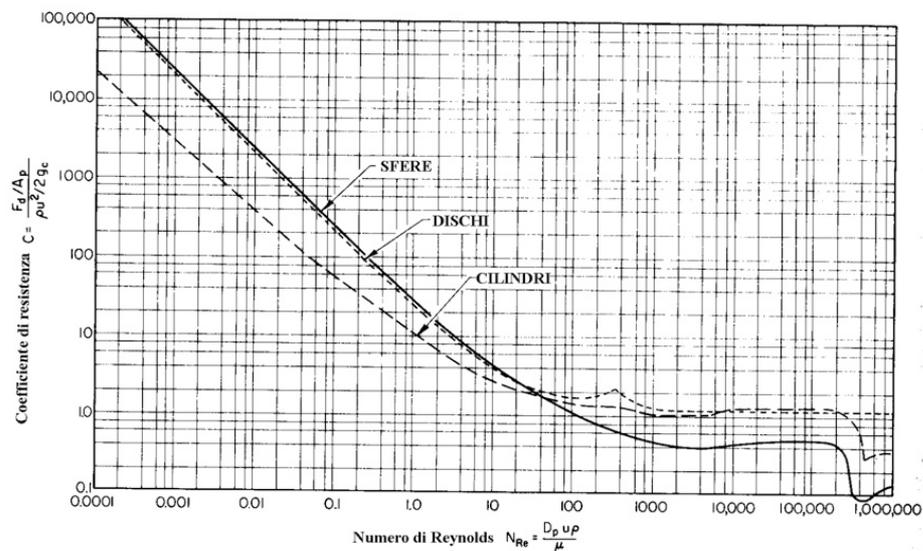
forze che spingono in avanti il fluido (forze d'inerzia⁹ e quelle che tendono

a rallentarlo (forze viscoso o di attrito)).

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} & \text{se } Re < 1 \\ \left(\frac{24}{Re}\right) (1 + 0.15Re^{0.687}) & \text{se } 1 < Re < 1000 \\ 0.44 & \text{se } Re > 1000 \end{cases}$$

Avendo, in genere, le particelle piccoli diametri e basse velocità v_{rel} , il

$Re < 1$.



L'andamento del C_D in funzione del numero di Reynolds è espresso in questo grafico che ci illustra i diversi coefficienti di resistenza aerodinamica di un cilindro, di un disco e di una sfera che vengono investiti

6. EQUAZIONE DI MAXEY – RILEY

Molti scienziati dopo Stokes hanno analizzato il moto di una sfera in un fluido quiescente e in loro onore l'equazione che descrive il moto di una particella sferica in un fluido quiescente è stata chiamata equazione BBO (Basset-Boussinesq-Oseen). Boussinesq era ormai ben consolidato nei fluidi. Sempre incuriosito dai comportamenti viscosi, quindi, affrontò un problema già considerato da Stokes: il movimento di un corpo solido all'interno di un fluido viscoso a riposo. Si trattò di stimare gli sforzi intorno al corpo dovuti alla disuniformità del movimento. Propose una formula basata sull'approssimazione di Stokes, ma al quale aggiunse

un termine correttivo. Questa formula sarà trovata 3 anni dopo da Basset e dunque la forza osservata da quest'ultimo venne chiamata "Forza di Basset". Molto più tardi lo svedese Carl Oseen darà una terza versione dell'equazione che aveva trovato per risolvere il paradosso di Stokes. L'equazione che governa il moto delle particelle che galleggiano è finalmente nota come "equazione BBO". Ulteriori studi per piccole particelle in flussi non uniformi e instabili a numeri di Reynolds bassi è stata eseguita da Maxey e Riley. Ognuna delle N_p particelle inizialmente immerse nel fluido è tracciata valutando la posizione del centro della particella ad un dato istante di tempo $X(t)$ da cui possiamo trovare $\frac{dX(t)}{dt} = V(t)$. La velocità della particella è generalmente diversa da quella del fluido circostante.

$$\begin{aligned}
m \frac{dV}{dt} &= 6\pi r_p \mu \left[u(X(t), t) - V(t) + \frac{1}{6} r_p^2 \nabla^2 u \right] + m_f \frac{Du}{Dt} + (m_p - m_f)g \\
&+ \frac{1}{2} m_f \left[\frac{Du}{Dt} - \frac{dV}{dt} + \frac{1}{10} r_p^2 \frac{d\nabla^2 u}{dt} \right] \\
&+ 6r_p^2 \rho_f \sqrt{\pi \nu} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d}{d\tau} \left[u(X(t), t) - V(t) + \frac{1}{6} r_p^2 \nabla^2 u \right] d\tau
\end{aligned}$$

dove:

- $u(X(t), t)$ è la velocità del flusso campionata alla posizione della particella
- ρ_f densità del fluido
- ρ_p densità della particella
- r_p raggio della particella
- μ e ν rispettivamente la viscosità dinamica e cinematica del fluido

- $m_p = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_p$ massa della particella
- $m_f = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_f$ massa dell'elemento fluido dello stesso volume
- g accelerazione di gravità

L'equazione di Maxey-Riley obbedisce al II principio della dinamica: $F = ma$ dove m è la massa, a l'accelerazione e F le forze applicate. Qui le forze agenti sulla particella sono rispettivamente la Stokes Drag, il Gradiente di Pressione, la Forza Peso, la Forza di Massa Aggiunta e la Forza di Basset. Andremo ad analizzare ogni forza singolarmente.

Come abbiamo già accennato questa equazione vale per piccole particelle sferiche rigide in flussi non uniformi e instabili, sotto le seguenti condizioni:

- $\frac{r_p}{\eta} \ll 1$ dove η è la scala di lunghezza di Kolmogorov che è una delle più piccole scale utilizzate per descrivere un flusso turbolento. Questo rapporto mi dice che, perché valga l'equazione di Maxey-Riley, la particella deve essere molto più piccola della più piccola struttura del fluido.
- $Re_p = \frac{r_p |V_o - U_o|}{\nu} \ll 1$ dove V_o e U_o sono i moduli delle velocità della particella e del fluido. Questo mi dice che la particella deve avere un creeping flow, ovvero un flusso governato da forze viscosive.

6.1 Stokes Drag

È il primo termine che compare nell'equazione di Maxey-Riley e spiega la forza di attrito viscoso a cui è soggetta una sfera in moto laminare rispetto ad un fluido, con numero di Reynolds piccolo.

La forza di Stokes su una sfera può essere espressa come: $F_D = -6\pi\mu r_p u$.

Poiché una sfera immersa in un fluido è sottoposta alla forza di gravità, alla forza di attrito viscoso del fluido e alla spinta di Archimede, Stokes ottenne che la sfera raggiungeva asintoticamente una condizione di equilibrio per cui si muove a velocità costante (detta velocità terminale di caduta) espressa come:

$$V_T = \frac{2}{9} r_p^2 \frac{\rho_p - \rho_f}{\mu} g$$

Dimostrazione:

$$6\pi\mu r u = mg - \rho_f gV$$

$$6\pi\mu r u = \rho_s gV - \rho_f gV$$

$$6\pi\mu r u = Vg(\rho_s - \rho_f) \text{ con } V = \text{volume della sfera} = \frac{4\pi r^2}{3}$$

$$u = \frac{2r^2}{9\mu} (\rho_p - \rho_f) g$$

La legge di Stokes è basata sul fatto che più il liquido è viscoso, tanto più è bassa la velocità di una sfera lasciata cadere liberamente in tale liquido. Ma una sfera che cade all'interno di un liquido solo per gravità, ad un certo istante del suo percorso, acquista una velocità costante, e ciò si verifica quando la resistenza opposta alla viscosità del liquido è esattamente bilanciata dalla spinta gravitazionale.

6.2 Gradiente di pressione

Rappresenta la forza alla quale è soggetta una sfera di fluido con lo stesso volume della particella nel flusso indisturbato.

La forza del gradiente di pressione è la forza che risulta quando c'è una differenza di pressione su una superficie. Più in generale, una pressione è una forza per unità di superficie. Una differenza di pressione su una superficie implica dunque una differenza di forza che può risultare in un'accelerazione secondo la seconda legge del moto di Newton, se non c'è una forza aggiuntiva per bilanciarla. La forza risultante è generalmente diretta dalla regione di maggiore pressione alla regione di minore pressione. Quando un fluido è in uno stato di equilibrio, il sistema è indicato come in equilibrio idrostatico.

6.3 Massa Aggiunta

Friedrich Bessel propose il concetto di massa aggiunta nel 1828 per descrivere il movimento di un pendolo in un fluido. Il periodo del pendolo nel fluido era aumentato rispetto al periodo del pendolo nel vuoto. Ipotizzò dunque che il fluido circostante aveva aumentato la massa effettiva del sistema.

Nella meccanica dei fluidi la massa aggiunta è l'inerzia aggiunta al sistema a causa della quale si ha un incremento o decremento dell'accelerazione della particella. Questo dovrebbe portare il fluido a muoversi attorno alla particella in modo che questa possa attraversare il fluido, perché ovviamente particella e fluido non

possono occupare contemporaneamente lo stesso spazio. Per semplicità si considera che il fluido si muove scorrendo lungo l'oggetto, ma in verità ogni parte di fluido si muove in varie direzioni con angolazioni differenti.

È una grandezza adimensionale espressa come la massa aggiunta divisa per la massa di fluido dislocato. L'effetto della massa aggiunta è dovuto quindi al fatto che la particella disloca il fluido durante il suo moto. Generalmente questo termine è modellato considerando una massa di fluido aggiuntiva che si muove insieme all'oggetto.

In generale, la massa aggiunta è un tensore del secondo ordine che mette in relazione il vettore di accelerazione del fluido con il vettore di forza risultante sul corpo.

La forza di massa virtuale è $F = \frac{\rho_c V_p}{2} \left(\frac{Du}{Dt} - \frac{dv}{dt} \right)$ quindi la particella viene accelerata come se avesse una massa aggiunta della metà del fluido che sposta e c'è un contributo di forza aggiuntivo dovuto all'accelerazione del fluido.

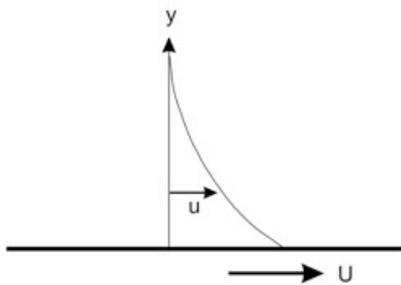
6.4 Basset History Force

La sua espressione analitica è stata studiata indipendentemente da Boussinesq nel 1885 e da Basset nel 1888, la forza di Basset descrive la forza dovuta allo sviluppo dello strato limite in ritardo con il cambiamento della velocità relativa dei corpi che si muovono attraverso un fluido.

Tiene conto degli effetti viscosi e affronta il ritardo temporale nello sviluppo dello strato limite quando la velocità relativa cambia nel tempo. È anche conosciuta con il nome di 'History Term'.

Generalmente è una forza che viene trascurata per la sua complessità, ma può essere sostanzialmente grande quando il corpo viene accelerato ad una velocità elevata.

Per capirla meglio dobbiamo considerare l'accelerazione di una lastra piana rappresentata nella figura successiva.



L'equazione di moto del fluido è: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu_c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

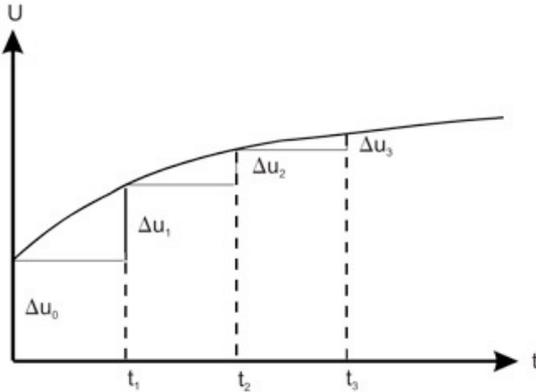
Con condizione iniziale $u(0, y) = 0$ e condizioni al contorno $u(t, 0) = u_0$ e $u(t, \infty) = 0$ dove u_0 è la velocità della lastra piana.

Questa lastra piana, dunque, a seguito di un ingresso a gradino passa da una velocità nulla ad una velocità u_0 . La soluzione all'equazione di moto del fluido sarà $u = u_0 \operatorname{erf}(\eta)$ dove $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu_c t}}$ oppure

$$u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

Lo sforzo di taglio locale è $\tau = \mu_c \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu u_0}{\sqrt{\pi \nu_c t}} = \frac{\sqrt{\rho \mu_c} u_0}{\sqrt{\pi t}}$

Ora assumiamo che una generica variazione temporale della velocità della piastra può essere suddivisa in una serie di gradini come mostrato in figura.



Al tempo t_0 abbiamo una variazione Δu_0 , al tempo t_1 una variazione Δu_1 .

L'effetto cumulato dello sforzo di taglio sarebbe: $\tau = \sqrt{\frac{\rho_c \mu_c}{\pi}} \left[\frac{\Delta u_0}{\sqrt{t}} + \frac{\Delta u_1}{\sqrt{t-t_1}} + \frac{\Delta u_2}{\sqrt{t-t_2}} + \dots \right]$

Per un gradino $\Delta t'$ la variazione di velocità sarebbe $\frac{du}{dt'} \Delta t'$, dunque la precedente

Somma può essere espressa come $\tau = \sqrt{\frac{\rho_c \mu_c}{\pi}} \sum_{n=0}^N \frac{\frac{du}{dt'}}{\sqrt{t-n\Delta t'}} \Delta t'$ dove $N\Delta t'$ rappresenta

l'intervallo di tempo dall'inizio dell'accelerazione al tempo attuale, ovvero da 0 a t .

L'equazione diventa $\tau = \sqrt{\frac{\rho_c \mu_c}{\pi}} \int_0^t \frac{du}{\sqrt{t-t'}} dt'$.

Applicando questo stesso approccio al flusso impulsivo su una sfera con numero di Reynolds basso, Basset trovò che la forza di drag era:

$$F_{Basset,i} = \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \rho_c \mu_c} \int_0^t \frac{d}{dt'} (u_i - v_i) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}$$

Abbiamo detto che la forza di Basset è anche nota con il nome di 'History Term'.

La sua natura 'storica' è infatti evidente: il valore di questa forza dipende dalla 'storia' delle accelerazioni fino al momento attuale.

Come per la massa apparente, è stato proposto da Odar e Hamilton un coefficiente empirico C_B , che moltiplica l'equazione, per esprimere l'effetto dell'accelerazione sul termine di Basset.

Una reinterpretazione di questo coefficiente da parte di Michaelides e Roig suggerisce che C_B non è funzione dell'accelerazione ma del numero di Reynolds e del numero di Strouhal. Si esprimerebbe come:

$$C_B = 1.0 - 0.527 [1 - \exp(-0.14 Re_r Sl^{0.82})]^{2.5}$$

dove il numero di Strouhal è espresso come $Sl = \frac{1}{2\pi f \tau_V}$ con f frequenza di oscillazione.

Reeks e McKee hanno inoltre dimostrato che il termine di Basset deve essere modificato per includere il caso in cui ci siano delle velocità iniziali. Il termine

$$\text{diventa dunque: } F_{Basset,i} = \frac{3}{2} D^2 \sqrt{\pi \rho_c \mu_c} \left[\int_0^t \frac{d}{dt'} (u_i - v_i) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} + \frac{(u_i - v_i)_0}{\sqrt{t}} \right]$$

dove appunto $(u_i - v_i)_0$ è la differenza delle velocità iniziali.

Secondo i calcoli di Hjempfelt e Mockros il termine di Basset e il termine di massa

apparente diventano trascurabili per $\frac{\rho_c}{\rho_d} \sim 10^{-3}$ se $(\frac{\mu}{\rho_c \omega D^2})^{\frac{1}{2}} > 6$, dunque il termine

di Basset non sarebbe importante per una particella di $10 \mu m$ in un flusso oscillante

a meno di 700 Hz.

7. CAMPO DI VALIDITÀ DELLE FORZE DELL'EQUAZIONE DI MAXEY – RILEY

Molte forze agiscono sulle particelle disperse in un flusso turbolento. L'importanza relativa di ogni forza dipende fortemente dai valori dei parametri caratteristici: il rapporto tra le densità $R = \rho_p / \rho_f$ e il numero di Stokes St. Dunque, è stato fatto un sondaggio considerando 10 diverse combinazioni di R e St.

R / St	0.01	0.1	1	10
0.1	1			
1	2	5		
10	3	6	8	
1000	4	7	9	10

La tabella contiene nella prima riga e nella prima colonna rispettivamente i numeri di Stokes e i rapporti di densità usati nelle combinazioni. Gli altri numeri presenti indicano il numero della combinazione (ad esempio il numero 1 rappresenta la combinazione tra numero di Stokes 0.01 e rapporto di densità 0.1).

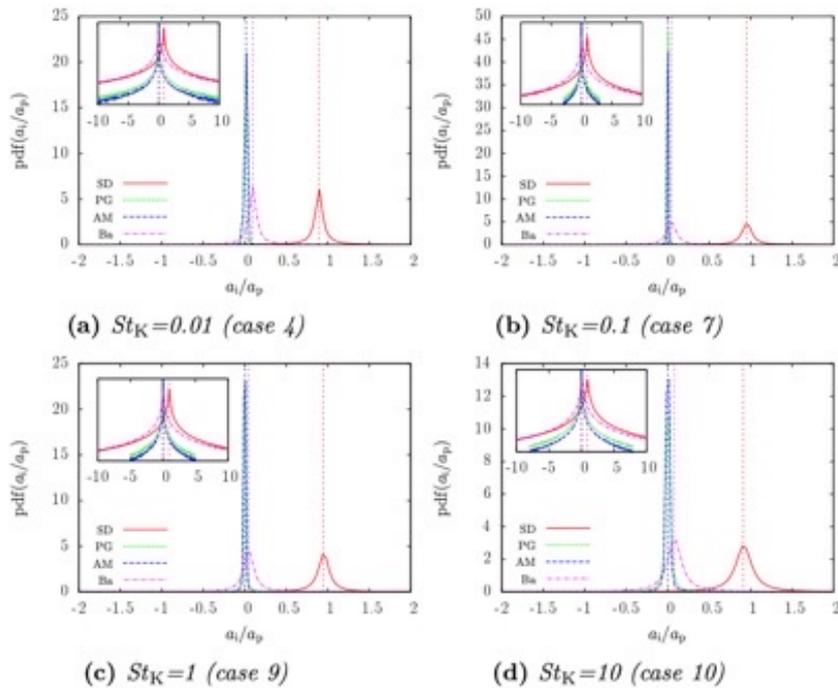
- R=1 e R=10 descrivono il comportamento di piccole particelle solide nei liquidi
- R=1000 è tipico di droplets nei gas

I numeri di Stokes sono selezionati per evitare di avere particelle più grandi delle lunghezze idrodinamiche.

7.1 Forze dominanti nel caso di $R=1000$

Per il più grande rapporto di densità $R=1000$ (proprio di particelle generalmente denominate pesanti), il termine dominante è lo Stokes drag.

Tuttavia, notiamo che la forza di Basset ha sempre una certa rilevanza, seppure piccola.



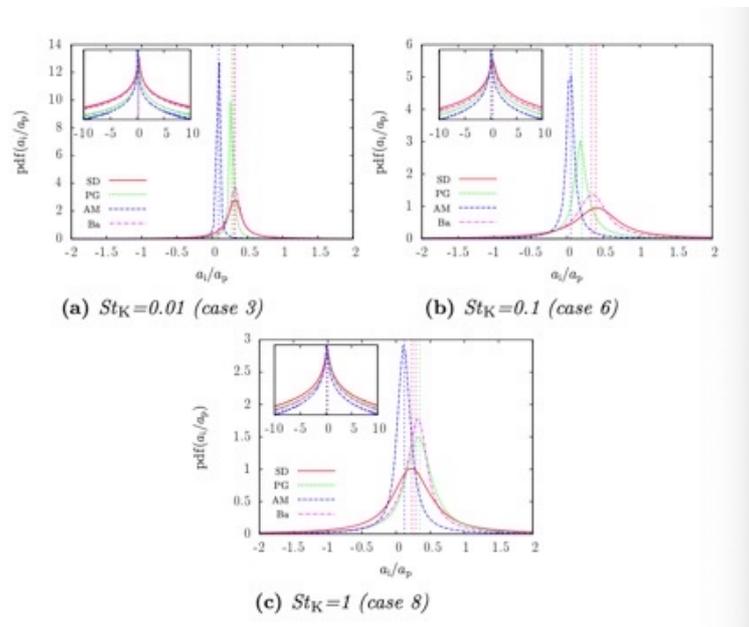
Nei grafici sono illustrate le p.d.f. dei diversi rapporti di accelerazione per particelle con $R=1000$.

La p.d.f. denominata *Probability Density Function* (ovvero la funzione densità di probabilità) è quella funzione il cui valore in un dato campione nello spazio campionario può essere interpretato come una probabilità relativa che il valore della variabile casuale sia vicina a quel campione. Viene usata per specificare la probabilità che la variabile casuale rientri in un determinato intervallo di valori.

Ci concentriamo sulle funzioni densità di probabilità delle accelerazioni perché sono strettamente correlate alle forze: infatti se noi andassimo a dividere ogni accelerazione causata da una forza presente nell'equazione di Maxey-Riley, per la l'accelerazione totale della particella otterremmo: $1 = \frac{a_{SD}}{a_P} + \frac{a_{PG}}{a_P} + \frac{a_{Gr}}{a_P} + \frac{a_{AM}}{a_P} + \frac{a_{Ba}}{a_P}$. Andando a valutare la p.d.f. di ciascuna delle quantità, è data una chiara indicazione della forza dominante: valori attorno ad 1 indicheranno la componente che domina l'accelerazione istantanea della particella.

7.2 Forze dominanti nel caso di R=10

Per rapporti di densità intermedi non abbiamo nessuna forza dominante.

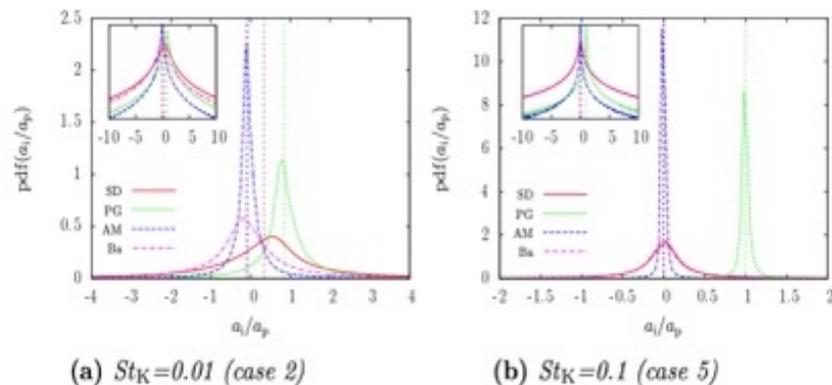


La forza di Basset ha un valore medio piccolo ma non nullo (come per quasi tutti i casi) e anche qui come nella maggior parte dei casi, il termine di Massa Aggiunta ha il valore più piccolo (questo non vale solo per il caso di particelle più leggere

del fluido ovvero il caso in cui $R=0.1$ dove il valore medio del termine Gradiente di Pressione è diverse volte maggiore dell'accelerazione della particella e principalmente la Forza di Basset e la Massa Aggiunte contrastano).

7.3 Forze dominanti nel caso di $R=1$

Per le cosiddette particelle ‘galleggianti neutre’ si ha un comportamento completamente differente che vede come termine dominante il Gradiente di Pressione.



Le particelle tendono ad approssimare il comportamento degli elementi fluidi anche se la Stokes Drag diventa sempre più rilevante man mano che diminuisce il numero di Stokes.

7.4 Ruolo della Forza di Basset

Come già detto, la Basset History Force rappresenta un termine complesso sia dal punto di vista teorico che computazionale. Per questo motivo, spesso, è un termine che viene trascurato. Dunque, potrebbe essere interessante confrontare

gli stessi 10 casi di prima ma con forza di Basset trascurabile. La Stokes Drag sarà il termine che predomina e che maggiormente influisce sull'accelerazione della particella.

- $R=1000$: la Stokes Drag presenta una distribuzione stretta il cui valore medio è circa 1, mentre la distribuzione del Gradiente di Pressione e Massa Aggiunta possono essere approssimate al delta di Dirac centrato in zero. La Stokes Drag, in linea con le supposizioni generali, è il termine dominante che influenza l'accelerazione della particella.
- $R=10$: non troviamo nessun termine dominante. La dinamica della particella emerge dal contributo di tutte le forze. Il Gradiente di Pressione diventa più importante rispetto alla Stokes Drag all'aumentare del numero di Stokes. Qui, inoltre, l'effetto della Basset History Force è rilevante per tutti i numeri di Stokes considerati (infatti la Stokes Drag è fortemente influenzata dalla Basset Force). Dunque, per studiare la corretta dinamica della particella, la Forza di Basset non può essere trascurata per rapporti di densità $R \approx 10$
- $R=1$: per il caso con il numero di Stokes più piccolo, il termine dominante è la Stokes Drag quando la forza di Basset non è considerata, mentre diventa il Gradiente di Pressione per Stokes alti.

8. CONCLUSIONI

Abbiamo visto come per studiare la trasmissione aerea di virus sono molto importanti alcuni fattori come la dimensione delle droplet, la loro velocità di emissione, l'evaporazione che avviene una volta che sono state espulse nell'ambiente esterno e la quantità e concentrazione delle droplet espulse. In particolar modo abbiamo visto quanto la dimensione delle droplet sia decisivo nel metodo di trasmissione: le droplet con diametro maggiore tendono a ricadere più in fretta verso terra, richiamate dalla forza di gravità, mentre le droplet con diametro minore, essendo più leggere tendono a rimanere più tempo sospese in aria. Proprio per questo motivo, paradossalmente, è più facile essere infettati dalle piccole particelle che contengono meno materiale virulento piuttosto che dalle grandi particelle che ne contengono maggiori quantità, anche perché queste ultime, proprio a causa delle dimensioni più grandi faticano a penetrare profondamente nel tratto respiratorio.

Per comprendere meglio l'andamento della droplet nel tempo sono fondamentali invece che le forze che agiscono su di esse: inizialmente si pensava che le forze che vi agissero fossero solo la forza peso, di galleggiamento e la forza di resistenza aerodinamica. Solo grazie ad una serie di studi successivi si scoprì che le forze agenti erano, in verità, molte di più: oltre alle tre già scoperte vi sono la Stokes drag che spiega la forza di attrito viscoso a cui è soggetta la droplet semplificata come una sfera che si muove di moto laminare in un fluido; la forza del gradiente di pressione che risulta quando c'è una differenza di pressione su una superficie;

il termine di massa aggiunta che ci indica come il fluido circostante aumentava la massa effettiva del sistema; infine abbiamo la Basset history force che è la più complessa e proprio per questo viene spesso trascurata. Questa forza tiene conto degli effetti viscosi e affronta il ritardo temporale nello sviluppo dello strato limite quando la velocità relativa cambia nel tempo. Trascurare questa forza non è del tutto corretto. Ognuna di queste forze, infatti, ha un campo di validità, ovvero ci sono delle circostanze in cui alcune forze sono prevalenti rispetto ad altre e questo viene valutato utilizzando il rapporto tra la densità della particella e la densità del fluido:

- Per rapporti di densità alti prevale la Stokes drag, ma anche la forza di Basset ha una certa rilevanza, seppure piccola.
- Per rapporti di densità medi, non abbiamo nessuna forza prevalente. La forza di Basset ha valori piccoli ma non nulli e il valore più piccolo è della massa aggiunta
- Per rapporti di densità piccoli invece la forza di maggior rilevanza è il gradiente di pressione, anche se l'importanza della Stokes drag cresce man mano che diminuisce il numero di Stokes.

9. BIBLIOGRAFIA

Clayton T. Crowe, John D. Schwarzkopf, Martin Sommerfeld, Yutaka Tsuji. *Multiphase flows with droplets and particles (second edition)*.

C.Y.H. Chao, M.P. Wan, L. Morawska, G.R. Johnson, Z.D. Ristovski, M. Hargreaves, K. Mengersen, S. Corbett, Y. Li, X. Xie, D. Katoshevski (2008). Characterization of expiration air jets and droplet size distributions immediately at the mouth opening.

Jianjian Wei PhD, Yuguo Li PhD (2016). Airborne spread of infectious agents in the indoor environment. *American Journal of Infection Control*.

Xu Luo, Baolin Tian, Xinting Zhang, Baoqing Meng (2023). Numerical and theoretical modeling for transmission of droplet carrying virus. *Computers & Fluids*.

Giovanni Seminara, Bruno Carli, Guido Forni, Sandro Fuzzi, Andrea Mazzino, Andrea Rinaldo (2020). Biological fluid dynamics of airborne COVID-19 infection. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali*.

Hualing Zhang, Dan Li, Ling Xie, Yimin Xiao (2015). Documentary Research of Human Respiratory Droplet Characteristics. *9th International Symposium on Heating, Ventilation and Air Conditioning (ISHVAC) and the 3rd International Conference on Building Energy and Environment (COBEE)*.

Warren H. Finlay (2001). *The Mechanics of Inhaled Pharmaceutical Aerosols*. San Diego, California: Academic Press.

Olivieri Stefano, Pralits J.O., Brandt L., Sardina G., Picano F. (2013). Analysis of the Forces Acting on Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence.

M. Parmar, A. Haselbacher, and S. Balachandar (2011). Generalized Basset-Boussinesq-Oseen Equation for Unsteady Forces on a Sphere in a Compressible Flow.

Hassan Ghassemi, Ehsan Yari (2011). The added mass coefficient computation of sphere, ellipsoid and marine propellers using boundary element method. *Polish Maritime research*.

Biesheuvel A., Spoelstra S. (1989). The added mass coefficient of a dispersion of spherical gas bubbles in liquid. *Int. J. Multiphase Flow*.