UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI ECONOMIA "GIORGIO FUÀ"

Corso di Laurea triennale in Economia e Commercio

IL MODELLO DI MARKOWITZ: LA GESTIONE DI PORTAFOGLIO

THE MARKOWITZ MODEL: PORTFOLIO MANAGEMENT

Relatore:

Prof.ssa Bettin Giulia

Rapporto Finale di:

Possanza Jacopo

Anno Accademico 2018/2019

INDICE

INTRODUZIONE

Nel mondo reale, caratterizzato dall'esistenza di incertezza in merito agli eventi futuri, gli individui possono allocare il loro risparmio tra diverse opportunità d'investimento. Nei vari momenti devono risolvere due tipi di problemi: "quanta parte della ricchezza a loro disposizione ripartire tra consumo e risparmio, e come investire la porzione destinata al risparmio"

Nella teoria neoclassica, le scelte di allocazione di risorse scarse tra diversi beni vengono analizzate riducendo tali diversi beni ad una medesima unità di misura: l'utilità prodotta.

Nelle scelte di un investimento variabili determinanti sono il rischio ed il rendimento.

Questi temi sono oggetto della seguente tesi che è divisa in 2 capitoli.

Nel capitolo 1 viene presentata brevemente la teoria keynesiana in merito alla domanda di moneta a scopo speculativo, la quale è stata fondamentale per lo sviluppo delle successive teorie relative all'allocazione della ricchezza da parte degli individui. Nella seconda parte viene illustrata la teoria di Tobin in merito agli atteggiamenti nei confronti del rischio da parte degli investitori.

Gli argomenti trattati nel capitolo 2 riguardano il concetto di trade-off tra rendimento e rischio introdotto da Markowitz, che riprendendo la teoria di Keynes relativa alla domanda di moneta a scopo speculativo, introdusse una prima formulazione della moderna teoria di portafoglio, prendendo in considerazione le scelte di investimento con più titoli.

Capitolo 1

DOMANDA DI MONETA A SCOPO SPECULATIVO

1.1 La triade keynesiana

Un grande contributo in materia di scelta di allocazione della ricchezza, che ha posto le basi in materia di scelte di portafoglio, è stato dato a è Keynes, il quale formula la teoria della domanda di moneta distinguendola in base a tre motivazioni:

- transattive;
- precauzionali;
- speculative.

Il contributo innovativo di Keynes risiede nell`aver ampliato il ruolo della moneta nelle scelte degli operatori e nel rapporto con i mercati. Non viene più domandata solo per fare acquisti di prodotti nella sua funzione principale di mezzo di scambio. Viene così recuperata la funzione della moneta come riserva di valore. La mette in rapporto con il tempo e all` interno di scelte di portafoglio. La domanda di moneta a scopo precauzionale rientra nelle scelte di portafoglio ed è la risultante di scelte consapevoli in relazione alle altre due motivazioni.

La parte più innovativa della triade keynesiana risiede nella domanda di moneta a scopo speculativo. Una certa quantità di moneta può essere tenuta nella speranza di lucrare dei guadagni. Secondo Keynes ogni persona può decidere di tenere la moneta in forma liquida o investirla in obbligazioni. Tale visione è però semplificata, in quanto tiene conto soltanto di due possibili impieghi della ricchezza. Se il soggetto tiene la moneta in forma liquida, egli rinuncia al rendimento del titotlo.

Keynes ha in mente un sistema finanziario caratterizzato da incertezza, la quale influenza il contesto decisionale degli agenti che non possono fare previsioni attendibili su eventi futuri, per mancanza di conoscenze.

In tale sistema lo speculatore è un professionista il quale gestisce un portafoglio con soltanto due attività finanziarie, la moneta M e obbligazioni TRG[1]. La moneta ha rendimento r_m pari a 0 mentre i TRG sono remunerati al tasso di interesse i_{TRG} stabilito al momento della loro emissione. Keynes assume l'ipotesi che l'obbligazione sia irrimediabile, senza una scadenza. Il rendimento di un TRG irredimibile al momento t è $r_{\mathrm{TRG}t} = i_{\mathrm{TRG}}/\mathrm{P}_{\mathrm{TRG}t}$. Allo speculatore, che compra nell'ottica di rivendere, interessa soprattutto il rendimento atteso per il periodo $t+1$, che è dato da:

[1] Titolo obbligazionario a reddito garantito (Alessandrini 2015, Economia e politica della moneta cap.3).

$$[1.1] \qquad r^{a}{}_{\mathrm{TRG}\,t} = i_{\mathrm{TRG}} + (P^{a}{}_{\mathrm{TRG}\,t+1} - P_{\mathrm{TRG}\,t}) \,/\, P_{\mathrm{TRG}\,t}$$

1.2 Tasso critico

Gli elementi che portano a questa valutazione sono tutti certi al tempo t, con l'unica eccezione di $P^{a}{}_{t+1,}$ cioè il prezzo che il titolo potrà assumere nel periodo successivo. Su questo prezzo si possono fare due ipotesi.

La prima è relativa al fatto che il titolo si rivaluti. Questo è l'evento atteso sperato di un guadagno in conto capitale che si aggiunge a quello in conto interessi. Questo evento è tanto più probabile tanto più il prezzo attuale è basso, poiché la probabilità che esso aumenti è maggiore rispetto alla probabilità che esso scenda.

La seconda ipotesi è che il prezzo del titolo diminuisca, con conseguente rischio di perdita.

Il valore delle perdita attesa in conto capitale è determinato dalla differenza tra – ($P^{a}{}_{\mathrm{TRG}\ t+1} - P_{\mathrm{TRG}\ t}$) / $P_{\mathrm{TRG}\ t}$, che definisce il deprezzamento atteso. Il rendimento dei TRG può quindi essere maggiore, uguale o minore a zero, a seconda che la perdita attesa in conto capitale $Dep^{a}{}_{t} + 1$ sia inferiore, uguale o superiore al guadagno in conto interessi dato da i_{TRG}. Lo speculatore può scegliere se acquistare un titolo sul quale si può perdere a seconda dei livelli di tasso di interesse, oppure mantenere il possesso della moneta cha ha però rendimento nullo.

Keynes definisce il deprezzamento atteso come tasso di interesse critico, ossia $i_c = Dep^a_{t+1}$; l'ordine di scelta può essere quindi scritto nel seguente modo:

- $i_c < i_{\mathrm{TRG}}$ si acquistano TRG;
- $i_c > i_{\mathrm{TRG}}$ si preferisce detenere moneta;
- $i_c = i_{\mathrm{TRG}}$ risulta indifferente acquistare titoli o detenere moneta perché TRG e M sono perfetti sostituti.

Keynes ritiene che ogni speculatore formuli una propria aspettativa sul prezzo futuro del titolo. Da questo ne deriva che ogni speculatore decide se acquistare titoli o tenere moneta in base al tasso di interesse critico.

1.3 Limiti della teoria keynesiana

Il contributo innovativo di Keynes consiste nell`aver ampliato le motivazioni che influenzano la domanda di moneta. Viene superata la teoria neoclassica, nella quale il tasso di interesse rappresentava "il premio per il risparmio", riprendendo la teoria quantitativa della moneta di Irving Fisher. Il tasso di interesse non è il premio per il risparmio, ma piuttosto esso rappresenta il costo-opportunità di detenere la moneta in forma liquida, piuttosto che utilizzarla per acquistare titoli, immobili o altre attività. La preferenza per la liquidità aumenta al diminuire del tasso di interesse. Come visto in precedenza, si preferisce detenere moneta per approfittare di un possibile aumento del tasso in futuro; in secondo luogo, si preferisce detenere moneta per evitare le perdite patrimoniali derivanti dal fatto che quando il tasso di interesse aumenta, il prezzo dei titoli diminuisce. Per Keynes la preferenza per la liquidità riguarda tutta la domanda di moneta che un individuo vuole tenere in portafoglio, indipendentemente dai motivi che hanno l'hanno influenzata.

Quella delineata da Keynes non è una vera e propria teoria delle scelte di portafoglio poiché essa assume alcune semplificazioni, in quanto si prendono in esame solamente due tipi dei possibili impieghi della moneta, inoltre ogni operatore sceglie di detenere o soltanto moneta o soltanto titoli.

Alla domanda di moneta proposta da Keynes vengono imputati tre limiti:

- assenza di fondamenti microeconomici;
- aspettative certe;
- scelte di portafoglio limitate.

I limiti vanno giustificati in base agli obiettivi che Keynes si era prefissato e il contesto storico che ha avuto come riferimento.

Questi limiti sono in realtà alcune tematiche lasciate aperte che sono state riprese successivamente da James Tobin, il quale supera i problemi relativi alle basi microeconomiche e al comportamento degli speculatori nei confronti del rischio, ipotizzando però scelte di portafoglio che non tengono conto di tutte le attività finanziarie disponibili.

Il terzo problema, relativo alle scelte di portafoglio con più titoli, verrà affrontato da Markowitz[2].

1.4 Il contributo di Tobin e la diversificazione del portafoglio

Tobin si prefissa l'obiettivo si superare i limiti della teoria della preferenza per la liquidità, supportandola con fondamenti microeconomici plausibili.

Tobin riprende lo stesso modello di portafoglio semplificato proposto da Keynes, nel quale la scelta è tra titoli a reddito garantito TRG e moneta M. Il vincolo di bilancio che ogni agente dovrà rispettare è quindi RF=TRG+M, dove RF indica la ricchezza finanziaria. Il cambiamento sostanziale è quello di considerare il prezzo futuro del titolo P^{a}_{TRG} come una variabile casuale, i cui valori dipendono da fenomeni aleatori; questo perché ogni agente ritiene ugualmente probabile sia un guadagno, sia una perdita nel prezzo futuro dei titoli rispetto al prezzo odierno.

La distribuzione di probabilità può essere rappresentata statisticamente attraverso il suo valor medio e la sua varianza. Questo poiché il valor medio di una variabile casuale, indicato con E(x), è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno per la probabilità di verificarsi (ossia la sua media ponderata), mentre la varianza, indicata con σ^2, fornisce una misura della variabilità dei valori assunti dalla variabile stessa (il rischio), in quanto il rischio associato al portafoglio

[2] Per questo approfondimento si rinvia al capitolo secondo.

è dato da una variazione del prezzo dei titoli a seguito di una variazione del tasso di interesse, poiché la moneta all`interno del portafoglio non comporta alcun rischio. In questo caso la variabile da prendere in considerazione è il prezzo atteso dei titoli $P^a{}_{\mathrm{TRG}}$.

Gli operatori faranno previsioni sul valor medio dei prezzi e sulla sua variabilità.

In base alla relazione [1.1], dalla variabile casuale dei prezzi attesi, della quale $p^a{}_{\mathrm{TRG}}$ rappresenta il valor medio più probabile, è possibile ricavare la corrispondente variabile casuale dei rendimenti attesi, della quale $r^a{}_{\mathrm{TRG}}$ rappresenta il valor medio.

L'operatore deve scegliere quanta parte di TRG acquistare in cambio di M e quanti titoli inserire nel portafoglio lasciando una parte in moneta M.

Tobin introduce il concetto di diversificazione del portafoglio che Keynes nella sua teoria della preferenza per la liquidità non aveva considerato.

Indicando con α la variabile di composizione del portafoglio RF, si ottiene:

- TRG/RF = α quota di TRG nel portafoglio RF
- M/R = (1-α) quota di M nel portafoglio RF

Le scelte sono influenzate dalla redditività media attesa e dalla rischiosità che cresce proporzionalmente al crescere dei titoli detenuti in portafoglio.

Indicando con σ il valore dello scarto quadratico medio della distribuzione, è possibile scrivere:

- $r^a{}_{\mathrm{RF}} = \alpha\, r^a{}_{\mathrm{TRG}} + (1-\alpha)\, r_{\mathrm{M}}$

- $\sigma_{RF} = \alpha\ \sigma_{TRG} + (1\text{-}\alpha)\ \sigma_M$

Essendo la moneta priva di rischio e rendimento r_M, $\sigma_M = 0$ le relazioni tra rischio e redditività si possono semplificare nel seguente modo:

- $r^a_{RF} = \alpha\ r^a_{TRG}$
- $\sigma_{RF} = \alpha\ \sigma_{TRG}$

raccogliendo $\alpha = \sigma_{RF} / \sigma_{TRG}$ nella seconda relazione e sostituendola nella prima si ottiene:

$$r^a_{RF} = \left(\frac{r\mathrm{TRG}}{\sigma\mathrm{TRG}} \right) \sigma_{RF} = \beta\ \sigma_{RF}$$

nella quale la redditività attesa del portafoglio dipende direttamente dalla sua rischiosità e dal rapporto β tra redditività media e lo scarto quadratico medio dei TRG, essendo $\beta = \left(\frac{r\mathrm{TRG}}{\sigma\mathrm{TRG}} \right)$.

Ricavando la composizione del portafoglio α in funzione del rischio dei titoli e dell'intero portafoglio si ottiene:

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sigma\mathrm{TRG}} \right) \sigma_{RF}$$

Dalla quale si evince che la quota di titoli da tenere in portafoglio è inversamente proporzionale alla loro rischiosità.

1.5 Atteggiamenti nei confronti del rischio

Le due espressioni di rendimento e rischio, considerate insieme, consentono di costruire la frontiera rendimento-rischio, la quale può essere definita come il luogo di tutte le combinazioni di rischio e rendimento atteso ottenibili da parte dell'agente effettuando le proprie scelte di investimento.

I soggetti fanno una valutazione soggettiva in merito ai titoli offerti dal mercato e per questo, Tobin li divide in tre categorie:

1. indifferenti al rischio;
2. amanti del rischio;
3. avversi al rischio.

Per ogni categoria si possono individuare le curve di indifferenza costruite prendendo in considerazioni le combinazioni di rischio e rendimento che attribuiscono la stessa utilità. Esse sono funzioni del rendimento atteso e del rischio totale del portafoglio.

Gli indifferenti al rischio valutano soltanto il rendimento, trascurando il rischio. Essi danno la stessa utilità alle combinazioni che offrono stesso rendimento, anche se i rischi sono crescenti, pertanto non diversificano ma scelgono sempre l'attività più remunerativa. Gli amanti del rischio aumentano la loro utilità all'aumentare del rischio, indipendentemente dal rendimento. Come gli indifferenti, gli amanti del rischio, escludono quindi la moneta dal loro portafoglio. Infine gli avversi al rischio considerano il rischio come una perdita di utilità, la quale va compensata con dosi crescenti di rendimento. Essi diversificano il portafoglio, trovando la giusta combinazione tra M e TRG.

Il modello di Tobin consente di superare i limiti dei fondamenti microeconomici e delle aspettative certe proposti dal modello di Keynes, in quanto introduce operatori con differenti atteggiamenti nei confronti del rischio e considera le aspettative legate da una variabile casuale, che tende a far diversificare il portafoglio.

Rimane aperto il terzo limite del modello keynesiano, le scelte di portafoglio con più titoli.

Capitolo 2

IL MODELLO DI MARKOWITZ

2.1 Le scelte di portafoglio con più titoli

Il primo contributo alla definizione e successivo sviluppo dell'allocazione delle risorse prendendo in considerazione più titoli, lo si deve a Henry Markowitz.

La teoria da lui proposta si basa sulla distribuzione normale dei rendimenti e sul concetto di rendimento atteso. Markowitz sosteneva che per costruire un portafoglio occorre individuare titoli la cui combinazione minimizzi il rischio e massimizzi il rendimento; per fare ciò fu il primo ad introdurre il concetto di correlazione tra titoli.

Le ipotesi alla base del modello sono le seguenti[3]:

1. esistono *n* AF rischiose sul mercato;
2. esistono anche AF non rischiose le quali hanno rendimento certo r_f[4];
3. i mercati sono perfetti, ossia:
    - c'è un regime di concorrenza perfetta e gli operatori non possono ottenere extraprofitti;
    - non sono presenti asimmetrie informative e costi di transizione;
    - gli operatori sono razionali;

---

[3] Palomba Giulio (Alessandrini 2015, Economia e politica della moneta, capitolo quarto paragrafo 4.5).

[4] Non necessariamente tali AF devono essere la moneta, che ha rendimento nullo; possono essere titoli di Sato a breve. Lo Stato nel breve pagherà sicuramente a scadenza, quindi il rischio è pari a zero.

4. gli operatori dispongono di una ricchezza w e sono avversi al rischio;
5. essi hanno la stessa funzione di utilità quadratica attesa;
6. il rendimento dell'i-esima AF ha distribuzione normale con media μ e varianza σ;
7. il rendimento atteso e il rischio atteso vengono indicati con r_{p} e σ_{p};
8. esistono le vendite allo scoperto.

Un'assunzione fondamentale del modello marcowitziano, riguarda la distribuzione delle probabilità sulla quale si regge il meccanismo di formazione dei rendimenti. Ciò significa considerare che i prezzi siano generati da un processo casuale che esprime un valor medio atteso uguale a μ e una varianza pari a σ^2, dato che le variabili casuali distribuite normalmente sono descritte in modo completo da media e varianza[5].

Per calcolare il rischio e il rendimento di un portafoglio costituito da N titoli è necessario fare riferimento alla correlazione esistente tra i titoli e al rapporto tra la frazione di ricchezza investita su ciascun titolo e quella totale di portafoglio data $\omega_i = \frac{\mathrm{w}_i}{\mathrm{w}}$.

[5] La variabile casuale uniforme è la più utilizzata in quanto è simmetrica (G. Cicchitelli - P. D'Urso – M. Minozzo (2017). Statistica: principi e metodi, Pearson Italia, III edizione).

Il rischio e il rendimento possono quindi essere rappresentati dalle seguenti relazioni:

Rischio: $\sigma_{\mathrm{p}}^2 = Var\ (\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i)$

Rendimento: $R_P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$

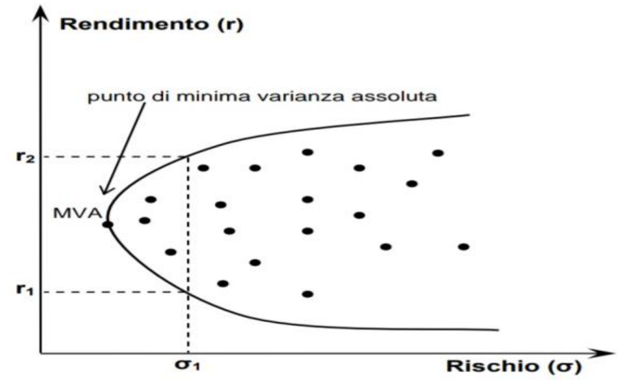
Sotto il vincolo di portafoglio pienamente investito: $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

2.2 La frontiera efficiente

Il sistema trova soluzione nel portafoglio che, posto un certo livello di rendimento, minimizza la varianza del portafoglio stesso, e di conseguenza la deviazione standard. Questo ha come conseguenza la definizione delle curve dette di *iso-rendimento*[6], cioè curve i cui punti rappresentano portafogli con identico rendimento, ma composti ognuno da titoli diversi o da pesi diversi all'interno dello stesso portafoglio. Per individuare il portafoglio la cui composizione corrisponde al minimo livello di varianza raggiungibile, Markowitz introduce il concetto di curve di *iso-varianza,* ossia curve i cui punti rappresentano portafogli con identica varianza. Dall' analisi delle due curve, Markowitz descrive la *curva di minima varianza*, cioè la curva che permette di determinare i portafogli con minima varianza, quindi di minimo rischio, per ogni dato livello di rendimento. Una curva di minima varianza è illustrata dalla figura 1:

[6] Paoletti Michele [2007-2008].

Figura 1: Curva di minima varianza.



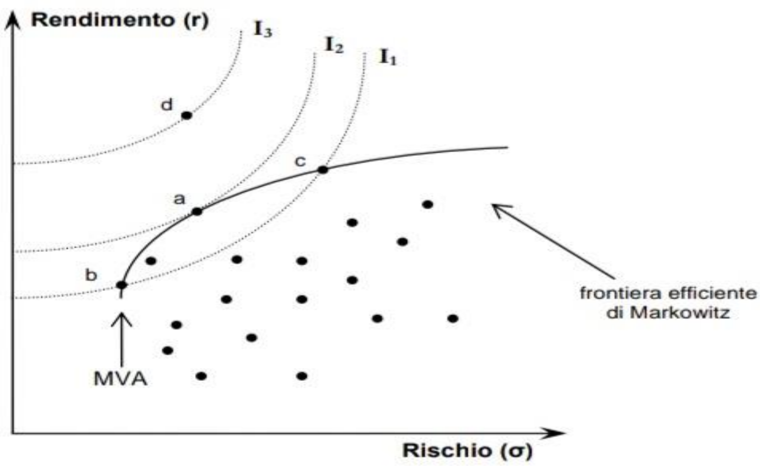
Fonte: Università degli studi di Pisa.

Dato un certo livello di rendimento, il portafoglio che giace sulla curva è caratterizzato dalla minore varianza, quindi dal minore livello di rischio che si può ottenere dall'insieme delle attività finanziarie presenti.

Per ogni livello di σ, l'investitore razionale tende a massimizzare l'utilità e sceglierà il livello di rendimento più alto.

Nella figura è possibile individuare il punto di *minima varianza assoluta* che rappresenta il portafoglio con la minima varianza possibile. L'investitore che si muove da questo punto lungo la parte superiore della curva potrà scegliere portafogli aventi rischio e rendimento crescenti, mentre spostandosi lungo la parte inferiore otterrà portafogli caratterizzati da rendimenti decrescenti ma da livelli crescenti di rischio: ne consegue che un investitore avverso al rischio sarà interessato solamente alla parte superiore della curva. Tale sezione prende il nome di ***frontiera efficiente*** di Markowitz e rappresenta l'insieme di portafogli dominanti, così definiti in quanto a parità di rendimento sono i meno rischiosi o che a parità di rischio sono i più redditizi. (Figura 2)

Figura 2: Frontiera efficiente.



Fonte: Università degli studi di Pisa.

Tutti i portafogli dominanti sono efficienti, ma gli investitori non li considerano tutti uguali. Il livello di desiderabilità dei diversi portafogli è rappresentato dalle curve di utilità di ogni investitore.

Considerando una mappa di indifferenza come quella rappresentata dalla figura 2, si può notare che il portafoglio ottimo per l'investitore è quello individuato dalla lettera *a* nel grafico. Se scegliesse il portafoglio *b*, l'investitore non massimizzerebbe la sua utilità, potendosi spostare dalla curva U_1 alla curva U_2, che essendo più lontana è caratterizzata da una maggiore efficienza, mentre il portafoglio *d,* che corrisponde ad un maggiore livello di utilità, non può essere raggiunto in quanto non si trova sulla frontiera efficiente.

Il modello di Markowitz presenta alcuni limiti, in quanto è statico e uniperiodale.

Ciascun investitore è insensibile a variazioni di prezzo che si verificano prima della scadenza del proprio portafoglio e a qualsiasi movimento dei prezzi che si realizza dopo il proprio investimento.

Il modello risulta comunque molto utile per spiegare il concetto di diversificazione del portafoglio che è legato al concetto di correlazione tra i rendimenti delle AF contenute nello stesso.

2.3 Coefficiente di correlazione tra titoli

Considerando un portafoglio con due solo attività A e B, tra le quali sussiste un certo livello di correlazione ρAB. Il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra [-1,1]. In particolare se:

-ρAB = +1 : esiste perfetta correlazione positiva tra i due titoli.

-ρAB = 0: non esiste correlazione tra i titoli.

- ρAB = -1: esiste perfetta correlazione negativa tra i due titoli.

La funzione obiettivo dell'investitore diventa quindi:

$$\begin{cases} \sigma^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_B^2 + 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B\rho \\ \mathrm{r_P} = \omega_\mathrm{A}\mathrm{r_A} + \omega_\mathrm{B}\mathrm{r_B} \\ \omega_\mathrm{A} + \omega_\mathrm{B} = 1 \end{cases}$$

nel quale ρ è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti dell'attività 1 e dell'attività 2.

(coefficiente di correlazione è dato dal rapporto $\rho = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma i \sigma_j}$, dove σ_{ij} rappresenta la covarianza tra r_i e r_j con $i \neq j$ e dove σ_i e σ_j rappresentano lo scarto quadratico medio rispettivamente di r_i e r_j.).

I casi sopraindicati rappresentano situazioni estreme. Nella realtà i valori di ρ_{AB} si assesteranno tra 0 e 1 (correlazione positiva non perfetta) e -1 e o (correlazione negativa non perfetta).

2.3.1 Perfetta correlazione positiva

Quando c'è perfetta correlazione positiva il coefficiente di correlazione assume valore ρ = 1 e l'equazione che descrive il rischio diventa:

$$\sigma_p^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_B^2 + 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B = (\omega_A\sigma_A + \omega_B\sigma_B)^2$$

Ponendo $\omega_B = 1 - \omega_A$, la funzione obiettivo dell'investitore diventa:

$$\sigma_p = \omega_A\sigma_A + \omega_B\sigma_B = \omega_A\sigma_A + (1-\omega_A)\sigma_B = \sigma_B + \omega_A(\sigma_A - \sigma_B)$$

Il peso dell'attività A all'interno del portafoglio diventa perciò;

$$\omega_A = \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}$$

Sostituita all'interno del primo vincolo, determina l'equazione della frontiera di portafoglio:

$$r_p = \omega_A r_A + (1 - \omega_A) r_B = r_B + \frac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B}(r_A - r_B)$$

$$= \frac{r_A - r_B}{\sigma_A - \sigma_B}\sigma_p + r_B - \frac{r_A - r_B}{\sigma_A - \sigma_B}\sigma_B$$

che viene riassunta in:

$$r_p = m\sigma_p + q$$

nella quale $m = \frac{r_A - r_B}{\sigma_A - \sigma_B}$ e $q = \; = \; r_B - m\sigma_B$.

Si osserva che quando il coefficiente di correlazione è pari a +1, sia il rendimento che il rischio di portafoglio corrispondono a semplici combinazioni lineari del rendimento e del rischio delle singole attività finanziarie e che quindi la frontiera viene rappresentata da una retta crescente (Figura 3).

Fonte: Paoletti Michele [2007-2008].

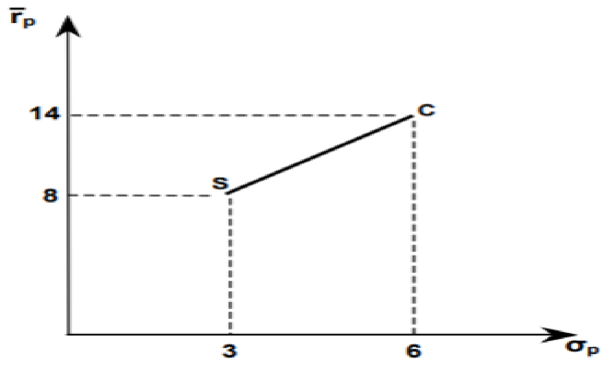


Figura 3:Relazione tra rischio e rendimento quando $\rho = 1$

La frontiera è quindi rappresentata da un segmento nel quale sono contenute tutte le possibili combinazioni di rischio-rendimento attese che si ottengono per valori postivi delle quote ω_Ae ω_B. Il portafoglio S è quello che si avrebbe se si investisse interamente nell'attività A, mentre il portafoglio B è quello che si avrebbe se si investisse interamente nell'attività B. Dalla figura si evince come le combinazioni lineari di rischio e rendimento sono direttamente proporzionali e che quindi tutti i portafogli posti all'interno della curva sono efficienti.

2.3.2 Perfetta correlazione negativa

Quando ρAB = -1 si presenta una situazione opposta a quella vista in precedenza: perfetta correlazione negativa tra i rendimenti delle due attività rischiose; la funzione obiettivo diventa quindi

$$\sigma_p^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + a_B^2\sigma_B^2 - 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B = (\omega_A\sigma_A - \omega_B\sigma_B)^2$$

da cui:

$$\sigma_p = |\omega_A\sigma_A - \omega_B\sigma_B| = |\omega_A\sigma_A - (1-\omega_A)\sigma_B| = |\omega_A(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B|$$

Il valore assoluto viene applicato in quanto il rischio σ_p deve assumere sempre valore assoluto. Scomponendo il modulo si ottiene:

$$\omega_A = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_p - \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} & \text{per } 0 \leq \omega_A < \dfrac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \\ \dfrac{\sigma_p + \sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} & \text{per } \dfrac{\sigma_B}{\sigma_A + o_B} \leq \omega_A \leq 1 \end{cases}$$

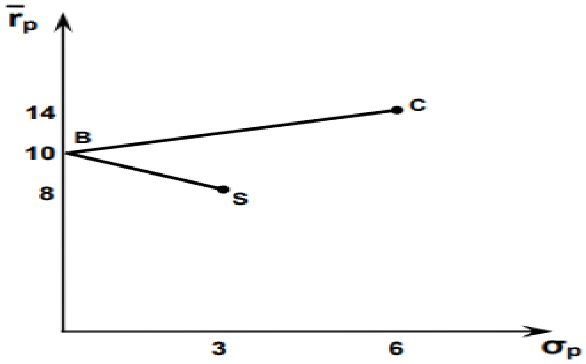
Mettendo le due relazioni all'interno del vincolo di rendimento atteso del portafoglio, viene determinata la seguente frontiera di portafoglio:

$$r_p = \begin{cases} -\dfrac{r_A - r_B}{\sigma_A + r_B}\sigma_p + \dfrac{r_A - r_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B + r_B & \text{per } 0 \leq \omega_A < \dfrac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \Rightarrow -m\sigma_p + q \\ \dfrac{r_A - r_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_P + \dfrac{r_A - r_B}{\sigma_A + \sigma_B}\sigma_B + r_B & \text{per} \dfrac{\sigma_B}{\sigma_A + v_B} \leq \omega_A \leq 1 \Rightarrow m\sigma_p + q \end{cases}$$

dove $m = (r_A - r_B) / (\sigma_A - \sigma_B)$ e $q = r_B - m\sigma_B$.

In questa situazione la frontiera sarà composta da due rette spezzate che hanno la stessa intercetta ma coefficienti angolari diversi (Figura 4). Il grafico mostra come la parte efficiente della curva sia quella costituita dal segmento BC e di come sia possibile ridurre il rischio, diversificando tra le due attività, fino ad annullarlo nel portafoglio B.

Figura 4: Relazione tra rischio e rendimento quando $\rho = -1$



Fonte: Paoletti Michele [2007-2008].

2.3.3 Incorrelazione

Nel caso di incorrelazione la covarianza è pari a zero quindi $\rho = 0$. La funzione obiettivo diventa quindi:

$$\sigma_p^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2$$

da cui:

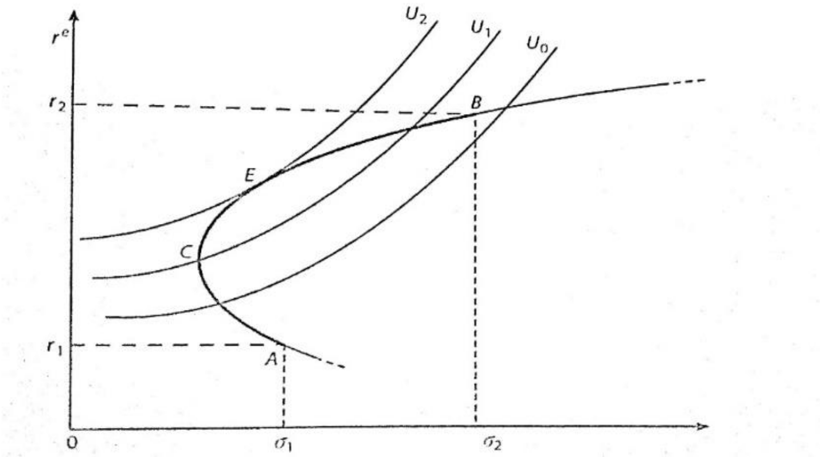
$$\sigma_p = \sqrt{\omega_A^2\sigma_A^2 + (1-\omega_A)^2\sigma_B^2} = \sqrt{\omega_A^2\sigma_B^2 + \langle 1 - 2\omega_A + \omega_A^2\rangle\sigma_B^2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\omega_A^2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2\omega_A\sigma_B^2 + \sigma_B^2}$$

Essendo la quota di portafoglio è una funzione non decrescente del rischio atteso di portafoglio, si impongono le condizioni $\omega_A = f(\sigma_p)$ e $\omega_B = 1 - f(\sigma_p)$. Se si sostituiscono queste due condizioni nel vincolo di rendimento, si ottiene la curva riportata nella Figura 5, con equazione :

$$r_p = r_\beta + f(\sigma p)(r_A - r_B)$$

Figura 5: Relazione tra rischio e rendimento quando $\rho = 0$



Fonte: Palomba Giulio (Alessandrini 2015).

La parte efficiente è quella rappresentata dall'arco formato dai portafogli che hanno un livello atteso del rendimento maggiore o uguale a quello presente in corrispondenza del portafoglio C. La diversificazione può ridurre il rischio ma non può annullarlo del tutto.

Queste presentate sono situazioni estreme, nella maggior parte dei casi il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra 0 e 1.

3.1 Estensione del modello di Markowitz: vendite allo scoperto

Ci sono dei portafogli che si trovano oltre i punti S e C che si riferiscono a valori negativi per le quote ω_A e ω_B. Possedere titoli per quote minori di zero significa vendere AF che non si possiedono effettivamente in portafoglio, ma che devono essere prese in prestito per essere poi consegnate all'acquirente.

Tale struttura presenta le seguenti ipotesi:

- le attività sono perfettamente divisibili;
- l'investitore possiede una ricchezza W_t per formare il portafoglio;
- nel periodo t prende in prestito una quantità K che restituirà nel periodo $t+1$;

se vende allo scoperto il titolo 1 può investire nel titolo 2 e viceversa.

L'investitore al tempo $t+1$ dispone di una ricchezza

$$w_{t+1} = w_t + w_A r_A + w_B r_B$$

$$w_{t+1} = w_t + (-k)r_A + (w_t + k)r_B$$

w_A e w_B rappresentano le quote che vengono destinate al titolo A e al titolo B. La ricchezza w al tempo t risulta uguale a $w_t = w_A + w_B$. Il rendimento del portafoglio diventa quindi

$$r_p = \frac{w_{t+1} - w_t}{w_t}$$

$$r_p = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{w_t}}\mathrm{r_A} + \frac{(\mathrm{w_t} + \mathrm{k})}{\mathrm{w_t}}\mathrm{r_B}$$

Ponendo

$$\begin{cases} w_A = -\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{w_t}}\mathrm{w_A} \quad \Rightarrow \ < 0 \\ w_B = \dfrac{\mathrm{w_t} + \mathrm{k}}{\mathrm{w_t}} \quad \Rightarrow \ \mathrm{w_A} > 1 \end{cases}$$

In presenza di vendite allo scoperto i vincoli posti dal Modello di Markowitz sono comunque rispettati, in particolar modo nell'ipotesi di un portafoglio pienamente investito.

CONCLUSIONI

Gli individui non possono conoscere il futuro con esattezza, possono soltanto porre in essere delle scelte razionali in basse a quelle che sono le loro aspettative in merito al rendimento atteso dei vari titoli. Le teorie presentate nella tesi hanno lo scopo di descrivere e spiegare tali comportamenti da parte degli agenti economici. Keynes pone le basi a quella che sarà la moderna teoria di portafoglio, individuando un tasso critico che ogni individuo sceglie, Tobin divide gli agenti in base alla loro propensione al rischio e ipotizza scelte di portafoglio diversificate. Il modello di Markowitz, che si concentra sulle scelte di portafoglio con più titoli, introduce il concetto di frontiera efficiente e di correlazione tra titoli. Questo dimostra che nonostante il futuro non sia conoscibile, in quanto caratterizzato da incertezza, è possibile creare dei portafogli efficienti con massimo rendimento e minimo rischio, compiendo delle scelte di diversificazione tra i vari titoli in base al loro grado di correlazione e alla loro rischiosità sul mercato.

In conclusione è quindi possibile affermare che l'incertezza, e quindi il rischio, non possono essere del tutto annulati, ma attraverso il modello proposto da Markowitz, possono essere ridott al minimo compiendo le dovute azioni di diversificazione, basate sulle aspettative di ognuno, sul grado di correlazione tra titoli e diversificando il portafoglio secondo le giuste quote dei diversi titoli, fino a raggiungere la frontiera efficiente.

BIBLIOGRAFIA

Alessandrini Pietro (2015). Economia e politica della moneta, Il Mulino.

G. Cicchitelli - P. D'Urso – M. Minozzo (2017). Statistica: principi e metodi, Pearson Italia, III edizione.

Paoletti Michele – Modelli di Markowitz generalizzati: Aspetti teorici e computazionali (2007-2008), Università degli studi di Pisa.