Università politecnica delle Marche "UNIVPM"

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E SCIENZE MATEMATICHE

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Analisi numerica e sperimentale del rilassamento di materiali soffici e fitting dei dati sperimentali tramite modelli costitutivi visco-elasto-plastici

Numerical and experimental analysis of the relaxation of soft materials and fitting of experimental data through visco-elasto-plastic constitutive models

Relatore:
Prof. Marco Sasso

Candidato:
Paride Ronca

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione 3
Capitolo 1 4
1.1 Viscoelasticità 4
1.2 Modelli 5
1.3 Stress relaxation e creep 10
Capitolo 2 12
Sughero 12
2.1 Strumenti di misura e organizzazione dati 14
2.2 Fitting dei dati sperimentali 16
2.2.1 Indicatori di qualità del fitting 17
2.3 Grafici e analisi dei risultati 18
Capitolo 3 32
PVC 32
3.1 Organizzazione dati 33
3.2 Grafici e analisi dei risultati 34
Conclusioni 45
Bibliografia 46
Sitografia 46

Introduzione

Il rilassamento degli sforzi o rilassamento viscoelastico è un fenomeno che si manifesta nei materiali viscoelastici che causa una riduzione di tensione nel tempo pur essendo la deformazione costante. Questo comportamento si spiega a livello microscopico, in cui con il trascorrere del tempo avviene una sistemazione delle catene molecolari. Essendo i polimeri formati da lunghe catene molecolari, essi mostrano bene tale fenomeno. Per questo motivo saranno analizzati provini in sughero e in PVC (polivinilcloruro).

Un modo per raccogliere dati sperimentali è quello di usare una macchina da compressione ad aria compressa con cui vengono pressati dei provini di vario materiale, secondo diverse direzioni e a diverse velocità di deformazione. Raggiunta la deformazione voluta si registrano i dati per un certo tempo nel quale avviene il rilassamento viscoelastico. La macchina è dotata di una cella di carico la quale ci fornisce ogni dato periodo di tempo il valore di forza che si sta imprimendo sul provino.

Per studiare il rilassamento degli sforzi è necessario trovare l'equazione matematica della forza in funzione del tempo che meglio approssima la nuvola di punti sperimentali forza-tempo. Per farlo si costruiscono dei modelli teorici i quali forniscono l'equazione voluta con coefficienti da determinare. La funzione viene poi inserita in un programma (nel nostro caso MATLAB) in grado di mostrare i valori dei coefficienti, i quali varieranno a seconda della prova analizzata.

Tramite i coefficienti ottenuti possiamo calcolare alcune proprietà fisiche di importante interesse ingegneristico dei materiali esaminati, nonché il livello teorico di forza residua espressa dal provino dopo un tempo infinito in cui ne manteniamo costante la deformazione.

Capitolo 1

1.1 Viscoelasticità

La viscoelasticità è una proprietà di alcuni materiali che subiscono sia deformazioni elastiche che viscose allo stesso tempo. Un solido perfettamente elastico è descrivibile tramite una molla. Un solido perfettamente viscoso è descritto da uno smorzatore. Nella realtà ogni materiale si discosta più o meno da questi due modelli estremi, presentando quindi un comportamento intermedio, ovvero viscoelastico. Le materie plastiche, il legno, i tessuti umani e i metalli ad alta temperatura incarnano bene il concetto di viscoelasticità.

Fig.1 Rappresentazione schematica di una molla

Una molla (fig.1) con rigidità E che subisce una deformazione Ɛ eserciterà una tensione σ_s (σ-spring) data dall'equazione (1):

$$\sigma_s = E\varepsilon \qquad (1)$$

in cui la tensione è in $\frac{N}{mm^2}$, Ɛ è adimensionale e quindi E è in $\frac{N}{mm^2}$.

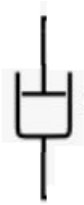


Fig.2 Rappresentazione schematica di uno smorzatore

Uno smorzatore (fig.2) contenente un fluido con viscosità η che viene deformato a una velocità di deformazione $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ reagirà con una tensione σ_D (σ-dashpot) data dall'equazione (2):

$$\sigma_D = \eta\dot{\varepsilon} \qquad (2)$$

in cui la tensione è sempre in $\frac{N}{mm^2}$, $\dot{\varepsilon}$ è in s^{-1} e quindi η è in $\frac{N*s}{mm^2}$.

Si distingue la viscoelasticità lineare da quella non lineare. La prima fornisce una equazione differenziale separabile nei confronti sia della deformazione sia della tensione e si ha per piccole deformazioni. La seconda esprime un'equazione differenziale non separabile e si presenta quando le deformazioni sono grandi o quando le proprietà del materiale cambiano durante la deformazione.

Al fine di una trattazione “a modelli” del fenomeno, occorre poter applicare il principio della sovrapposizione degli effetti secondo cui per un sistema dinamico lineare l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso è uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione. Si assumono perciò soddisfatte le ipotesi della viscoelasticità lineare.

1.2 Modelli

Si possono combinare insieme i due componenti elementari molla-smorzatore per formare dei modelli utili a imitare il comportamento viscoelastico dei materiali e quindi a studiarne la teoria.

Fig.3 Rappresentazione schematica modello di Maxwell

Maxwell

Il modello di Maxwell (fig.3) prevede l’accoppiamento in serie di una molla con uno smorzatore. Seguono i passaggi matematici. I pedici s e d indicano rispettivamente la molla (spring) e lo smorzatore (dashpot).

Essendo una serie è noto che:

$$\sigma_{tot} = \sigma_s = \sigma_d$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

dove:

$$\sigma_s = E\varepsilon_s$$

$$\sigma_d = \eta \frac{d\varepsilon_d}{dt} = \eta\dot{\varepsilon}_d$$

Derivando si ha:

$$\dot{\varepsilon}_{tot} = \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d$$

$$\dot{\sigma}_s = E\dot{\varepsilon}_s$$

Sostituendo e sfruttando l'uguaglianza tra le σ si ha:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Moltiplicando per E:

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau}$$

dove è stato definito *$\tau = \frac{\eta}{E}$

Si ottiene per cui:

$$E\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau}$$

Si è detto nell'introduzione che il rilassamento degli sforzi ha luogo a deformazione costante. Per cui ponendo $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ si ha:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\tau}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando si ottiene:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

$$ln\sigma - ln\sigma_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\boxed{\sigma = \sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (3)$$

*per t = τ si ha $\sigma(\tau) = \sigma_0 e^{-1} \cong 0{,}37\sigma_0$, ovvero nel tempo τ il materiale manifesta circa il 63% del rilassamento.

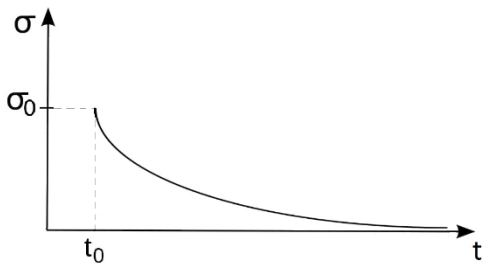


Fig.4
Modello di Maxwell, grafico σ - t

L'equazione (3) fornisce la tensione in funzione del tempo. Come si vede in fig.4 σ_0 è il valore della tensione iniziale (per t = t_0=0), quando cioè solo la molla ha subito deformazione ($\varepsilon_d = 0$). Per cui $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, dove ε_0 è la deformazione mantenuta costante durante il rilassamento viscoelastico.

Si osserva come per t che tende all'infinito $\sigma = 0$, il che non accade nella realtà per un solido. Ci sarà sempre una certa tensione residua σ_R anche dopo un tempo illimitato se si mantiene la deformazione pari a ε_0. Da ciò si capisce che di per sé il modello di Maxwell non è adatto a descrivere il rilassamento degli sforzi nei solidi.

Modello lineare standard di Clarence Zener

Il modello lineare standard fu proposto per la prima volta dal fisico statunitense Zener. La rappresentazione che fa al caso nostro (c'è anche un'altra versione del modello che non verrà trattata perché esula dai nostri scopi) è quella che prevede una molla posta in parallelo al modello di Maxwell secondo lo schema di fig.5.

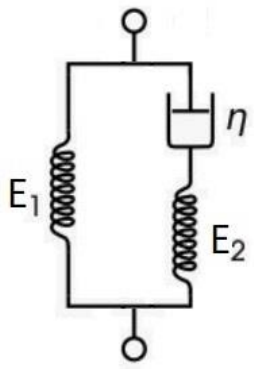


Fig.5
Rappresentazione schematica modello di Clarence Zener

E_1 e E_2 sono le rigidità delle due molle e η è la viscosità dello smorzatore. Dal parallelo si evince che:

$$\sigma_{tot} = \sigma_M + \sigma_{S_1}$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_M = \varepsilon_{S_1}$$

dove M sta a indicare il ramo di Maxwell e S_1 il ramo della molla 1. Dalla serie di Maxwell si può inoltre scrivere che:

$$\sigma_M = \sigma_{S_2} = \sigma_D$$

$$\varepsilon_M = \varepsilon_{S_2} + \varepsilon_D$$

in cui D è riferito allo smorzatore e S_2 alla molla 2.

Da queste osservazioni si può scrivere la seguente equazione differenziale:

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2}\dot{\sigma} = E_1\varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2}\dot{\varepsilon}$$

Tramite le trasformate di Laplace si ottiene l'equazione algebrica (4):

$$\boxed{\sigma = \sigma(t) = \varepsilon_0\left(E_1 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (4)$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare sfruttando l'equazione (3) del ramo di Maxwell già dimostrata in precedenza alla quale va sommato il termine $\sigma_R = \varepsilon_0 E_1$, originato dalla presenza della molla 1.

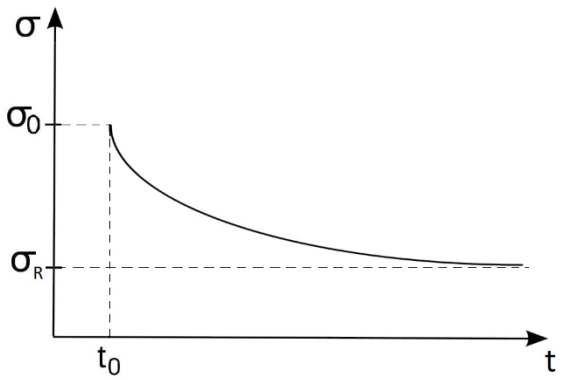


Fig.6
Modello di Zener, grafico σ-t

In fig.6 si nota che per t che tende all'infinito la tensione tende proprio alla tensione residua σ_R e in questo caso τ rappresenta il tempo per cui è avvenuto circa il 63% del rilassamento da σ_0 a σ_R. Questo modello risolve quindi il problema della σ_R nulla del modello di Maxwell, avvicinandosi al comportamento reale di un solido che manifesta il rilassamento degli sforzi.

Apparentemente sembra che il problema sia risolto e che tale modello sia adatto per il nostro studio. In realtà, come si vedrà in seguito, tale configurazione imita solo discretamente il rilassamento viscoelastico. Anzi, ci sono delle condizioni sperimentali (velocità di deformazione, materiale, direzione di compressione…) per cui questo modello si discosta notevolmente dai dati raccolti sperimentalmente. Da ciò nasce la necessità di perfezionare la disposizione dei componenti elementari molla e smorzatore al fine di trovare un'equazione che ci soddisfi in ogni caso.

Modello di Maxwell-Weichert

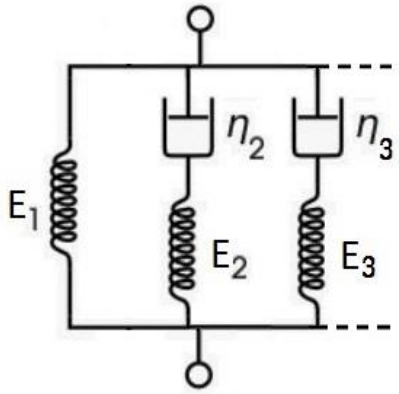


Fig.7
Rappresentazione schematica modello di Maxwell-Weichert

Il modello di Maxwell-Weichert (fig.7) è costituito dal parallelo tra una molla e un dato numero di rami di Maxwell (almeno 2). Essendo un parallelo, la tensione in funzione del tempo sarà data dalla somma delle tensioni di ogni ramo. Da quanto dimostrato per gli altri modelli risulta immediato che per il primo, secondo e terzo ramo vale rispettivamente:

$$\sigma_1(t) = \varepsilon_0 E_1 = cost$$

$$\sigma_2(t) = \varepsilon_0 E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\sigma_3(t) = \varepsilon_0 E_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}}$$

Dal parallelo è noto che:

$$\sigma_{tot}(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)$$

Sostituendo e raccogliendo ε_0:

$$\sigma_{tot}(t) = \varepsilon_0 (E_1 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + E_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}})$$

Da cui la formula generale:

$$\boxed{\sigma_{tot}(t) = \varepsilon_0 (E_1 + \sum_{i=2}^{n} E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}})} \quad (5)$$

dove n-1 è il numero dei rami di maxwell di cui è composto il modello.

Come vedremo in seguito nell'analisi dei risultati sperimentali, l'equazione (5) è in grado di replicare in <u>maniera rigorosa</u> ciò che accade in un solido in fase di rilassamento viscoelastico nelle varie condizioni esaminate.

1.3 Stress relaxation e creep

Occorre fare una distinzione tra questi due fenomeni. Mentre infatti, come già detto, il rilassamento degli sforzi (stress relaxation) (fig.8) manifesta una diminuzione nel tempo della tensione mantenendo la deformazione costante, lo scorrimento viscoso (creep) (fig.9) rappresenta una diminuzione nel tempo della velocità di deformazione mantenendo costante la tensione che agisce sul corpo in deformazione.

Fig. 8

STRESS RELAXATION

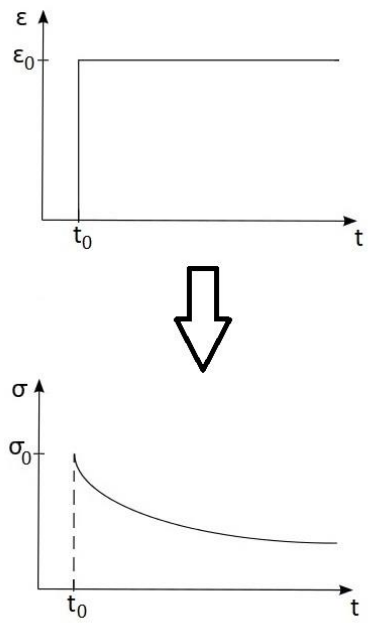
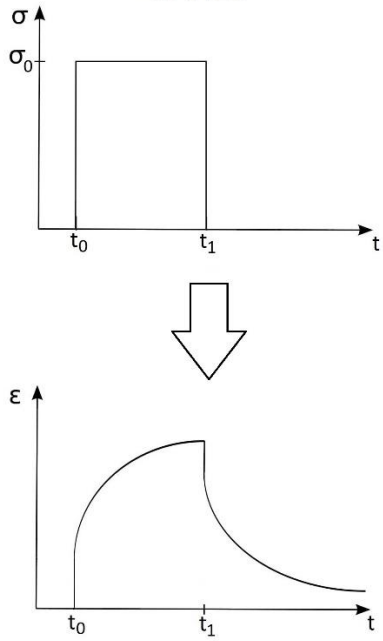


Fig. 9

CREEP



Il creep è descritto bene da altri modelli viscoelastici che non sono in grado di descrivere il rilassamento degli sforzi, che quindi non verranno trattati in questo testo. Entrambi i comportamenti vengono studiati teoricamente con l'obiettivo di determinare le caratteristiche viscoelastiche del materiale in esame. Per disporre di una caratterizzazione completa delle proprietà viscoelastiche è necessario eseguire prove sperimentali su un ampio intervallo di tempi e frequenze. Ciò deriva dal fatto che le diverse applicazioni ingegneristiche spaziano su tempi che possono variare dai microsecondi agli anni (strutture). Da ciò l'esistenza di prove per tempi lunghi come creep e stress relaxation (decine di secondi e più), test dinamici al di sotto della frequenza di risonanza, test con frequenza di risonanza e test basati sull'attenuazione delle onde.

Un valore di interesse fornito dalla prova di stress relaxation è il modulo di rilassamento, espresso come segue:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

Ovviamente, più il modello teorico che utilizziamo è valido, più la $\sigma(t)$ sarà identificata con precisione e più il valore di $E(t)$ sarà reale. Si osserva sperimentalmente nel diagramma logaritmico di fig.10 l'andamento di E in funzione del tempo, al variare del grado di reticolazione, dove la reticolazione è la reazione chimica che avviene tra le catene polimeriche le quali formano legami tra loro.

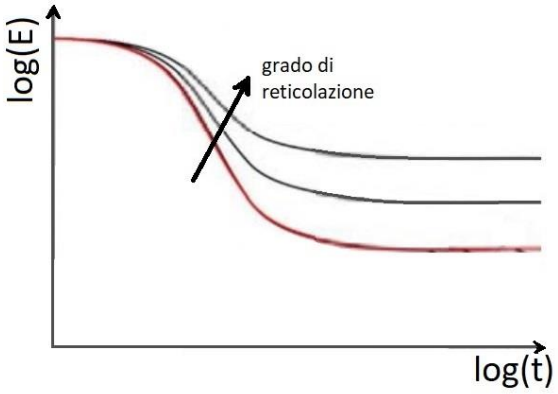


Fig.10
Grafico log(E)-log(T) al variare del grado di reticolazione

Capitolo 2

Sughero

Il sughero è un tessuto vegetale formato da un agglomerato di cellule riempite da un composto gassoso e inserito in strati alternati di cellulosa e suberina (sostanza impermeabile all'acqua). Viene ricavato dalla corteccia delle querce da sughero, dette anche sughere. Si presta molto bene allo studio del fenomeno del rilassamento viscoelastico.

Per ottenere un ampio range di dati, le prove sperimentali sono state eseguite su provini di diverse densità (figg.11-12-13), comprimendoli secondo varie direzioni ortogonali.

Fig.11
NL10
(A-C-D)

Fig.12
NL20
(A-C-D)

Fig.13
NL25
(A-C-D)

Il significato di NL 10-20-25 per quanto riguarda la densità è tradotto dalla prima riga della tab.1:

Tab.1
Alcune proprietà meccaniche del sughero (NL 10-20-25)

MECHANICAL PROPERTIES OF THE CORE MATERIAL					
PROPERTY	METHOD	UNIT	NL10	NL20	NL25
Density	ASTM C271	Kg/m³ *lb/ft³*	140 *8.7*	200 *12.5*	250 *15.6*
Compressive Strength	ASTM C365	MPa *psi*	0.3 *44*	0.5 *72*	0.6 *87*
Compressive Modulus	ASTM C365	MPa *psi*	5.1 *740*	6.0 *870*	6.9 *1000*
Tensile Strength	ASTM C297	MPa *psi*	0.6 *87*	0.7 *101*	0.7 *101*
Shear Strength	ASTM C273	MPa *psi*	0.9 *130*	0.9 *130*	1.0 *145*
Shear Modulus	ASTM C273	MPa *psi*	5.9 *856*	5.9 *856*	6.0 *870*

A-C-D rappresentano tre diverse direzioni ortogonali tra loro, secondo cui il sughero manifesta caratteristiche meccaniche differenti dato che è un materiale anisotropo. L'anisotropia del sughero è riconducibile proprio al fatto che è ricavato dalle cortecce degli alberi, che conferiscono al materiale proprietà diverse nella direzione assiale (A), radiale (D), tangenziale (C).

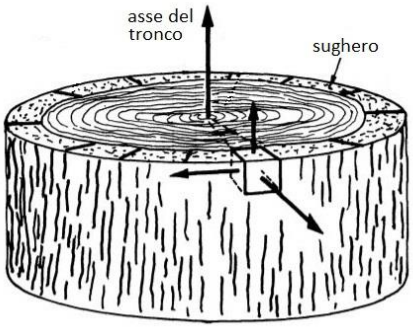


Fig.14
Rappresentazione realistica di un tronco di una quercia da sughero in sezione

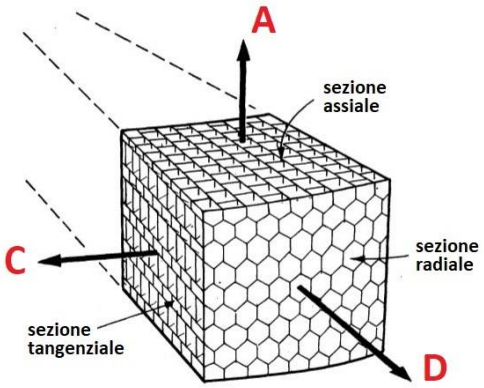


Fig.15
Ingrandimento settore cilindrico di fig.14

2.1 Strumenti di misura e organizzazione dati

I dati di partenza sono ripartiti in tab.2:

Tab.2 Dati di identificazione dei provini in sughero

n°	NL	dir	rate	L_i	a	b	massa	Area	Volume	densità	ΔL	velocità	ΔT	camp/s
1	10	A	0,001	15,11	12	12	0,333	144	2175,84	153,0443	11,3325	0,01511	1500	1
2	10	C	0,001	14,96	11,92	11,86	0,337	141,3712	2114,913	159,3446	11,22	0,01496	1500	1
3	10	D	0,001	15	11,98	11,95	0,354	143,161	2147,415	164,8494	11,25	0,015	1500	1
4	20	A	0,001	15,6	12,01	12,09	0,464	145,2009	2265,134	204,8444	11,7	0,0156	1500	1
5	20	C	0,001	14,91	12,01	11,93	0,432	143,2793	2136,294	202,2193	11,1825	0,01491	1500	1
6	20	D	0,001	15,02	12,04	11,78	0,433	141,8312	2130,305	203,2573	11,265	0,01502	1500	1
7	25	A	0,001	15,76	12,04	11,93	0,569	143,6372	2263,722	251,3559	11,82	0,01576	1500	1
8	25	C	0,001	15,15	12,1	11,63	0,528	140,723	2131,953	247,6602	11,3625	0,01515	1500	1
9	25	D	0,001	15	12,08	12,01	0,549	145,0808	2176,212	252,2732	11,25	0,015	1500	1
10	10	A	0,1	15,41	12	11,88	0,336	142,56	2196,85	152,9463	11,5575	1,541	15	100
11	10	C	0,1	14,95	11,98	11,88	0,344	142,3224	2127,72	161,6754	11,2125	1,495	15	100
12	10	D	0,1	15,03	11,97	12,03	0,351	143,9991	2164,306	162,1767	11,2725	1,503	15	100
13	20	A	0,1	15,48	11,99	12,02	0,458	144,1198	2230,975	205,2915	11,61	1,548	15	100
14	20	C	0,1	15	11,93	11,92	0,446	142,2056	2133,084	209,0869	11,25	1,5	15	100
15	20	D	0,1	15,09	11,93	11,93	0,443	142,3249	2147,683	206,2688	11,3175	1,509	15	100
16	25	A	0,1	15,83	12,04	12,08	0,577	145,4432	2302,366	250,6118	11,8725	1,583	15	100
17	25	C	0,1	15,17	11,91	12,1	0,541	144,111	2186,164	247,4654	11,3775	1,517	15	100
18	25	D	0,1	14,92	12,05	12,05	0,524	145,2025	2166,421	241,8735	11,19	1,492	15	100

Le direzioni A-C-D sono sperimentate per ogni densità (NL 10-20-25) sia con rate (ovvero velocità di deformazione, cioè $\dot{\varepsilon}$) pari a 0.001 s^{-1} sia con rate 0.1 s^{-1}. Per cui sono analizzati 18 provini. Le dimensioni di ognuno di essi vengono misurate con calibro a corsoio digitale (fig.16), il quale fornisce la lunghezza in mm dei due lati di base "a" e "b" e dell'altezza iniziale L_i. La massa in grammi è definita tramite una bilancia analitica (fig.17) in grado di determinare il decimo di millesimo di grammo (risoluzione di 0,1 mg).

Fig.16 Calibro a corsoio digitale

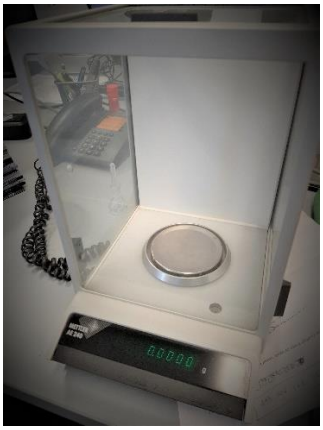


Fig.17 Bilancia Mettler AE240

Da questi dati è possibile calcolare quindi l'area di base in mm^2, il volume in mm^3, la densità in $\frac{Kg}{m^3}$, la deformazione $\Delta L = L_i - L_f = 75\% L_i$ in mm (dove L_f è l'altezza finale del provino in seguito alla compressione), la velocità in $\frac{mm}{s}$ con cui si deve muovere il piatto mobile della macchina ($v = \dot{\varepsilon} L_i$) , l'arco di tempo ΔT in secondi in cui viene eseguita la prova ($\Delta T = 2\frac{\Delta L}{v}$) , i campionamenti al secondo dati dal rapporto tra 1500 (che sarebbe il numero di campionamenti che vogliamo effettuare) e la durata ΔT della prova.

In sostanza abbiamo quindi posto $\varepsilon_0 = \frac{L_i - L_f}{L_i} = 0{,}75$ e abbiamo assunto uguali l'intervallo di tempo di compressione da L_i a L_f e l'intervallo di tempo immediatamente successivo di stress relaxation, entrambi pari a $\frac{\Delta T}{2} = \frac{\Delta L}{v}$.

La densità calcolata sperimentalmente per i provini NL10 (153-165 $\frac{Kg}{m^3}$) si discosta sistematicamente in eccesso dalla definizione teorica (140 $\frac{kg}{m^3}$). Ciò può dipendere, nel peggiore dei casi, dalla particolarità dei provini esaminati, i quali potrebbero contenere impurità o potrebbero essere stati ricavati da sughero avente caratteristiche non propriamente di NL10. Ciò vorrebbe dire che anche i dati ottenuti durante il rilassamento viscoelastico sono riferiti a un materiale diverso da NL10 puro. Essendo più ottimisti si può osservare che, avendo una densità minore, i provini NL10 abbiano assunto in seguito al taglio durante la loro creazione una forma che si allontana maggiormente

da un parallelepipedo rispetto a NL20 e NL25. Ciò implica un errore nel calcolo del volume e quindi della densità, eseguito ipotizzando i provini dei perfetti parallelepipedi.

2.2 Fitting dei dati sperimentali

Fig.18 Pressa

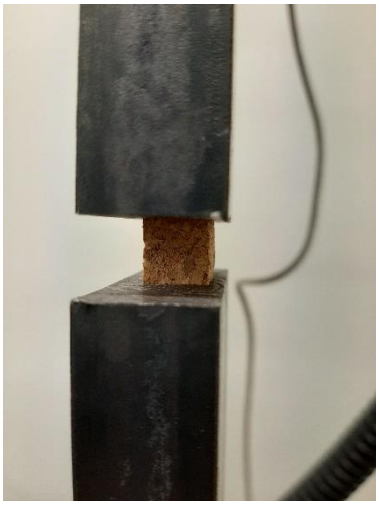


Fig.19 Provino in sughero con lunghezza iniziale

Fig.20 Provino in sughero con lunghezza finale

Come già accennato nell'introduzione, i dati sperimentali vengono raccolti tramite una macchina da compressione ad aria compressa (fig.18), munita di una cella di carico che mostra il valore di forza che la macchina sta impartendo sul provino (figg.19-20). Questi dati vengono elaborati da un software che grafica in tempo reale la forza in funzione della deformazione impartita e la forza in funzione del tempo, registrando contemporaneamente i valori in formato ".csv" (comma separated values). Convertendo i ".csv" in ".xlsx" si ottiene un foglio Excel con i valori ordinati in righe e in colonne. Da qui è possibile caricare su Matlab, tramite il comando "xlsread", i valori di forza in Newton campionati durante lo stress relaxation. Dividendo quindi per l'area del provino in questione si ottiene il vettore "y" i cui valori rappresentano la tensione in $\frac{N}{mm^2}$, ovvero in MPa. Si definisce un secondo vettore (asse x) della stessa lunghezza del primo. Dividendo per il numero di campionamenti al secondo con cui è eseguita la prova analizzata si ottiene il vettore "x" i cui valori rappresentano il tempo in secondi. Con l'app "Curve Fitting" di Matlab è possibile a questo punto graficare i dati sperimentali

tensione-tempo e inserire l'equazione a coefficienti fornita dal modello teorico preso in considerazione, ottenendo così anche il grafico della funzione teorica. Il programma calcola in output sia i valori dei coefficienti dell'equazione introdotta sia i valori di alcuni parametri che indicano la bontà del fitting, ovvero la vicinanza tra funzione teorica e punti sperimentali. Su questo argomento è bene dare alcune definizioni.

2.2.1 Indicatori di qualità del fitting

Siano raccolti n dati sperimentali y_i la cui media sia indicata con $\bar{y}$ e siano $\hat{y}_i$ i dati stimati dal modello teorico. Si definisce residuo $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Un primo indicatore mostrato dall'app CurveFitting di Matlab è il Sum of squares due to error (SSE) definito come segue:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Un buon fitting dei dati è indicato dalla vicinanza dell'SSE a 0. Viene anche presentato il coefficiente di determinazione, detto anche R^2, definito come:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}\text{, dove}$$

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Un valore di R^2 prossimo all'unità indica un buon adattamento dei dati sperimentali, anche se non conviene riferirsi solo a questo indicatore in quanto presenta diversi limiti, alcuni dei quali superati dall' "R^2 corretto" o adjusted R^2 (R_A^2). Il legame tra R_A^2 e R^2 è espresso dalla seguente relazione:

$$R_A^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - k - 1}$$

dove k è il numero di variabili indipendenti del modello. Anche qui la qualità del fitting è elevata per un valore prossimo all'unità. Un ultimo valore reso dal software è il RMSE (Root mean squared error). Si ha che:

$$RMSE = \sqrt{MSE}\text{, dove}$$

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

La vicinanza di RMSE a 0 suggerisce l'utilizzo di un modello che descrive bene i dati sperimentali.

2.3 Grafici e analisi dei risultati

Sono di seguito riportati i grafici sperimentali (punti neri) tensione-tempo con le relative funzioni teoriche (linea continua rossa).

Per $\dot{\varepsilon} = 0{,}001\ s^{-1}$ (provini 1-9) vengono utilizzati solamente due rami di Maxwell in parallelo a una molla, da cui l'equazione teorica:

$$\sigma_{tot}(t) = \varepsilon_0(E_1 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + E_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}}) \qquad (7)$$

Per $\dot{\varepsilon} = 0{,}1\ s^{-1}$ (provini 10-18) vengono impiegati tre rami di Maxwell in parallelo a una molla, da cui:

$$\sigma_{tot}(t) = \varepsilon_0(E_1 + E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + E_3 e^{-\frac{t}{\tau_3}} + E_4 e^{-\frac{t}{\tau_4}}) \qquad (8)$$

In cui si definisce:

$$\sigma_R = \varepsilon_0 E_1 \quad (9)$$

$$\sigma_B = \varepsilon_0 E_2 \quad (10)$$

$$\sigma_C = \varepsilon_0 E_3 \quad (11)$$

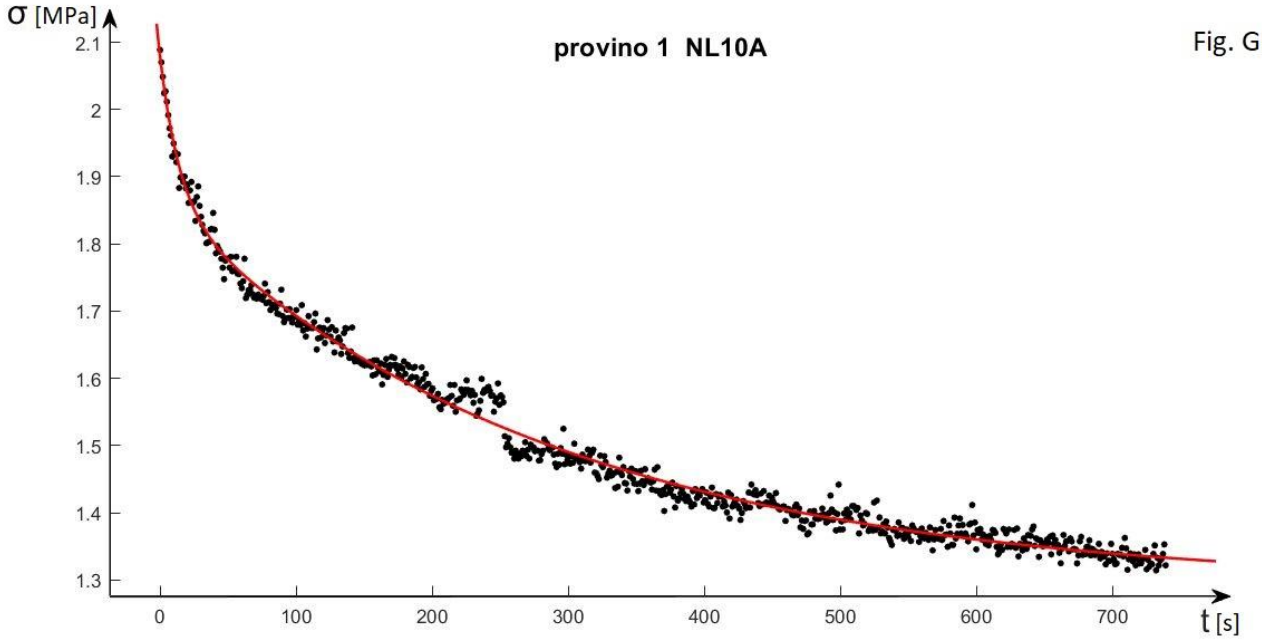
$$\sigma_D = \varepsilon_0 E_4 \quad (12)$$

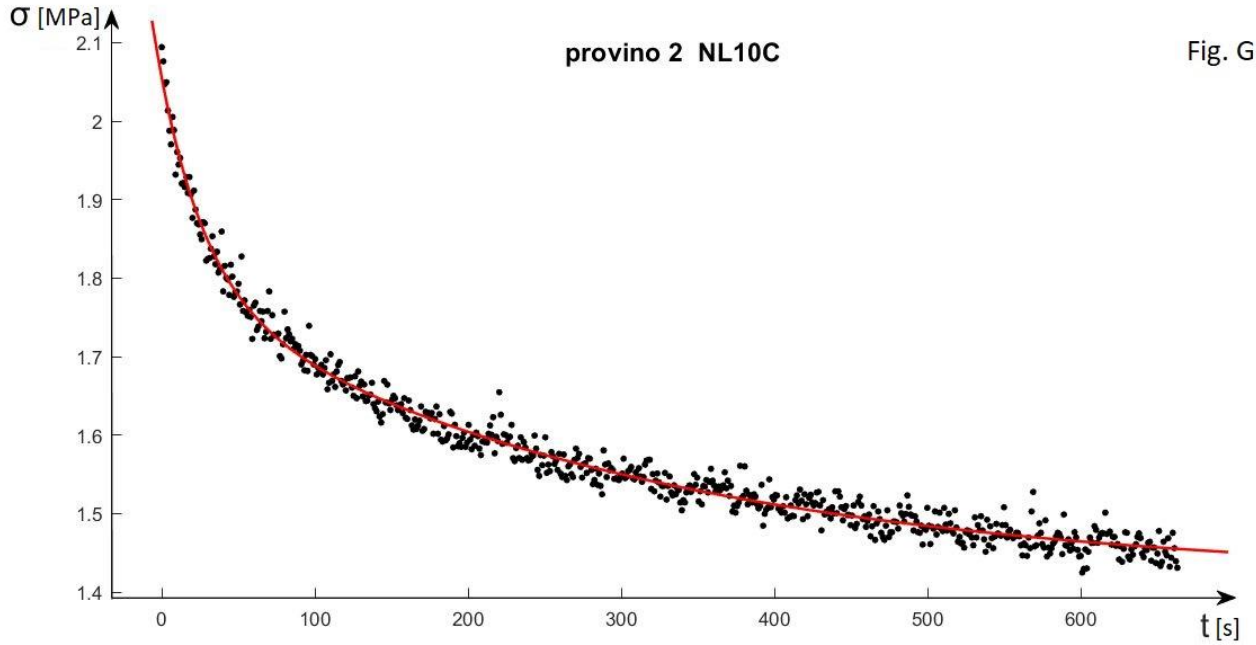
dove σ_R è la tensione residua di tutto il sistema per t che tende all'infinito (e coincide con la tensione iniziale della molla 1), mentre σ_B, σ_C e σ_D sono le tensioni iniziali (per t=0) dei tre rami di Maxwell.

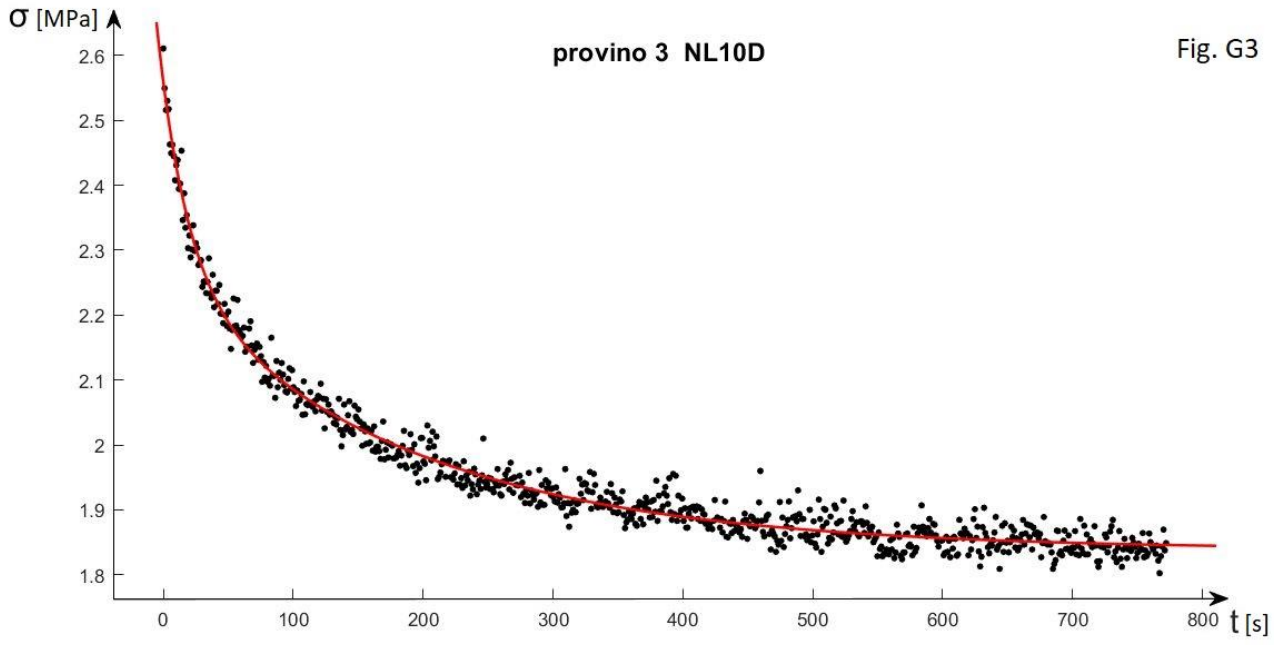
Ne segue che:

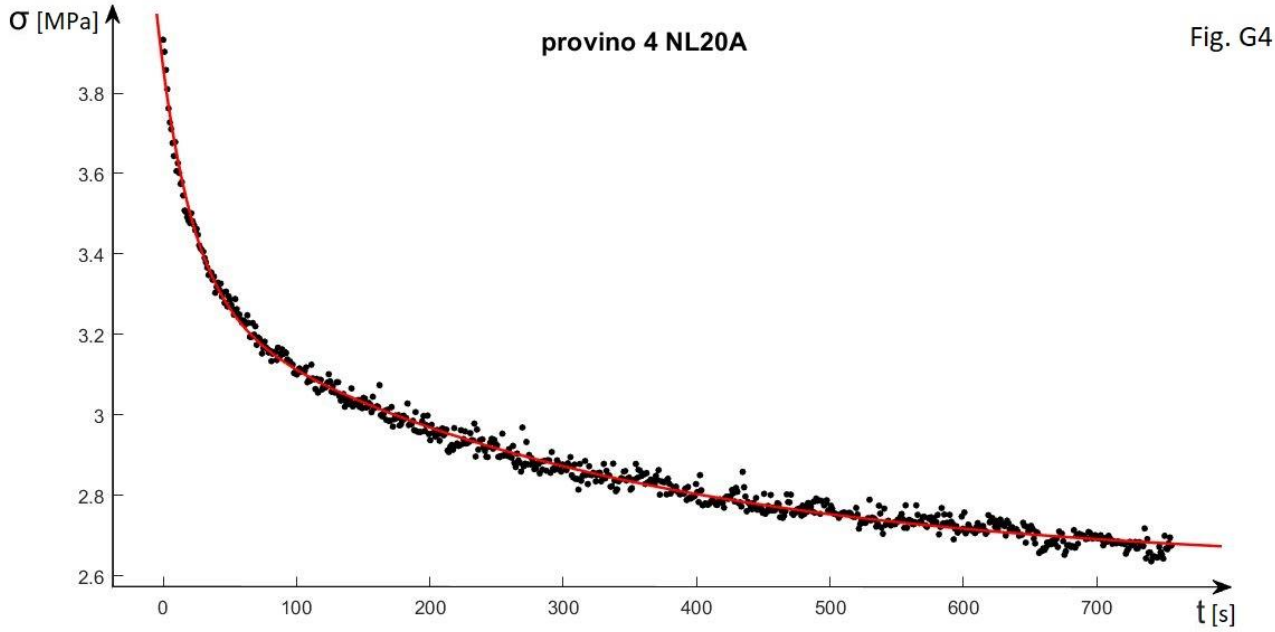
$$\sigma_{tot}(t = 0) = \sigma_R + \sigma_B + \sigma_C + \sigma_D \quad (13)$$

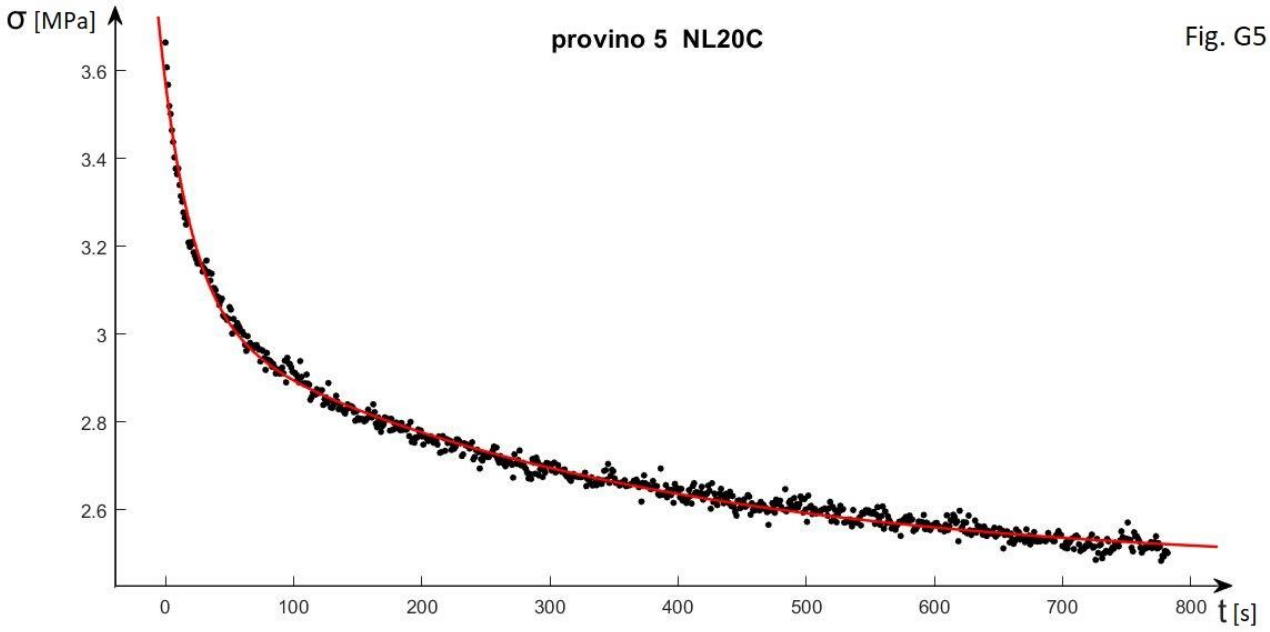
Rate pari a 0,001 s^{-1}:

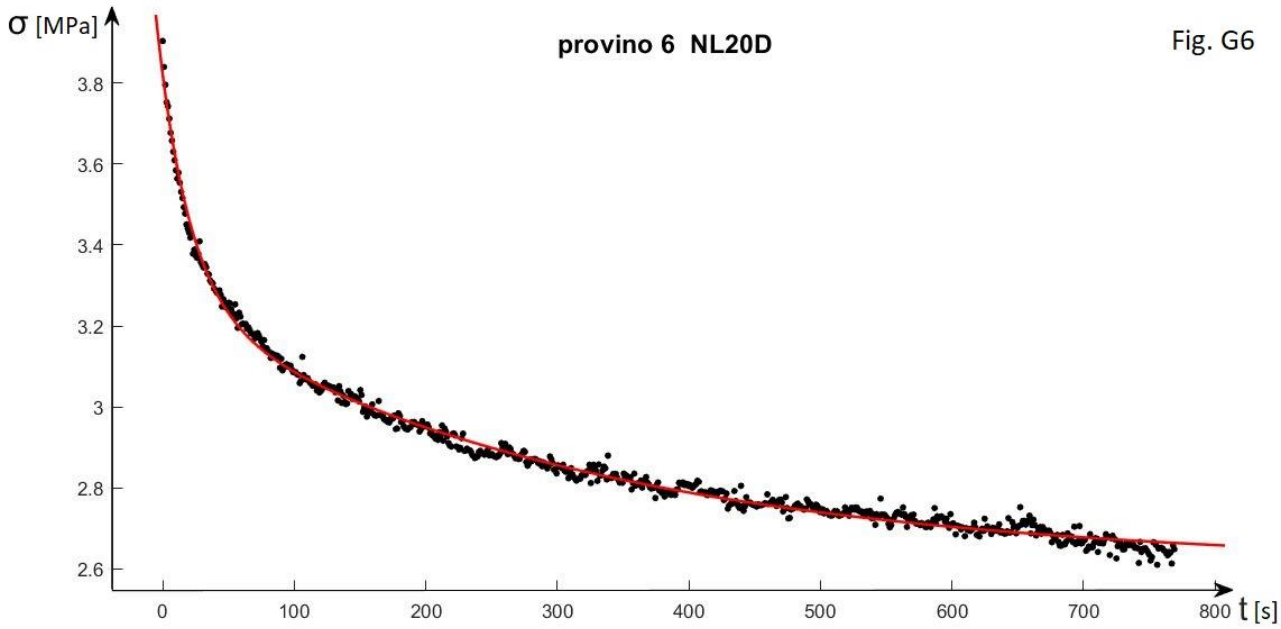





σ [MPa]
provino 3 NL10D
Fig. G3
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2
1.9
1.8
0
100
200
300
400
500
600
700
800
t [s]


σ [MPa]
provino 4 NL20A
Fig. G4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
0
100
200
300
400
500
600
700
t [s]


σ [MPa]
provino 5 NL20C
Fig. G5
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
0
100
200
300
400
500
600
700
800
t [s]


σ [MPa]
provino 6 NL20D
Fig. G6
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
0
100
200
300
400
500
600
700
800
t [s]

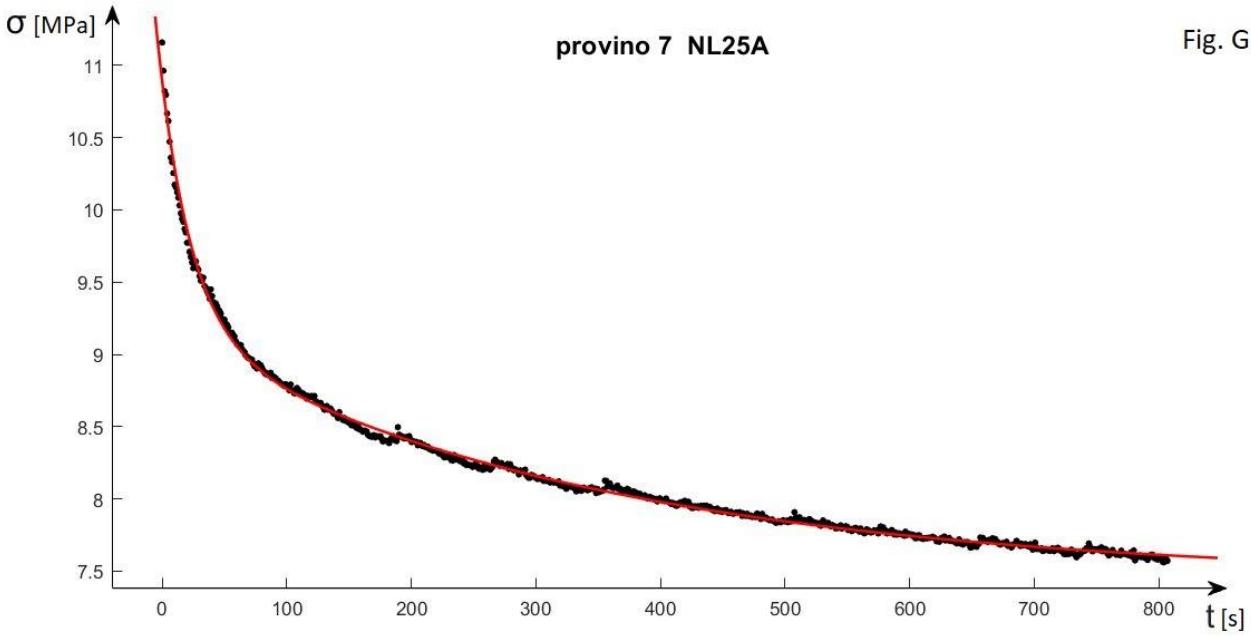

σ [MPa]
provino 7 NL25A
11
10.5
10
9.5
9
8.5
8
7.5
0
100
200
300
400
500
600
700
800
t [s]

Fig. G7

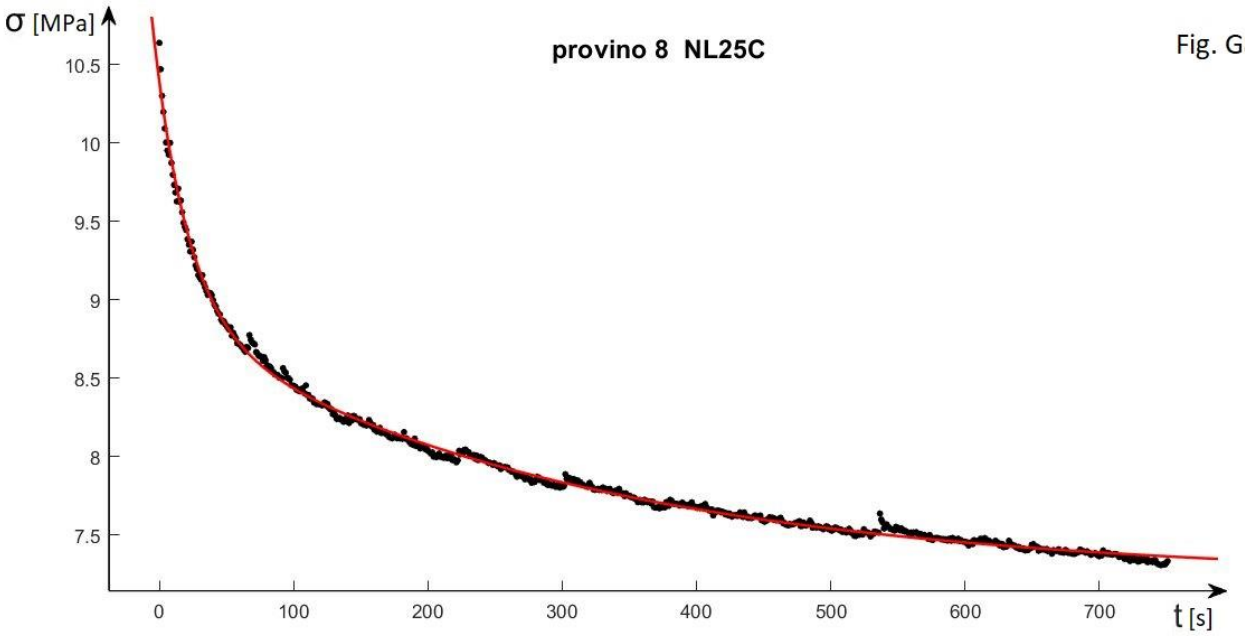
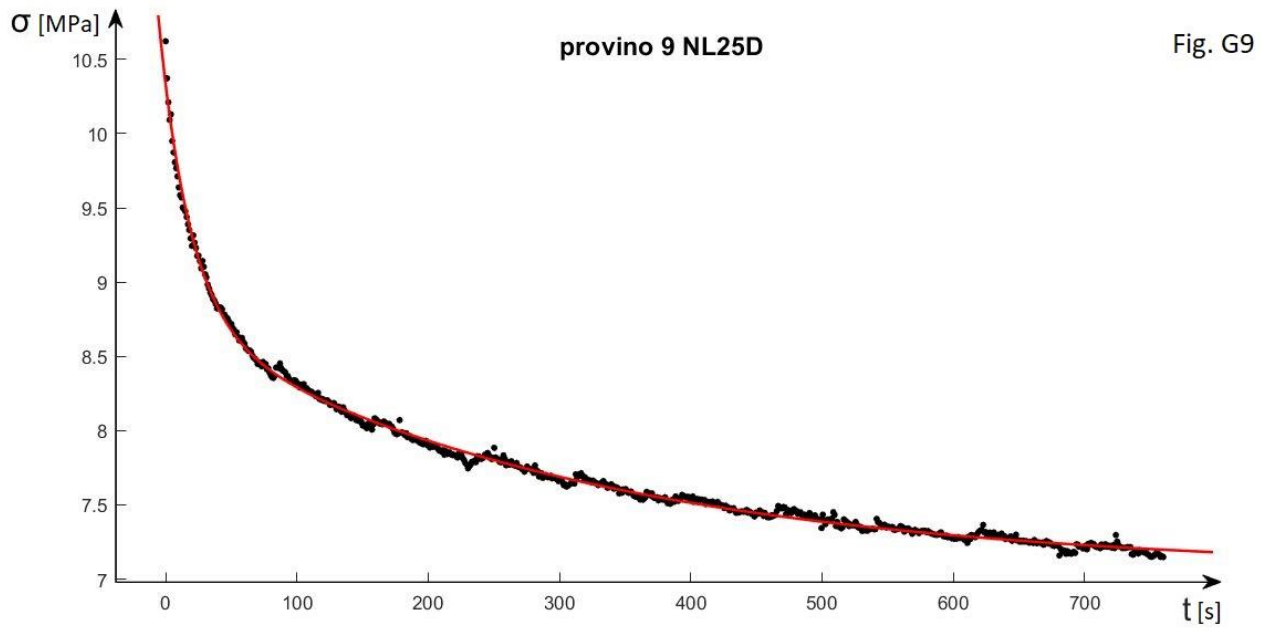
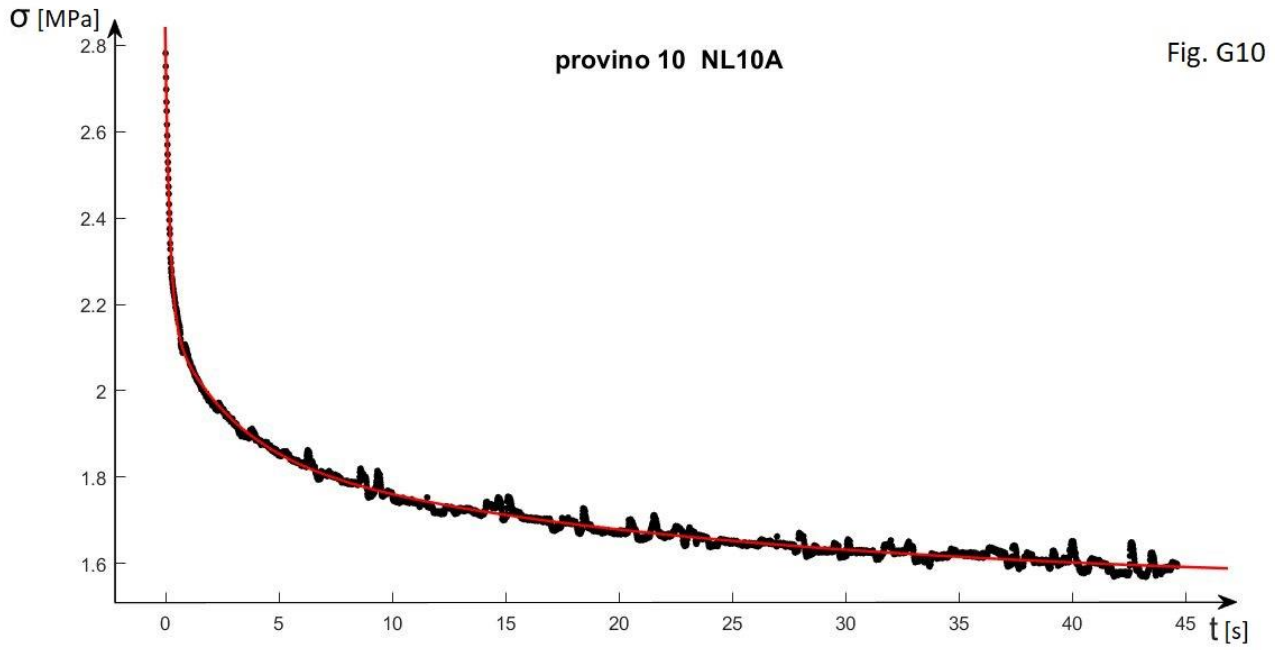
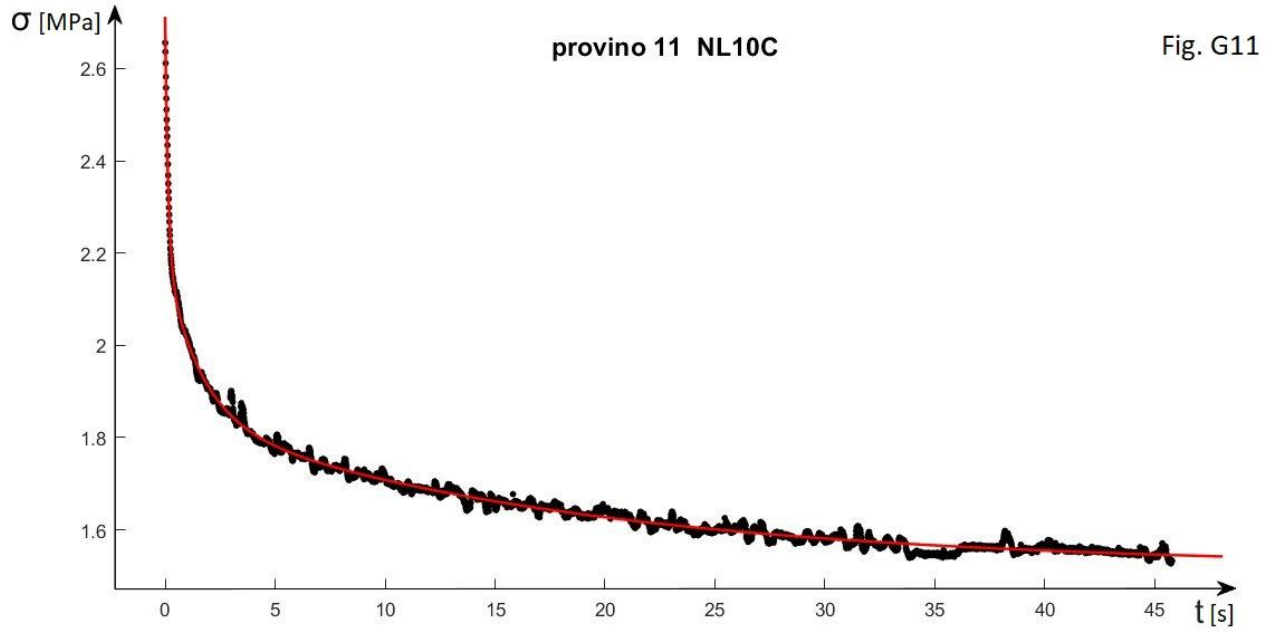

σ [MPa]
provino 8 NL25C
10.5
10
9.5
9
8.5
8
7.5
0
100
200
300
400
500
600
700
t [s]

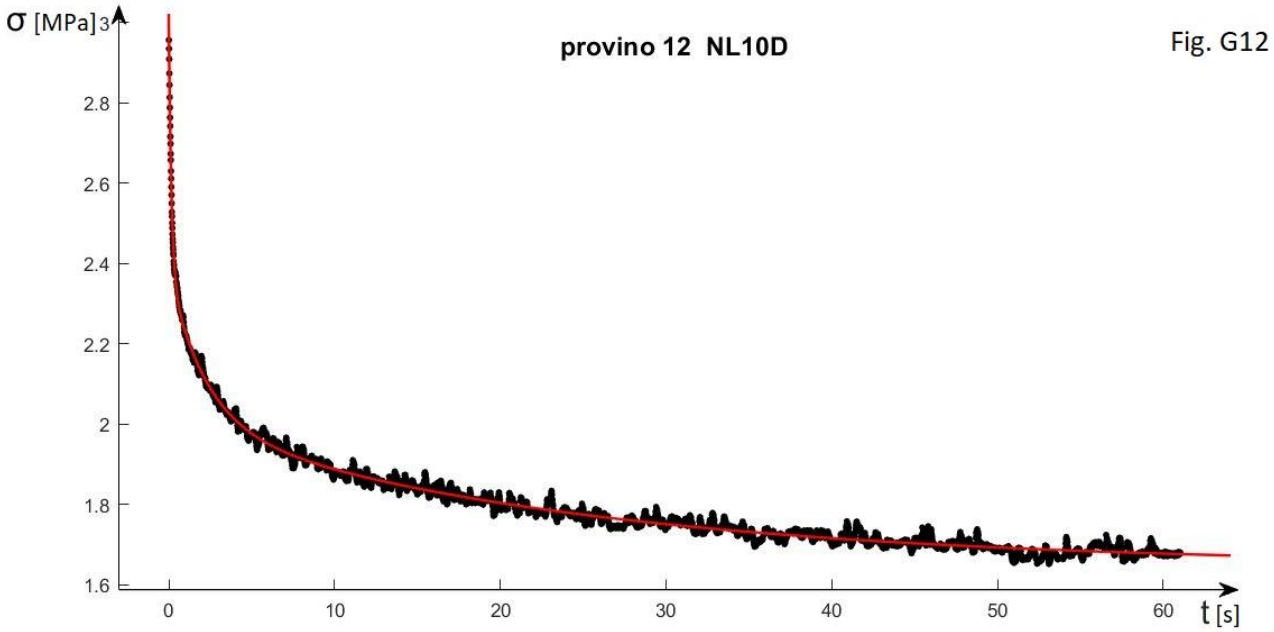
Fig. G8



Rate pari a 0,1 s^{-1}:




σ [MPa]
provino 11 NL10C
Fig. G11
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
t [s]


σ [MPa]
provino 12 NL10D
Fig. G12
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
0
10
20
30
40
50
60
t [s]

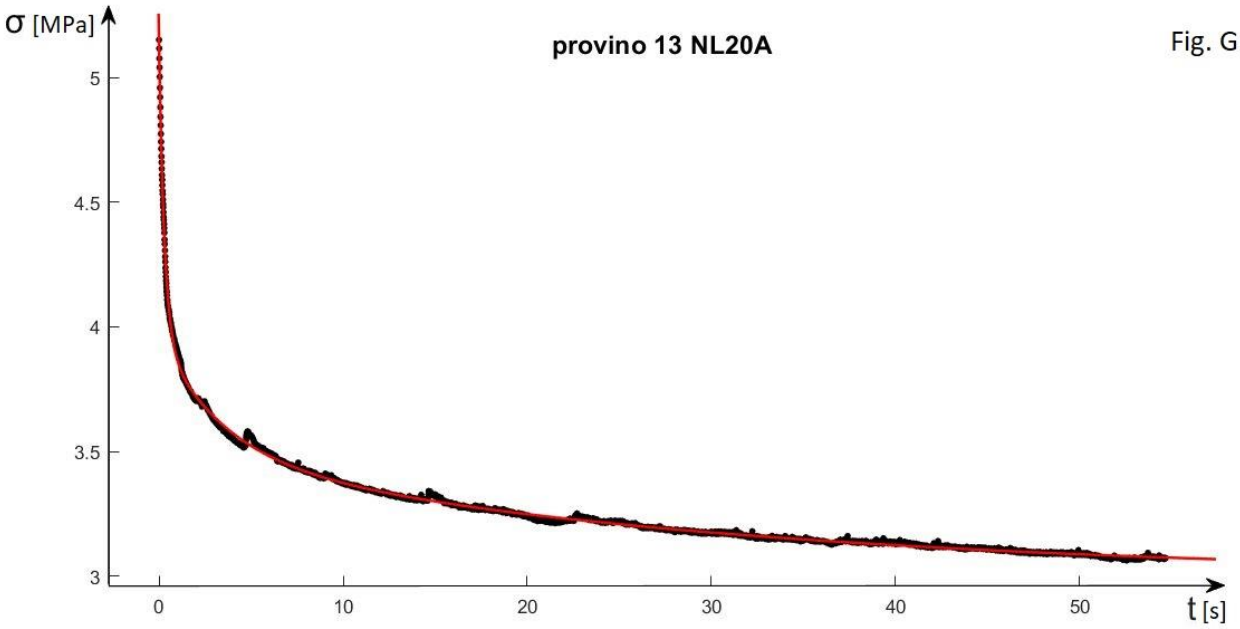


Fig. G13

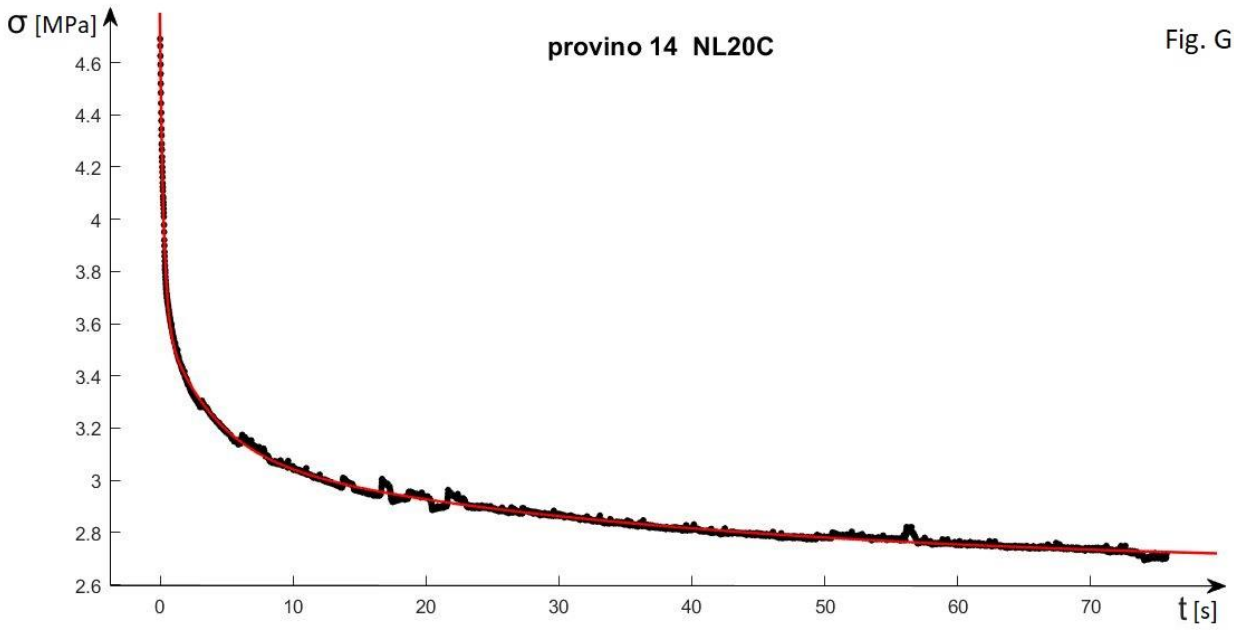


Fig. G14

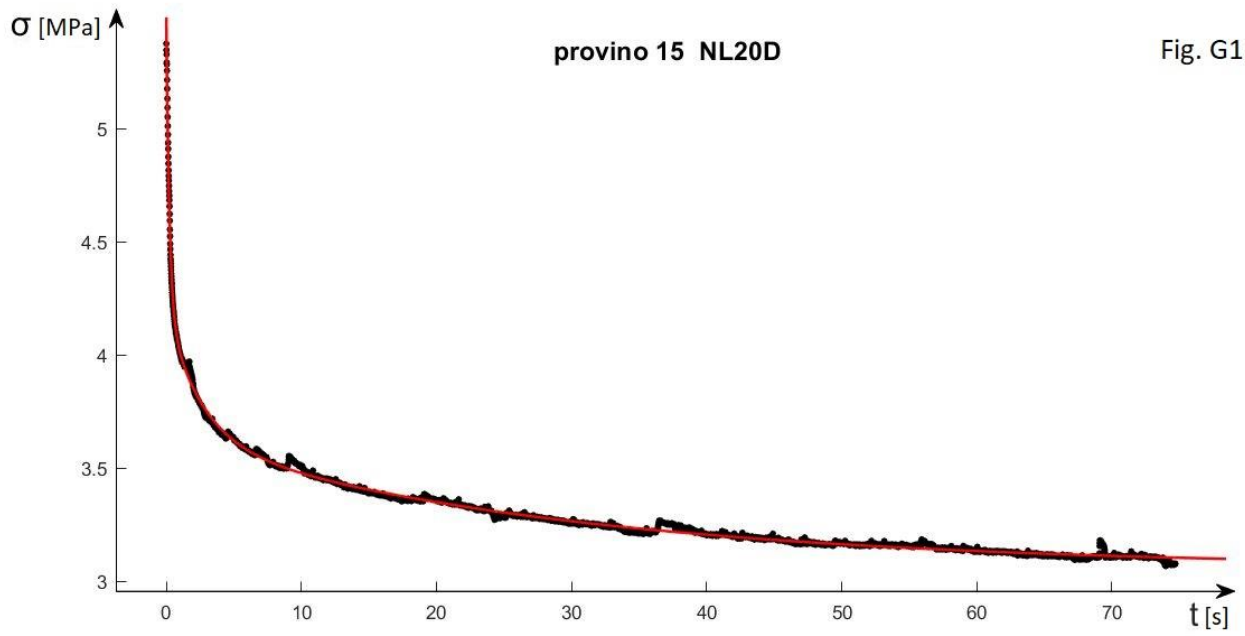


Fig. G15

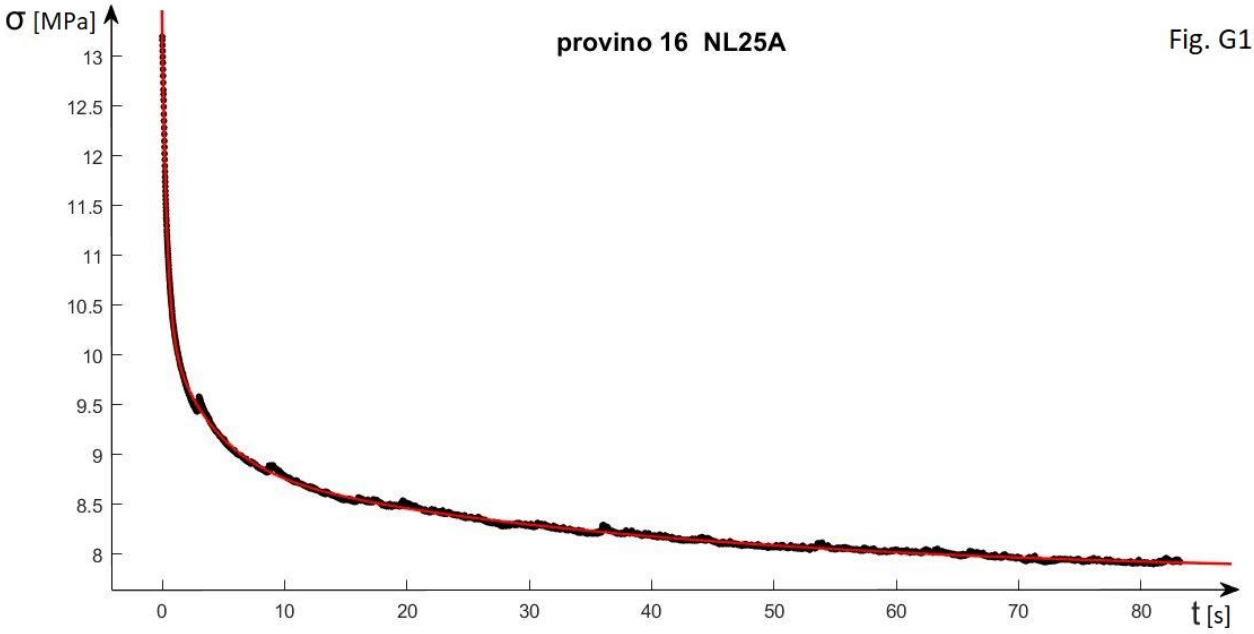


Fig. G16

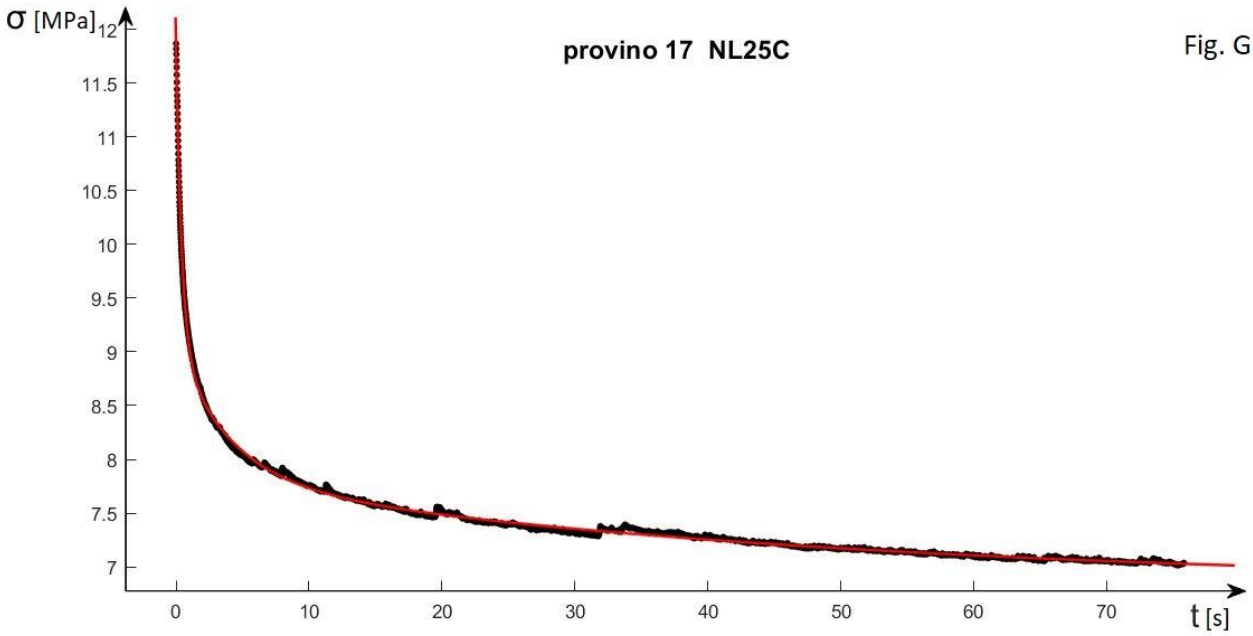


Fig. G17

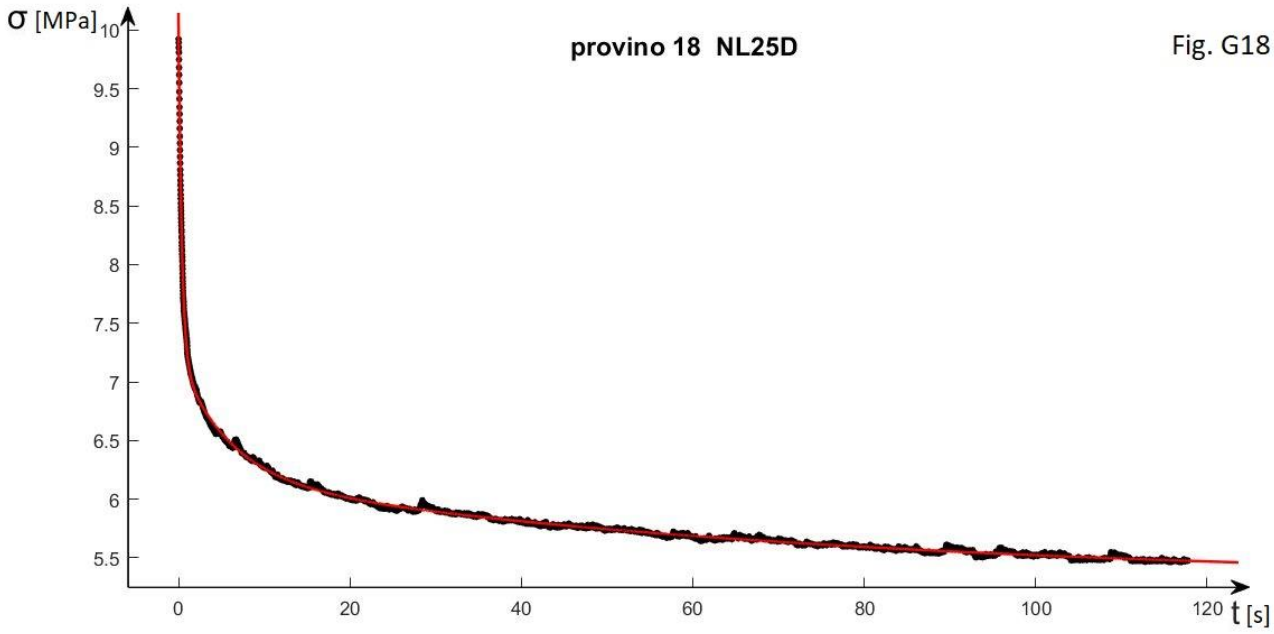


Fig. G18

Semplicemente osservando i grafici si vede come la funzione teorica imita molto bene i punti sperimentali. Le eventuali oscillazioni dipendono sia dalla disomogeneità del sughero sia da disturbi elettromagnetici verso la cella di carico, la quale deve essere perciò tenuta al riparo da telefoni cellulari e altre fonti di interferenza. L'adozione di due modelli diversi per le due velocità di deformazione è necessaria per descrivere bene il comportamento di tutti i provini. Infatti nelle prove veloci impiegando solo due rami di Maxwell in parallelo a una molla non si riesce a cogliere l'esatta curvatura tra il tratto di forte pendenza iniziale della curva e il tratto finale quasi orizzontale. Questo concetto è illustrato dall'esempio in fig.21, in cui i punti sperimentali del provino 18 NL25D (prova veloce) sono interpolati dall'equazione (7).

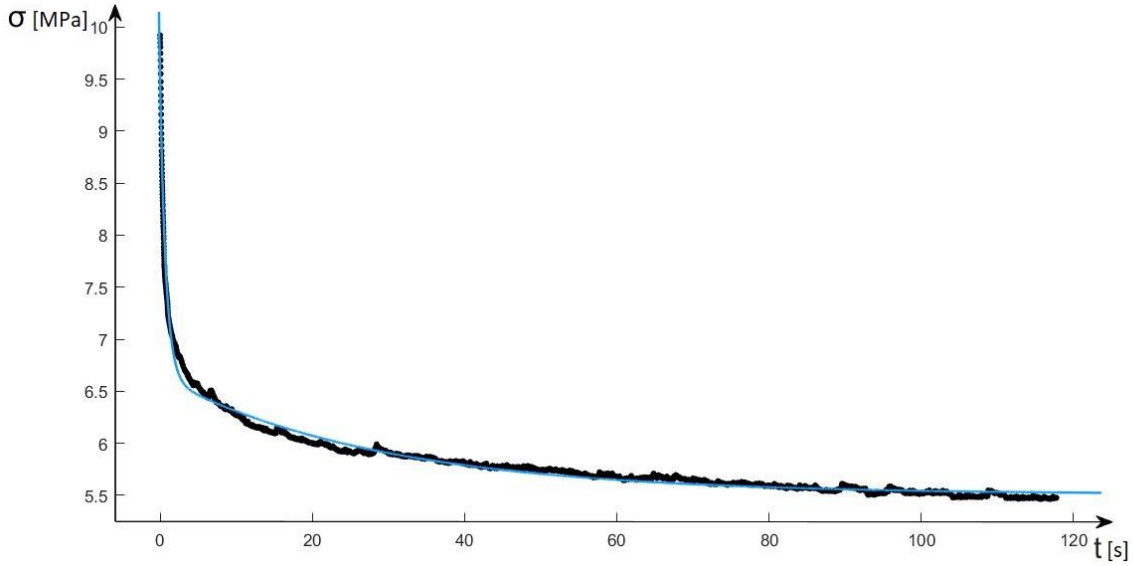


Fig.21

Esempio

Inoltre nell'esempio di fig.21 si vede come la curva celeste rimane "alta" rispetto ai punti empirici, indice che il modello non è adatto per queste condizioni sperimentali a rapida velocità di deformazione.

Con altri due esempi in figg.22-23 è illustrato ciò che si era detto nel paragrafo 1.2 riguardo il modello lineare standard di Clarence Zener. Ovvero è stato accennato che questo modello è in grado di imitare solo parzialmente i dati sperimentali e che in certi casi si discosta anche notevolmente da essi. Vediamo quindi in fig.22 un esempio di fitting del provino 1 NL10A e in fig.23 un esempio di fitting del provino 9 NL25D tramite l'equazione (4).

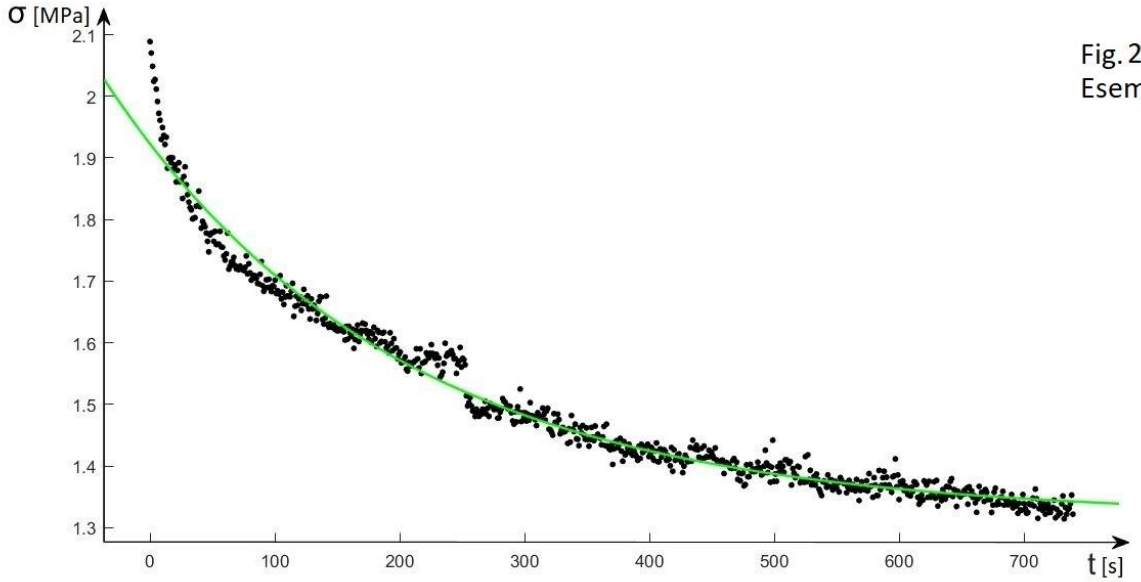


Fig. 22
Esempio

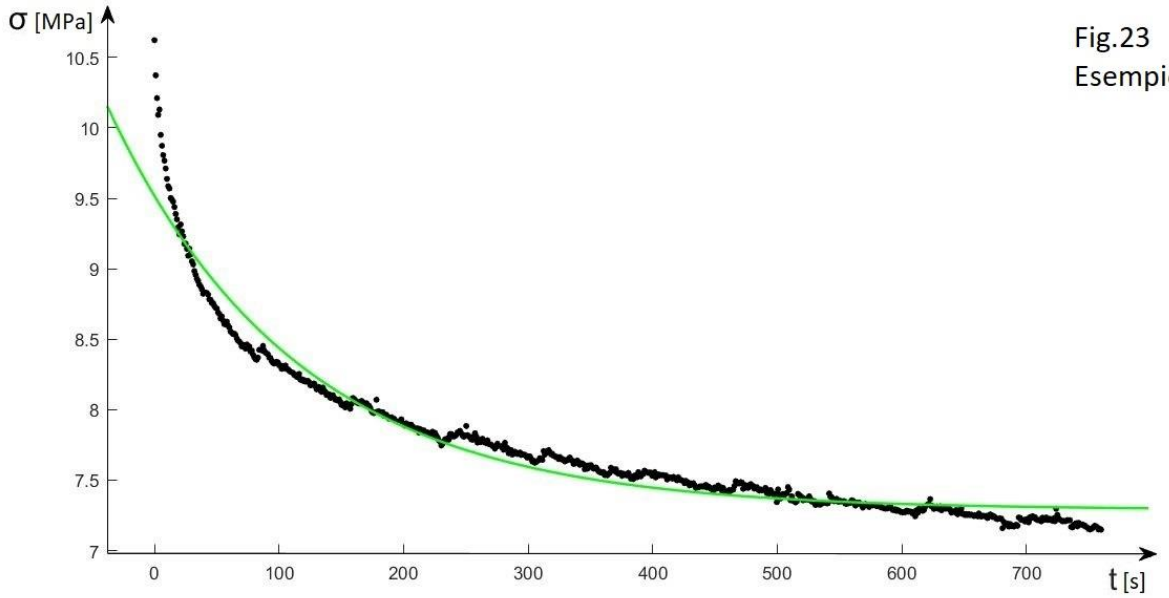


Fig.23
Esempio

Il discostamento tra dati teorici e sperimentali risulta ora più evidente, specialmente nel provino NL25D, più denso rispetto a NL10A. Esempi di fitting tramite il modello di Clarence Zener per prove veloci non sono riportati in quanto per quelle condizioni la funzione teorica segue una strada totalmente diversa rispetto ai dati pratici.

Tutto ciò è confermato ovviamente dagli indicatori di bontà del fitting. Sono riportati in tab.3 tali indicatori per tutti i grafici, compreso i grafici degli esempi

di figg.21-22-23, nonché i coefficienti τ_i (forniti direttamente da Matlab) e i valori delle rigidità E_i (ottenuti dividendo le σ fornite da Matlab per la deformazione costante $\varepsilon_0 = 0{,}75$ secondo le equazioni (9-12)).

Tab.3 Dati sperimentali sughero

n^o	SSE	RMSE	R^2	R_A^2	E_1[Mpa]	E_2[Mpa]	E_3[Mpa]	E_4[Mpa]	τ_2[s]	τ_3[s]	τ_4[s]
1	0,1926	0,0162	0,9895	0,9894	1,72	0,291	0,762	-	14,33	286,6	-
2	0,149	0,0151	0,9848	0,9847	1,887	0,361	0,492	-	29,84	298	-
3	0,2956	0,0196	0,9784	0,9783	2,452	0,414	0,546	-	23,04	191,4	-
4	0,2604	0,0186	0,9928	0,9928	3,499	0,767	0,884	-	24,93	305,8	-
5	0,2074	0,0163	0,9925	0,9925	3,293	0,718	0,752	-	24,61	327,6	-
6	0,2081	0,0165	0,994	0,9939	3,479	0,757	0,859	-	24,49	313,6	-
7	0,716	0,0299	0,9974	0,9974	9,931	2,315	2,277	-	26,08	342,7	-
8	0,6302	0,0291	0,9973	0,9973	9,632	2,036	2,185	-	25,63	303,9	-
9	0,7269	0,031	0,997	0,9969	9,407	2,133	2,235	-	23,8	308,7	-
10	0,7001	0,0125	0,9909	0,9909	2,068	0,818	0,394	0,422	0,1991	2,839	21,9
11	0,5318	0,0108	0,9923	0,9923	2,027	0,667	0,453	0,438	0,14	1,564	17,9
12	1,171	0,0139	0,9895	0,9895	2,197	0,799	0,498	0,475	0,1614	2,205	24,21
13	0,533	0,0099	0,9978	0,9978	4	1,567	0,626	0,657	0,2939	3,396	29,03
14	0,9739	0,0114	0,9965	0,9965	3,564	1,423	0,677	0,589	0,2796	3,772	35,33
15	1,387	0,0136	0,9962	0,9962	4,081	1,716	0,760	0,765	0,2341	2,513	29,24
16	3,745	0,0212	0,9983	0,9983	10,397	3,933	1,832	1,505	0,3923	3,85	36,88
17	4,394	0,0241	0,9973	0,9973	9,109	3,657	1,656	1,318	0,4316	4,004	46,9
18	3,792	0,018	0,9977	0,9977	7,073	3,74	1,344	1,184	0,3929	5,89	70,98
Fig21	28,82	0,0495	0,9828	0,9828	-	-	-	-	-	-	-
Fig22	0,388	0,023	0,9788	0,9788	-	-	-	-	-	-	-
Fig23	10,25	0,1164	0,9572	0,957	-	-	-	-	-	-	-

Per l'esempio di fig.22 è più difficile rendersi conto della scarsa qualità del fitting se ci si basa solo sugli indicatori senza guardare il relativo grafico. Questo perché essendo il provino NL10A poco denso e essendo la direzione A più cedevole a compressione rispetto a C e D (vedi grafici), i valori della tensione sono bassi, per cui SSE è vicino allo zero (0,388) anche se la funzione teorica non interpreta bene i dati pratici. Lo stesso discorso vale anche al contrario: pur essendo il fitting di ottima qualità, SSE del provino 17 vale 4,394 perché il provino è denso e la direzione D è la più resistente a compressione (vedi grafici), generando così alti valori di tensione durante la prova e quindi un SSE più elevato. Da ciò si capisce l'utilità di avere a disposizione i dati anche visivamente oltre che numericamente.

I valori dei coefficienti σ e τ possono essere sostituiti nell'equazione teorica del modello per ogni provino in modo da ottenere il valore teorico di $\sigma(t)$, con il quale possiamo sia calcolare il modulo di rilassamento del materiale già definito in precedenza sia prevedere la tensione manifestata nel tempo dal materiale sottoposto a condizioni pratiche di utilizzo simili a quelle sperimentali. Quest'ultimo punto è però delicato. Bisogna infatti precisare che i modelli qui analizzati e idonei per la fase dello stress relaxation potrebbero risultare non più adatti se impiegati per esempio durante la fase di deformazione negativa o durante l'esperimento di creep. Per ottenere una piena rappresentazione matematica del materiale occorrerebbe trovare un modello, probabilmente più complesso di quelli trattati in questo testo, in grado di descrivere sempre al meglio i dati empirici nelle varie situazioni sperimentali.

Capitolo 3

PVC

Il PVC (polivinilcloruro) è un materiale sintetico ottenuto dal cloruro di vinile. Il polivinilcloruro può subire molte lavorazioni di trasformazione, tra le quali una molto importante è l'espansione che porta alla formazione di PVC espanso. Quest'ultimo si presenta come una schiuma a struttura cellulare e a bassa densità, costituendo un ottimo materiale da testare per studiare il rilassamento viscoelastico. Anche questo, come il sughero, è un materiale anisotropo, che manifesta quindi diversi comportamenti lungo 3 diverse direzioni ortogonali tra loro che indichiamo con le lettere A-B-C. Vengono anche in questo caso analizzate 3 diverse densità (HP130-200-250) per ogni direzione, il tutto eseguito con due velocità di deformazione diverse che coincidono come nel caso degli esperimenti sul sughero a $0{,}001s^{-1}$ e $0{,}1s^{-1}$. Sono quindi analizzati 18 provini di PVC espanso, i cui dati di partenza sono di seguito elencati. La macchina da compressione adoperata è la stessa con cui sono state svolte le prove del sughero.

Fig.24
HP130(A-B-C)
HP200(A-B-C)
HP250(A-B-C)

3.1 Organizzazione dati

Tab.4 Dati di identificazione dei provini in PVC

n⁰	HP	dir	rate	L_i	a	b	massa	area	volume	densità	ΔL	velocità	ΔT	camp/s
1	130	A	0,001	15,09	12,03	12,06	0,291	145,0818	2189,284	132,9201	11,3175	0,01509	1500	1
2	130	B	0,001	14,85	11,97	11,9	0,292	142,443	2115,279	138,0433	11,1375	0,01485	1500	1
3	130	C	0,001	14,91	11,82	11,97	0,277	141,4854	2109,547	131,3078	11,1825	0,01491	1500	1
4	200	A	0,001	15,22	12,02	11,87	0,409	142,6774	2171,55	188,3447	10,654	0,01522	1400	1,071429
5	200	B	0,001	14,8	11,94	11,91	0,396	142,2054	2104,64	188,1557	10,36	0,0148	1400	1,071429
6	200	C	0,001	14,8	11,95	11,75	0,391	140,4125	2078,105	188,1522	10,36	0,0148	1400	1,071429
7	250	A	0,001	14,87	11,86	12,12	0,526	143,7432	2137,461	246,0863	9,6655	0,01487	1300	1,153846
8	250	B	0,001	14,91	12,06	11,98	0,523	144,4788	2154,179	242,7839	9,6915	0,01491	1300	1,153846
9	250	C	0,001	14,8	12,09	12,05	0,544	145,6845	2156,131	252,3038	9,62	0,0148	1300	1,153846
10	130	A	0,1	15,08	12,05	12,02	0,288	144,841	2184,202	131,8559	11,31	1,508	15	100
11	130	B	0,1	14,89	11,93	11,94	0,29	142,4442	2120,994	136,7283	11,1675	1,489	15	100
12	130	C	0,1	14,7	11,78	11,97	0,275	141,0066	2072,797	132,671	11,025	1,47	15	100
13	200	A	0,1	15,21	12,05	12,06	0,414	145,323	2210,363	187,2996	10,647	1,521	14	107,1429
14	200	B	0,1	14,74	11,98	11,43	0,376	136,9314	2018,369	186,289	10,318	1,474	14	107,1429
15	200	C	0,1	14,9	11,96	12,08	0,403	144,4768	2152,704	187,2064	10,43	1,49	14	107,1429
16	250	A	0,1	14,86	12,12	11,93	0,521	144,5916	2148,631	242,48	9,659	1,486	13	115,3846
17	250	B	0,1	14,88	11,98	11,95	0,517	143,161	2130,236	242,6962	9,672	1,488	13	115,3846
18	250	C	0,1	14,75	11,51	11,92	0,509	137,1992	2023,688	251,521	9,5875	1,475	13	115,3846

Valgono le stesse considerazioni espresse nel paragrafo 2.1 riguardo gli strumenti e le unità di misura dei dati tabellati in tab.4. L'unica osservazione da fare è che a differenza dei test sul sughero la deformazione ε_0 non è la stessa per tutti i provini. Infatti per i provini 1-3, 10-12 $\varepsilon_0 = 0{,}75$, per i provini 4-6, 13-15 $\varepsilon_0 = 0{,}7$, per i provini 7-9, 16-18 $\varepsilon_0 = 0{,}65$. Questa scelta di diversificare i valori di ε_0 è stata presa a scopo cautelativo: si è assegnata una deformazione minore ai provini più densi (da cui ci si aspetta una tensione massima maggiore dei provini meno densi) onde evitare di arrivare al fondo scala della macchina da compressione (3000 N). Se ciò fosse accaduto la prova sperimentale sarebbe stata falsata e si sarebbe dovuta ripetere impostando una ε_0 minore.

3.2 Grafici e analisi dei risultati

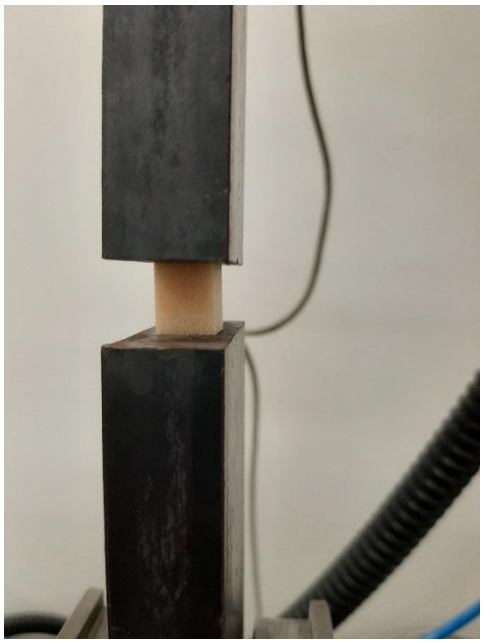


Fig.25 provino in PVC con lunghezza iniziale

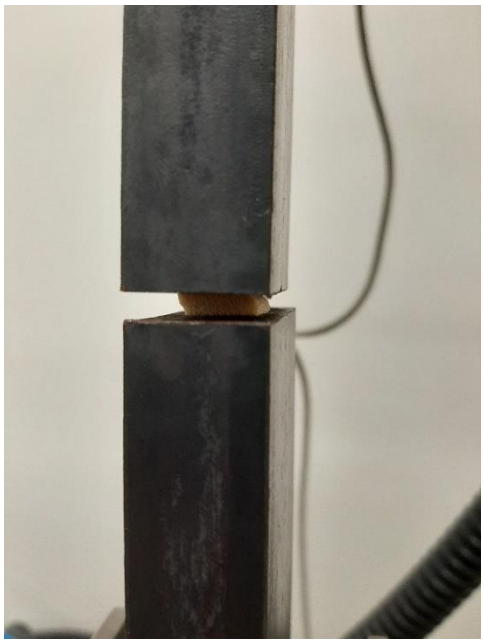
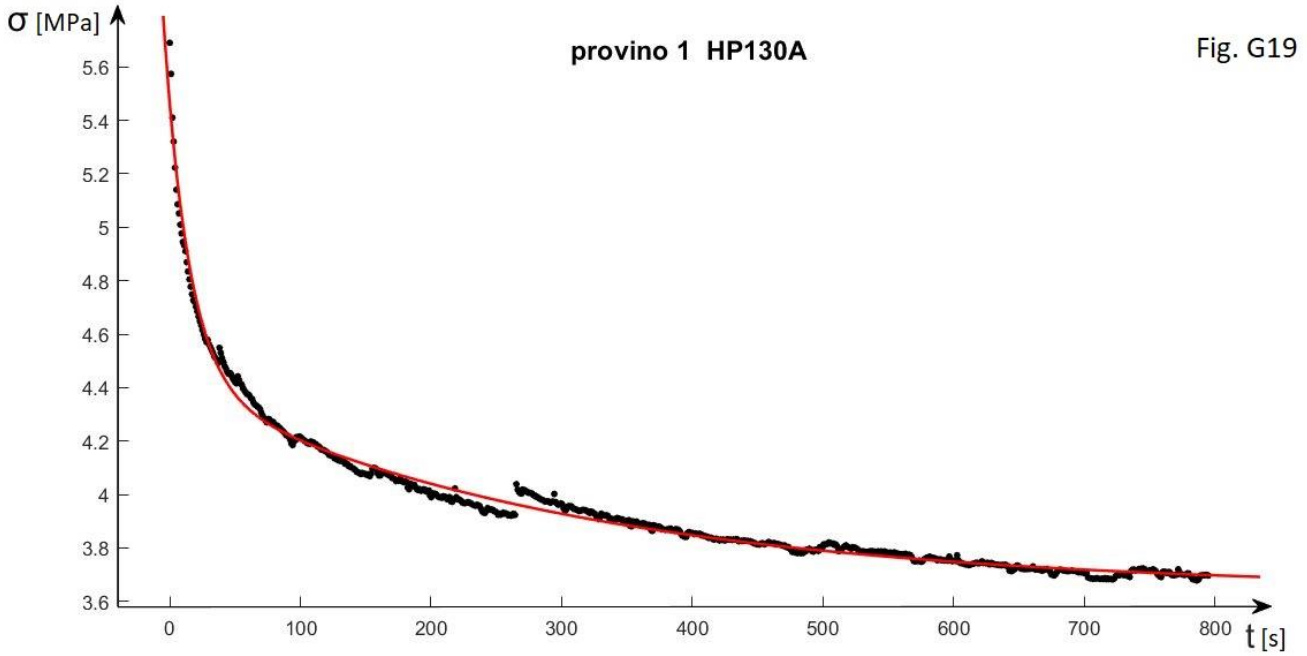


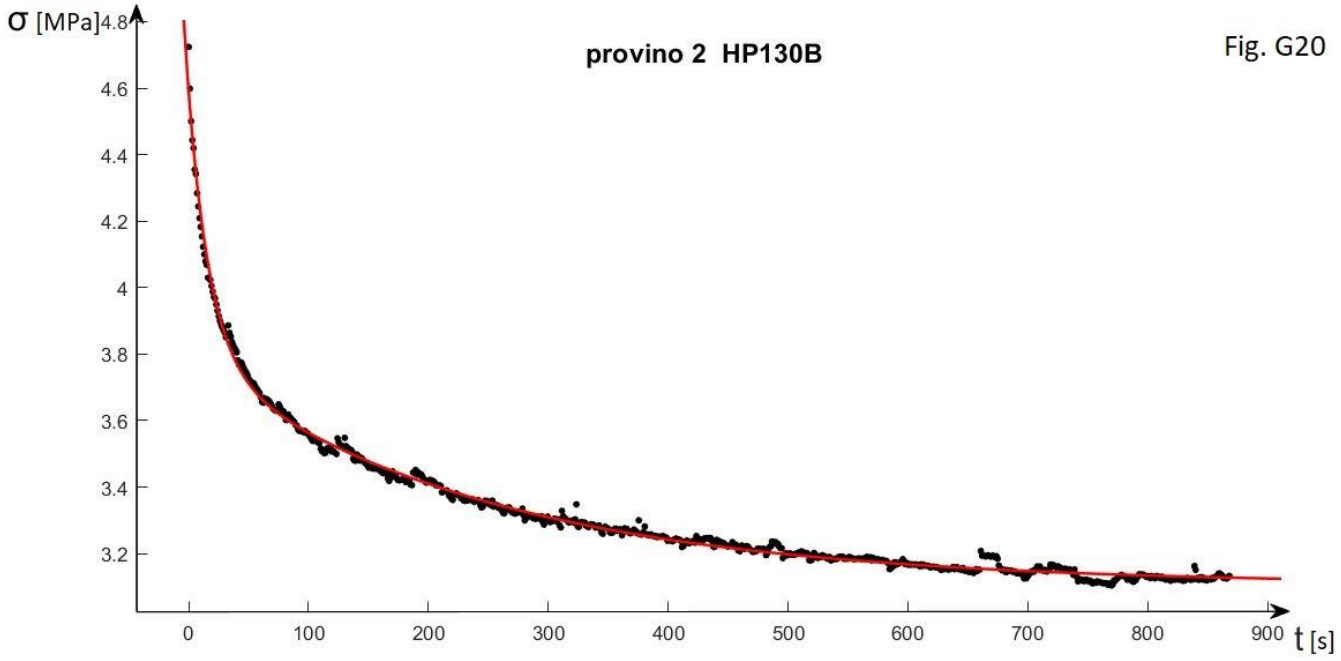
Fig.26 provino in PVC con lunghezza finale

Anche per le prove del PVC si utilizza l'equazione (7) per le esecuzioni lente e l'equazione (8) per quelle veloci, per le stesse ragioni espresse riguardo le prove del sughero.

Seguono i grafici sperimentali con annesse funzioni teoriche riguardo il PVC.

Rate pari a 0,001 s^{-1}





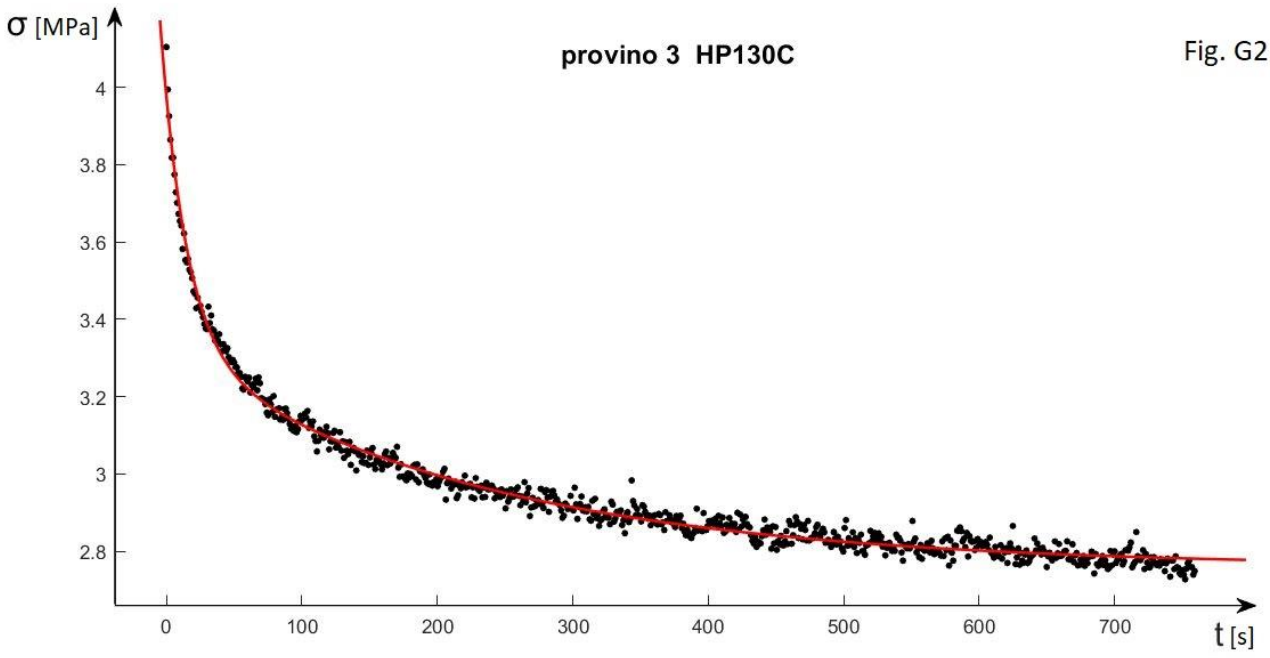


Fig. G21

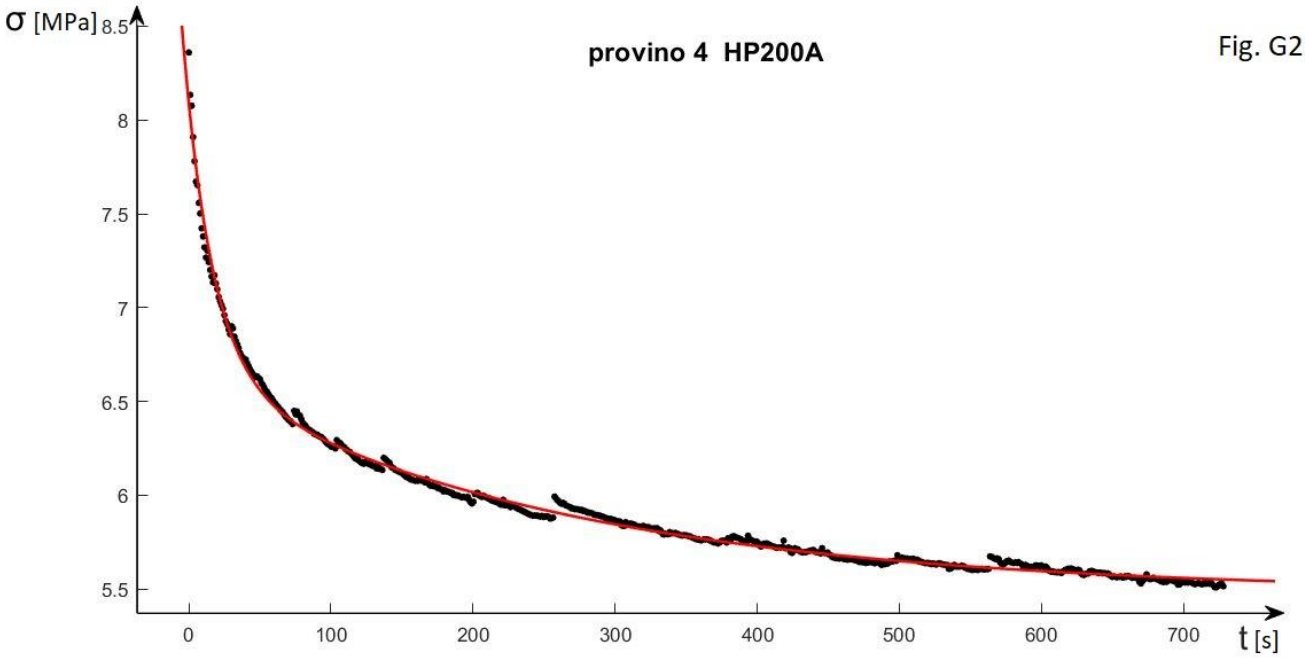


Fig. G22

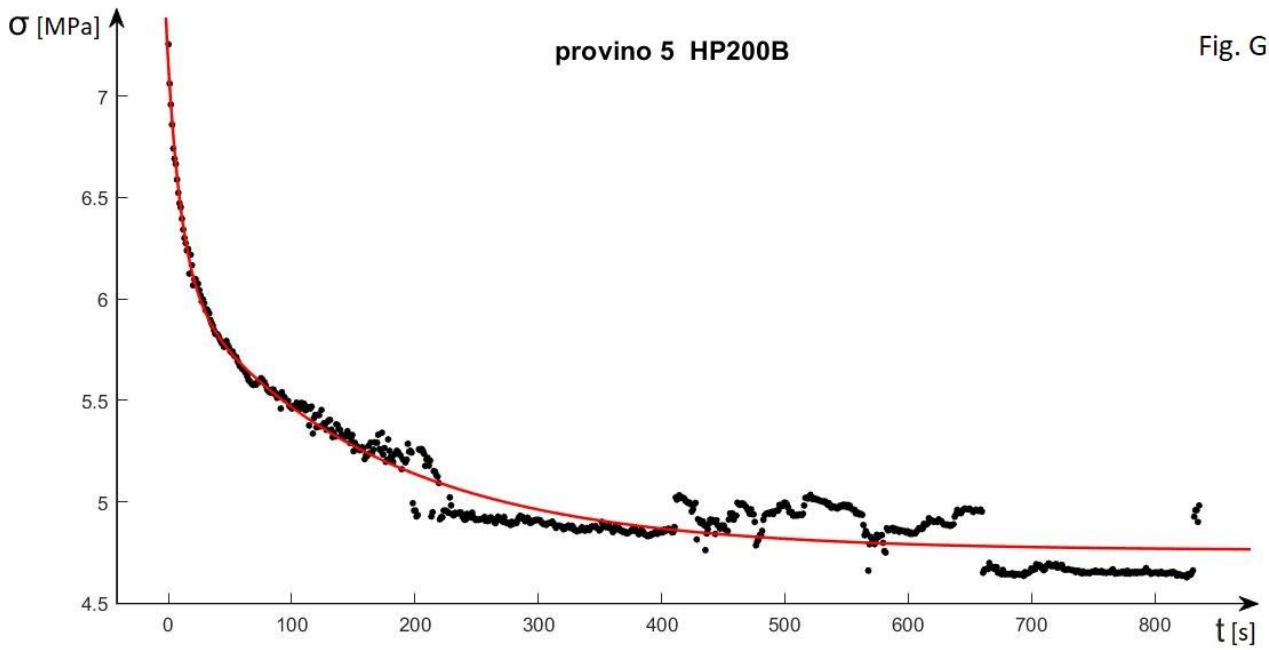


Fig. G23

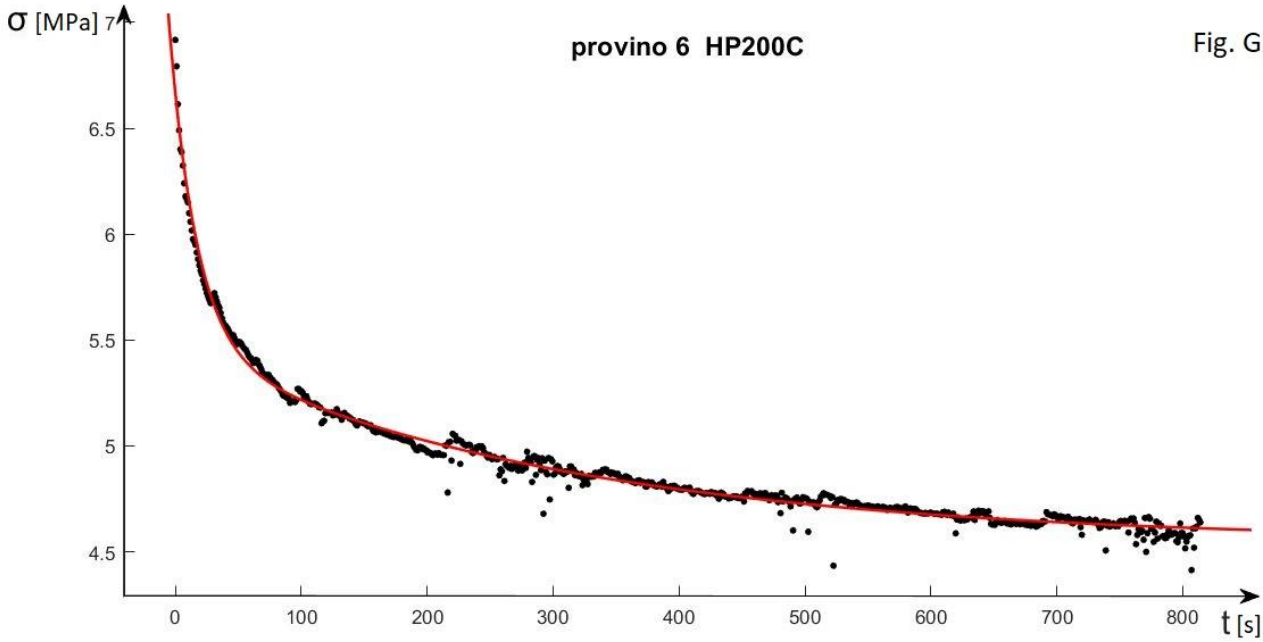


Fig. G24

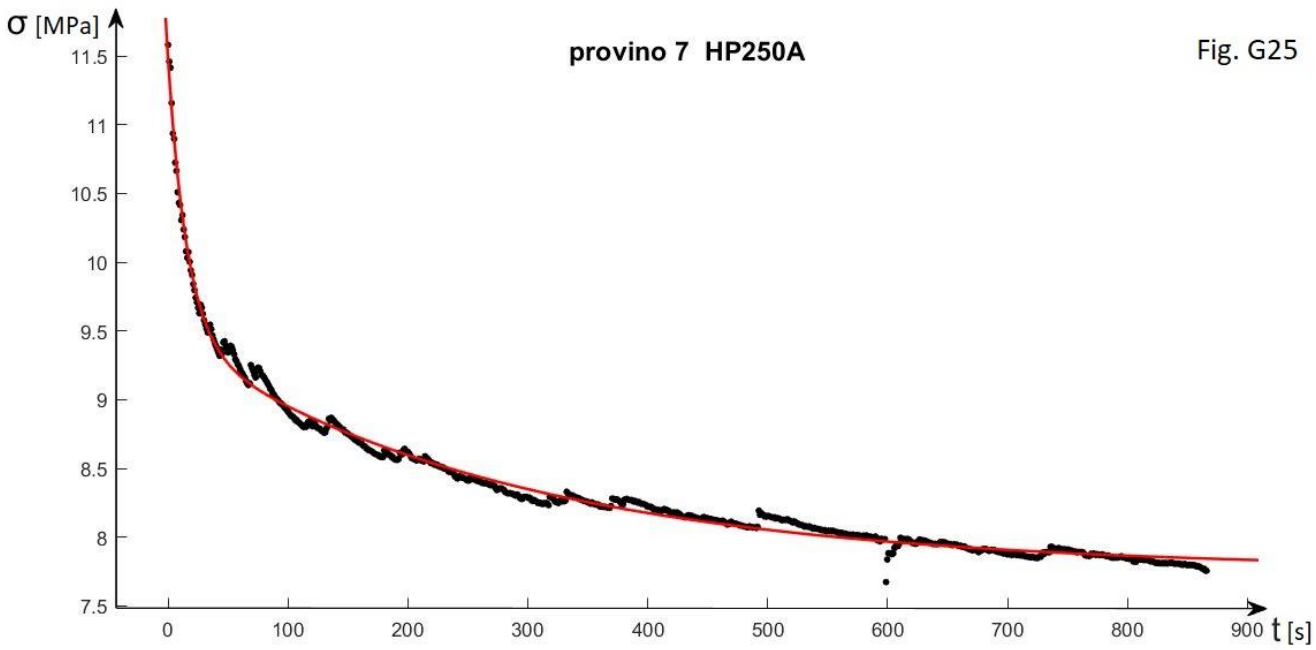


Fig. G25

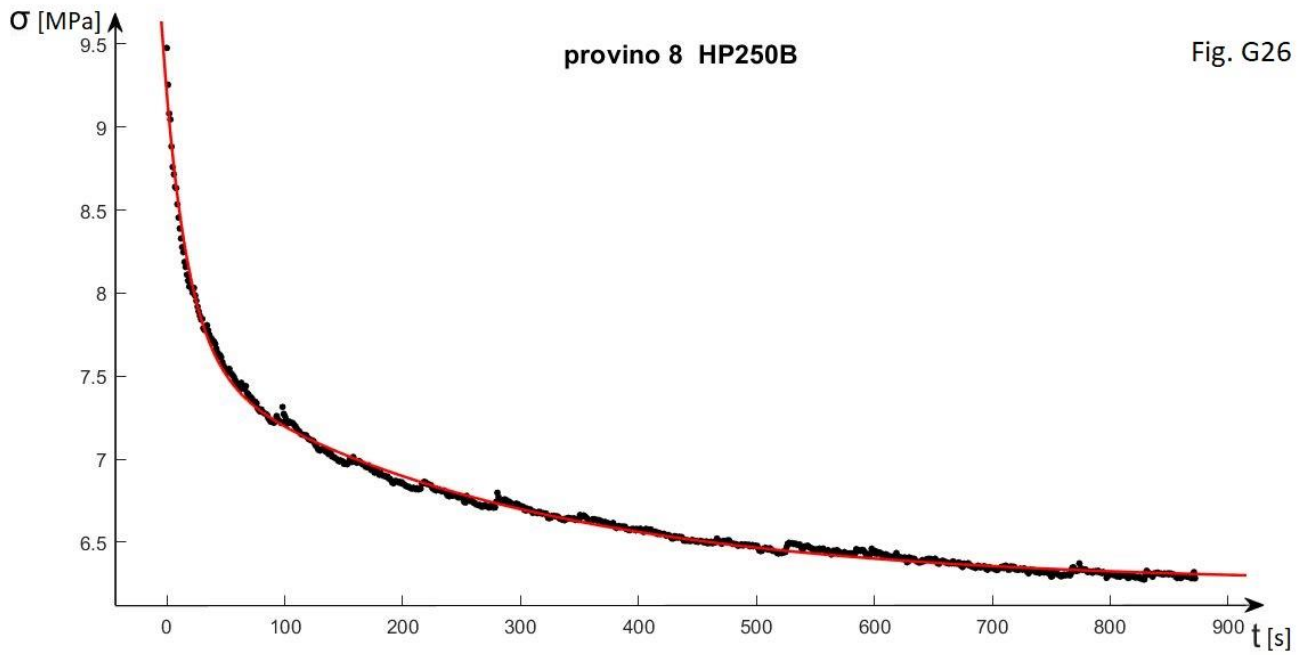
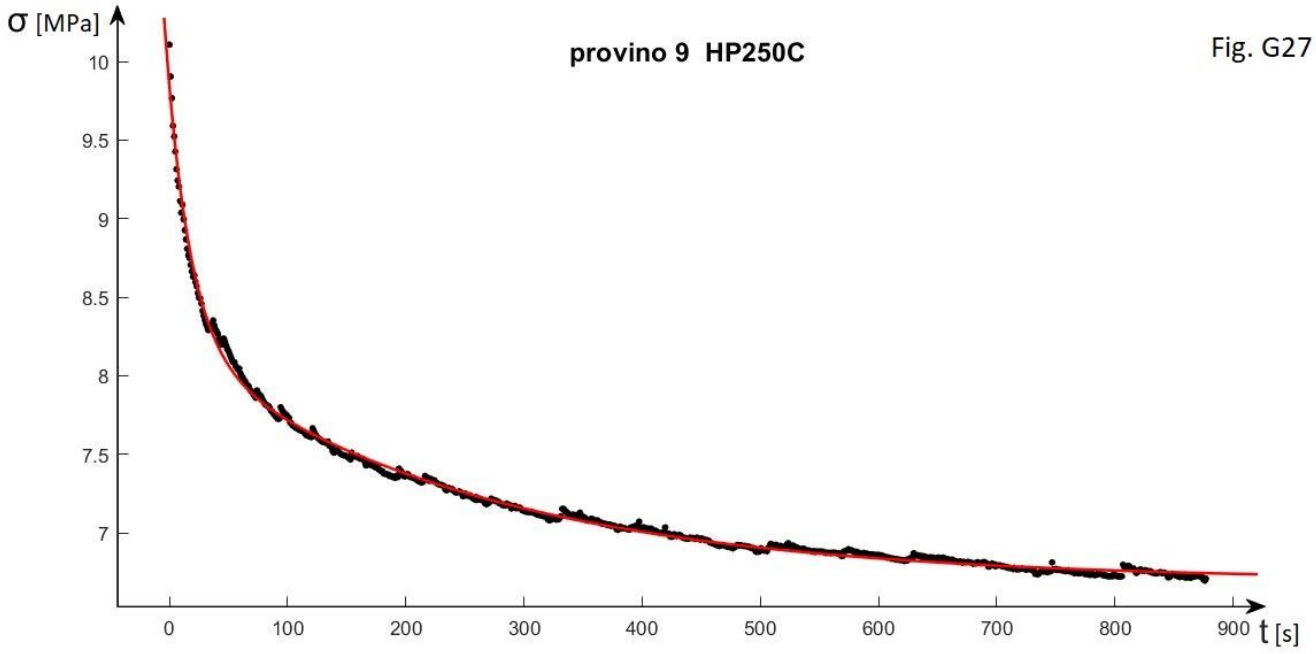
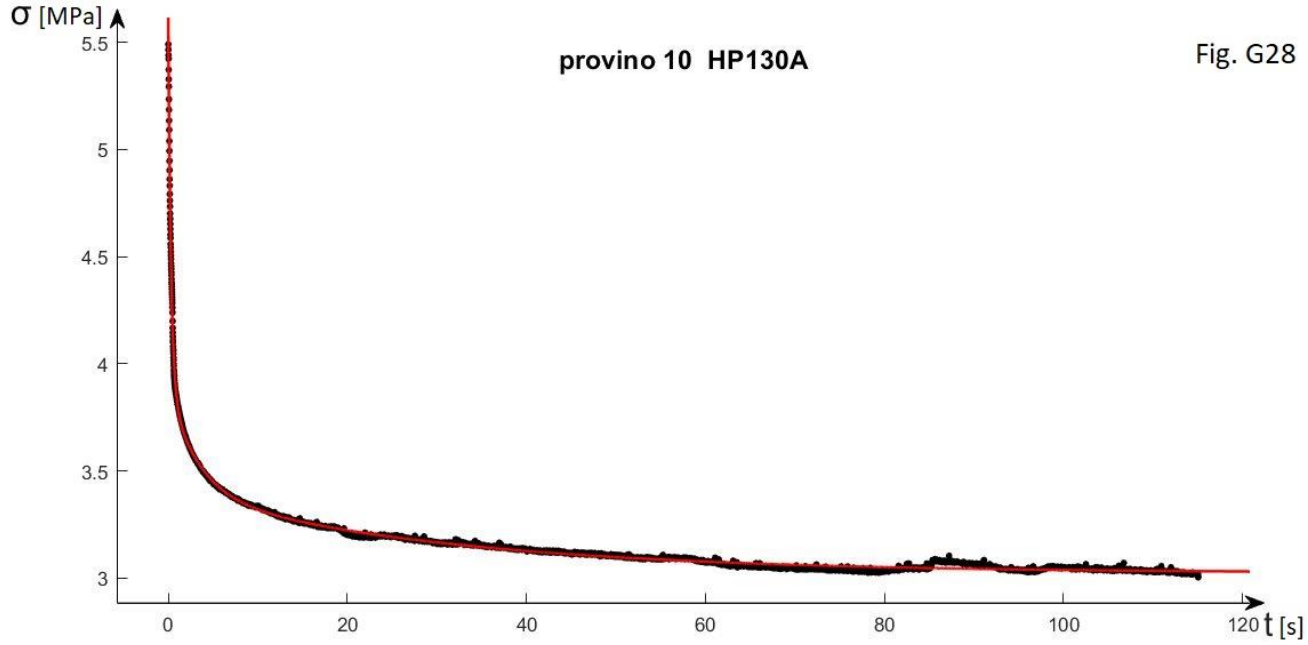
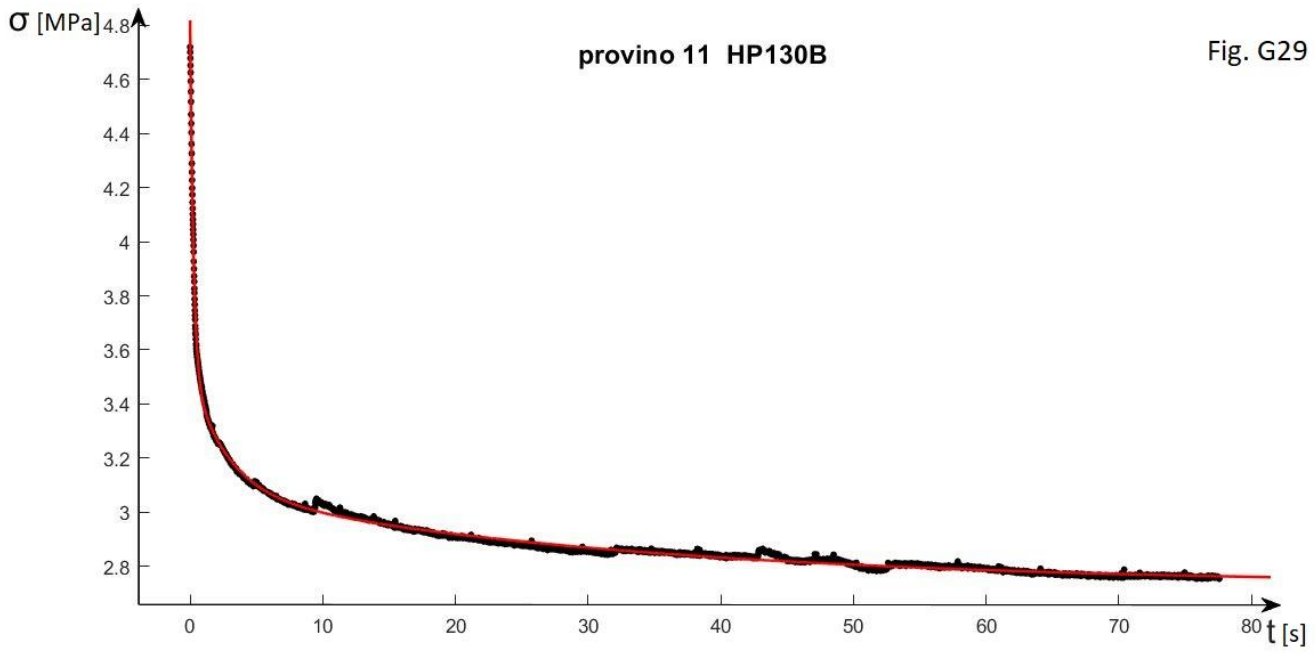


Fig. G26



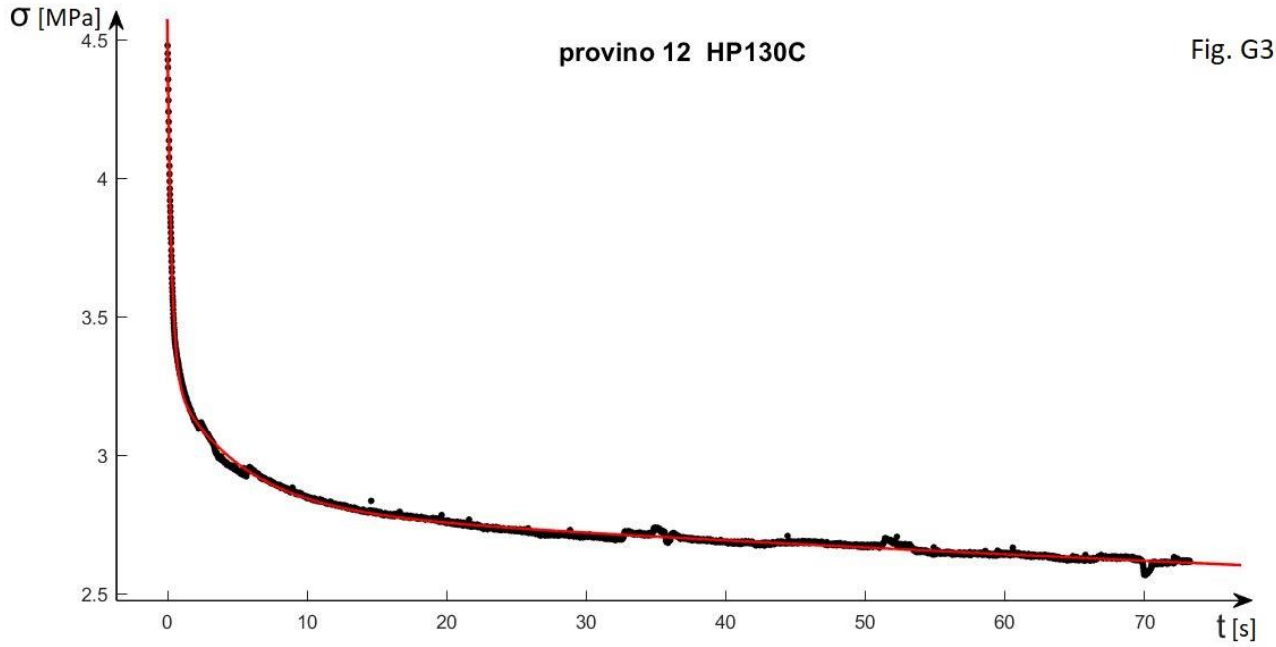
Rate pari a 0,1 s^{-1}:





provino 11 HP130B

Fig. G29



provino 12 HP130C

Fig. G30

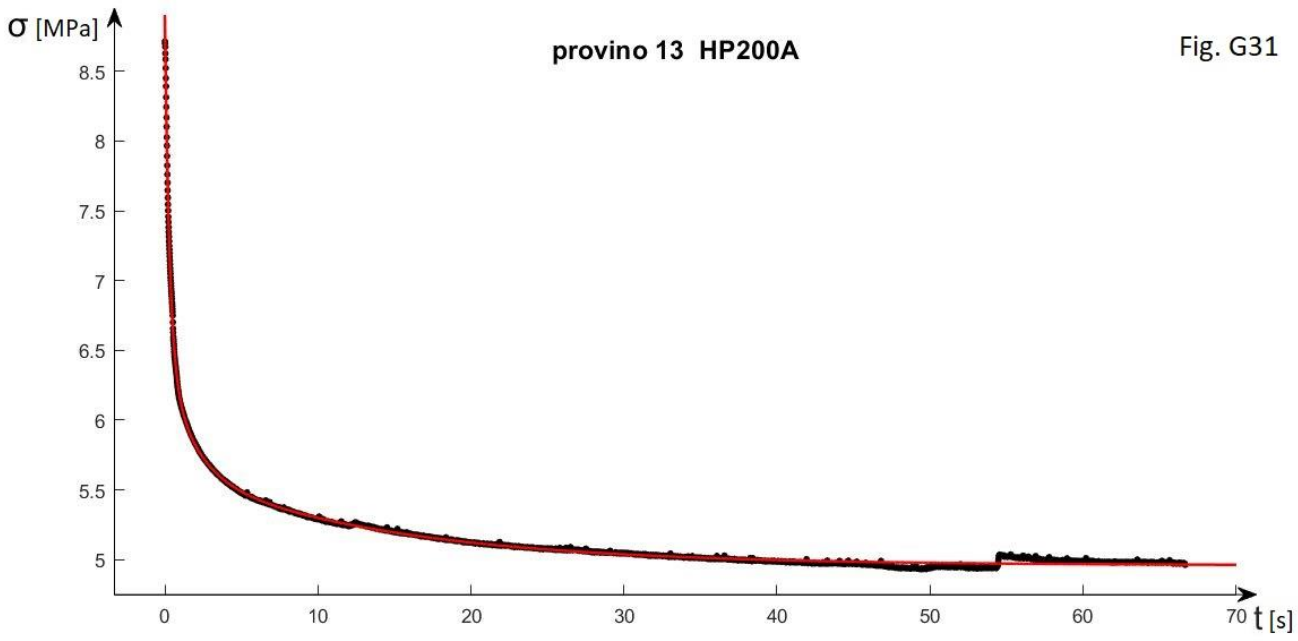


Fig. G31

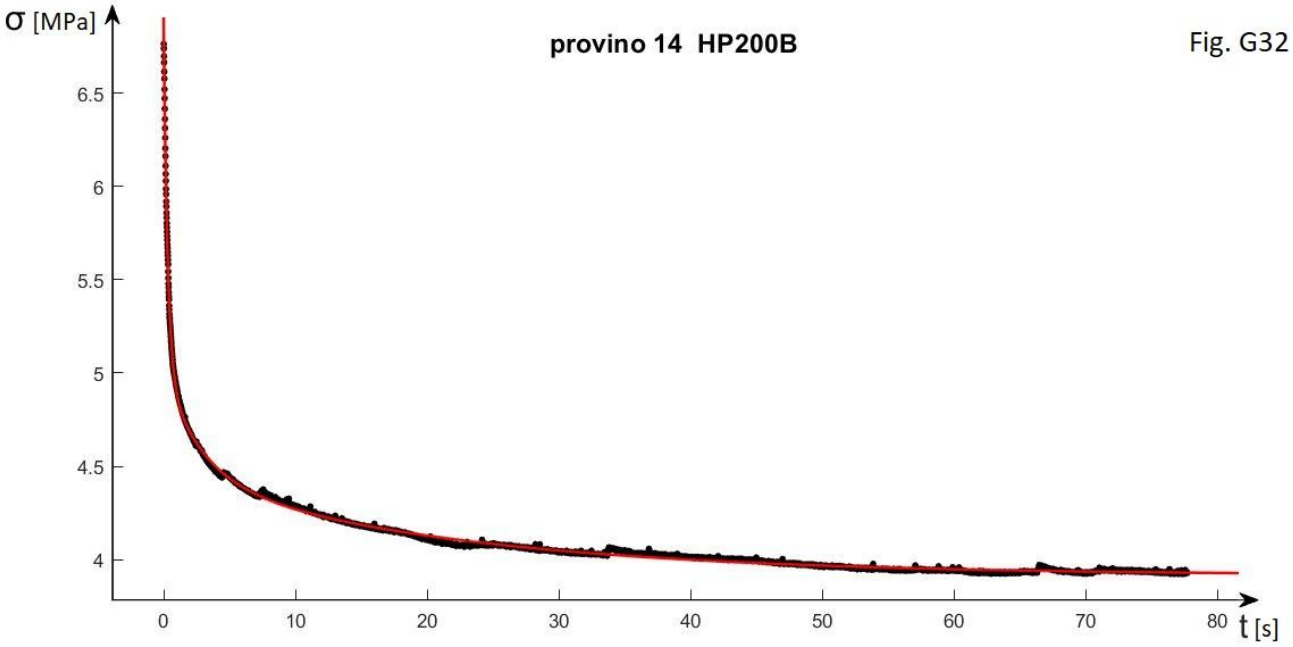


Fig. G32

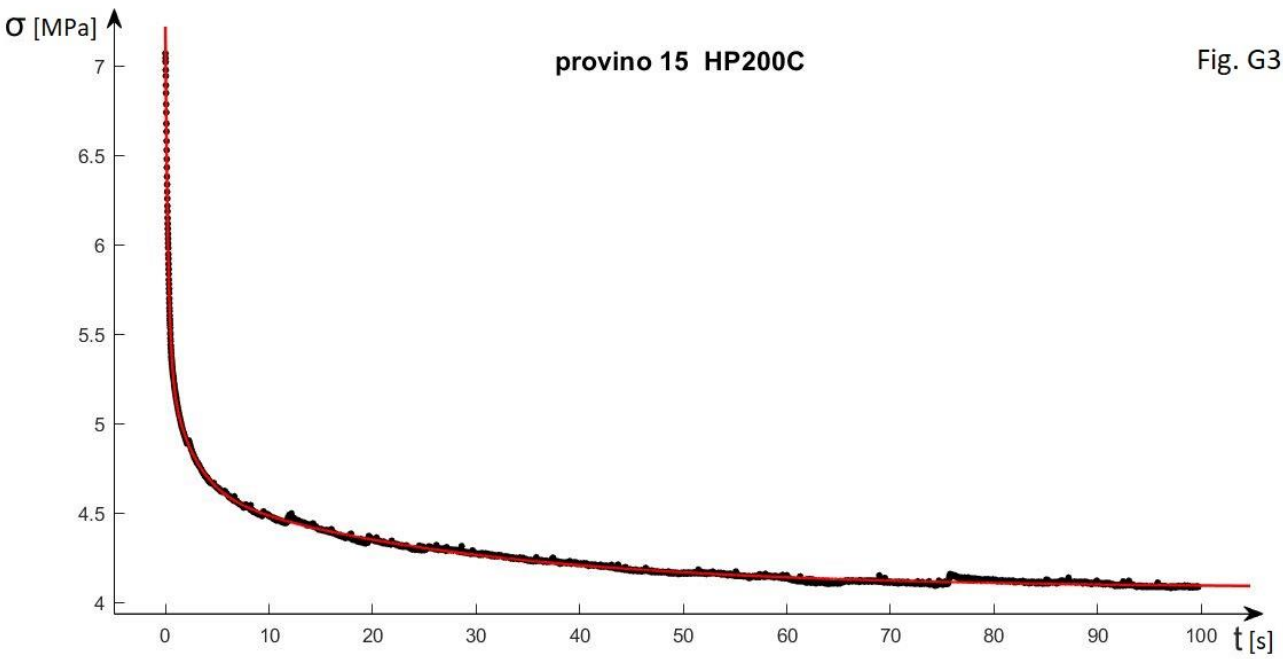


Fig. G33

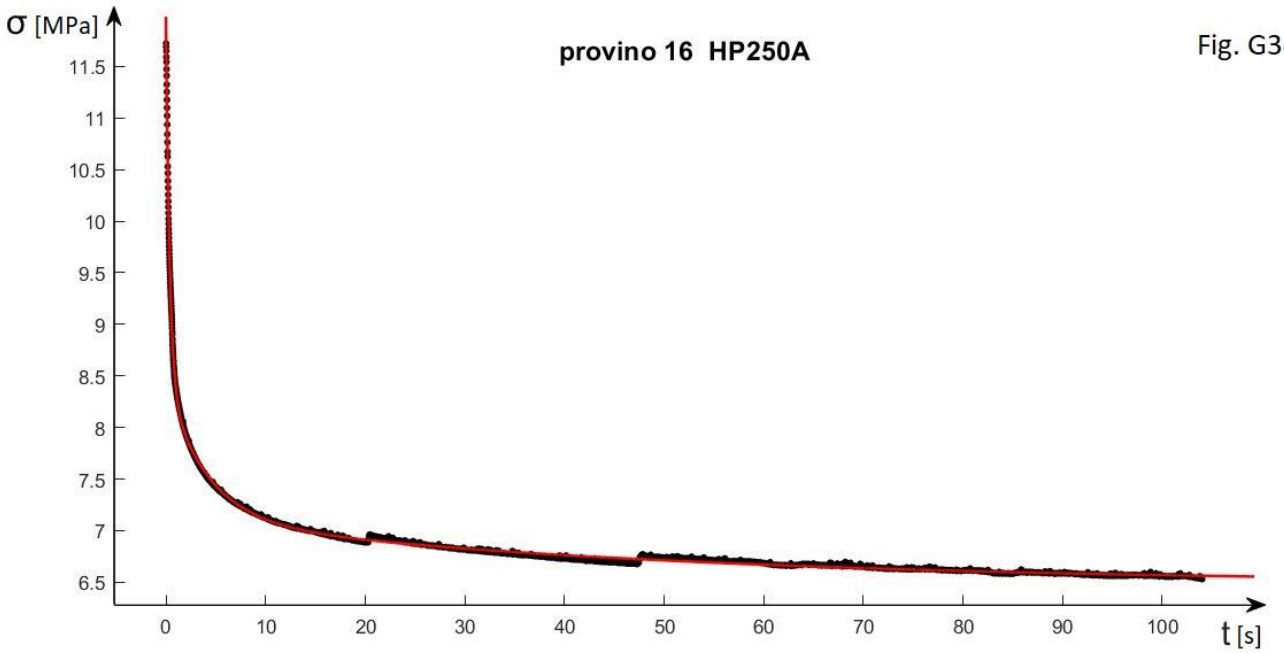


Fig. G34

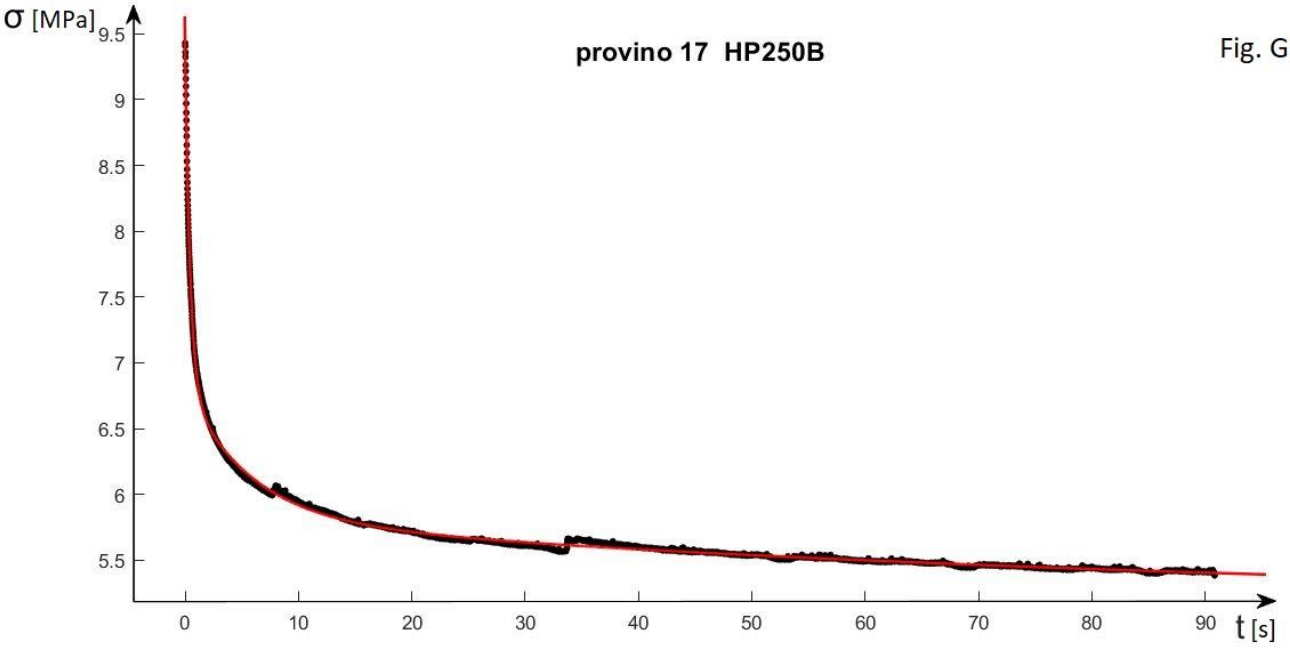


Fig. G35

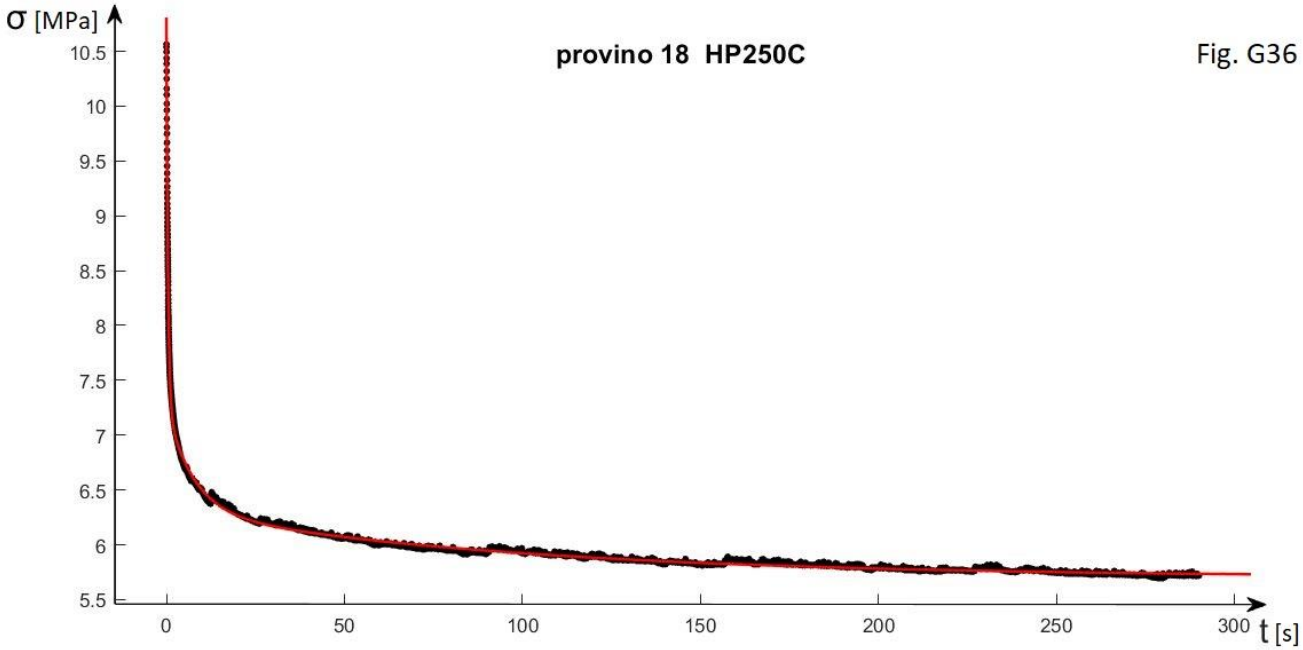


Fig. G36

Anche qui osservando alcuni grafici si nota un ottimo fitting. Il provino 5 HP200B lascia però un po' perplessi. I dati empirici risultano sporadici e discontinui e si intuisce che probabilmente per questa prova la cella di carico non ha svolto il suo compito come avrebbe dovuto. Molto meglio si mostrano i grafici delle altre prove, anche se qualche salto evidente compare nei provini 1, 4, 7, 13. Rispetto quindi agli esperimenti svolti sul sughero, qui i dati pratici risultano più disturbati; di conseguenza c'è da aspettarsi che i valori degli indicatori di bontà di fitting siano peggiori. L'importante è che si comprenda che ciò non dipende dai modelli teorici scelti ma dalla peggior qualità dei dati raccolti rispetto ai dati del sughero.

Seguono in tab.5 gli indicatori, i coefficienti τ_i e i valori E_i, analogamente a quanto espresso nella tab.3 riguardo il sughero. Da ricordare che per i provini 1-3, 10-12 $\varepsilon_0 = 0{,}75$, per i provini 4-6, 13-15 $\varepsilon_0 = 0{,}7$, per i provini 7-9, 16-18 $\varepsilon_0 = 0{,}65$.

Tab.5 Dati sperimentali PVC

n^o	SSE	RMSE	R^2	R_A^2	E_1[Mpa]	E_2[Mpa]	E_3[Mpa]	E_4[Mpa]	τ_2[s]	τ_3[s]	τ_4[s]
1	0,5812	0,0271	0,9904	0,9904	4,859	1,397	1,028	-	19,23	300,5	-
2	0,1965	0,0151	0,9957	0,9957	4,143	1,072	0,903	-	18,09	248,4	-
3	0,3739	0,0223	0,9873	0,9872	3,679	0,878	0,746	-	19,12	233	-
4	0,623	0,0294	0,9951	0,9951	7,83	2,079	1,647	-	20,62	260,1	-
5	8,412	0,1006	0,9341	0,9338	6,801	1,529	1,889	-	11,41	159,3	-
6	1,04	0,0359	0,9884	0,9883	6,494	1,727	1,303	-	21,69	307,8	-
7	2,065	0,049	0,9923	0,9923	11,946	3,129	2,589	-	15,89	283,6	-
8	0,7703	0,0298	0,9959	0,9959	9,623	2,462	2,072	-	20,28	270,5	-
9	0,7366	0,0291	0,9967	0,9967	10,303	2,54	2,298	-	20,37	254,4	-
10	1,635	0,0119	0,9952	0,9952	4,032	2,209	0,654	0,511	0,3079	3,168	30,4
11	0,9884	0,0113	0,9949	0,9949	3,643	1,713	0,587	0,463	0,2588	2,738	32,28
12	0,9036	0,0111	0,9949	0,9949	2,759	1,608	0,635	0,983	0,2962	5,146	239,6
13	2,24	0,0183	0,9966	0,9966	7,084	3,38	1,18	0,999	0,3003	1,682	13,75
14	1,273	0,0128	0,9971	0,9971	5,594	2,577	0,801	0,773	0,303	2,749	21,38
15	1,247	0,0112	0,9977	0,9977	5,833	2,629	1,003	0,821	0,2685	2,363	26,39
16	4,11	0,0199	0,9973	0,9973	9,983	5,246	2,031	0,957	0,377	4,082	48,67
17	3,63	0,02	0,9964	0,9964	7,952	3,923	1,541	0,993	0,447	5,662	89,3
18	12,27	0,0206	0,9944	0,9944	8,775	5,012	1,456	0,937	0,4604	7,434	97,61

Conclusioni

Nella presente tesi si è effettuato lo studio teorico e sperimentale del fenomeno del rilassamento degli sforzi, trovando i modelli scientifici in grado di rappresentare al meglio i dati empirici nelle varie condizioni sperimentali di stress relaxation. Per farlo è stato utilizzato Matlab, il quale ha fornito risultati grafici e numerici. Questi output possono servire a fare previsioni sul comportamento del materiale analizzato quando viene posto in condizioni di compressione a deformazione costante anche nella pratica.

Sarebbe interessante ricercare e trovare un unico modello teorico capace di descrivere il materiale anche durante altri tipi di sollecitazioni, quali creep o compressione a deformazione non costante. In tal caso, una volta trovati i coefficienti σ e τ del modello si potrebbe prevedere l'andamento della tensione nel tempo per ogni diversa modalità di applicazione del carico, senza la necessità di dover adottare un modello diverso al variare della situazione.

Sarebbe inoltre utile eseguire le stesse prove riportate nel presente testo al variare della temperatura e dell'umidità, svolgendo gli esperimenti in una camera climatica ottenendo anche una caratterizzazione igrotermica dei materiali.

Bibliografia

1) Lakes, R., Viscoelastic Materials, Cambridge University Press, 2009.

2) Gibson, L.J., Schajer, G.S., Robertson, C.I. & Ashby, M.F. 1980 The mechanics of cellular materials. Cambridge University Engineering Department Report TR 68.

Sitografia

1) https://web.maths.unsw.edu.au/~adelle/Garvan/Assays/GoodnessOfFit.html

2) https://moodle2.units.it/pluginfile.php/283764/mod_resource/content/1/Appunti%20Viscoelasticita.pdf

3) https://amorimcorkcomposites.com/media/2433/mds_corecork-range.pdf