



UNIVERSITÀ  
POLITECNICA  
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE

---

# **Applicazione delle tecniche di sincronizzazione e cancellazione del caos ad un sistema girostatico**

**Application of control and synchronization techniques  
to a chaotic gyrostator system**

Candidato:  
**Luca Caponi**

Relatore:  
**Prof. Simone Fiori**

Anno Accademico 2020-2021





UNIVERSITÀ  
POLITECNICA  
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE

---

# **Applicazione delle tecniche di sincronizzazione e cancellazione del caos ad un sistema girostatico**

**Application of control and synchronization techniques  
to a chaotic gyrostat system**

Candidato:  
**Luca Caponi**

Relatore:  
**Prof. Simone Fiori**

Anno Accademico 2020-2021

---

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE  
Via Brezze Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

*Ai miei genitori,  
che hanno sempre creduto in me.  
Questa tesi è vostra.*



# Sommario

La tesi descrive la **dinamica**, le **tecniche di controllo** e di **sincronizzazione** di un *sistema girostatico* soggetto a disturbi esterni. I risultati ottenuti e i grafici proposti derivano da implementazione **Matlab** (versione *R2021a*). Si sfrutta la metodologia (**Runge-Kutta**) per la risoluzione delle equazioni differenziali. Attraverso le *tecniche di controllo* si cancella la caoticità del sistema e si rende l'andamento di tipo periodico e/o pseudo-periodico. Dati due *girostatici* aventi diverse *condizioni iniziali*, attraverso opportuni interventi sulla dinamica di uno dei sistemi si può effettuare una *sincronizzazione*. Vengono approfonditi gli *esponenti di Lyapunov* per stabilire il tipo di moto a cui è sottoposto il sistema girostatico al variare dei parametri della dinamica o delle *tecniche di controllo*.

Quanto riportato nel seguente elaborato è confrontabile con gli esiti della ricerca "**CHAOS, CHAOS CONTROL AND SYNCHRONIZATION OF A GYROSTAT SYSTEM**" (Z.-M. GE AND T.-N. LIN, 2001).



# Indice

<b>1</b>	<b>DINAMICA</b>	<b>1</b>
1.1	Che cos'è un <i>girostatto</i> . . . . .	1
1.2	Richiami teorici: Metodologia Runge-Kutta . . . . .	2
1.3	Dinamica del sistema . . . . .	4
1.4	Implementazione Matlab . . . . .	5
1.5	Grafici per lo studio della dinamica . . . . .	9
1.5.1	Andamenti temporali . . . . .	9
1.5.2	Ritratti di fase . . . . .	10
<b>2</b>	<b>TECNICHE DI CONTROLLO</b>	<b>13</b>
2.1	DEFINIZIONE DI <i>SISTEMA CAOTICO</i> . . . . .	13
2.2	Tecnica di controllo <i>ad addizione di feedback ritardato</i> . . . . .	14
2.3	Tecnica di controllo <i>ad addizione di coppia costante</i> . . . . .	16
2.4	Tecnica di controllo <i>ad addizione di forza periodica</i> . . . . .	17
2.5	Tecnica di controllo <i>ACA (Adaptive Control Algorithm)</i> . . . . .	19
2.6	Tecnica di controllo <i>"BANG-BANG"</i> . . . . .	22
2.7	Tecnica di controllo <i>ad addizione di impulso periodico</i> . . . . .	23
2.8	Tecnica di controllo <i>ad iniezione di segnale di dithering</i> . . . . .	25
<b>3</b>	<b>SINCRONIZZAZIONE</b>	<b>29</b>
3.1	Concetto di <i>sincronizzazione</i> . . . . .	29
3.2	Tecnica di sincronizzazione <i>ad addizione di feedback LINEARE</i> . . . . .	30
3.3	Tecnica di sincronizzazione <i>ad addizione di feedback SINUSOIDALE</i> . . . . .	31
3.4	Tecnica di sincronizzazione <i>ad addizione di feedback ESPONENZIALE</i> . . . . .	32
3.5	Tecnica di sincronizzazione del sistema <i>"a forma combinata"</i> . . . . .	33
3.6	ANALISI DEI RISULTATI DELLE SINCRONIZZAZIONI . . . . .	35
<b>4</b>	<b>ANALISI DEGLI ESPONENTI DI LYAPUNOV</b>	<b>37</b>
4.1	Introduzione agli esponenti di Lyapunov . . . . .	37
4.2	Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $f$ . . . . .	39
4.3	Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $M$ della seconda tecnica di controllo . . . . .	40
4.4	Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $N$ e $\bar{\omega}$ della terza tecnica di controllo . . . . .	41
4.5	APPROFONDIMENTI E GRAFICI . . . . .	42
4.5.1	APPROFONDIMENTO: $\lambda$ al variare del parametro $f$ . . . . .	43

*Indice*

4.5.2	APPROFONDIMENTO: $\lambda$ al variare del parametro $M$ della seconda tecnica di controllo . . . . .	46
4.5.3	APPROFONDIMENTO: $\lambda$ al variare del parametro $N$ e $\bar{\omega}$ della terza tecnica di controllo . . . . .	49
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>53</b>

## Elenco delle figure

1.1	Modello del sistema girostatico . . . . .	2
1.2	Diagramma dei parametri: il grafico mostra l'andamento del girostato al variare del parametro $f$ e dei termini $k_i$ . . . . .	7
1.3	Parte del codice <b>Matlab</b> implementato per gestire la metodologia <b>Runge-Kutta</b> . . . . .	8
1.4	Andamento delle coordinate al variare del tempo, per $f = 4.5$ . . . . .	9
1.5	Andamento delle coordinate al variare del tempo, per $f = 5.5$ . . . . .	9
1.6	Andamento delle coordinate al variare del tempo, per $f = 6.15$ . . . . .	10
1.7	Andamento delle coordinate al variare del tempo, per $f = 6.5$ . . . . .	10
1.8	Ritratti di fase del sistema girostatico, per $f = 4.5$ , $stadio = 4$ . . . . .	11
1.9	Ritratti di fase del sistema girostatico, per $f = 5.5$ , $stadio = 4$ . . . . .	11
1.10	Ritratti di fase del sistema girostatico, per $f = 6.15$ , $stadio = 4$ . . . . .	11
1.11	Ritratti di fase del sistema girostatico, per $f = 6.5$ , $stadio = 4$ . . . . .	12
1.12	Ritratti di fase del sistema girostatico, per $f = 5.5$ , $stadio = 1$ . . . . .	12
1.13	Ritratti di fase del sistema girostatico, PROPOSTI NELLA RICERCA [1], per $f = 5.5$ . . . . .	12
2.1	Righe di codice <b>Matlab</b> per gestire la tecnica di controllo <i>a feedback ritardato</i> . . . . .	15
2.2	Andamento della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato con un <i>feedback ritardato</i> nel tempo . . . . .	16
2.3	Andamento del segnale <i>feedback</i> introdotto per controllare il sistema girostatico . . . . .	16
2.4	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con <i>feedback ritardato</i> . . . . .	16
2.5	Andamento della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una <i>coppia costante</i> nel tempo . . . . .	17
2.6	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con aggiunta di <i>coppia costante</i> . . . . .	17
2.7	Andamento temporale della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una <i>forza periodica</i> ( $\bar{\omega} = 2, N = 1, \Phi = 0$ ) . . . . .	18
2.8	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una <i>forza periodica</i> ( $\bar{\omega} = 2, N = 1, \Phi = 0$ ) . . . . .	18
2.9	Righe di codice <b>Matlab</b> per gestire le tecniche di controllo 2.3 e 2.4. Con la variabile <i>control</i> l'utente sceglie le modalità di controllo del sistema . . . . .	18

Elenco delle figure

2.10	Schema a blocchi della tecnica di controllo ad <i>Algoritmo Adattivo</i> . . .	20
2.11	Andamento temporale della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato con <b>ACA</b> . La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico $1T$ . . . . .	20
2.12	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con <b>ACA</b> . La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico $1T$ . . . . .	20
2.13	Andamento temporale della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato con <b>ACA</b> . La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico $2T$ . . . . .	21
2.14	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con <b>ACA</b> . La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico $2T$ . . . . .	21
2.15	Andamento del parametro $A$ nel tempo . . . . .	21
2.16	Andamento dell'errore nel tempo, per $X_s$ calcolato con $f = 5.5$ . . .	22
2.17	Andamento temporale della coordinata $z$ del sistema girostatico controllato con la tecnica <i>BANG-BANG</i> . . . . .	22
2.18	Segnale di controllo della tecnica <i>BANG-BANG</i> nel tempo . . . . .	23
2.19	Ritratto di fase del sistema girostatico controllato con la tecnica <i>BANG-BANG</i> . . . . .	23
2.20	Righe di codice <b>Matlab</b> per implementare la tecnica di controllo ad impulso periodico. . . . .	24
2.21	Andamento temporale della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato da un <i>impulso periodico</i> ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è $K_F = 0.4$ . . . . .	24
2.22	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato da un <i>impulso periodico</i> ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è $K_F = 0.4$ . . . . .	24
2.23	Andamento temporale della coordinata $x$ del sistema girostatico controllato da un <i>impulso periodico</i> ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è $K_F = 0.6$ . . . . .	25
2.24	Ritratti di fase del sistema girostatico controllato da un <i>impulso periodico</i> ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è $K_F = 0.6$ . . . . .	25
2.25	Andamento temporale della coordinata $z$ del sistema girostatico controllato da un segnale di <i>dithering</i> iniettato nel sistema [ $w_d = 0.1$ ] . . . . .	26
2.26	Ritratto di fase del sistema girostatico controllato da un segnale di <i>dithering</i> iniettato nel sistema [ $w_d = 0.1$ ] . . . . .	27
2.27	Andamento temporale della coordinata $z$ del sistema girostatico controllato da un segnale di <i>dithering</i> iniettato nel sistema [ $w_d = 0.3$ ] . . . . .	27
2.28	Ritratto di fase del sistema girostatico controllato da un segnale di <i>dithering</i> iniettato nel sistema [ $w_d = 0.3$ ] . . . . .	27

3.1	Ritratti di fase, andamento temporale e legame tra le coordinate dei due sistemi girostatici <b>NON SINCRONIZZATI</b> . . . . .	30
3.2	Sincronizzazione applicando un <i>feedback lineare</i> , $\epsilon = 0.7$ . . . . .	31
3.3	Sincronizzazione applicando un <i>feedback sinusoidale</i> , $\epsilon = 0.7$ . . . . .	32
3.4	Sincronizzazione applicando un <i>feedback esponenziale</i> , $\epsilon = 0.7$ . . . . .	33
3.5	Sincronizzazione con la tecnica "a forma combinata", $\epsilon = 0.7$ . . . . .	34
4.1	Traiettorie divergenti per condizioni iniziali vicine . . . . .	38
4.2	Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro $f$ .	40
4.3	Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del coppia $M$ applicata nella <i>seconda tecnica di controllo</i> . . . . .	41
4.4	Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro $N$ della <i>terza tecnica di controllo</i> . . . . .	42
4.5	Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro $\bar{\omega}$ della <i>terza tecnica di controllo</i> . . . . .	42
4.6	Andamento temporale delle coordinate per $f=4.91$ , $\lambda \leq 0$ : <b>le curve, dopo un periodo di transitorio, sono periodiche</b> . . . . .	43
4.7	Ritratti di fase per $f=4.91$ , $\lambda \leq 0$ . . . . .	43
4.8	Andamento temporale delle coordinate per $f=6.1884$ , $\lambda \leq 0$ : <b>le curve, dopo un periodo di transitorio, sono periodiche.</b> . . . . .	44
4.9	Andamento temporale delle coordinate per $f=6.26$ , $\lambda > 0$ : <b>l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.</b> . . . . .	44
4.10	Ritratti di fase per $f=6.26$ , $\lambda > 0$ . . . . .	45
4.11	Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $f$ . Le condizioni iniziali sono $x(0) = 1$ , $y(0) = 2$ e $z(0) = 3$ . Modificando le condizioni iniziali si ha un diverso andamento degli esponenti di Lyapunov rispetto a Figura 4.2 . . . . .	45
4.12	Andamento temporale delle coordinate per $M=0.03$ , $\lambda > 0$ : <b>l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.</b> . . . . .	46
4.13	Andamento temporale delle coordinate per $M=0.1$ , $\lambda > 0$ : <b>l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.</b> . . . . .	46
4.14	Andamento temporale delle coordinate per $M=0.4646$ , $\lambda > 0$ : <b>l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO</b> . . . . .	47
4.15	Ritratti di fase per $M=0.4646$ , $\lambda > 0$ . . . . .	47
4.16	Andamento temporale delle coordinate per $M=0.4848$ , $\lambda \leq 0$ : <b>le curve sono periodiche dopo un periodo transitorio</b> . . . . .	48
4.17	Ritratti di fase per $M=0.4848$ , $\lambda \leq 0$ . . . . .	48
4.18	Andamento temporale delle coordinate per $N=1$ , $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}$ , $\lambda > 0$ : <b>l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO</b> . . . . .	49
4.19	Ritratti di fase per $N=1$ , $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}$ , $\lambda > 0$ . . . . .	49
4.20	Andamento temporale delle coordinate per $N=1$ , $\bar{\omega} = 3$ , $\lambda \leq 0$ : <b>l'andamento, dopo un periodo transitorio, è periodico.</b> . . . .	50

*Elenco delle figure*

4.21	Ritratti di fase per $N=1$ , $\bar{\omega} = 2$ $\lambda \leq 0$ . . . . .	50
4.22	Andamento temporale delle coordinate per $N=1$ , $\bar{\omega} = 2$ $\lambda > 0$ : <b>NONOSTANTE L'ESPONENTE SIA POSITIVO [vedi 4.5], l'andamento delle coordinate nel tempo è di tipo periodico.</b> I ritratti di fase associati a questi valori numerici sono riportati in Figura 2.8. . . . .	51

# Elenco delle tabelle

1.1 Parametri nella dinamica del sistema girostatico . . . . .	4
--	---



# Capitolo 1

## DINAMICA

### 1.1 Che cos'è un *girostatico*

Un *girostatico* è un sistema meccanico composto da un corpo centrale (chiamato *platform*, o "*piattaforma*") e da dei *rotori* asimmetrici [3]. I corpi rotorici di cui è dotato non sono connessi rigidamente al *platform*, ma possiedono un moto rotatorio relativo che non altera la distribuzione delle masse del dispositivo, sono cioè vincolati a roteare attorno ad assi simmetrici [1]. Si tratta di un movimento rapido che garantisce la stabilità della navicella [4].

Le *coppie interne* che si generano sono in grado di modificare il *momento angolare* dei rotori, causando variazioni in termini di orientazione e *velocità angolare* della piattaforma [5].

Il modello girostatico possiede dunque un *momento angolare interno*. Per questa peculiarità è stato impiegato da **Peano** e **Volterra** nello studio del movimento dei poli terrestri alla fine dell'800 [3].

Il satellite che viene analizzato nella seguente ricerca è un *girostatico a 3 rotori*. Si costruisce un sistema di *coordinate ortogonali* in rotazione  $OXYZ$  ed un sistema di *coordinate inerziali*  $O\xi\eta\zeta$ . L'origine  $O$  corrisponde al centro di massa del satellite. Il dispositivo è schematizzato in Figura 1.1.

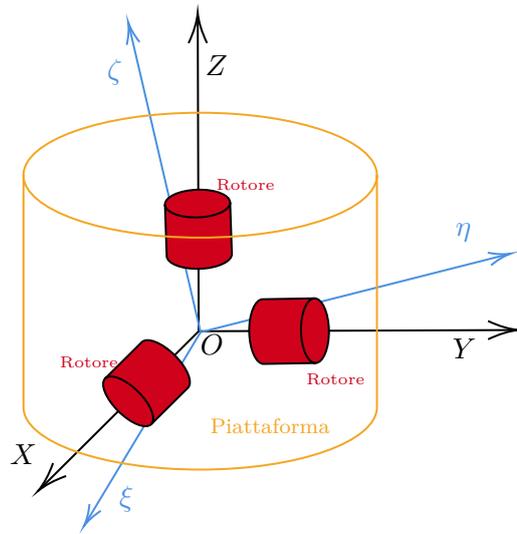


Figura 1.1: Modello del sistema girostatico

## 1.2 Richiami teorici: Metodologia Runge-Kutta

Nel 1895 il matematico Carl Runge(1856-1927) ideò delle tecniche per determinare soluzioni approssimate di sistemi di equazioni differenziali di primo grado. Questi procedimenti vennero poi formalizzati dal collega Martin Wilhelm Kutta(1867-1944) nel 1901 [9].

Si vuole risolvere il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y), t \in [t_a, t_b] \\ y(t_a) = a \end{cases} \quad (1.1)$$

Il dominio temporale della variabile  $t$  deve essere **discretizzato** con *passo di campionamento*  $h$  adeguato, in modo tale da avere  $N$  campioni temporali  $t_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . In particolare, avremo  $t_0 = t_a, t_N = t_b$ .

Supponendo nota l'approssimazione numerica al valore della soluzione  $t_i$   $w_i$  possiamo integrare l'equazione differenziale da  $t_i$  a  $t_{i+1}$  per ottenere in modo esatto il valore  $w_{i+1}$ .

$$w_{i+1} = w_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

A questo punto, a seconda dell'approssimazione utilizzata per calcolare l'integrale, si otterrà uno schema diverso. Ad uno schema con errore più piccolo si dovrà pagare un maggior numero di valutazioni della funzione  $f$ ; tale numero ( $s$ ) viene detto **numero di stadi del metodo** ed il corrispondente algoritmo viene detto **METODO DI RUNGE-KUTTA ad  $s$  stadi**.

Si potranno studiare casi con  $s=1$ ,  $s=2$  o  $s=4$  [11].

- **STADIO 1**

Inizializzando:

$$rk_1 = f(t_i, w_i) \quad (1.2)$$

è possibile definire

$$w_{i+1} = w_i + hrk_1$$

**Nota:** valutare l'approssimazione con ordine  $s=1$  restituisce il **METODO DI EULERO**.

- **STADIO 2**

Introducendo:

$$\begin{cases} rk_1 = f(t_i, w_i) \\ rk_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}rk_1) \end{cases} \quad (1.3)$$

è possibile scrivere:

$$w_{i+1} = w_i + hrk_2$$

- **STADIO 4**

Definendo:

$$\begin{cases} rk_1 = f(t_i, w_i) \\ rk_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}rk_1) \\ rk_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}rk_2) \\ rk_4 = f(t_i + h, w_i + hrk_3) \end{cases} \quad (1.4)$$

l'approssimazione numerica  $w_{i+1}$  sarà uguale a:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(rk_1 + 2rk_2 + 2rk_3 + rk_4)$$

Partendo dalla condizione iniziale  $(t_0, w_0)$ , una prima applicazione dell'iterazione **RK4** permette di determinare il punto della traiettoria  $(t_1, w_1)$ , una seconda applicazione permette di determinare il punto della traiettoria  $(t_2, w_2)$  e così via [12].

**Ricapitolando, all'aumentare dello stadio aumenta la complessità computazionale ma diminuisce l'errore commesso.**

### 1.3 Dinamica del sistema

Il sistema girostatico è un sistema **non lineare** e **non autonomo**. La dinamica che lo caratterizza è descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{(B-C)}{A}yz - \frac{h_3}{A}(1+f\cos\omega t)y + \frac{h_2}{A}z + \frac{k_1}{A}(\omega_r - x) + \frac{k_2}{A}(\omega_r^3 - x^3) \\ \dot{y} = \frac{(C-A)}{B}xz - \frac{h_1}{B}z + \frac{h_3}{B}(1+f\cos\omega t)x + \frac{k_3}{B}(\omega_r - y) + \frac{k_4}{B}(\omega_r^3 - y^3) \\ \dot{z} = \frac{(A-B)}{C}xy + \frac{h_3}{C}f\omega\sin\omega t - \frac{h_2}{C}x + \frac{h_1}{C}y - \frac{b}{C}z + \frac{k_5}{C}(\omega_r - z) + \frac{k_6}{C}(\omega_r^3 - z^3) \end{cases} \quad (1.5)$$

<b>PARAMETRI</b>			
Lettere	Descrizione	Unità	Valore numerico
$t$	Tempo	$s$	$t \in [0, 600]$
$x \ y \ z$	Proiezioni delle velocità angolari sugli assi principali X Y Z.	$rad/s$	-
$f$	Parametro	-	$[4.5, 5.5, 6.15, 6.5]$
$\omega$	Pulsazione	$rad/s$	1
$A \ B \ C$	Momenti principali d'inerzia	$kg \cdot m^2$	$A = B = 500, C = 1000$
$\omega_r$	Proiezione della velocità angolare del satellite su X Y Z	$rad/s$	0
$h_1 \ h_2 \ h_3$	Momenti angolari dei rotori	$kg \cdot m^2/s$	$h_1 = h_2 = 200, h_3 = 250$
$k_i, i=1,3,5$	Termini costanti	$kg \cdot m^2/s$	1
$k_i, i=2,4,6$	Termini costanti	$kg \cdot m^2 \cdot s/rad^2$	1
$b$	Coefficiente di smorzamento	$kg \cdot m^2/s$	200

Tabella 1.1: Parametri nella dinamica del sistema girostatico

Si tratta di un sistema di 3 equazioni del tipo *Votka-Volterra* (noto anche come modello *preda-predatore*).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z, t) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z, t) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.6)$$

ed è possibile trovarne le soluzioni attraverso il **metodo di Runge-Kutta** descritto nella Sezione 1.2.

Il sistema è un caso particolare di applicazione delle **EQUAZIONI DI EULERO DEL CORPO RIGIDO** [13].

**Definizione 1 (Equazioni di Eulero del corpo rigido)** Dato un corpo rigido e la terna principale d'inerzia  $O(X'Y'Z')$  centrata nel centro di massa del corpo, indicando con  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  i versori degli assi solidali, con  $\mathbf{I}$  la matrice d'inerzia associata al sistema:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

e con  $\omega_1, \omega_2$  ed  $\omega_3$  le componenti della velocità angolare  $\omega$  del corpo lungo gli assi  $XYZ$ , la **seconda equazione cardinale della dinamica** è data da:

$$\dot{K}(O) = I_1 \dot{\omega}_1 \hat{i}' + I_2 \dot{\omega}_2 \hat{j}' + I_3 \dot{\omega}_3 \hat{k}' + \omega \times (I_1 \omega_1 \hat{i}' + I_2 \omega_2 \hat{j}' + I_3 \omega_3 \hat{k}') = M^e(O) \quad (1.7)$$

dove  $K(O)$  è il momento angolare rispetto al centro di massa ed  $M^e(O)$  è il momento risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa.

Scrivendo esplicitamente  $\omega$ , svolgendo i prodotti vettoriali e proiettando lungo le tre direzioni solidali si otterranno le **equazioni di Eulero del corpo rigido**:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = M_1^e \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = M_2^e \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3^e \end{cases} \quad (1.8)$$

Dato il sistema di equazioni di Eulero, con dei semplici passaggi ricaviamo la forma delle equazioni proposte in (1.5):

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{M_1^e}{I_1} \\ \dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1 \omega_3 + \frac{M_2^e}{I_2} \\ \dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{M_3^e}{I_3} \end{cases} \quad (1.9)$$

## 1.4 Implementazione Matlab

Si ipotizzi di osservare il *giroscopo* descritto dal sistema (1.5) per un tempo  $T = 600$  secondi. Discretizzando questo intervallo di tempo con passo di campionamento  $h = 0.1$  secondi, si effettuerà una raccolta ed un'analisi di  $N = 6000$  campioni temporali. Dal punto di vista pratico ciò equivale a definire variabili vettoriali  $x, y, z$  di lunghezza pari a 6000, le quali verranno caricate tramite ciclo iterativo. Le condizioni iniziali (ovvero i primi valori scalari assegnati agli array in **Matlab**) sono ipotesi necessarie per risolvere il *problema di Cauchy* proposto in (1.6).

Si impostino dunque:

## Capitolo 1 DINAMICA

$$x(0) = 0.1, y(0) = 0.2, z(0) = 0.3.$$

Lo stadio **s** va a definire il numero di funzioni **rk** per ciascuna equazione, quindi sia la precisione dell'approssimazione numerica che la complessità computazionale del calcolo svolto. Infatti, ad ogni ciclo iterativo, andremo a valutare 1,2 o 4 funzioni di tipo **rk** per ciascuna coordinata. In Figura 1.3 si propone una possibile implementazione **Matlab** del metodo di calcolo sfruttato. Si noti come lo stadio possa essere selezionato attraverso l'inizializzazione della variabile *s*. Nel caso in cui *s* sia uguale ad 1, 2 o 4, viene gestito il corrispondente ordine, altrimenti si invia un messaggio di errore.

Il sistema viene esaminato con  $N_f = 4$  diversi parametri *f*. Cambiando il valore numerico di *f* si osserveranno variazioni nei *ritratti di fase* e negli *andamenti temporali* del *girostatto*. In altri termini, verranno manipolati non dei vettori, bensì delle MATRICI di dimensione  $N \times N_f$ .

Mantenendo i termini  $k_i = 1$ , per  $i = 1 \dots 6$ , il solo parametro *f* influenzerà tutta la dinamica del sistema.

In particolare avremo per:

**f=4.5** → Andamento periodico 1T

**f=5.5** → Andamento periodico 2T

**f=6.15** → Andamento periodico 4T

**f=6.5** → Andamento caotico

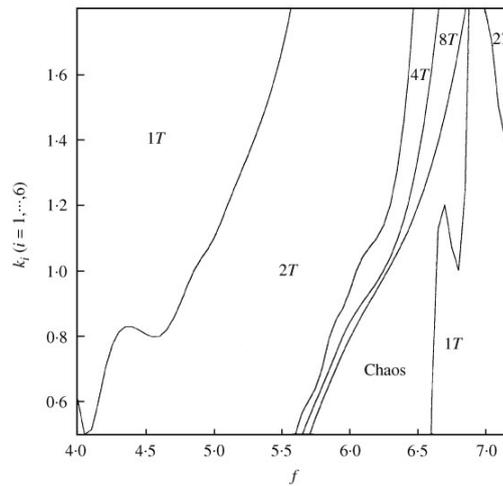


Figura 1.2: Diagramma dei parametri: il grafico mostra l'andamento del girostato al variare del parametro  $f$  e dei termini  $k_i$

**Note:**

1. L'errore diminuisce linearmente con il passo  $h$ , quindi scegliendo passi più piccoli la precisione del metodo migliora. Tuttavia scegliendo passi **molto piccoli** aumenta anche il numero di valutazioni della funzione e l'accumulo degli errori di arrotondamento porta ad una perdita di precisione. Quindi valutare con passo di campionamento  $h = 0.1$  secondi è un buon compromesso per le analisi che si andranno ad effettuare.
2. Il sistema può essere studiato anche con altre  $f$ , non solo con quelle indicate. L'andamento del sistema girostatico al variare dei parametri è schematizzato in 1.2.
3. Lo stadio  $s = 1$  non garantisce una precisione sufficiente per la corretta analisi del girostato. Si consiglia di utilizzare **metodologie di Runge-Kutta** di ordine superiore.  
Nel prosieguo della ricerca, i risultati verranno estrapolati con metodo **RK del quart'ordine**.

```

1 %Con il doppio ciclo for carico una matrice 6000x4
2 for j= 1:nf
3   for i= 1:n-1
4     %definisco le funzioni RK
5     rk1_1=f(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
6     rk2_1=g(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
7     rk3_1=k(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
8
9     rk1_2=f(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_1, y(i,j)+(h/2)*rk2_1, z(i,j)+(h
10      /2)*rk3_1, fr(j));
11    rk2_2=g(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_1, y(i,j)+(h/2)*rk2_1, z(i,j)+(h
12      /2)*rk3_1, fr(j));
13    rk3_2=k(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_1, y(i,j)+(h/2)*rk2_1, z(i,j)+(h
14      /2)*rk3_1, fr(j));
15    rk1_3=f(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_2, y(i,j)+(h/2)*rk2_2, z(i,j)+(h
16      /2)*rk3_2, fr(j));
17    rk2_3=g(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_2, y(i,j)+(h/2)*rk2_2, z(i,j)+(h
18      /2)*rk3_2, fr(j));
19    rk3_3=k(t(i)+(h/2), x(i,j)+(h/2)*rk1_2, y(i,j)+(h/2)*rk2_2, z(i,j)+(h
20      /2)*rk3_2, fr(j));
21
22    rk1_4=f(t(i)+h , x(i,j)+h*rk1_3, y(i,j)+h*rk2_3 , z(i,j)+ h*rk3_3, fr(
23      j));
24    rk2_4=g(t(i)+h , x(i,j)+h*rk1_3, y(i,j)+h*rk2_3 , z(i,j)+ h*rk3_3, fr(
25      j));
26    rk3_4=k(t(i)+h , x(i,j)+h*rk1_3, y(i,j)+h*rk2_3 , z(i,j)+ h*rk3_3, fr(
27      j));
28
29    %A seconda del valore assegnato alla s opera con uno stadio
30    if (s==1)
31      %RUNGE KUTTA STADIO 1
32      x(i+1,j)=x(i,j) + h*f(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
33      y(i+1,j)=y(i,j) + h*g(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
34      z(i+1,j)=z(i,j) + h*k(t(i), x(i,j), y(i,j), z(i,j), fr(j));
35    elseif (s==2)
36      %RUNGE KUTTA STADIO 2
37      x(i+1,j)=x(i,j) + h*rk1_2;
38      y(i+1,j)=y(i,j) + h*rk2_2;
39      z(i+1,j)=z(i,j) + h*rk3_2;
40    elseif (s==4)
41      %RUNGE KUTTA STADIO 4
42      x(i+1,j)=x(i,j) + (h/6)*(rk1_1+2*rk1_2+2*rk1_3+rk1_4);
43      y(i+1,j)=y(i,j) + (h/6)*(rk2_1+2*rk2_2+2*rk2_3+rk2_4);
44      z(i+1,j)=z(i,j) + (h/6)*(rk3_1+2*rk3_2+2*rk3_3+rk3_4);
45      %Se s diverso da 1, 2 o 4 si gestisce l'errore
46    else
47      error('Stadio errato')
48    end
49  end
50 end
51 end

```

Figura 1.3: Parte del codice **Matlab** implementato per gestire la metodologia **Runge-Kutta**

## 1.5 Grafici per lo studio della dinamica

### 1.5.1 Andamenti temporali

In questa sezione si presentano gli andamenti temporali delle coordinate  $x, y, z$ . Si osservi come, dopo un periodo di transitorio, l'andamento delle variabili sia di tipo *periodico* per  $f = 4.5$  (Figura 1.4),  $f = 5.5$  (Figura 1.5), ed  $f = 6.15$  (Figura 1.6). La stessa conclusione non è possibile per  $f = 6.5$ , dove gli andamenti non sono regolari nel tempo (Figura 1.7).

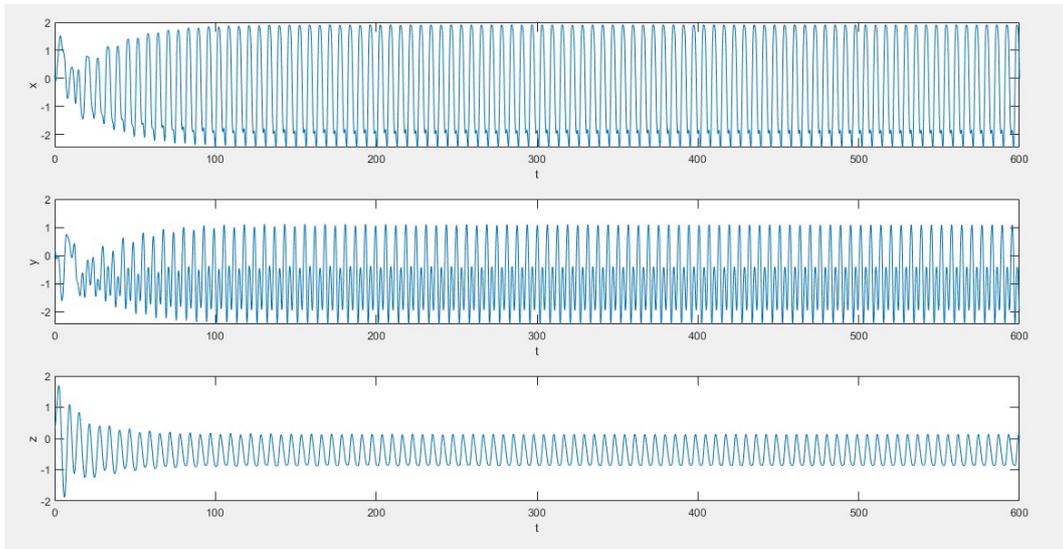


Figura 1.4: Andamento delle coordinate al variare del tempo, per  $f = 4.5$

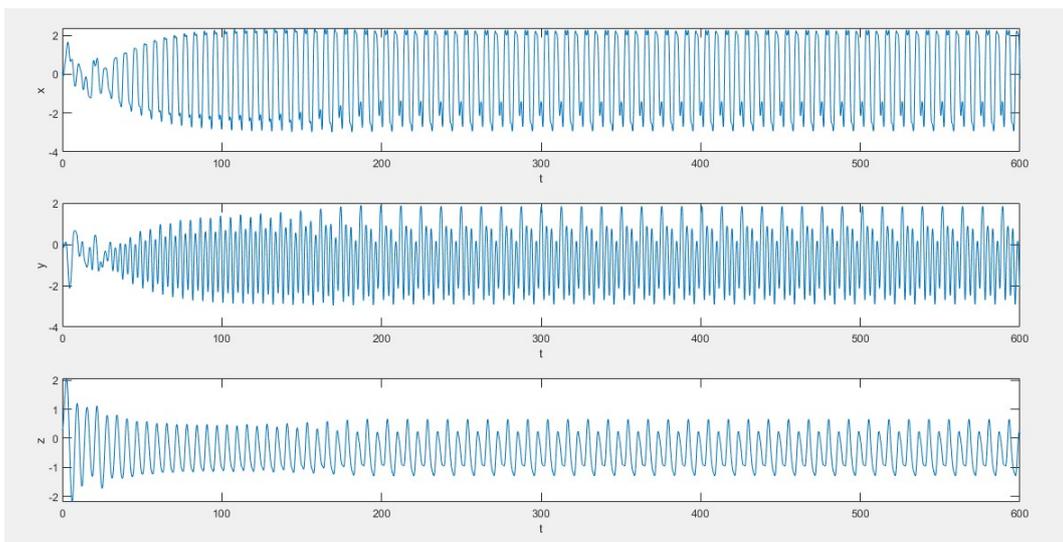


Figura 1.5: Andamento delle coordinate al variare del tempo, per  $f = 5.5$

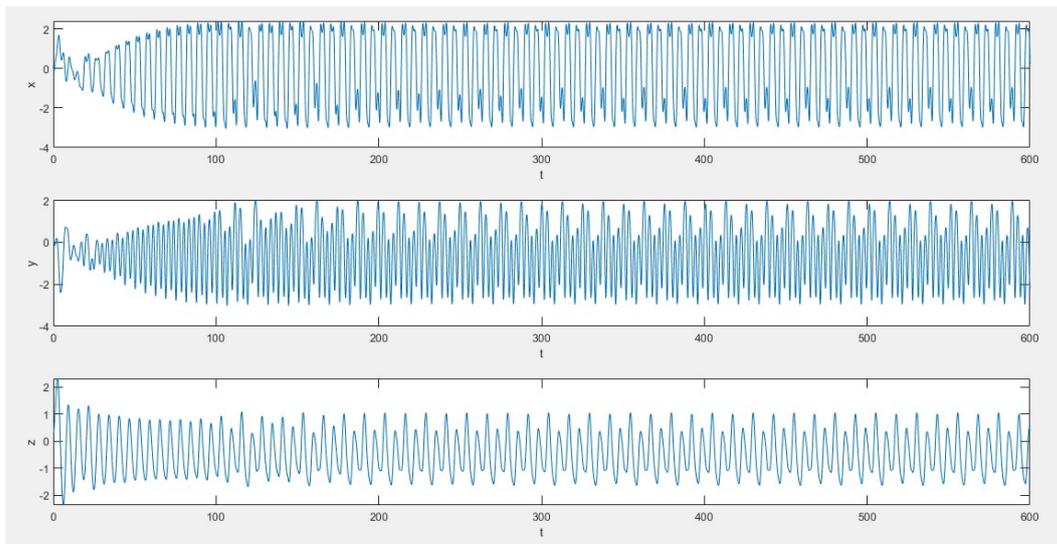


Figura 1.6: Andamento delle coordinate al variare del tempo, per  $f = 6.15$

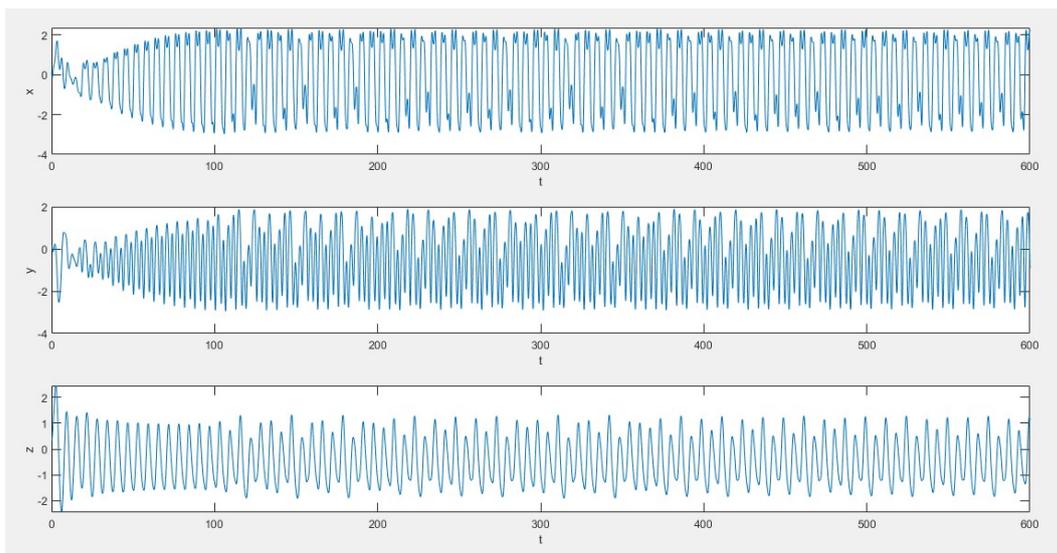


Figura 1.7: Andamento delle coordinate al variare del tempo, per  $f = 6.5$

### 1.5.2 Ritratti di fase

I *ritratti di fase* sono rappresentazioni geometriche che mostrano le *traiettorie* di un sistema dinamico nello *spazio delle fasi*. Utilizzando il metodo di **Runge-Kutta ordine 1** i grafici risulteranno non corretti a causa della insufficiente accuratezza del calcolo numerico, come si evince dal confronto della Figura 1.13 proposta nella ricerca [1] con la Figura 1.9 e la Figura 1.12. Impostando lo stadio  $s = 4$  invece si otterranno i medesimi ritratti proposti in [1].

## 1.5 Grafici per lo studio della dinamica

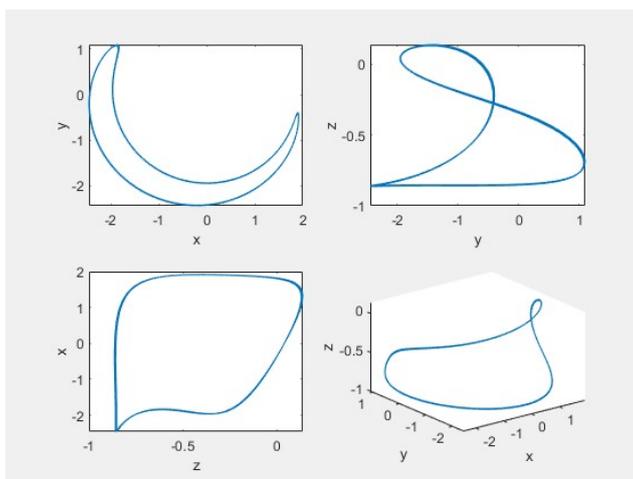


Figura 1.8: Ritratti di fase del sistema girostatico, per  $f = 4.5$ ,  $stadio = 4$

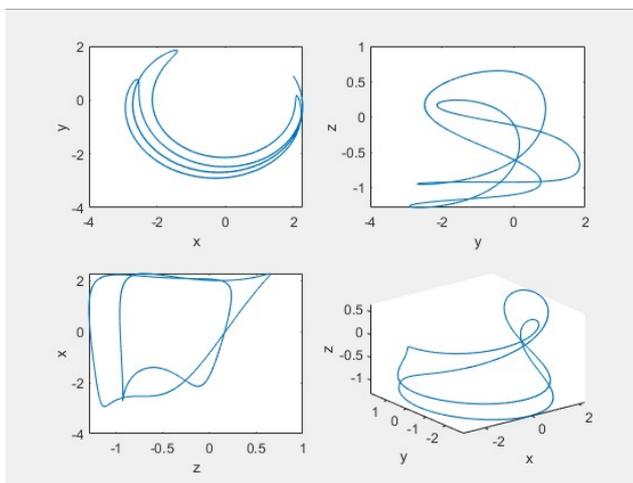


Figura 1.9: Ritratti di fase del sistema girostatico, per  $f = 5.5$ ,  $stadio = 4$

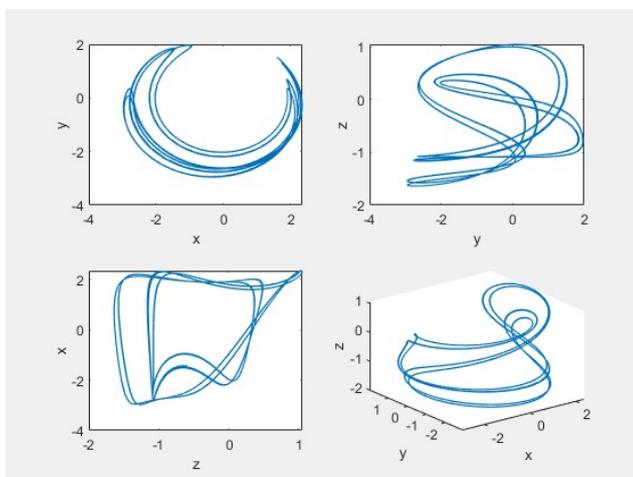


Figura 1.10: Ritratti di fase del sistema girostatico, per  $f = 6.15$ ,  $stadio = 4$

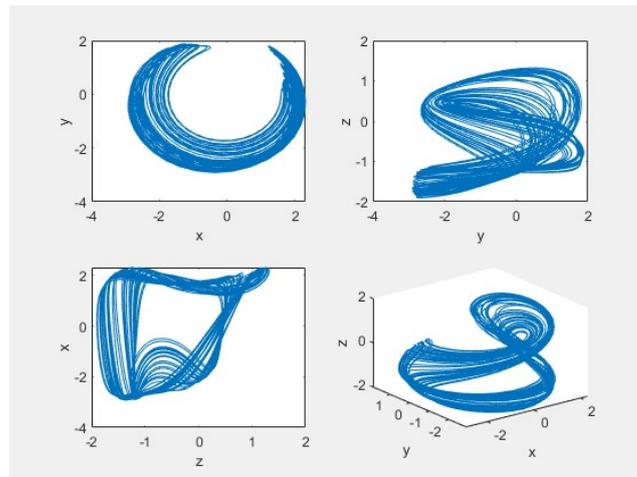


Figura 1.11: Ritratti di fase del sistema girostatico, per  $f = 6.5$ ,  $stadio = 4$

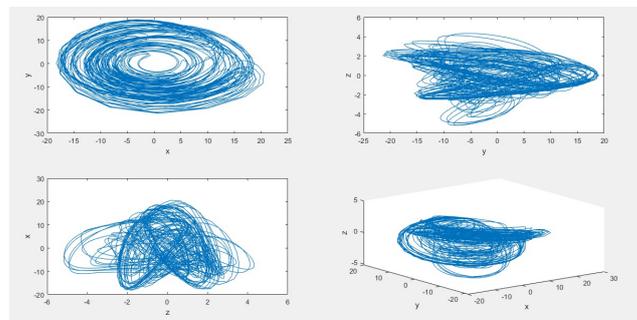


Figura 1.12: Ritratti di fase del sistema girostatico, per  $f = 5.5$ ,  $stadio = 1$

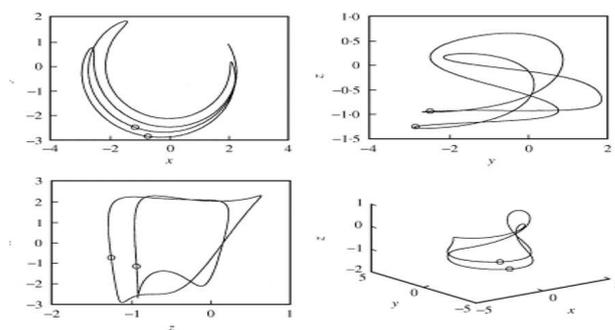


Figura 1.13: Ritratti di fase del sistema girostatico, PROPOSTI NELLA RICERCA [1], per  $f = 5.5$

## Capitolo 2

# TECNICHE DI CONTROLLO

### 2.1 DEFINIZIONE DI *SISTEMA CAOTICO*

Il sistema girostatico sotto esame presenta un peculiare *moto caotico* se il parametro  $f$  assume un certo set di valori. Il comportamento caotico è spesso indesiderato e non voluto. L'obiettivo sarà dunque implementare delle **tecniche di controllo** che consentano di riportare il nostro satellite alla condizione di *moto periodico* nel tempo.

Come preludio all'analisi dei controllori analizzati si fornisce una definizione di **SISTEMA CAOTICO**. Per ulteriori dettagli, si consiglia la lettura del testo [10].

**Definizione 1 (Sistema topologicamente transitivo)** *Un sistema  $f$  si dice topologicamente transitivo se per ogni coppia di insiemi aperti  $U, V \subset J$  esiste  $k > 0$  tale per cui  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

**Definizione 2 (Sensibilità alle condizioni iniziali)** *Sia  $J$  un insieme qualsiasi. Il sistema  $f : J \rightarrow J$  è sensibile alle condizioni iniziali se esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $x \in J$  e per ogni intorno  $N$  di  $x$ , esiste  $y \in N$  ed  $n \geq 0$  tale che  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .*

**Definizione 3 (Punto periodico)** *Il punto  $x$  è detto punto periodico di periodo  $n$  se  $f^n(x) = x$ .*

**Definizione 4 (Sistema caotico)** *Sia  $V$  un insieme. Il sistema  $f : V \rightarrow V$  è detto CAOTICO in  $V$  se:*

1.  $f$  presenta sensibilità alle condizioni iniziali.
2.  $f$  è topologicamente transitivo.
3. i punti periodici sono addensati in  $V$ .

Un *sistema caotico* ha quindi tre caratteristiche: **imprevedibilità** per la sensibilità alle condizioni iniziali; **indivisibilità**, ovvero non può essere decomposto in due sottosistemi; **un elemento di regolarità** dato dai *punti periodici*.

## 2.2 Tecnica di controllo *ad addizione di feedback ritardato*

La tecnica di controllo *a feedback ritardato* sfrutta la differenza tra la coordinata  $y(t)$  e l'uscita ritardata  $y(t - \tau)$  per riportare il sistema ad un *moto periodico*.

Si definisca:

$$D(t) = y(t) - y(t - \tau)$$

Considerando il ritardo  $\tau = 1$  secondo e moltiplicando la variabile  $D(t)$  per un guadagno  $K_a$  possiamo dichiarare:  $F(t) = K_a D(t)$ .

L'andamento della coordinata nel tempo prima e dopo il controllo  $x$  è mostrato nella Figura 2.2: si osservi come la funzione diventi, dopo un transitorio, *periodica* nel tempo.

Anche il segnale di controllo  $F(t)$  ha un andamento che si ripete nel tempo dopo un transitorio che dura all'incirca 100 secondi (vedi Figura 2.3).

I *ritratti di fase* (vedi Figura 2.4) che scaturiscono dal controllo sono paragonabili a quelli del sistema girostatico con parametro  $f = 4.5$ .

## 2.2 Tecnica di controllo ad addizione di feedback ritardato

```
1
2 rk1_1(i,j)=f(t(i), cx(i,j), cy(i,j), cz(i,j), fr(j));
3 rk2_1(i,j)=g(t(i), cx(i,j), cy(i,j), cz(i,j), fr(j), Feed(cy(i,j),cy(i
  -round(tau/h),j)));
4 rk3_1(i,j)=k(t(i), cx(i,j), cy(i,j), cz(i,j), fr(j));
5
6 rk1_2(i,j)=f(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_1(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_1
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_1(i,j), fr(j));
7 rk2_2(i,j)=g(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_1(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_1
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_1(i,j), fr(j),Feed(cy(i,j)+(h/2)*rk2_1(i,
  j),cy(i-round(tau/h),j)+(h/2)*rk2_1(i-round(tau/h),j)));
8 rk3_2(i,j)=k(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_1(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_1
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_1(i,j), fr(j));
9
10 rk1_3(i,j)=f(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_2(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_2
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_2(i,j), fr(j));
11 rk2_3(i,j)=g(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_2(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_2
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_2(i,j), fr(j),Feed(cy(i,j)+(h/2)*rk2_2(i,
  j),cy(i-round(tau/h),j)+(h/2)*rk2_2(i-round(tau/h),j)));
12 rk3_3(i,j)=k(t(i)+(h/2), cx(i,j)+(h/2)*rk1_2(i,j), cy(i,j)+(h/2)*rk2_2
  (i,j), cz(i,j)+(h/2)*rk3_2(i,j), fr(j));
13
14 rk1_4(i,j)=f(t(i)+h , cx(i,j)+h*rk1_3(i,j), cy(i,j)+h*rk2_3(i,j), cz(i
  ,j)+ h*rk3_3(i,j), fr(j));
15 rk2_4(i,j)=g(t(i)+h , cx(i,j)+h*rk1_3(i,j), cy(i,j)+h*rk2_3(i,j), cz(i
  ,j)+ h*rk3_3(i,j), fr(j),Feed(cy(i,j)+(h)*rk2_3(i,j),cy(i-round(
  tau/h),j)+(h)*rk2_3(i-round(tau/h),j)));
16 rk3_4(i,j)=k(t(i)+h , cx(i,j)+h*rk1_3(i,j), cy(i,j)+h*rk2_3(i,j), cz(i
  ,j)+ h*rk3_3(i,j), fr(j));
17
18 F(i,j)=Feed(cy(i,j),cy(i-round(tau/h),j));
19 %...
20 %Altro codice
21 %...
22 function feedback=Feed(y,ydelay)
23     feedback=Ka*(ydelay-y);
24 end
```

Figura 2.1: Righe di codice **Matlab** per gestire la tecnica di controllo *a feedback ritardato*

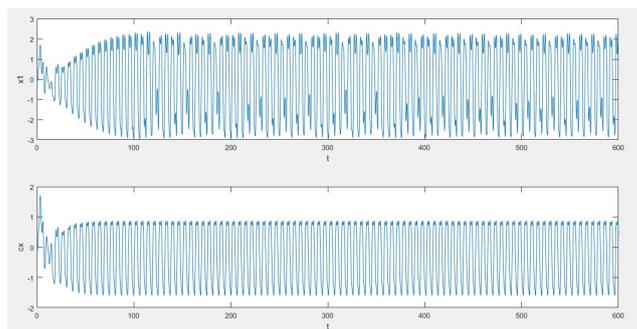


Figura 2.2: Andamento della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato con un *feedback ritardato* nel tempo

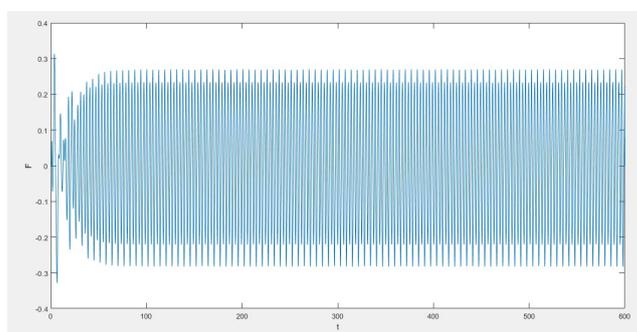


Figura 2.3: Andamento del segnale *feedback* introdotto per controllare il sistema girostatico

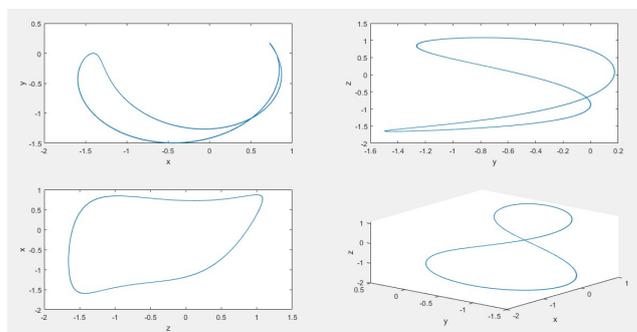


Figura 2.4: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con *feedback ritardato*

## 2.3 Tecnica di controllo *ad addizione di coppia costante*

Un risultato interessante è il seguente: applicando all'ultima equazione del sistema (1.5) un'adeguata *coppia costante* (che indicheremo con la lettera  $M$ ) la caoticità verrà eliminata. La Figura 2.5 e i *ritratti di fase* (Figura 2.6) sono ottenuti con  $M = 0.3$ . Lo studio degli *esponenti di Lyapunov* (che si affronterà nel Capitolo 4) consentirà di stabilire per quali valori numerici della coppia  $M$  il sistema sarà periodico nel tempo o meno.

## 2.4 Tecnica di controllo ad addizione di forza periodica

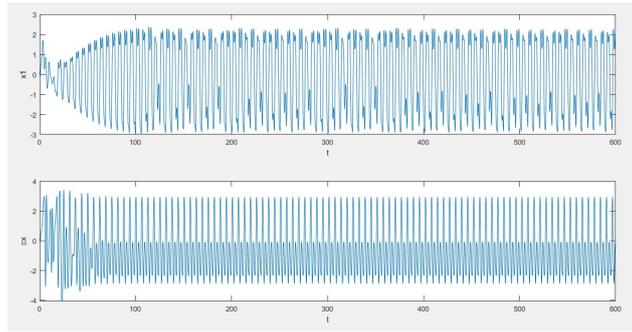


Figura 2.5: Andamento della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una *coppia costante* nel tempo

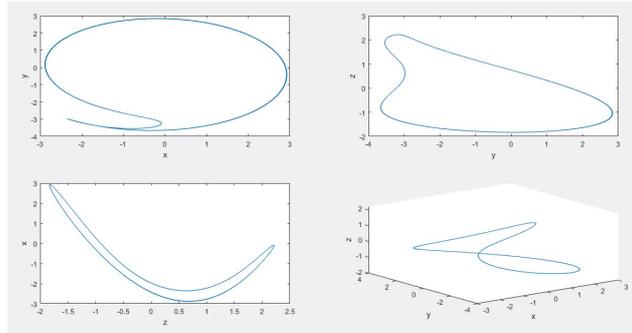


Figura 2.6: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con addizione di *coppia costante*

## 2.4 Tecnica di controllo ad addizione di forza periodica

Aggiungendo una *forza periodica* alla terza equazione del sistema (1.5) è possibile ottenere il comportamento desiderato.

La funzione della *forza periodica* è di tipo **sinusoidale** ed è uguale a  $N \sin(\bar{\omega}t + \Phi)$ , dove  $N$  è l'ampiezza,  $\bar{\omega}$  è la pulsazione e  $\Phi$  è la fase iniziale. Come nella Sezione 2.3, *ampiezza* e *pulsazione* possono essere variate per studiare comportamenti diversi del sistema. Anche in questo caso verrà quindi discussa un'analisi degli *esponenti di Lyapunov* nel Capitolo 4.

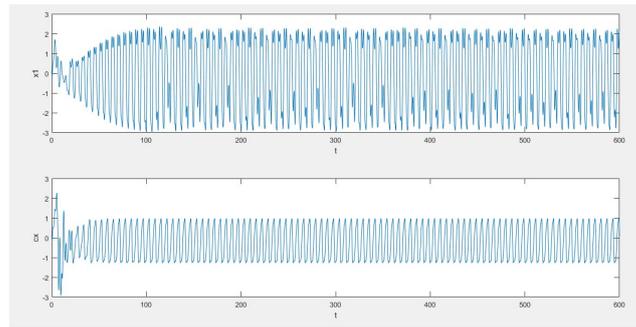


Figura 2.7: Andamento temporale della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una *forza periodica* ( $\bar{\omega} = 2, N = 1, \Phi = 0$ )

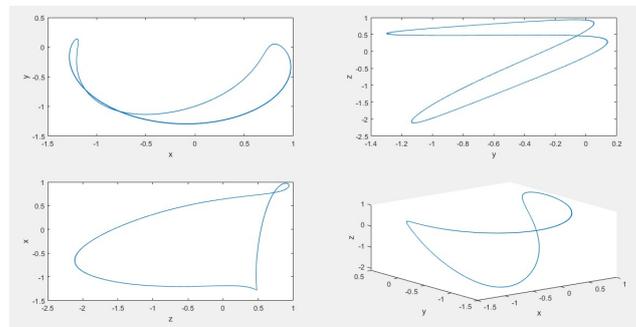


Figura 2.8: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con l'aggiunta di una *forza periodica* ( $\bar{\omega} = 2, N = 1, \Phi = 0$ )

```

1 function diff3=k(t,x,y,z,fr)
2 %Definisco i parametri come variabili globali
3 global A B C h1 h2 h3 w wr ki b M N wt q
4 %Se alla variabile "control" viene assegnato il valore N allora
   effettua il controllo ad addizione di coppia costante.
5 if (control=='M')
6 diff3=((A-B)/C)*(x*y) + (h3/C)*(fr*w*sin(w*t)) - (h2/C)*x + (h1/C)*y -
   (b/C)*z + (ki(5)/C)*(wr-z)+((ki(6)/C)*(wr^3-z^3))+ M;
7 %Altrimenti se alla variabile "control" viene assegnato il valore N
   effettua il controllo ad addizione di forza periodica.
8 elseif (control=='N')
9 diff3=((A-B)/C)*(x*y) + (h3/C)*(fr*w*sin(w*t)) - (h2/C)*x + (h1/C)*y -
   (b/C)*z + (ki(5)/C)*(wr-z)+((ki(6)/C)*(wr^3-z^3))+ N*sin(w*t + q
   );

```

Figura 2.9: Righe di codice **Matlab** per gestire le tecniche di controllo 2.3 e 2.4. Con la variabile *control* l'utente sceglie le modalità di controllo del sistema

## 2.5 Tecnica di controllo **ACA** (**Adaptive Control Algorithm**)

Come introdotto nella Sezione 2.1, una delle caratteristiche fondamentali di un *sistema caotico* è l'*imprevedibilità*. Modellare l'errore di un sistema che ha un andamento temporale non predicibile è una sfida impegnativa, obbligatoria (perché se non si riuscisse ad effettuare non si potrebbero annullare gli effetti dei disturbi) **ma non impossibile** da svolgere. Infatti la letteratura fornisce degli esempi di sistemi non lineari (naturali e artificiali) che operano un meccanismo in retroazione **adattivo** che permette di controllare il sistema e riportarlo ad uno stato desiderato. La tecnica **ACA** (acronimo per *Adaptive Control Algorithm*) è descritta graficamente dallo schema a blocchi 2.10. Nella tecnica sviluppata dai ricercatori *Huberman* e *Lumer* e proposta in [6], l'idea alla base del controllo è quella di sfruttare l'errore per correggere il moto del sistema, andando a perturbare un parametro della dinamica. L'errore è modellato come una funzione lineare  $G$  che opera la differenza tra lo *stato attuale* del sistema caotico  $X$  e lo *stato desiderato*  $X_s$  al medesimo istante di tempo. Lo *stato desiderato* al tempo  $t_i$ , per  $i = 1 \dots N$  utilizzato nel seguente studio è la coordinata  $x$  ricavata impostando il parametro  $f = 4.5$  o  $f = 5.5$ , ovvero è la coordinata  $x$  **periodica nel tempo**. Nel nostro sistema girostatico, modificando il *parametro A* (*Momento principale d'inerzia*) delle equazioni (1.5) facendolo variare nel tempo secondo la relazione:

$$\dot{A} = K_D(X - X_s) \quad (2.1)$$

la periodicità del sistema è ottenuta. Interessante osservare come le traiettorie del sistema girostatico controllato con **ACA** (Figura(2.12), Figura(2.14)) siano simili ai ritratti di fase per  $f = 4.5$  (Figura(1.8)) e a quelli per  $f = 5.5$  (Figura(1.9)).

Il grafico 2.15 mostra l'andamento crescente del parametro  $A$  trasformato dalla funzione (2.1) nel caso in cui lo stato desiderato  $X_s$  è implementato con parametro  $f = 5.5$ .

In linea teorica, l'errore  $e = X - X_s$  dovrebbe asintoticamente tendere al valore nullo, come si evince anche dall'articolo [1]. Il risultato ottenuto nel nostro caso è un valore che oscilla intorno a 0 (vedi Figura 2.16).

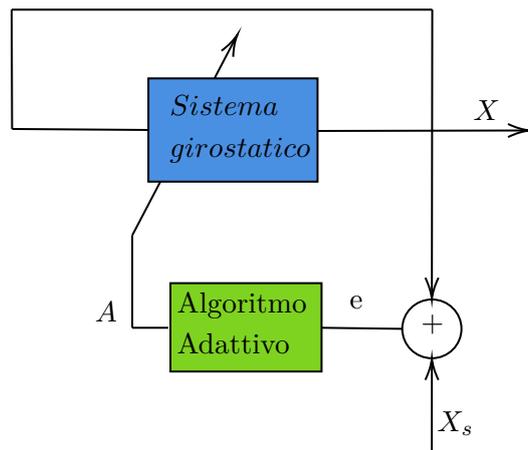


Figura 2.10: Schema a blocchi della tecnica di controllo ad *Algoritmo Adattivo*

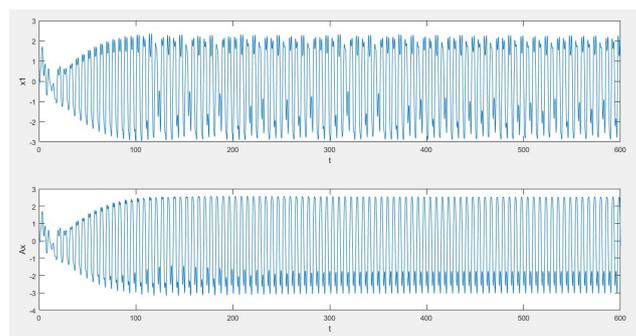


Figura 2.11: Andamento temporale della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato con **ACA**. La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico  $1T$

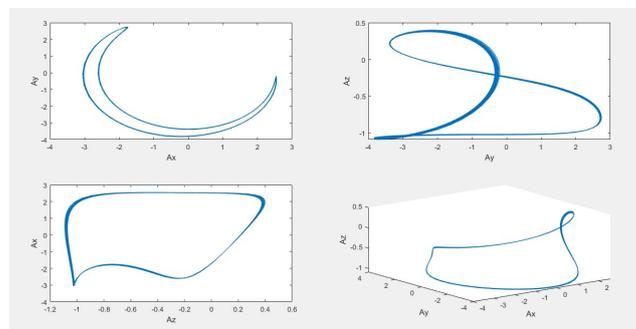


Figura 2.12: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con **ACA**. La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico  $1T$ .

## 2.5 Tecnica di controllo ACA (*Adaptive Control Algorithm*)

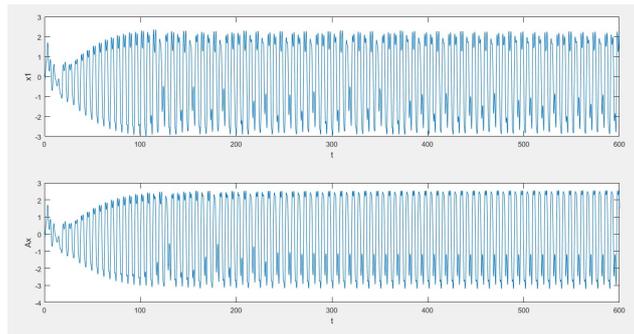


Figura 2.13: Andamento temporale della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato con **ACA**. La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico  $2T$

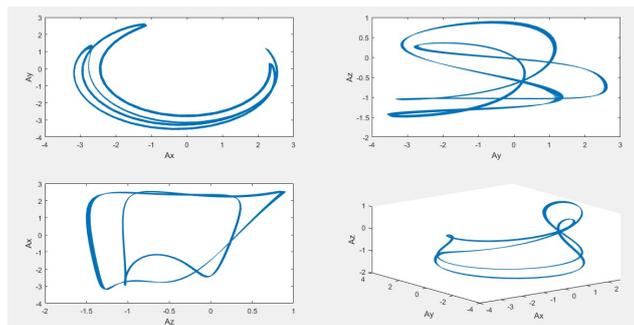


Figura 2.14: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato con **ACA**. La tecnica permette di riportare il sistema ad uno stato desiderato con andamento periodico  $2T$

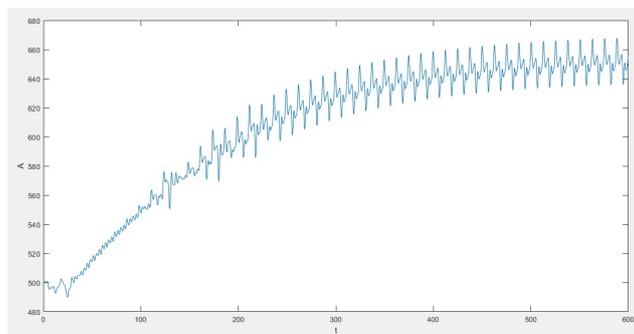


Figura 2.15: Andamento del parametro  $A$  nel tempo

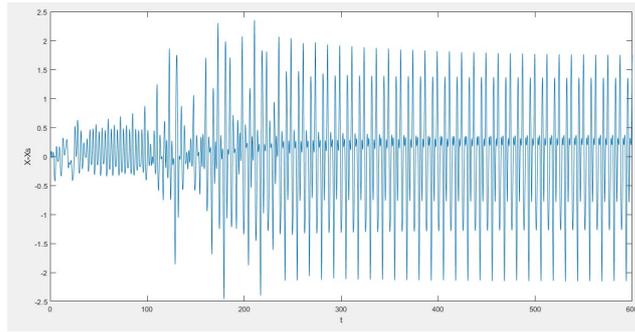


Figura 2.16: Andamento dell'errore nel tempo, per  $X_s$  calcolato con  $f = 5.5$

## 2.6 Tecnica di controllo "BANG-BANG"

Dato l'errore  $e(t) = z(t) - z(t - \tau)$ , con  $\tau$  ritardo del sistema, se la norma dell'errore è maggiore di una quantità prestabilita  $\delta$ , si può applicare un segnale di controllo  $u(t)$  per riportare il satellite ad un moto regolare. Il segnale, applicato alla sola funzione  $\dot{z}$  del sistema 1.6 risponde alla seguente espressione matematica.

$$\begin{cases} \text{Se } \|e(t)\| \leq \delta, u(t) = 0. \\ \text{Se } \|e(t)\| \geq \delta, u(t) = \begin{cases} -K_E(f_3(x, y, z, t) - \dot{z}(t - \tau)) & \text{se } e(t) > 0 \\ K_E(f_3(x, y, z, t) - \dot{z}(t - \tau)) & \text{se } e(t) < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.2)$$

Applicando un ritardo  $\tau = 10$  secondi ed un guadagno  $K_E = 0.07$ , i grafici ricavati dall'implementazione **Matlab** sono le Figure 2.17, 2.18 e 2.19.

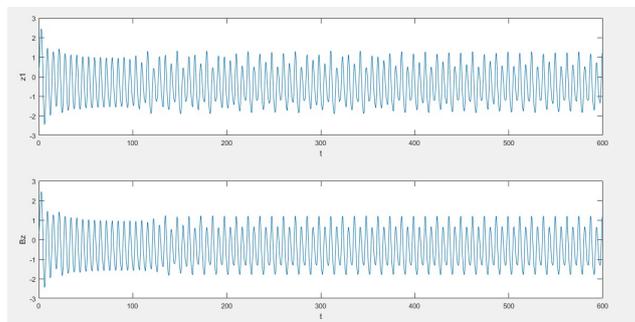


Figura 2.17: Andamento temporale della coordinata  $z$  del sistema girostatico controllato con la tecnica *BANG-BANG*

## 2.7 Tecnica di controllo ad addizione di impulso periodico

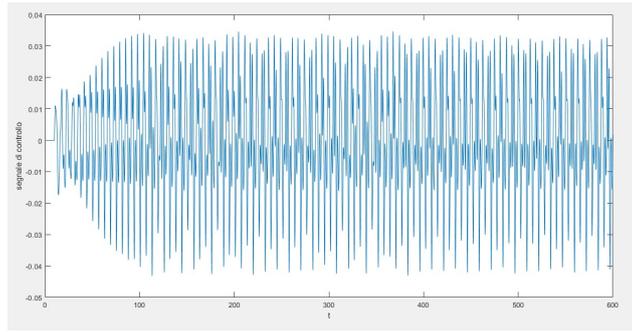


Figura 2.18: Segnale di controllo della tecnica *BANG-BANG* nel tempo

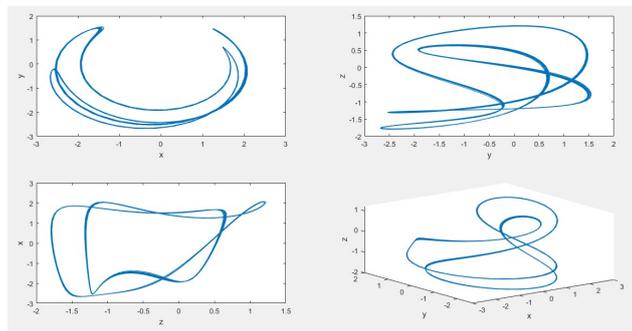


Figura 2.19: Ritratto di fase del sistema girostatico controllato con la tecnica *BANG-BANG*

## 2.7 Tecnica di controllo ad addizione di impulso periodico

Questa tecnica di controllo consiste nell'inviare un *impulso periodico* al sistema per eliminarne il comportamento caotico. L'*impulso periodico* può essere descritto dalla seguente formula:

$$F^* = K_F \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - jk_p) \quad (2.3)$$

Si adopera la funzione **delta di Kronecker**, la quale fa assumere valore **1** al  $\delta$  se l'argomento tra parentesi è nullo, altrimenti il  $\delta$  avrà valore **0**. Nella casistica studiata avremo quindi:

$$\delta(t - jk_p) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = jk_p \\ 0, & \text{se } t \neq jk_p \end{cases} \quad (2.4)$$

Dunque l'impulso  $F^*$  o sarà nullo per  $\delta = 0$  oppure avrà ampiezza pari a  $K_F$ .

Nonostante **Matlab** fornisca una funzione pre-impostata della *delta di Kronecker*, si è preferito utilizzare uno "stratagemma" per diminuire la complessità computazionale: ipotizzando che ogni  $jk_p$  secondi venga inviato un impulso (con  $j$  numero naturale),

se la divisione  $\frac{t}{k_p}$  ha resto zero allora esiste una  $j$  tale per cui l'argomento della funzione (2.4) si annulla. L'implementazione di questo algoritmo (proposto in Figura 2.20) permette di non iterare la  $j$  a vuoto, risparmiando tempo.

```

1 %Se alla variabile control si assegna il valore K si gestisce la
  tecnica di controllo ad impulso periodico.
2 elseif (control=='K')
3 %Se il resto tra t e kp e' zero Fstar assumerà il valore di Kf,
  altrimenti zero.
4     if (mod(round(t,2),kp)==0)
5 Fstar=Kf;
6     else
7         Fstar=0;
8     end
9 %Si aggiunge alla terza equazione la Fstar.
10 diff3=((A-B)/C)*(x*y) + (h3/C)*(fr*w*sin(w*t)) - (h2/C)*x + (h1/C)*y -
    (b/C)*z + (ki(5)/C)*(wr-z)+((ki(6)/C)*(wr^3-z^3))+ Fstar;

```

Figura 2.20: Righe di codice **Matlab** per implementare la tecnica di controllo ad impulso periodico.

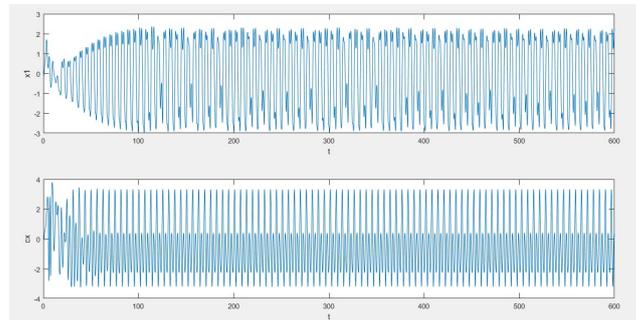


Figura 2.21: Andamento temporale della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato da un *impulso periodico* ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è  $K_F = 0.4$

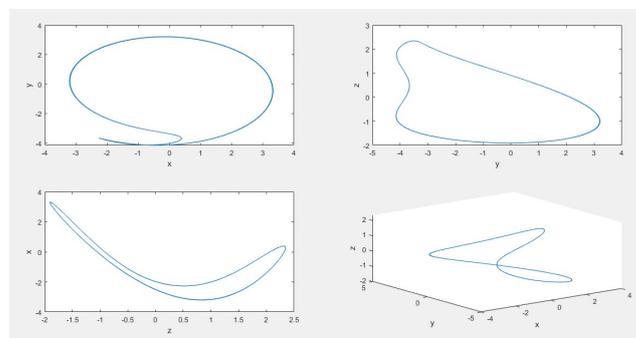


Figura 2.22: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato da un *impulso periodico* ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è  $K_F = 0.4$

## 2.8 Tecnica di controllo ad iniezione di segnale di dithering

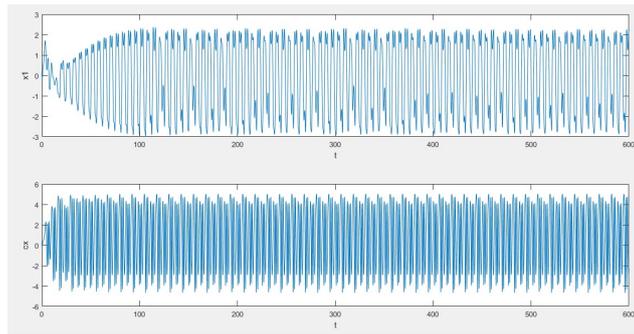


Figura 2.23: Andamento temporale della coordinata  $x$  del sistema girostatico controllato da un *impulso periodico* ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è  $K_F = 0.6$

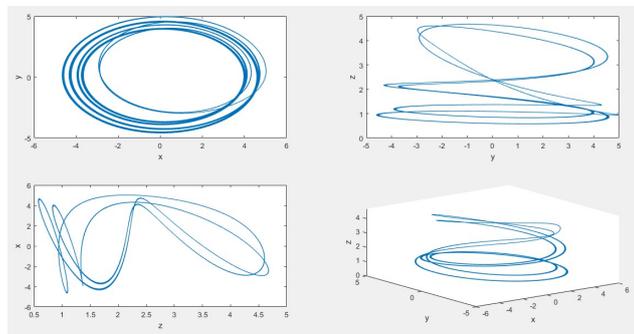


Figura 2.24: Ritratti di fase del sistema girostatico controllato da un *impulso periodico* ogni 0.01 secondi. Il parametro caratteristico è  $K_F = 0.6$

## 2.8 Tecnica di controllo *ad iniezione di segnale di dithering*

La tecnica di controllo *ad iniezione di segnale di dithering* si basa sulla perturbazione delle coordinate del sistema con un segnale "rumoroso"  $w(t)$ . I segnali di *dithering* più popolari nell'ambito del controllo di sistemi non lineari, come spiegato in [6], sono essenzialmente tre:

1. Ad **onda quadra**
2. Ad **onda sinusoidale**
3. ad **onda triangolare**

Per gli scopi del nostro studio tratteremo solo il primo tipo di segnale, ovvero ad *onda quadra*. Questa è la tipologia più semplice da implementare, in quanto  $w(t)$  assume, in modo alternato (ovvero ogni mezzo periodo  $T_0/2$ ) i valori costanti  $+w_d$

e  $-w_d$ . Questa caratteristica permette di riscrivere il sistema (1.6) nella seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}[f_1(x + w_d, y + w_d, z + w_d, t) + f_1(x - w_d, y - w_d, z - w_d, t)] \\ \dot{y} = \frac{1}{2}[f_2(x + w_d, y + w_d, z + w_d, t) + f_2(x - w_d, y - w_d, z - w_d, t)] \\ \dot{z} = \frac{1}{2}[f_3(x + w_d, y + w_d, z + w_d, t) + f_3(x - w_d, y - w_d, z - w_d, t)] \end{cases} \quad (2.5)$$

La costante  $w_d$  non può essere scelta arbitrariamente, infatti per alcuni valori numerici forniti al segnale il sistema girostatico non perde la propria caoticità. I risultati osservabili nei Grafici 2.25 e 2.26 sono ottenuti per  $|w_d| = 0.1$  rad/s, mentre i *plot* 2.27 e 2.28 sono ricavati grazie ad un segnale  $|w_d| = 0.3$  rad/s.

Due considerazioni:

1. Con il controllo, dopo un periodo di transitorio (che è più breve nel 2\* caso) si ha un moto periodico per la coordinata  $z$ .
2. Le traiettorie delle variabili  $x, y, z$  nello spazio delle fasi dopo il controllo mostrano, nel primo caso, che è si aggiunge la caratteristica di moto *periodico*  $4T$ , mentre nel secondo caso il moto è di tipo *periodico*  $1T$ .

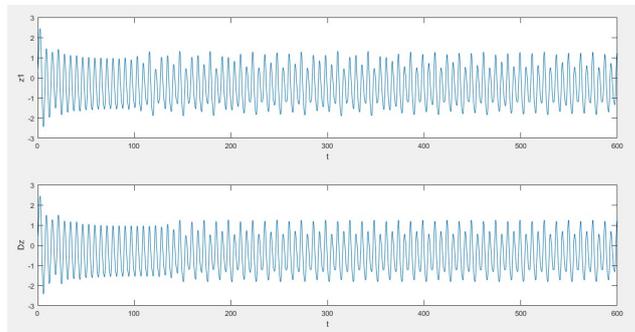


Figura 2.25: Andamento temporale della coordinata  $z$  del sistema girostatico controllato da un segnale di *dithering* iniettato nel sistema [ $w_d = 0.1$ ]

## 2.8 Tecnica di controllo ad iniezione di segnale di dithering

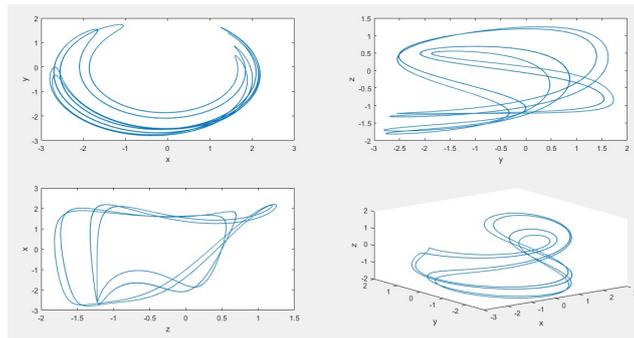


Figura 2.26: Ritratto di fase del sistema girostatico controllato da un segnale di *dithering* iniettato nel sistema [ $w_d = 0.1$ ]

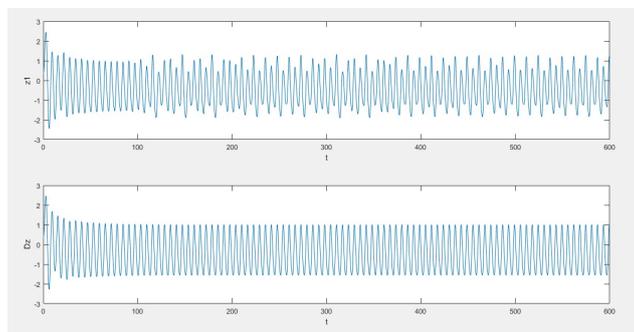


Figura 2.27: Andamento temporale della coordinata  $z$  del sistema girostatico controllato da un segnale di *dithering* iniettato nel sistema [ $w_d = 0.3$ ]

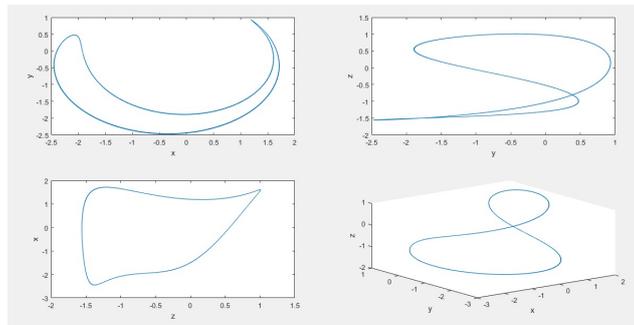


Figura 2.28: Ritratto di fase del sistema girostatico controllato da un segnale di *dithering* iniettato nel sistema [ $w_d = 0.3$ ]



## Capitolo 3

# SINCRONIZZAZIONE

### 3.1 Concetto di *sincronizzazione*

Nel capitolo precedente, oltre alla definizione di *sistema caotico* (vedi Sezione 2.1) sono state fornite delle "strategie" per ristabilire il *moto periodico*. Analizzando queste *tecniche di controllo* si è spesso sottolineato come la caratteristica di *moto caotico* sia **non ideale**.

**Tuttavia i segnali caotici presentano alcune caratteristiche vantaggiose** che potrebbero essere sfruttate per diverse applicazioni: ad esempio sono *passa banda* e *robusti al rumore*. Se a queste proprietà aggiungiamo l'aspetto della *impredicibilità*, si può intuire come mai sia sempre più diffusa l'esigenza di impiegare *sistemi caotici* nell'ambito della sicurezza (un comune utilizzo di segnali caotici si ha, ad esempio, negli *algoritmi di cifratura*). Dopo questa breve quanto importante premessa si introduce il seguente scenario: si ipotizzi di avere non più un singolo sistema girostatico ma due *girostatici*, entrambi caotici ( $f = 6.5$ ). I due dispositivi condividono lo stesso set di equazioni (1.5) e gli stessi valori numerici dei parametri (vedi Tabella 1.1). La differenza si trova nelle **condizioni iniziali**. Soggetti al nostro studio saranno quindi i sistemi:

$$\begin{array}{l} \text{Girostatico 1} \\ \text{Girostatico 2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, y_1, z_1, t) \\ \dot{y}_1 = f_2(x_1, y_1, z_1, t) \\ \dot{z}_1 = f_3(x_1, y_1, z_1, t) \\ x_1(0) = 0.1 \\ y_1(0) = 0.2 \\ z_1(0) = 0.3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = f_1(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{y}_2 = f_2(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{z}_2 = f_3(x_2, y_2, z_2, t) \\ x_2(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ z_2(0) = 3 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

**Il nostro obiettivo è quello di sincronizzare i due sistemi:** assegnando al **Girostatico 1** il ruolo di *sistema guida* dovremo attuare delle correzioni che permettano al **Girostatico 2** di *inseguire* la traiettoria del primo satellite. Come illustrato nella Figura 3.1, se non agissimo sul secondo sistema non solo avremmo diversi ritratti di fase e andamenti nel tempo, ma le coordinate dei due dispositivi sarebbero tra loro non correlate. Questo perché i due satelliti sono *sensibili alle condizioni iniziali*, quindi definire  $x_1(0) \neq x_2(0)$ ,  $y_1(0) \neq y_2(0)$  e  $z_1(0) \neq z_2(0)$  causa traiettorie distinte.

Nelle Sezioni 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 verranno dunque descritte quattro **tecniche di sincronizzazione**: le prime tre si basano su un controllo di tipo *feedback*, mentre l'ultima utilizza una metodologia più sofisticata, detta "*a forma combinata*".

I risultati ottenuti saranno discussi nella Sezione 3.6.

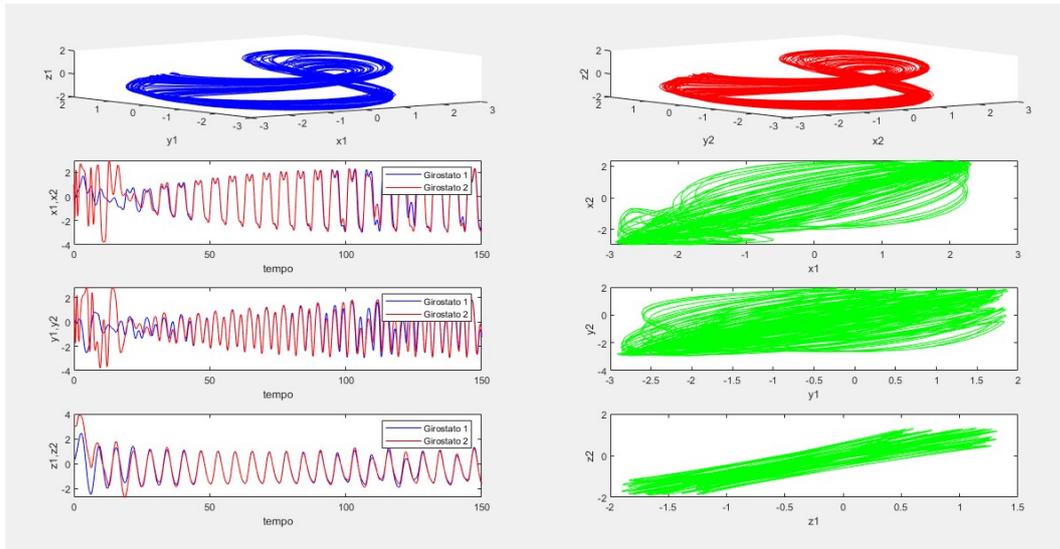


Figura 3.1: Ritratti di fase, andamento temporale e legame tra le coordinate dei due sistemi girostatici **NON SINCRONIZZATI**

### 3.2 Tecnica di sincronizzazione *ad addizione di feedback LINEARE*

Il *feedback* è una funzione di tipo **lineare**. Il **Girostato 2** *sincronizzato* sarà descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\text{Girostato 2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = f_1(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{y}_2 = f_2(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{z}_2 = f_3(x_2, y_2, z_2, t) + \epsilon(z_1 - z_2) \\ x_2(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ z_2(0) = 3 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

I risultati grafici, osservabili in Figura 3.2, saranno analizzati nell'ultima sezione del capitolo.

### 3.3 Tecnica di sincronizzazione ad addizione di feedback SINUSOIDALE

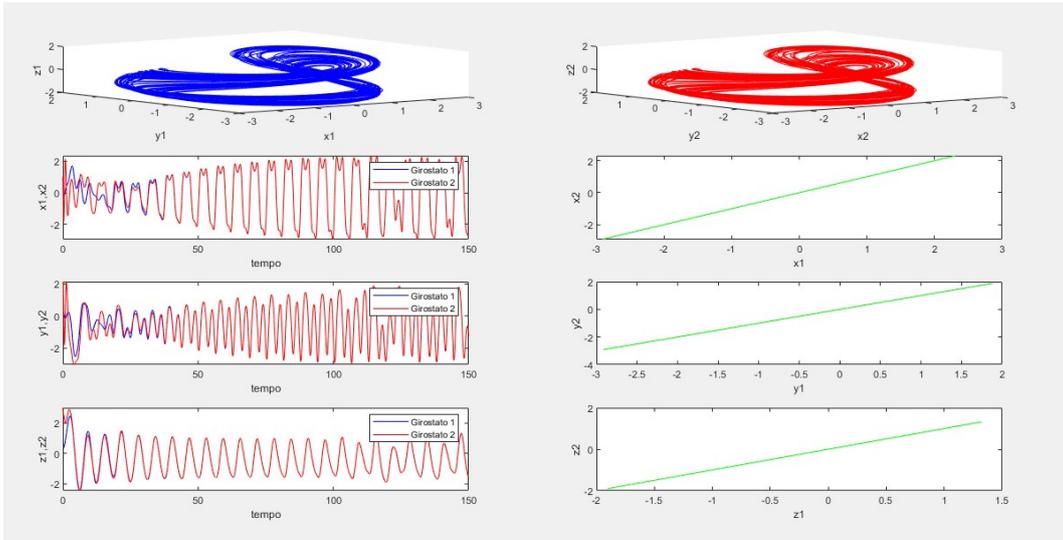


Figura 3.2: Sincronizzazione applicando un *feedback lineare*,  $\epsilon = 0.7$

### 3.3 Tecnica di sincronizzazione ad addizione di feedback SINUSOIDALE

Il *feedback* è una funzione di tipo **sinusoidale**. Il **Girostato 2** *sincronizzato* sarà descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\text{Girostato 2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = f_1(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{y}_2 = f_2(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{z}_2 = f_3(x_2, y_2, z_2, t) + \epsilon \cdot \sin(z_1 - z_2) \\ x_2(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ z_2(0) = 3 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

I risultati grafici, osservabili in Figura 3.3, saranno analizzati nell'ultima sezione del capitolo.

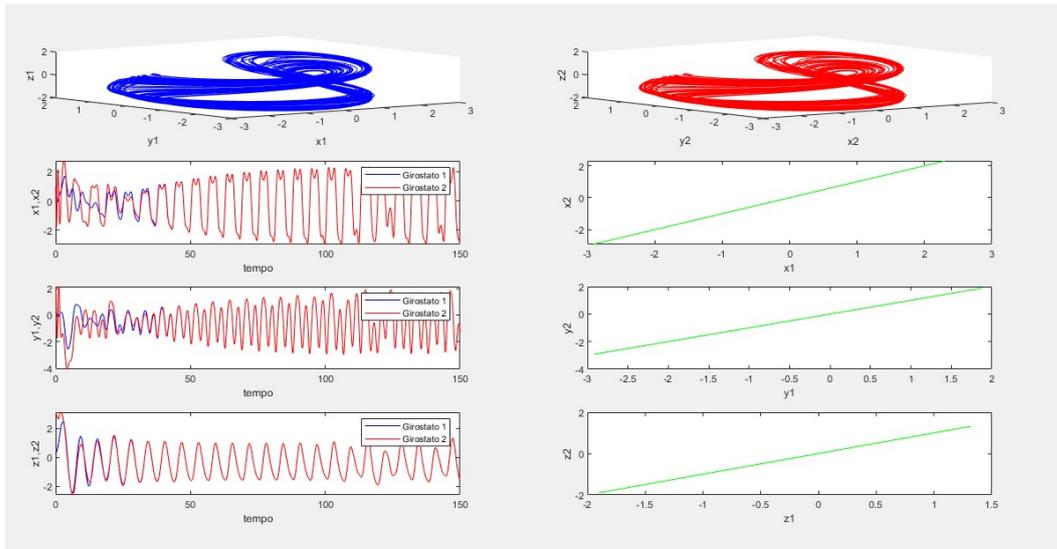


Figura 3.3: Sincronizzazione applicando un *feedback sinusoidale*,  $\epsilon = 0.7$

### 3.4 Tecnica di sincronizzazione *ad addizione di feedback ESPONENZIALE*

Il *feedback* è una funzione di tipo **esponenziale**. Il **Girostato 2** *sincronizzato* sarà descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\text{Girostato 2} \begin{cases} \dot{x}_2 = f_1(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{y}_2 = f_2(x_2, y_2, z_2, t) \\ \dot{z}_2 = f_3(x_2, y_2, z_2, t) + \epsilon \cdot [\exp(z_1 - z_2) - 1] \\ x_2(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ z_2(0) = 3 \end{cases} \quad (3.4)$$

Anche in questo caso i risultati grafici, osservabili in Figura 3.4, saranno analizzati nell'ultima sezione del capitolo.

### 3.5 Tecnica di sincronizzazione del sistema "a forma combinata"

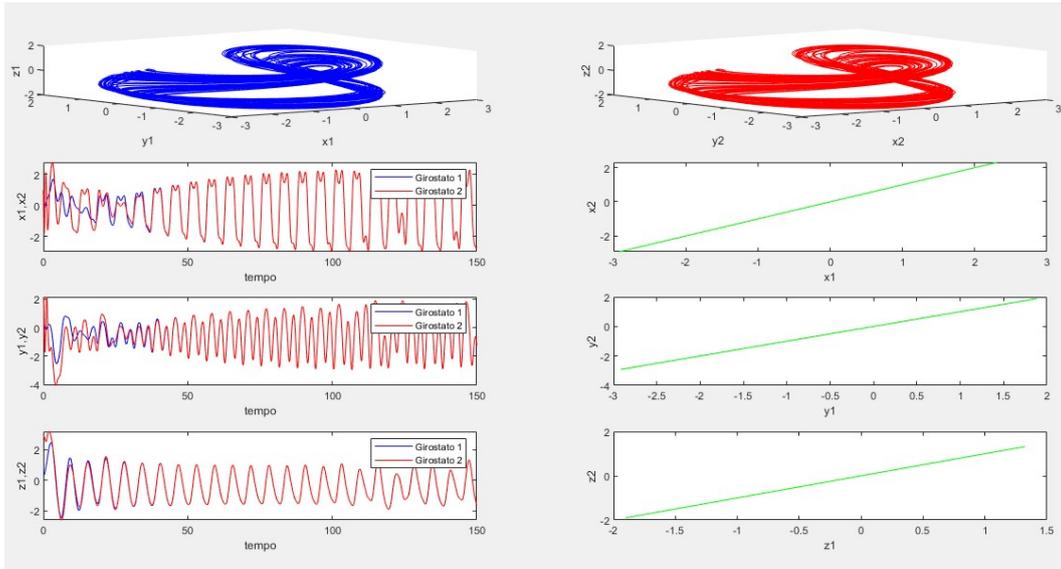


Figura 3.4: Sincronizzazione applicando un *feedback esponenziale*,  $\epsilon = 0.7$

### 3.5 Tecnica di sincronizzazione del sistema "a forma combinata"

Come anticipato nella Sezione 3.1, la *tecnica di sincronizzazione "a forma combinata"* (nome tradotto dall'inglese: "*SYNCHRONIZATION BY COUPLED FORM OF THE SYSTEM*") esegue una modifica più "radicale" su entrambi i dispositivi. Le nuove funzioni non lineari che verranno definite avranno come variabili non solo le *coordinate intrinseche* del sistema (ovvero  $x_1, y_1, z_1$  per il **Girostato 1** e  $x_2, y_2, z_2$  per il **Girostato 2**), ma anche le coordinate dell'altro sistema.

Alle equazioni del **Girostato 2** verranno inoltre sommati dei *termini feedback lineari*. Quindi, per ottenere un'adeguata *sincronizzazione*, i satelliti saranno governati dai due sistemi riportati in basso:

$$\begin{array}{l}
 \text{Girostato 1} \\
 \text{Girostato 2}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_1 = f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, t) \\
 \dot{y}_1 = f_2(x_1, y_1, z_1, y_2, t) \\
 \dot{z}_1 = f_3(x_1, y_1, z_1, z_2, t)
 \end{array} \right.
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Girostato 2} \\
 \text{Girostato 1}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_2 = f_1(x_2, y_2, z_2, x_1, t) + \epsilon(x_1 - x_2) \\
 \dot{y}_2 = f_2(x_2, y_2, z_2, y_1, t) + \epsilon(y_1 - y_2) \\
 \dot{z}_2 = f_3(x_2, y_2, z_2, z_1, t) + \epsilon(z_1 - z_2)
 \end{array} \right.
 \quad (3.5)$$

I quali, scritti in forma *estesa*, diventano:

Girostato 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{(B-C)}{A}y_1z_1 - \frac{h_3}{A}(1+f\cos\omega t)y_1 + \frac{h_2}{A}z_1 + \frac{k_1}{A}(\omega_r - x_1) + \frac{k_2}{A}(\omega_r^3 - x_1x_2^2) \\ \dot{y}_1 = \frac{(C-A)}{B}x_1z_1 - \frac{h_1}{B}z_1 + \frac{h_3}{B}(1+f\cos\omega t)x_1 + \frac{k_3}{B}(\omega_r - y_1) + \frac{k_4}{B}(\omega_r^3 - y_1y_2^2) \\ \dot{z}_1 = \frac{(A-B)}{C}x_1y_1 + \frac{h_3}{C}f\omega\sin\omega t - \frac{h_2}{C}x_1 + \frac{h_1}{C}y_1 - \frac{b}{C}z_1 + \frac{k_5}{C}(\omega_r - z_1) + \frac{k_6}{C}(\omega_r^3 - z_1z_2^2) \end{cases} \quad (3.6)$$

Girostato 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{(B-C)}{A}y_2z_2 - \frac{h_3}{A}(1+f\cos\omega t)y_2 + \frac{h_2}{A}z_2 + \frac{k_1}{A}(\omega_r - x_2) + \frac{k_2}{A}(\omega_r^3 - x_2x_1^2) + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \frac{(C-A)}{B}x_2z_2 - \frac{h_1}{B}z_2 + \frac{h_3}{B}(1+f\cos\omega t)x_2 + \frac{k_3}{B}(\omega_r - y_2) + \frac{k_4}{B}(\omega_r^3 - y_2y_1^2) + \epsilon(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = \frac{(A-B)}{C}x_2y_2 + \frac{h_3}{C}f\omega\sin\omega t - \frac{h_2}{C}x_2 + \frac{h_1}{C}y_2 - \frac{b}{C}z_2 + \frac{k_5}{C}(\omega_r - z_2) + \frac{k_6}{C}(\omega_r^3 - z_2z_1^2) + \epsilon(z_1 - z_2) \end{cases} \quad (3.7)$$

Come per le prime tre *tecniche di sincronizzazione* proposte, si discuterà dei risultati mostrati dai plot in Figura 3.5 nella prossima Sezione.

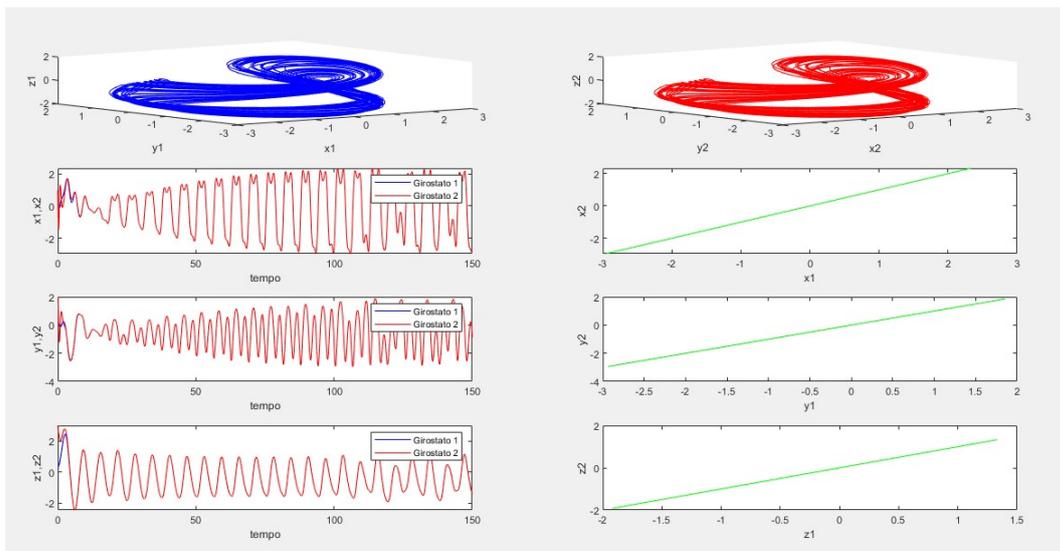


Figura 3.5: Sincronizzazione con la tecnica "a forma combinata",  $\epsilon = 0.7$

### 3.6 ANALISI DEI RISULTATI DELLE SINCRONIZZAZIONI

Tutte le tecniche di sincronizzazione descritte si sono dimostrate *efficaci ed efficienti*. Se nella Figura 3.1 si può osservare come la dinamica dei due dispositivi *non sincronizzati* sia diversa, applicando le diverse correzioni proposte notiamo che:

1. Dopo aver raggiunto uno stato *stabile*, le traiettorie dei due sistemi (visibili nei *ritratti di fase*), **sono le stesse**.
2. Le curve che mostrano l'andamento temporale delle coordinate omonime dopo un periodo transitorio si sovrappongono **perfettamente**.
3. **Dove lo stato è stabile intercorrono delle relazioni lineari tra le coordinate in tutte le metodologie di sincronizzazione approfondite**. Ciò vuol dire che, per  $t > t_{transitorio}$ , la generica incognita  $\psi_2$  è uguale a:  
 $\psi_2 = f(\psi_1) = \alpha \cdot \psi_1$ , con  $\alpha$  numero reale. Per questo motivo le **curve verdi** delle Figure 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 sono dei *segmenti*.
4. Il **Girostato 2** può essere sincronizzato con *feedback* di natura diversa, lineari e non lineari.
5. Nelle *tecniche di sincronizzazione* ad addizione di un termine *feedback* si agisce solo sulla terza equazione del sistema.
6. Il periodo transitorio più breve si ha con la *tecnica di sincronizzazione a forma combinata*: una particolarità di questa metodologia è che anche il *sistema guida*, ovvero il **Girostato 1**, viene perturbato dalle coordinate del sistema da sincronizzare, il **Girostato 2**.
7. Nella *tecnica di sincronizzazione a forma combinata* si può verificare che il termine *feedback* addizionato nelle equazioni del **Girostato 2** può essere non solo *lineare*, ma anche *esponenziale* o *sinusoidale*.
8. Tutti i grafici proposti sono ottenuti con il fattore  $\epsilon = 0.7$ . In realtà, si è constatato che ottimi risultati si ricavano per  $\epsilon > 0.1$  in tutte le *tecniche di sincronizzazione* studiate.



## Capitolo 4

# ANALISI DEGLI ESPONENTI DI LYAPUNOV

### 4.1 Introduzione agli esponenti di Lyapunov

Nell'analisi dei *ritratti di fase* si è frequentemente utilizzata la parola *traiettoria* per definire le curve rappresentate nei grafici. Per sistemi *non autonomi continui*, si può definire la **traiettoria** come l'insieme delle soluzioni di  $\dot{x} = F(x, t)$ , dove  $x$  è un vettore dello spazio  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  ed  $F(x, t)$  è un campo vettoriale che genera il *flusso*. La generica soluzione per una data condizione iniziale  $x_0$  è la funzione di classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ )  $f(x_0, t)$ . Quindi, l'insieme  $[f(x_0, t) : t \in \mathbb{R}]$  è, formalmente, la *traiettoria* (o *orbita*) del sistema dinamico.

Ragionando in campo discreto, se si campiona con passo  $h$  nel periodo  $T$  considerato si sta risolvendo un problema del tipo:

$$x_{i+1} = f(x_i, t_i), \text{ con } i \in \mathbb{N}, t_i \in T.$$

L'evoluzione della *traiettoria* di un sistema in cui si ha un *moto caotico*, come imparato in 2.1, è **strettamente legata alle condizioni iniziali**. Una stima di **quanto le condizioni iniziali influiscano sulle traiettorie** è ricavabile dall'analisi dell'**ESPONENTE DI LYAPUNOV** [8].

**Definizione 1** *Consideriamo i problemi:*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ x(0) = x_0 + u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

dove  $u_0$  è una piccola perturbazione tale da poter definire un nuovo punto vicino ad  $x_0$ . Dall'evoluzione nel tempo dei due sistemi scaturiranno traiettorie distinte. Al generico tempo  $t$  avremo le due soluzioni  $f(t, x_0)$  ed  $f(t, x_0 + u_0)$  e la perturbazione  $u_t \equiv f(t, x_0 + u_0) - f(t, x_0) = u_0 e^{\lambda t}$ . L'esponente  $\lambda$  è detto di Lyapunov e quantifica, per tempi sufficientemente lunghi, la velocità di allontanamento delle due orbite.

$$\lambda(x_0, u_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{\|u_t\|}{\|u_0\|} \quad (4.2)$$

dove  $\|u\|$  denota la norma del vettore  $u$ .

Nell'articolo [1], un'altra formula per il calcolo numerico viene utilizzata:

$$\lambda = \frac{1}{t_{finale} - t_{iniziale}} \sum_{k=1}^N \log_2 \frac{d(t_k)}{d(t_{k-1})} \quad (4.3)$$

dove con  $d(t_i)$  si indica la distanza tra le due traiettorie nel tempo  $t_i$ .

Il programma **Matlab** implementa il calcolo dell'esponente richiamando la funzione predefinita **lyapunovExponent** [14]:

$$\lambda(i) = \frac{1}{K_{max} - K_{min} + 1} \sum_{k=K_{min}}^{K_{max}} \frac{1}{k \cdot dt} \ln \frac{\|Y_{i+k} - Y_{i^*+k}\|}{\|Y_i - Y_{i^*}\|} \quad (4.4)$$

In questo caso si definisce un intervallo  $[K_{min}, K_{max}]$ , noto come *Expansion Range* (si utilizzano come limite inferiore  $K_{min} = 0$  e superiore  $K_{max} = 600$ ), una frequenza di campionamento  $f_s = \frac{1}{dt} = 10s^{-1}$ . L'algoritmo proposto dalla piattaforma **Matlab** trova automaticamente il valore  $i^*$ , tale per cui la distanza  $\|Y_i - Y_{i^*}\|$  è minima. Il rapporto  $\frac{\|Y_{i+k} - Y_{i^*+k}\|}{\|Y_i - Y_{i^*}\|}$  corrisponde alla *divergenza logaritmica*.

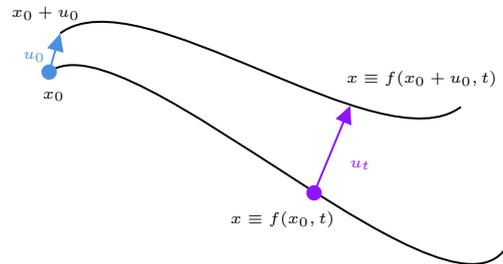


Figura 4.1: Traiettorie divergenti per condizioni iniziali vicine

Per comodità, si analizzano gli *esponenti di Lyapunov* cercando di sfruttare la funzione 4.4 e gli strumenti offerti dalla piattaforma di calcolo.

Come si può osservare dalle equazioni sopra descritte, il risultato numerico può essere ricavato in diversi modi: questo perché, più che un'analisi sulle grandezze in gioco, è importante valutare **il segno** che l'esponente assume.

Infatti:

- Se  $\lambda > 0$  si prevede **moto caotico** ed **orbite divergenti**.

## 4.2 Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $f$

- Se  $\lambda \leq 0$  si prevede **moto periodico** ed **orbite convergenti**.

Nella Sezione 4.2 sarà discusso l'andamento degli *esponenti di Lyapunov* al variare del parametro  $f$  del sistema girostatico.

Nel Capitolo 2 le *tecniche di controllo* per un sistema girostatico dalla dinamica caotica ( $f = 6.5$ ) sono state ampiamente discusse.

Per le metodologie descritte in 2.3 e 2.4, uno studio sugli andamenti degli *esponenti di Lyapunov* al variare dei parametri di controllo verrà affrontato nelle Sezioni 4.3 e 4.4. Ulteriori approfondimenti grafici saranno proposti nella Sezione 4.5.

## 4.2 Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $f$

Nel Capitolo 1 si sono messe in evidenza le variazioni degli andamenti temporali e dei *ritratti di fase* in relazione alle modifiche apportate al parametro  $f$ . Il problema che in questa sezione si vuole cercare di affrontare è il seguente: individuare i valori numerici di  $f \in [4.5, 6.5]$  tali per cui il movimento del *girostatico* sia regolare e non caotico. L'indagine viene effettuata con l'*esponente di Lyapunov* individuato dalla Equazione (4.4).

Il procedimento utilizzato è il seguente:

1. Si costruiscono con un **ciclo for** 3 matrici (una per ogni coordinata  $xyz$ ) di dimensione  $N \times N_f$ , con  $N$  numero di iterazioni nel dominio del tempo  $T=[0,600]$  ed  $N_f$  numero di parametri  $f \in [4.5, 6.5]$  valutati. Ogni colonna  $j$ -esima (con  $1 \leq j \leq N_f, j \in \mathbb{N}$ ) della matrice è l'evoluzione della coordinata del sistema girostatico nel tempo ad una certa  $f_j$ , mentre ogni riga  $i$ -esima (con  $1 \leq i \leq N, i \in \mathbb{N}$ ) è il valore assunto dalla coordinata ad un certo istante di tempo  $t_i$  al variare del parametro. Si sceglie di mantenere  $N = 6000$ , mentre  $N_f = 200$ ; **Le condizioni iniziali sono**  $x(0) = 0.1$ ,  $y(0) = 0.2$  e  $z(0) = 0.3$ .

2. Di ogni colonna  $j$ -esima verrà restituito il **massimo esponente di Lyapunov**, calcolato utilizzando l'Equazione 4.4.

Si riporta parte del codice scritto:

```
1 Lx(j)=lyapunovExponent(x(:,j),10,'ExpansionRange',[1,600]);
2 Ly(j)=lyapunovExponent(y(:,j),10,'ExpansionRange',[1,600]);
3 Lz(j)=lyapunovExponent(z(:,j),10,'ExpansionRange',[1,600]);
4
```

3. Si "plottano" le curve che descrivono l'andamento dei *massimi esponenti di Lyapunov* al variare di  $f$  per ciascuna coordinata  $x, y, z$ .

Come si può osservare dalla Figura 4.2, i valori numerici assunti dai massimi esponenti sono, in modulo, dell'ordine del *millesimo* ( $|\lambda| \leq 0.01$ ), a testimoniare il fatto che le *orbite*, nel caso  $\lambda > 0$ , divergano a velocità basse. Negli intervalli

$f \in [4.9, 5.2]$  ed  $f \in [6.2, 6.5]$  l'andamento degli esponenti sembra predire un moto del satellite quasi esclusivamente **caotico**: quindi, se il nostro interesse è la periodicità della dinamica del sistema, l'analisi degli esponenti suggerisce di non utilizzare parametri  $f$  contenuti all'interno degli intervalli sopra enunciati.

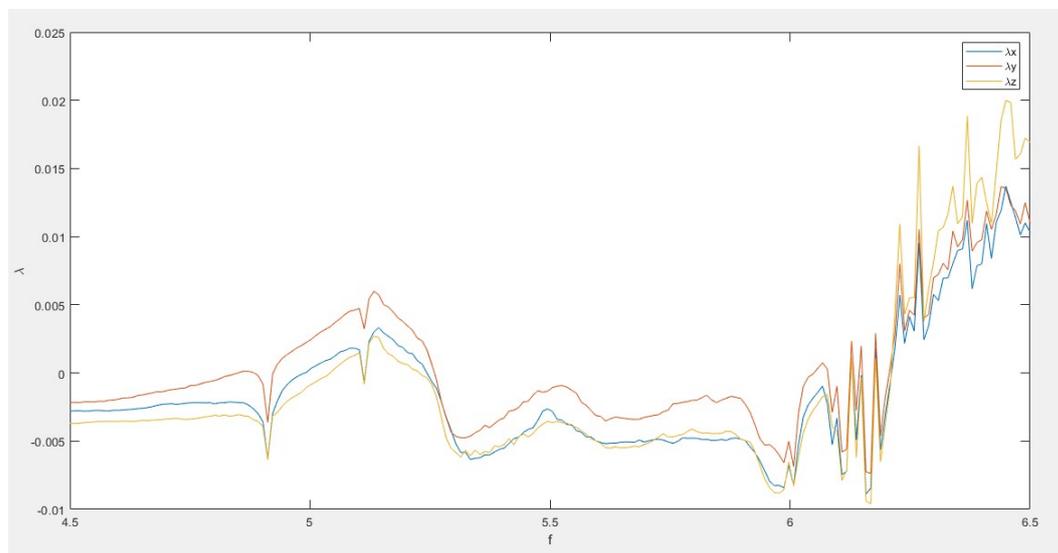


Figura 4.2: Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro  $f$

### 4.3 Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $M$ della seconda tecnica di controllo

Nella sezione 2.3 un *girostatto in moto caotico*  $f = 6.5$  viene controllato attraverso l'impiego di una *coppia costante* addizionata alla terza equazione del Sistema 1.5. La questione su cui si vuole ragionare è la seguente: per quali valori di  $M \in [0, 1]$ , il sistema girostatico non assume il comportamento desiderato (cioè **periodico nel tempo**)? Per rispondere alla domanda, si seguono i seguenti *step*:

1. Si costruiscono con un **ciclo for** 3 matrici (una per ogni coordinata  $xyz$ ) di dimensione  $N \times N_M$ , con  $N$  numero di iterazioni nel dominio del tempo  $T=[0,600]$  ed  $N_M$  numero di variabili di controllo  $M \in [0, 1]$  valutate. Ogni colonna  $j$ -esima (con  $1 \leq j \leq N_M, j \in \mathbb{N}$ ) della matrice è l'evoluzione della coordinata del sistema girostatico nel tempo controllato con una certa  $M_j$ , mentre ogni riga  $i$ -esima (con  $1 \leq i \leq N, i \in \mathbb{N}$ ) è il valore assunto dalla coordinata  $x, y$  o  $z$  ad un certo istante di tempo  $t_i$  al variare della grandezza della coppia. Si sceglie di mantenere  $N = 6000$ , mentre  $N_M = 100$ .

**Le condizioni iniziali sono**  $x(0) = 0.1, y(0) = 0.2$  e  $z(0) = 0.3$ .

2. Di ogni colonna  $j$ -esima verrà restituito il **massimo Esponente di Lyapunov**, calcolato utilizzando l'Equazione 4.4.

#### 4.4 Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $N$ e $\bar{\omega}$ della terza tecnica di controllo

3. Si "plottano" le curve che descrivono l'andamento dei massimi esponenti di Lyapunov al variare di  $M$  per ciascuna coordinata  $x, y, z$  ed il **massimo valore degli esponenti**, (ottenuto valutando assieme le tre incognite).

Ciò che si evidenzia dall'analisi della Figura 4.3 è che la coppia  $M$  **non può assumere tutti i valori dell'intervallo  $[0,1]$** . Infatti, l'andamento degli esponenti presenta dei "picchi" (ad esempio in  $M = 0.46$ ,  $M = 0.64$  o in  $M = 0.78$ ) che superano la soglia  $\lambda = 0$ . Per evitare scelte discutibili, l'intervallo di scelta del parametro di controllo può essere limitato a  $0.13 \leq M \leq 0.45$ .

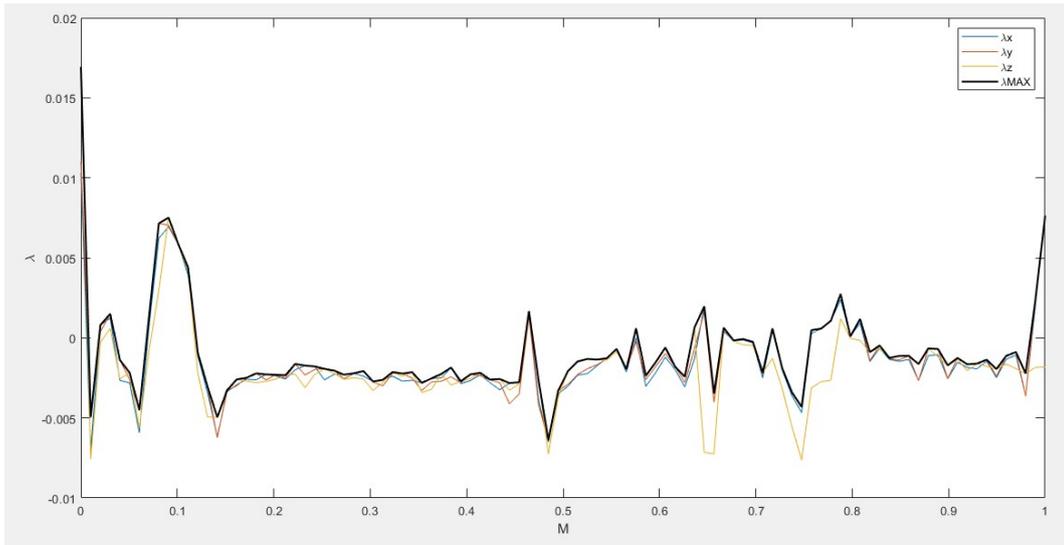


Figura 4.3: Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del coppia  $M$  applicata nella *seconda tecnica di controllo*

#### 4.4 Esponenti di Lyapunov al variare del parametro $N$ e $\bar{\omega}$ della terza tecnica di controllo

Il problema che si vuole risolvere in questa Sezione è per molti aspetti uguale a quello affrontato in 4.3. La sostanziale differenza è data dalla diversa *tecnica di controllo*, e quindi dai parametri da variare. Ricordando che, nella terza tecnica (approfondita in 2.4), si aggiunge una *forza periodica* uguale  $N \sin(\bar{\omega}t + \Phi)$ , l'andamento dei  $\lambda$  si studierà:

1. al variare dell'*ampiezza*  $N \in [0, 1]$  ( $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}, \Phi = 0$ )
2. al variare della *pulsazione*  $\bar{\omega} \in [1, 3]$  ( $N = 1, \Phi = 0$ )

In Figura 4.4 si può osservare come, con la pulsazione  $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}$  mantenuta costante, i *massimi esponenti di Lyapunov siano sempre maggiori di zero per tutto l'intervallo  $N \in [0, 1]$  analizzato*. La conclusione da trarre è dunque l'impossibilità di controllare il sistema con i seguenti valori di pulsazione e ampiezza.

Anche la figura 4.5 non mostra un andamento degli esponenti ottimale. Infatti, solo per qualche valore di  $\bar{\omega}$  il sistema sembra proiettato a muoversi in modo regolare.

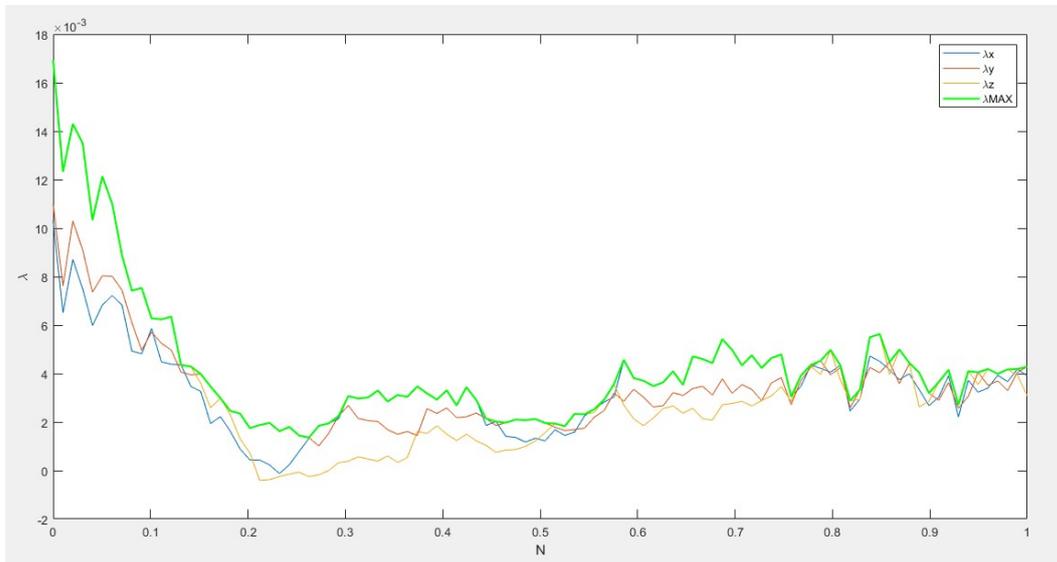


Figura 4.4: Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro  $N$  della terza tecnica di controllo

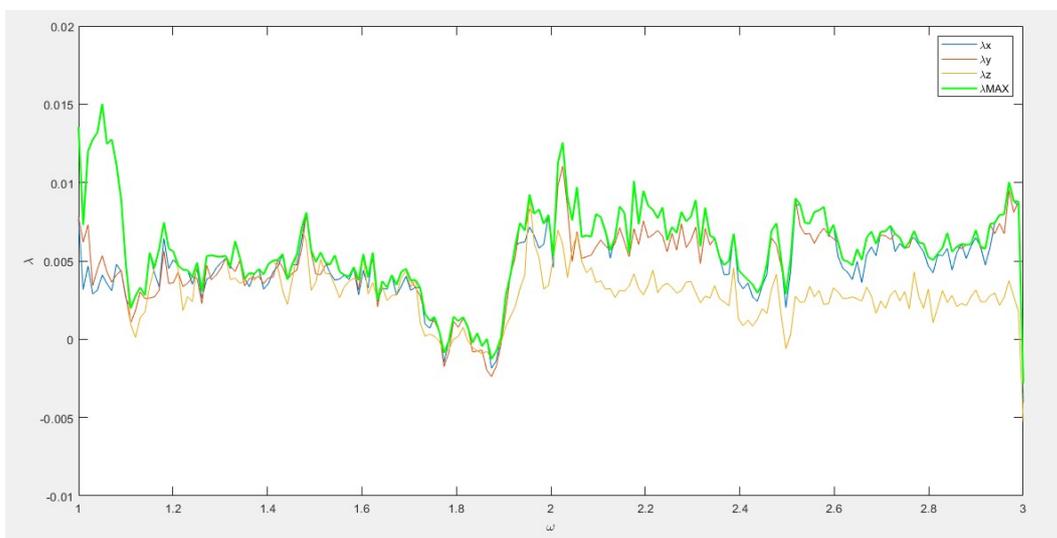


Figura 4.5: Andamento degli esponenti di Lyapunov al variare del parametro  $\bar{\omega}$  della terza tecnica di controllo

## 4.5 APPROFONDIMENTI E GRAFICI

Gli esponenti di Lyapunov *quantificano* la caoticità di un sistema dinamico non lineare. Considerata l'implementazione utilizzata per calcolarne il valore numerico

**sicuramente soggetta ad errori di approssimazione** e la grandezza ridotta degli esponenti ricavati (in modulo è dell'ordine di  $10^{-3}$ ), è possibile riscontrare casistiche in cui la predizione **non è corretta**. Tuttavia, la quasi totalità delle verifiche grafiche tentate ci consentono di concludere che l'analisi del  $\lambda$  è un possibile strumento per la stima del comportamento del sistema girostatico.

Per completare il capitolo discusso, si mostrano dei risultati grafici.

#### 4.5.1 APPROFONDIMENTO: $\lambda$ al variare del parametro $f$

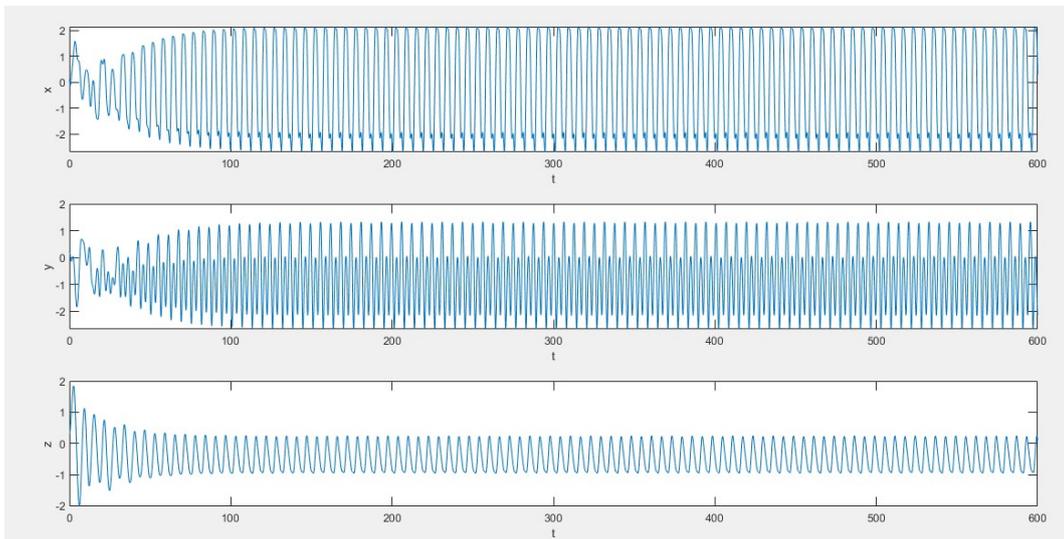


Figura 4.6: Andamento temporale delle coordinate per  $f=4.91$ ,  $\lambda \leq 0$ : **le curve, dopo un periodo di transitorio, sono periodiche**

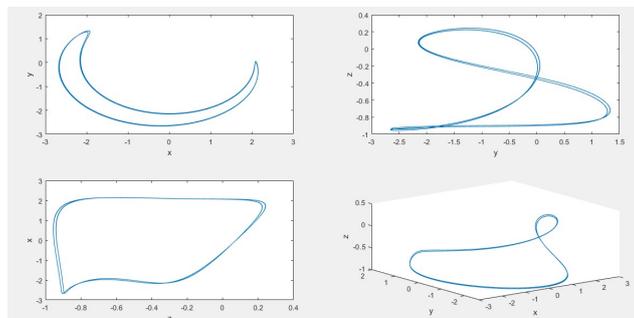


Figura 4.7: Ritratti di fase per  $f=4.91$ ,  $\lambda \leq 0$

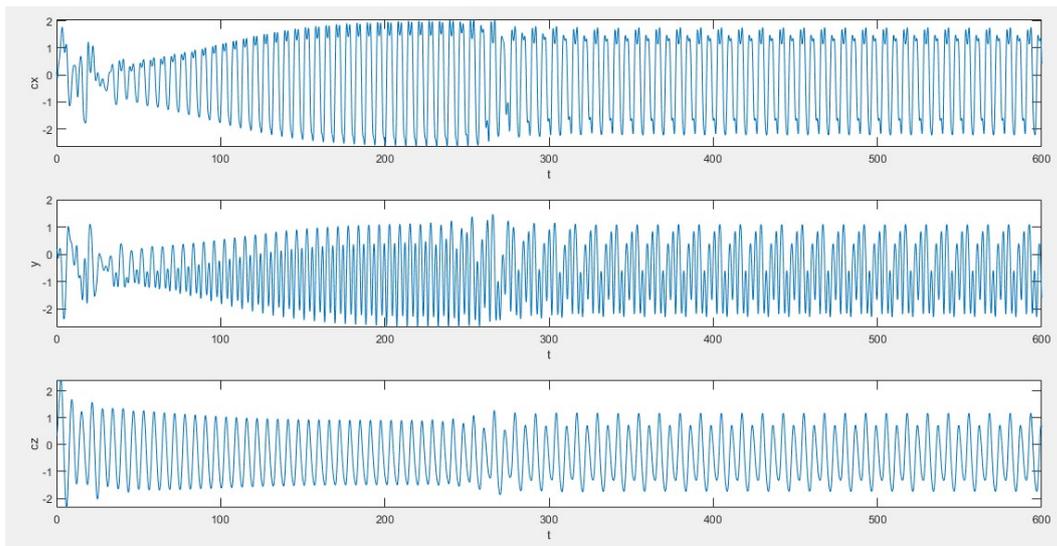


Figura 4.8: Andamento temporale delle coordinate per  $f=6.1884$ ,  $\lambda \leq 0$ : **le curve, dopo un periodo di transitorio, sono periodiche.**

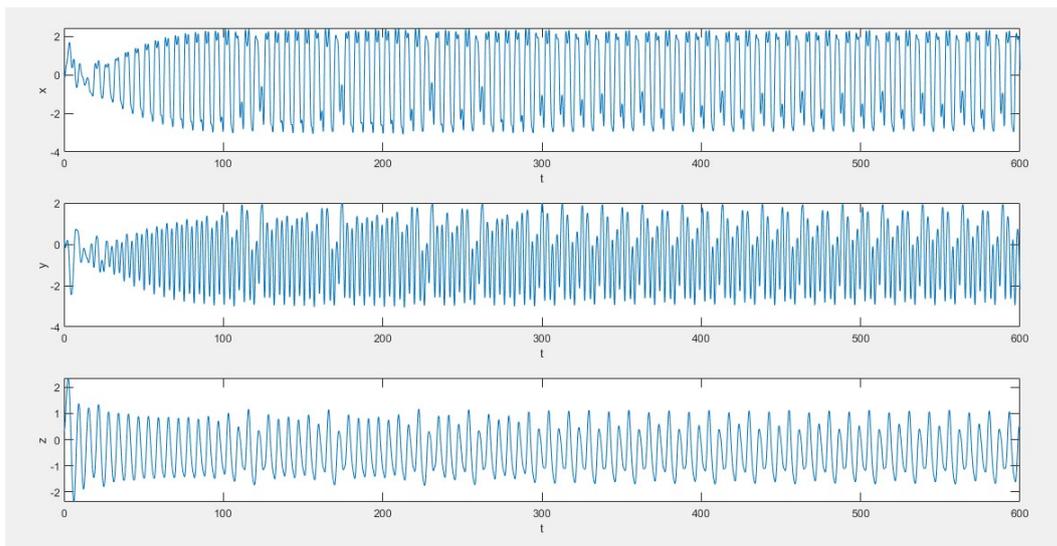


Figura 4.9: Andamento temporale delle coordinate per  $f=6.26$ ,  $\lambda > 0$ : **l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.**

#### 4.5 APPROFONDIMENTI E GRAFICI

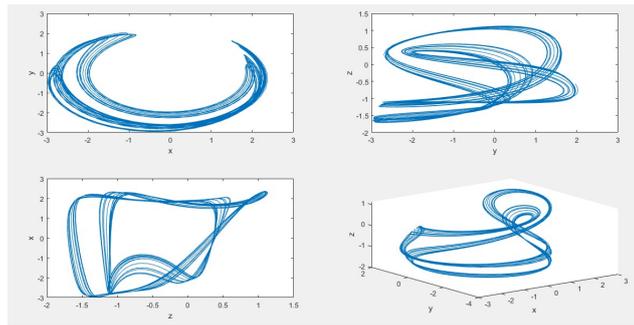


Figura 4.10: Ritratti di fase per  $f=6.26$ ,  $\lambda > 0$

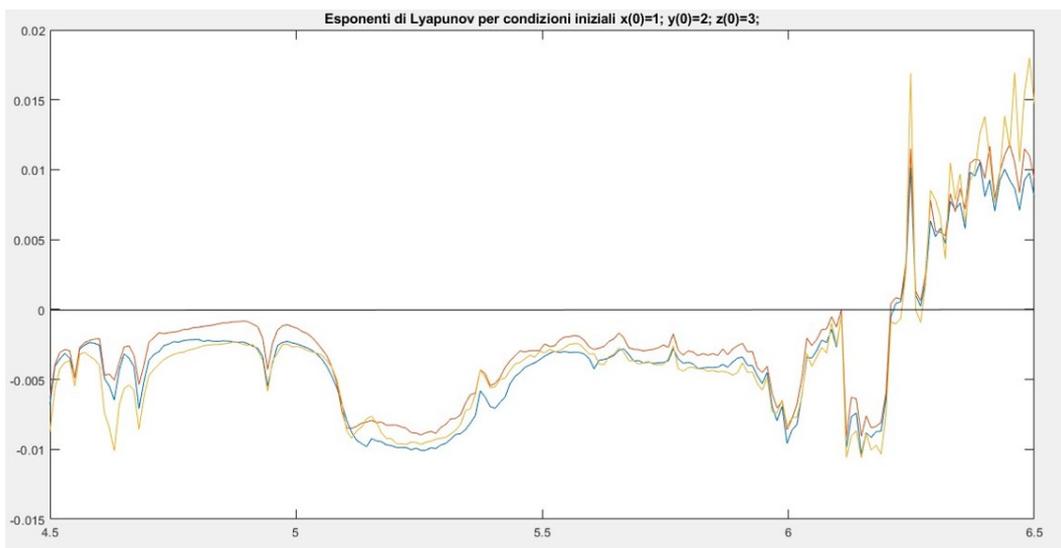


Figura 4.11: Esponenti di Lyapunov al variare del parametro  $f$ .

Le condizioni iniziali sono  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$  e  $z(0) = 3$ . Modificando le condizioni iniziali si ha un diverso andamento degli esponenti di Lyapunov rispetto a Figura 4.2

#### 4.5.2 APPROFONDIMENTO: $\lambda$ al variare del parametro $M$ della seconda tecnica di controllo

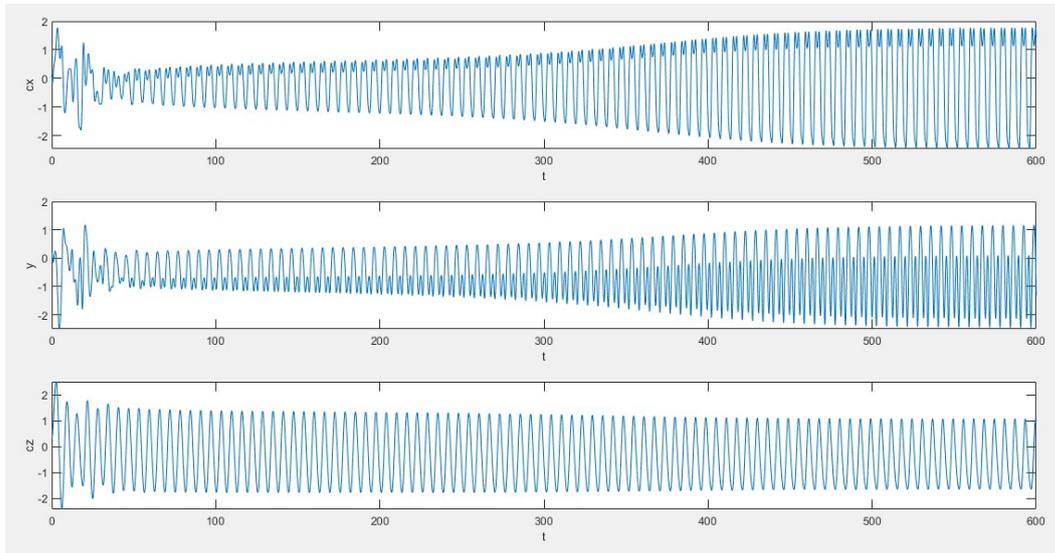


Figura 4.12: Andamento temporale delle coordinate per  $M=0.03$ ,  $\lambda > 0$ : l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.

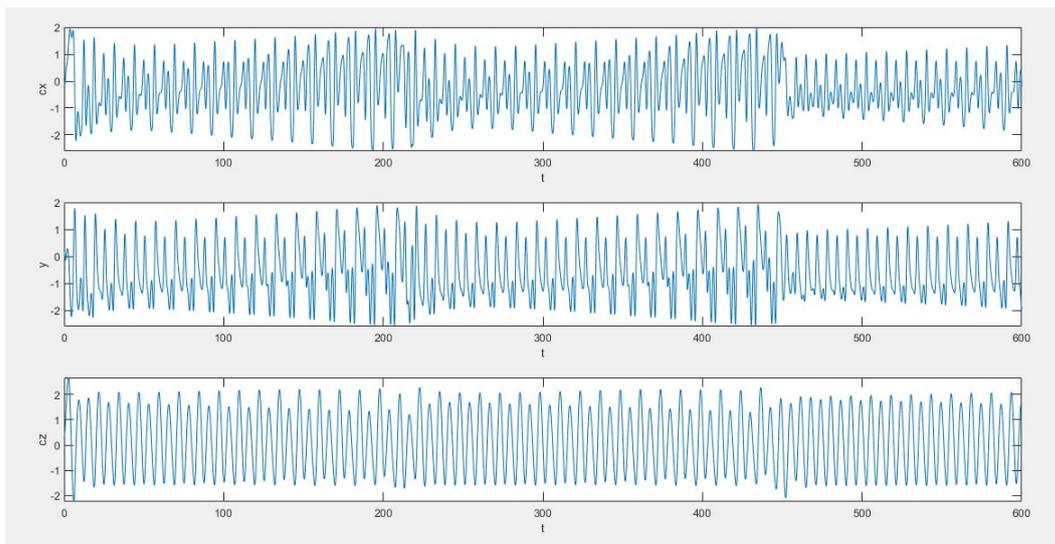


Figura 4.13: Andamento temporale delle coordinate per  $M=0.1$ ,  $\lambda > 0$ : l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO.

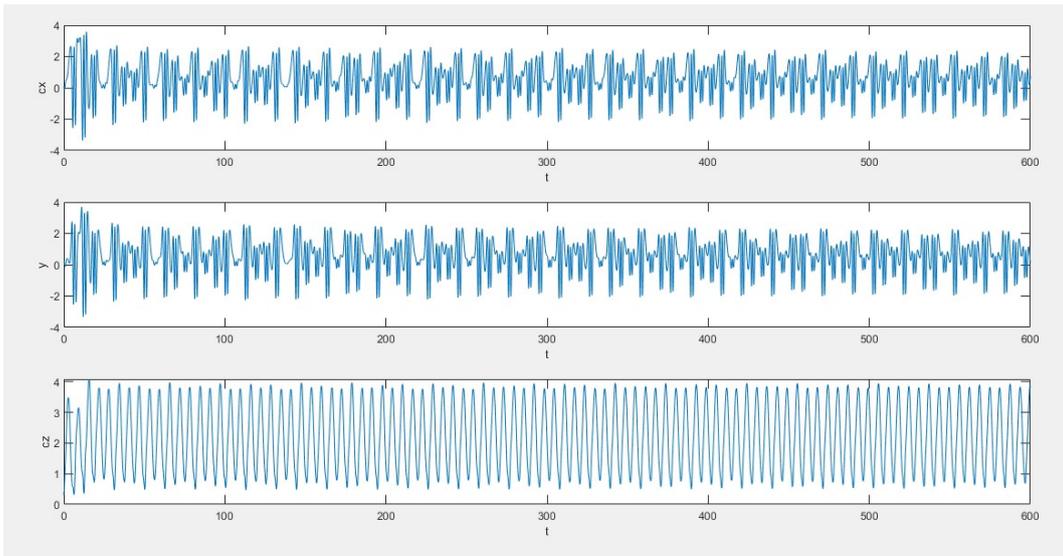


Figura 4.14: Andamento temporale delle coordinate per  $M=0.4646$ ,  $\lambda > 0$ :  
**l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO**

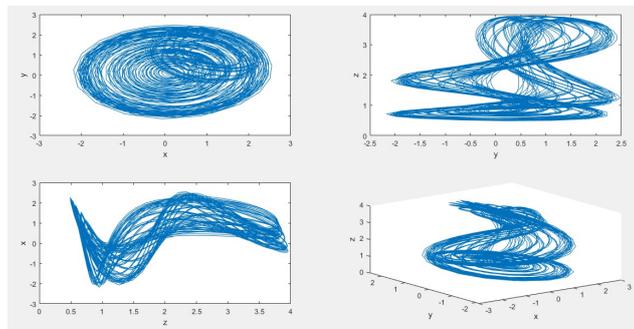


Figura 4.15: Ritratti di fase per  $M=0.4646$ ,  $\lambda > 0$

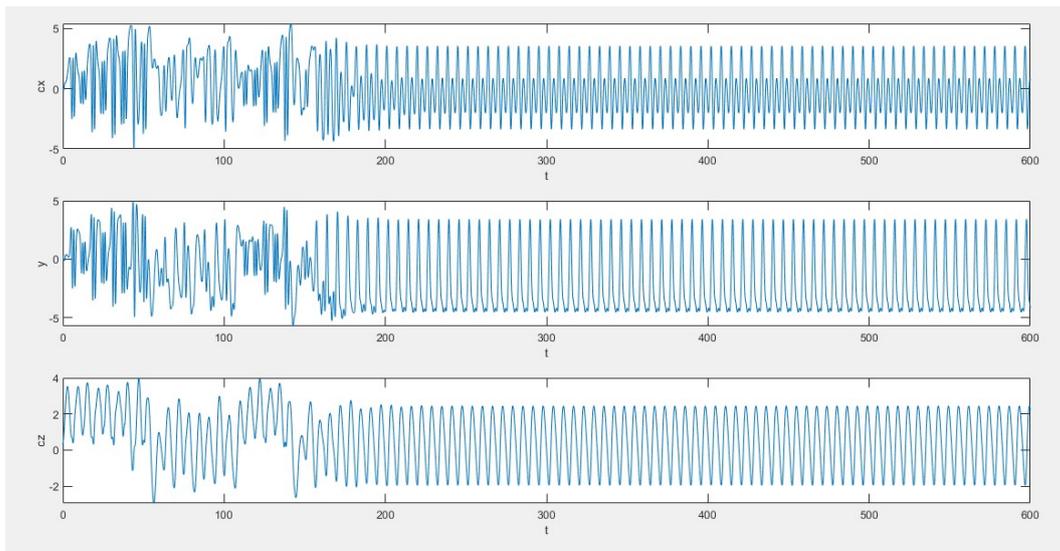


Figura 4.16: Andamento temporale delle coordinate per  $M=0.4848$ ,  $\lambda \leq 0$ : **le curve sono periodiche dopo un periodo transitorio**

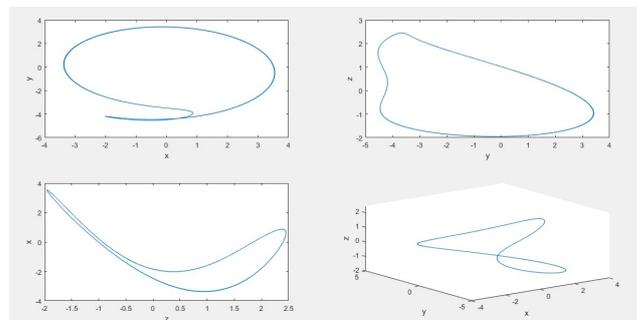


Figura 4.17: Ritratti di fase per  $M=0.4848$ ,  $\lambda \leq 0$

**4.5.3 APPROFONDIMENTO:  $\lambda$  al variare del parametro  $N$  e  $\bar{\omega}$  della terza tecnica di controllo**

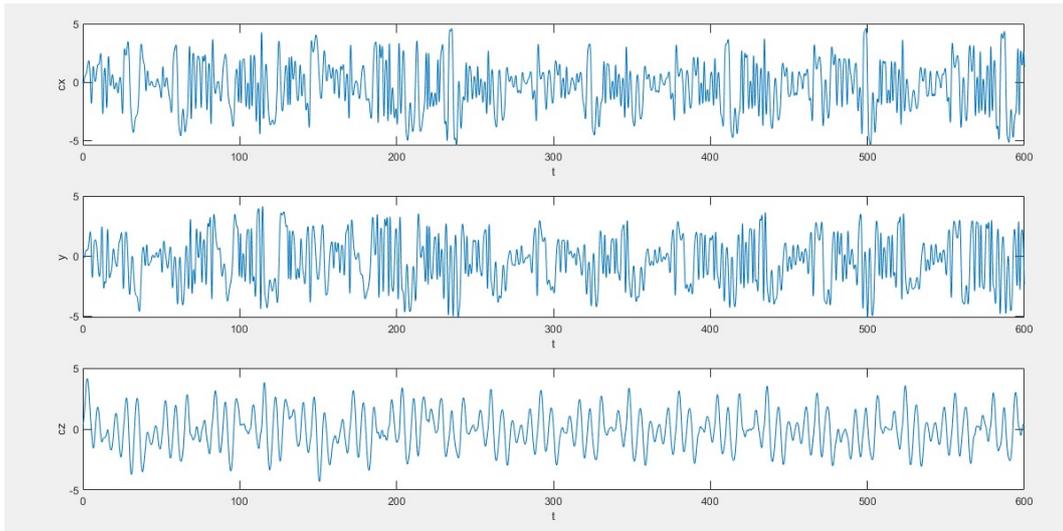


Figura 4.18: Andamento temporale delle coordinate per  $N=1$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}$   $\lambda > 0$ :  
**l'andamento testimonia un MOTO CAOTICO**

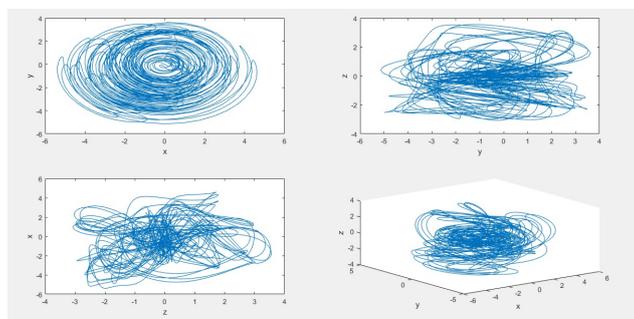


Figura 4.19: Ritratti di fase per  $N=1$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\pi}{4}$   $\lambda > 0$

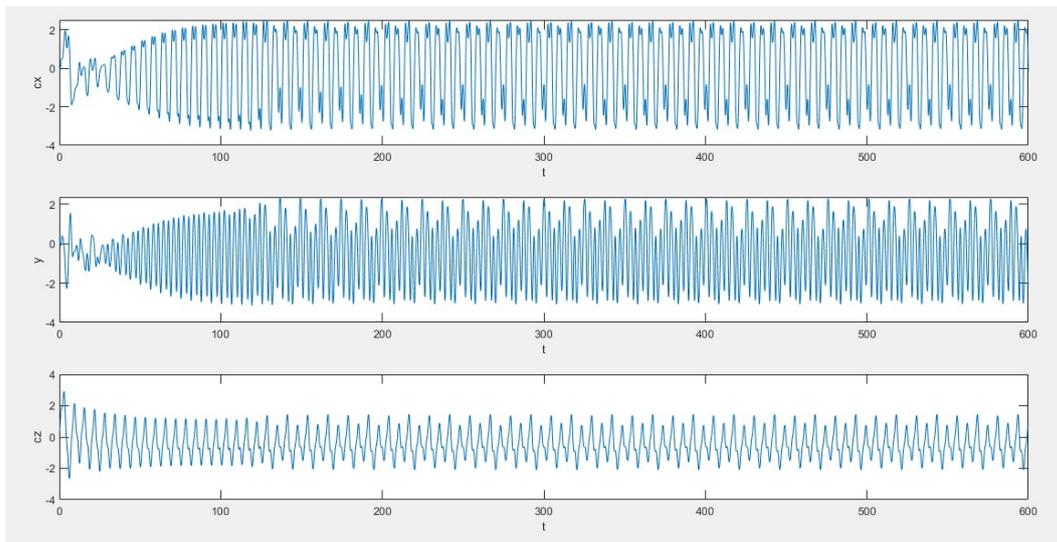


Figura 4.20: Andamento temporale delle coordinate per  $N=1$ ,  $\bar{\omega} = 3$   $\lambda \leq 0$ : l'andamento, dopo un periodo transitorio, è periodico.

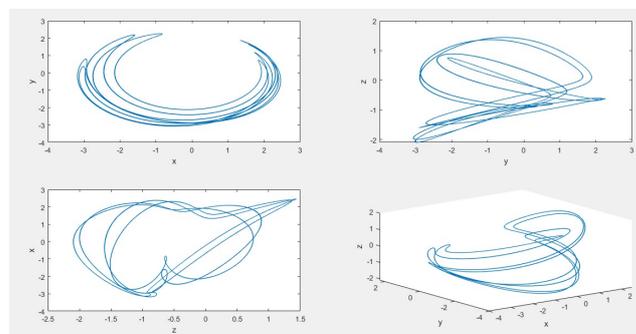


Figura 4.21: Ritratti di fase per  $N=1$ ,  $\bar{\omega} = 2$   $\lambda \leq 0$ .

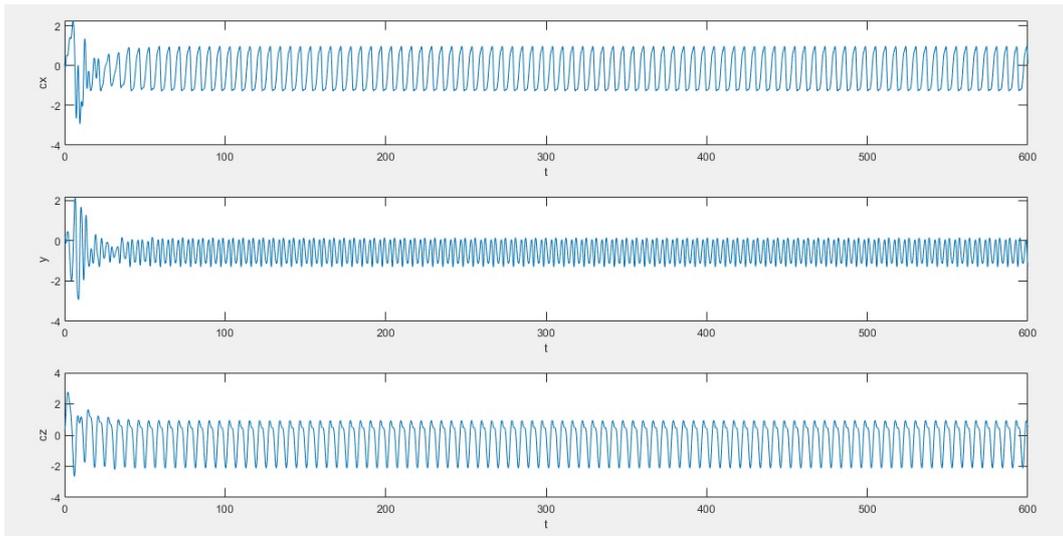


Figura 4.22: Andamento temporale delle coordinate per  $N=1$ ,  $\bar{\omega} = 2$   $\lambda > 0$ :  
**NONOSTANTE L'ESPONENTE SIA POSITIVO [vedi 4.5],  
 l'andamento delle coordinate nel tempo è di tipo periodico.**  
 I ritratti di fase associati a questi valori numerici sono riportati in Figura 2.8.



## Capitolo 5

# CONCLUSIONI

Un particolare sistema dinamico non lineare, noto come *sistema girostatico*, è stato analizzato e discusso.

Il nostro studio è iniziato con la descrizione della struttura ad esso associato. Il modello approfondito presenta *3 corpi rotorici* che si muovono attorno ad assi simmetrici.

Sono state fornite delle nozioni teoriche sulla metodologia di calcolo **Runge-Kutta**, la quale è stata implementata in **Matlab** per la risoluzione del sistema di equazioni differenziali.

La dinamica del sistema girostatico segue le **Equazioni di Eulero per i corpi rigidi**. Il sistema esaminato è *non lineare e non autonomo*.

Gli andamenti temporali e i ritratti di fase del *girostatico* sono fortemente influenzati dal valore numerico del parametro adimensionale **f**.

Per  $f = 6.5$  il comportamento del dispositivo è di tipo *caotico*: nel Capitolo 2, dopo aver dato una definizione di **MOTO CAOTICO**, alcune *tecniche di controllo* che consentono di riportare il satellite ad una dinamica desiderata sono state analizzate e verificate.

Due *girostatici* con diverse *condizioni iniziali* sono stati *sincronizzati* con appositi strumenti descritti nel Capitolo 3.

Un indice della caoticità dei sistemi, noto come **esponente di Lyapunov**, è stato calcolato, e l'andamento degli esponenti al variare dei parametri indagato.

Tutte le tecniche di controllo e sincronizzazione implementate si sono rivelate idonee al compimento degli obiettivi proposti.

L'analisi degli esponenti è un buon procedimento per caratterizzare la traiettoria del sistema nel tempo, ma non è esente da possibili errori di predizione.



# Ringraziamenti

Nel ringraziare tutti i docenti che in questi tre anni mi hanno arricchito con il loro sapere e i loro insegnamenti, menzione d'onore va al Prof. **Simone Fiori** per il prezioso aiuto fornitomi durante lo svolgimento del tirocinio e della seguente tesi. I suoi consigli si sono rivelati indispensabili per il raggiungimento dei risultati ottenuti e il suo supporto non è mai venuto a mancare per tutta la durata del progetto. In futuro spero vivamente di avere la fortuna di collaborare nuovamente al suo fianco.

Un ringraziamento speciale va a tutti i compagni di corso che tra un esame e l'altro si sono dimostrati dei fedeli amici. Oltre ad essere bravi studenti siete persone meravigliose. Avete tutti gli strumenti necessari per realizzare i vostri sogni e vi auguro il meglio per il vostro futuro.

*Ancona, Ottobre 2021*

Luca Caponi



## Bibliografia

- [1] Z.-M. GE, T.-N. LIN: "*CHAOS, CHAOS CONTROL AND SYNCHRONIZATION OF A GYROSTAT SYSTEM*", 2001.
- [2] G. Qi, L. Xu, X. Yang: "*Energy mechanism analysis for chaotic dynamics of gyrostat system and simulation of displacement orbit using COMSOL*", 2020.
- [3] M. IÑARREA, V. LANCHARES "*CHAOS IN THE REORIENTATION PROCESS OF A DUAL-SPIN SPACECRAFT WITH TIME-DEPENDENT MOMENTS OF INERTIA*", 1999.
- [4] L.-S. Wang: "*Steady Motions of Gyrostat Satellites and Their Stability*", 1995.
- [5] C. D. Hall: "*Momentum Transfer in Two-Rotor Gyrostats*", 1996.
- [6] B. A. Huberman, E. Lumer: "*Dynamics of Adaptive Systems*", 1990.
- [7] C.-C. Fuh, P.-C. Tung: "*Experimental and analytical study of dither signals in a class of chaotic systems*", 1997.
- [8] M. Sandri: "*Numerical Calculation of Lyapunov Exponents*", 1996.
- [9] R.L. Burden, D.J. Faires, A.M. Burden: "*NUMERICAL ANALYSIS, 10<sup>th</sup> Edition*", Cengage Learning.
- [10] R.L. Devaney: "*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2<sup>nd</sup> Edition*", Addison-Wesley Publishing Company.
- [11] DISPENSE DEL PROF. L. DEMEIO, CORSO DI ANALISI NUMERICA, A.A. 2019/20, Facoltà di Ingegneria UNIVPM.
- [12] DISPENSE DEL PROF. S. FIORI, CORSO DI ANALISI NUMERICA, A.A. 2020/21, Facoltà di Ingegneria UNIVPM.
- [13] L. DEMEIO: "*Elementi di meccanica classica per l'ingegneria*", Città studi edizioni.
- [14] Matlab lyapunovExponent, Mathworks:  
[https://it.mathworks.com/help/predmaint/ref/lyapunovexponent.html#mw\\_43368bed-6146-4eea-a9a6-00629332a0c2](https://it.mathworks.com/help/predmaint/ref/lyapunovexponent.html#mw_43368bed-6146-4eea-a9a6-00629332a0c2)