UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

OMOGENIZZAZIONE DI METAMATERIALE ACUSTICO PER LA REALIZZAZIONE DI LENTE ULTRASONORA / ACOUSTIC METAMATERIAL HOMOGENIZATION FOR THE ENGINEERING OF AN ULTRASOUND LENS THROUG TOPOLOGICAL OPTIMIZATION

Relatore: Chiar.mo
Paolo Castellini

Tesi di Laurea di:
Cipriano Mazzagreco

A.A. 2019/2020

Indice

Introduzione 1 2

Il contesto 2 3

Ottimizzazione topologica 3 19

Omogenizzazione 4 22

Conclusioni 5 54

Bibliografia 56

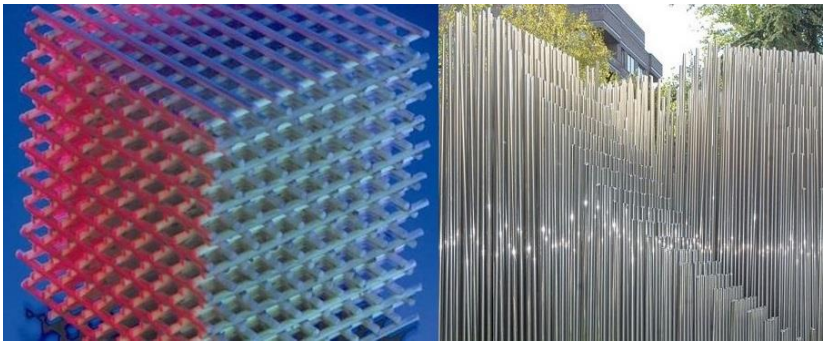
Introduzione 1

La progettazione dei metamateriali acustici è un settore di studio recente ed interessante: si può dire che, rispetto alle potenzialità offerte da questi ritrovati, stiamo vivendo gli albori delle loro applicazioni e del loro studio. Gran parte della letteratura a loro relativa è basata sul riadattamento dei metamateriali fotonici ed elettrici, ma molte delle assunzioni valide per questi settori, non sono applicabili in campo acustico. La ricerca al momento si concentra non solo sulle possibili applicazioni dei metamateriali, ma anche sulla caratterizzazione delle loro proprietà, nonché sullo sviluppo di nuove tecniche di progettazione che meglio possano sfruttare le nuove possibilità che questi aprono. Il lavoro presentato si muove nel contesto dello studio di progettazione di una lente acustica realizzata con ottimizzazione topologica: l'omogenizzazione è solo una delle fasi relative a questo ambizioso progetto. L'uso di metamateriali potrebbe consentire applicazioni e performance dell'ottimizzazione topologica non ottenibile coi materiali tradizionali

Il contesto 2

2.1 Metamateriali

La definizione “metamateriali”, in campo acustico, nasce dall’osservazione di proprietà della propagazione delle onde acustiche di strutture costituite dal ripetersi di singole *unità strutturali* in geometrie definite. Se questi fenomeni erano già noti in campo elettromagnetico, l’interesse in campo acustico è relativamente più recente. Dal controllo e lo studio di questi fenomeni, nasce la possibilità di ingegnerizzare componenti con caratteristiche sonore non ottenibili con tecniche tradizionali: come ad esempio densità e/o modulo di bulk negativi. Se le prime e più immediate applicazioni erano relative allo smorzamento sonoro, le potenzialità si estendono anche altre applicazioni: in particolare si può immaginare di creare una lente acustica che possa concentrare onde sonore entranti in una zona dello spazio predefinita.



(nella foto a destra è rappresentato un materiale studiato in laboratorio, in quello a sinistra la statua "Orgàno", dello scultore Eusebio Sempere: ha la catteristica di attenuare fortemente alcune frequenze"

2.2 Alcuni fenomeni caratteristici dei metamateriali: il cristallo fononico

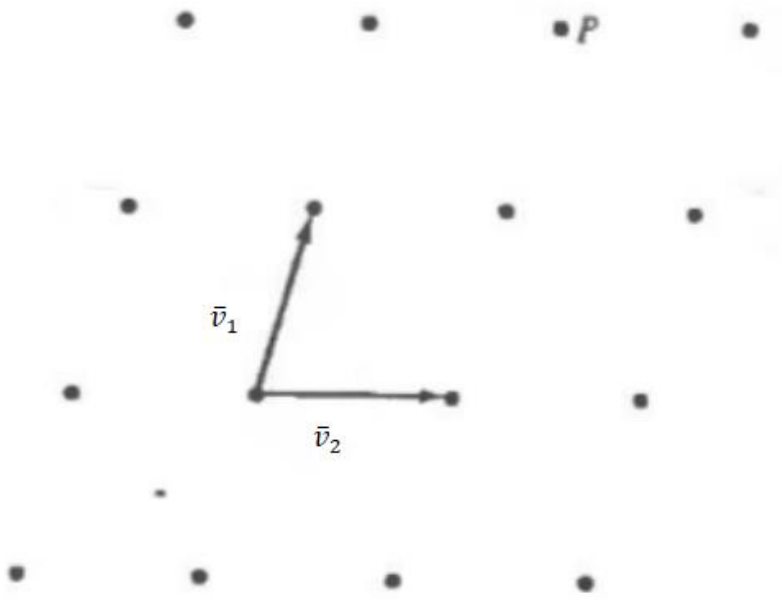
Si procede con la descrizione di alcuni fenomeni relativi ai metamateriali, introducendo concetti fondamentali, e mostrando come questi fenomeni si manifestano nei diagrammi delle proprietà del materiale[1].

2.2.1Reticolo di Bravais

La modellazione del metamateriale può essere effettuata come un reticolo cristallino: una *base*, equivalente all'*unità strutturale,* si ripete nello spazio per diversi punti. I punti a cui è associata questa base si dicono *reticolo di Bravais* (*Bravais lattice*). I punti di un *reticolo di Bravais* in uno spazio tridimensionale sono descritti da:

$$\bar{R} = n_1\bar{v}_1 + n_2\bar{v}_2 + n_3\bar{v}_3$$

I vettori $\bar{v}_i$ sono linearmente indipendenti, ed $n_i \in Z$ (numeri interi). I vettori v_i si dicono *primitivi:* il reticolo ne costituisce lo *span*.



2.2.2 Recticolo reciproco:

Si consideri un' onda piana $e^{i\overline{k\,r}}$ di cui $\bar{k}$ ne indichi il vettore d'onda. I vettori $\bar{k}$ che generano onde con la stessa periodicità di un reticolo di Bravais $\bar{R}$ vengono detti *reticolo reciproco.* La condizione di periodicità è descritta dall'equazione

$$e^{i\overline{k\,r}} = e^{i\overline{k(\,r+R)}}$$

che deve essere valida per qualsiasi $\bar{r}$. Si deduce che il reticolo reciproco soddisfa la relazione:

$$e^{i\overline{KR}} = 1$$

Il *reticolo reciproco* è esso stesso un *reticolo di Bravais*, descrivibile come:

$$\overline{K} = a_1\overline{w}_1 + a_2\overline{w}_2 + a_3\overline{w}_3$$

Dove i coefficienti $a_i \in Z$ ed i vettori primitivi $\overline{w}_i$ sono così ottenibili:

$$\overline{w}_1 = 2\pi * \frac{\bar{v}_2 \times \bar{v}_3}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

$$\overline{w}_2 = 2\pi * \frac{\bar{v}_3 \times \bar{v}_1}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

$$\overline{w}_3 = 2\pi * \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

Questi così definiti vengono detti *vettori primitivi fisici.* È possibile ottenere *vettori primitivi* nelle loro definizione *cristallografica,* concettualmente identica, ma che scaturisce dall'equazione:

$$e^{2\pi i\overline{KR}} = 1$$

Da cui conseguono

$$\overline{w}_1 = \frac{\bar{v}_2 \times \bar{v}_3}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

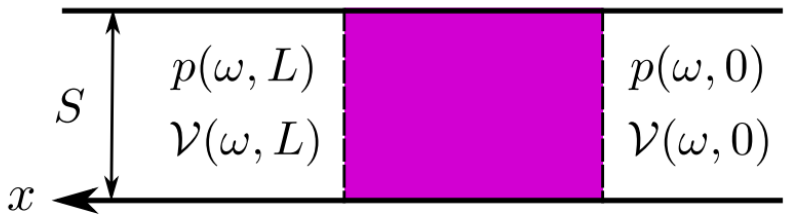
$$\overline{w}_2 = \frac{\bar{v}_3 \times \bar{v}_1}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

$$\overline{w}_3 = \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2}{\bar{v}_1 * (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)}$$

2.3 Metamateriale monodimensionale[2]*:*

I metamateriali sono caratterizzati da diagrammi delle proprietà in funzione della frequenza d'onda: per favorire la lettura di questi diagrammi, si procede alla modellazione di fenomeni che ne influenzano l'andamento nel caso 1d,:

2.3.1 Dotto a sezione uniforme



Si assuma un dotto a sezione circolare S, in cui propaga un'onda piana. Le equazioni fondamentali sono:

$$\begin{cases} i\omega\rho_{\cdot}V = \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{i\omega}{K_{\cdot}}p = \dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

dove

$\rho_{\cdot} = \rho/S$, (ρ = densità),

$V = S$V (V = velocità del flusso)

$K_{\cdot}$=K/S (modulo di bulk medio)

La forma matriciale del sistema è:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} 0 & i\omega\rho_{\cdot} \\ \dfrac{i\omega}{K_{\cdot}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix} = \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}$$

È possibile formulare questo problema in funzione della matrice degli autovettori di $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ indicata con $\overline{\overline{\boldsymbol{V}}}$ e dei suoi autovalori λ:

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \overline{\overline{\boldsymbol{V}}} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda l} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\lambda l} \end{bmatrix} \overline{\overline{\boldsymbol{V}}}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

Introduciamo le quantità:

$Z.=\sqrt{K.\rho.} = Z/S = \sqrt{K\rho}/S$

definita come *impedenza normalizzata* e

k=ω/$\sqrt{K./\rho.}$= ω/$\sqrt{K/\rho}$

numero d'onda

Si riscrive il sistema come:

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix} Z. & Z. \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{i\mathrm{k}l} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\mathrm{k}l} \end{bmatrix} 1$$

$$/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/Z. & -1 \\ -1/Z. & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

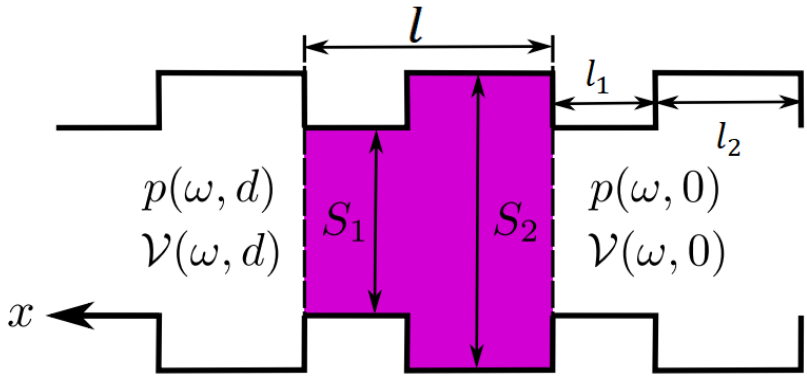
$$= \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{k}l) & iZ.\sin(\mathrm{k}l) \\ -1/Z. & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

$$= \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{l}}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

2.3.2 Bandgap di Bragg

Partendo dai concetti introdotti precedentemente, introduciamo il caso di un materiale periodico costituito da elementi di lunghezza l , ciascuno composto da due parti di sezioni S_1, S_2 e di lunghezze

l_1 ed l_2 . Le sezioni saranno rispettivamente caratterizzate dai parametri $K_{\cdot 1}, \rho_{\cdot 1}$ e $K_{\cdot 2}, \rho_{\cdot 2}$.

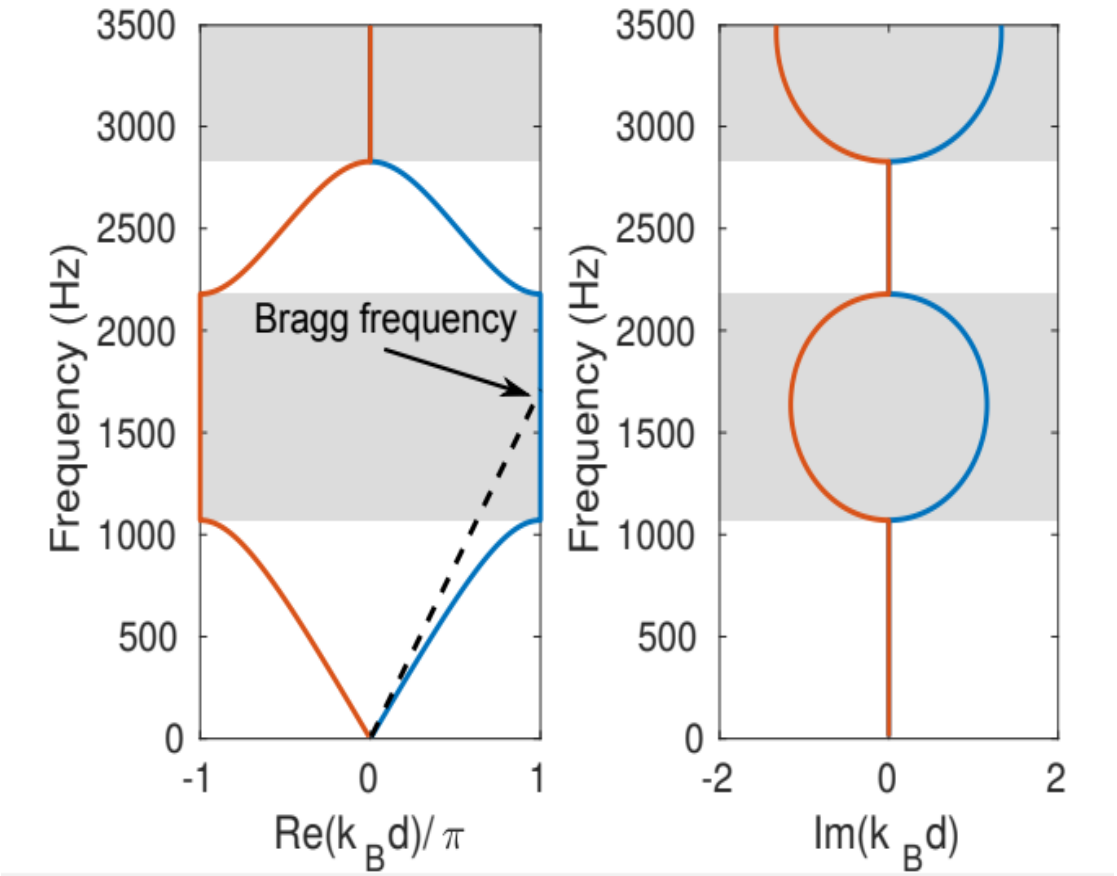


Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{l1}} \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{l2}} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

e ricordando la formulazione in termini di autovalori ed autovettori, ponendo $\lambda = k_b$ si ha

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \bar{\bar{\boldsymbol{V}}} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{k_b l} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-k_b l} \end{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{V}}}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$



Assumendo: k l<<1

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{l1}} \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_{\boldsymbol{l2}} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & i\omega(\rho_{\cdot 1}\, l_1 + \rho_{\cdot 2}\, l_2) \\ i\omega(\frac{l_1}{K_{\cdot 1}} + \frac{l_2}{K_{\cdot 2}}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

La matrice viene riscritta come

$$(\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \bar{\bar{\boldsymbol{A}}}'_{\boldsymbol{eff}} l) \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

$\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ rappresenta la matrice identità, $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}'_{\boldsymbol{eff}}$ la matrice dei parametri effettivi. I parametri effettivi sono i parametri che caratterizzano ogni elemento se esso fosse visto come una "scatola chiusa":

$$\rho'_{eff} = (\rho_{\cdot 1}\, l_1 + \rho_{\cdot 2}\, l_2)/l$$

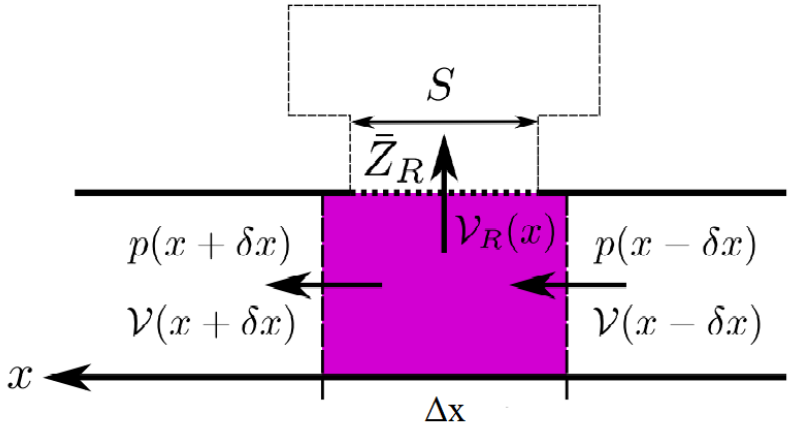
e

$$\frac{1}{K'_{eff}} = \frac{l_1}{lK_{\cdot 1}} + \frac{l_2}{lK_{\cdot 2}}$$

Questa viene detta *legge della miscela per l'omogenizzazione.*

2.3.3 Stopband e risonatore in parallelo, bandgap da ibridizzazione:

Si illustra il caso di un singolo risonatore puntuale lungo una guida d'onda monodimensionale



Δx=2dx<<λ_0 , la pressione rimane uniforme lungo Δx, ed il flusso di massa è così bilanciato:

$$V(x+dx) = V_R(x) + V(x-dx)$$

Si ricava:

$$V_R(x) = \frac{p(x)}{Z._R}$$

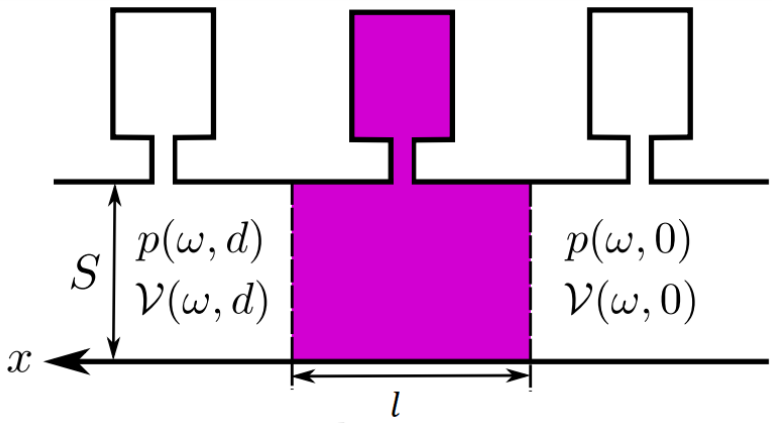
$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_{x+dx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z._R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_{x-dx}$$

Per i risonatori di Helmhotz:

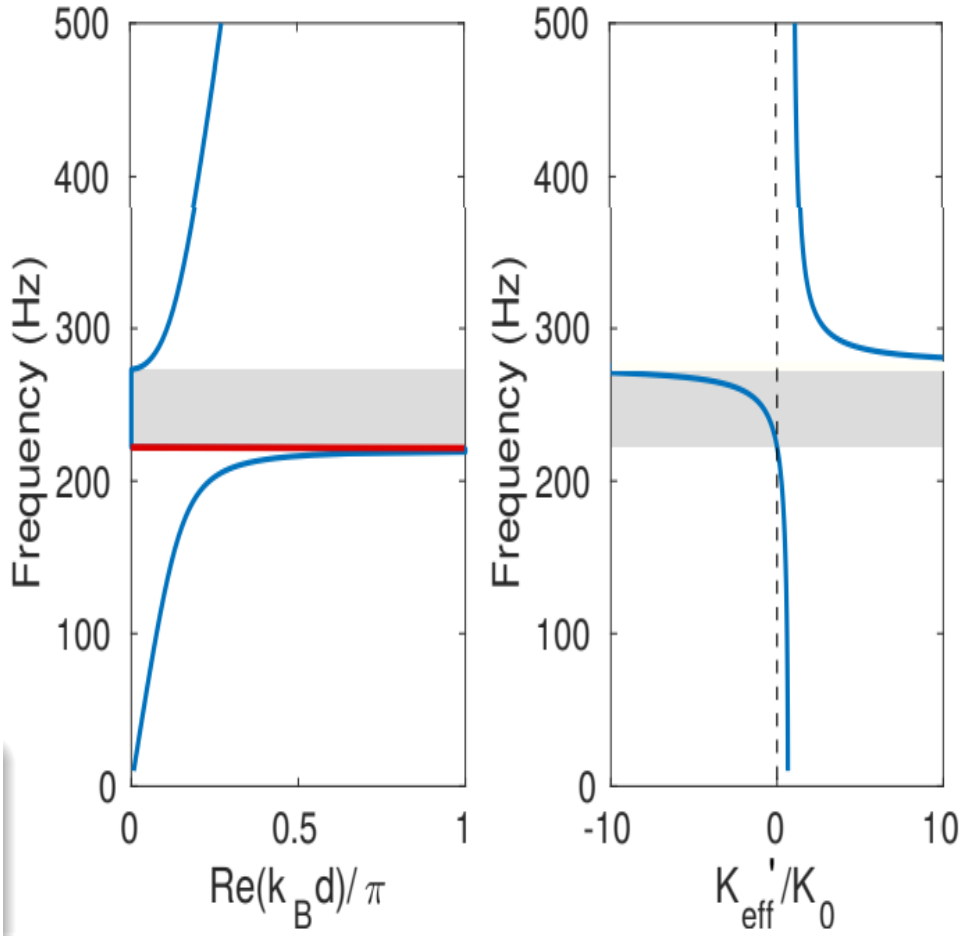
$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{kl}) & iZ.sin(kl) \\ \frac{isin(kl)}{Z.} & \cos(\mathrm{kl}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{kl}) & iZ.sin(kl) \\ \frac{isin(kl)}{Z.} & \cos(\mathrm{kl}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{\cdot R} = -iZ_{\cdot n}\frac{\frac{Z_{\cdot c}}{Z_{\cdot n}} - \tan(kl)\tan(kl)}{\frac{Z_{\cdot c}\tan(kl)}{Z_{\cdot c}} + \tan(kl)}$$

Immaginiamo che il materiale sia composto da elementi con in parallelo risonatori di Helmotz:



$$Z_{\cdot R}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{l/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{\cdot R} & \mathbf{1} \end{bmatrix}\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{l/2}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0 = e^{ik_B l}\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$



Per ottenere le proprietà effettive:

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{l/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{\cdot R} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overline{\overline{\boldsymbol{T}}}_{l/2} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & i\omega\rho_{\cdot 0}\, l_0 \\ \frac{i\omega l}{K_{\cdot 0}}\left(1 + \frac{V_R}{V\left(1 - \frac{k^2 l_n V_c}{S_n}\right)}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

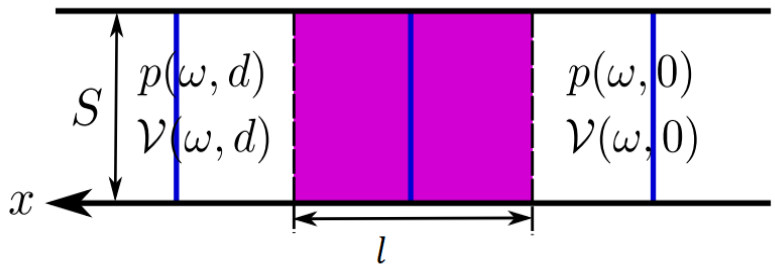
Si ottengono

$$\rho'_{eff} = \rho_{\cdot 0}$$

$$K'_{eff} = K_{.0}\left(\frac{1-\frac{k^2 l_n V_c}{S_n}}{1-\frac{k^2 l_n V_c}{S_n}+\frac{V_R}{V}}\right)$$

Si nota (anche dagli schemi) che K'_{eff} può assumere valori negativi, mentre $\rho'_{eff} > 0$

2.3.4 Risonatori in serie:

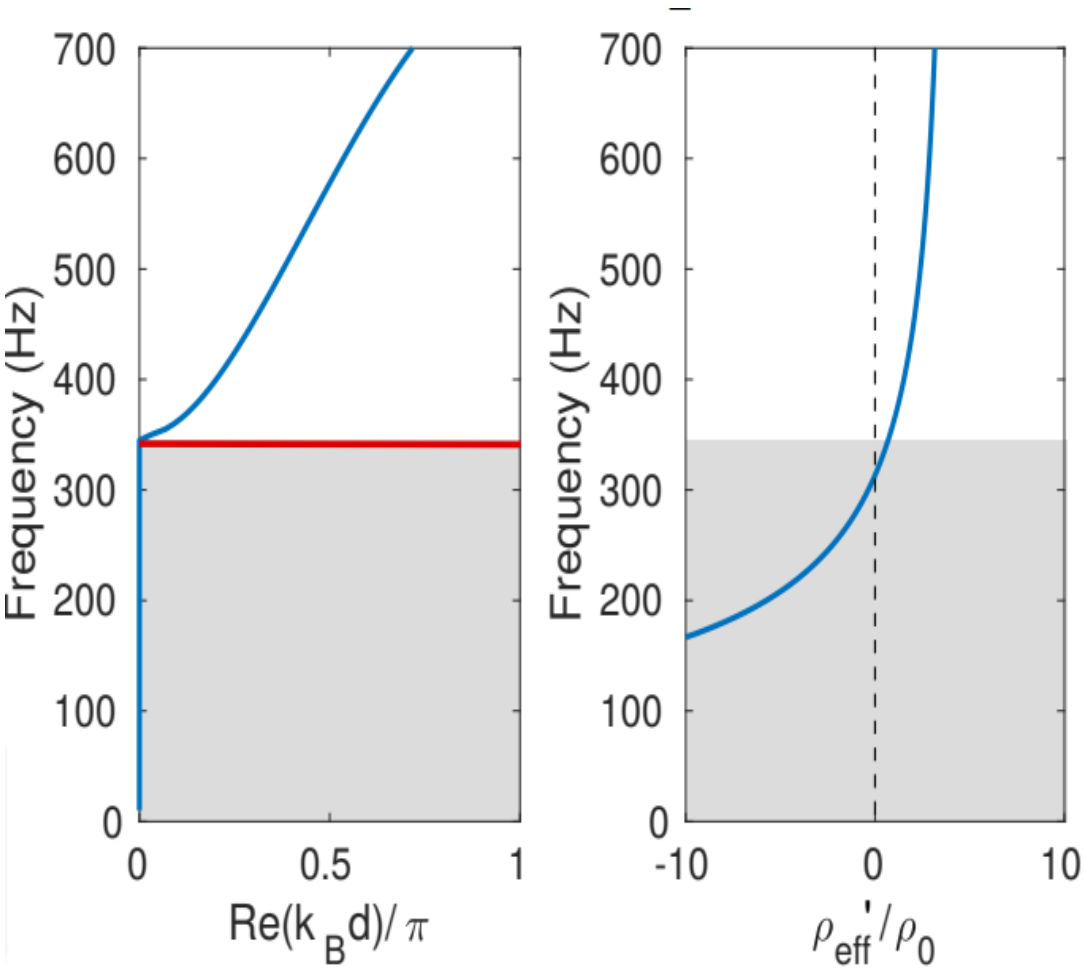


La descrizione matematica di questi oggetti si avvale di approssimazioni che la rendono valida solo nelle basse frequenze.

La caratteristica dei parametri effettivi di questa configurazione è:

$$\rho'_{eff} < 0$$

$$K'_{eff} > 0$$



Ponendo contemporaneamente risonatori sia in serie che in parallelo è possibile ottenere elementi con proprietà effettive

$$\rho'_{eff} < 0$$

$$K'_{eff} < 0$$

Detti materiali doppio- negativi.

2.3.5 Matrice di trasferimento:

assumiamo un'onda incidente proveniente da sinistra (dalla direzione positiva dell'asse x).

La pressione p ed il flusso V alle due interfacce dell'unità strutturale (x= l ed x=0) sono legate dalla *matrice di trasferimento* come segue

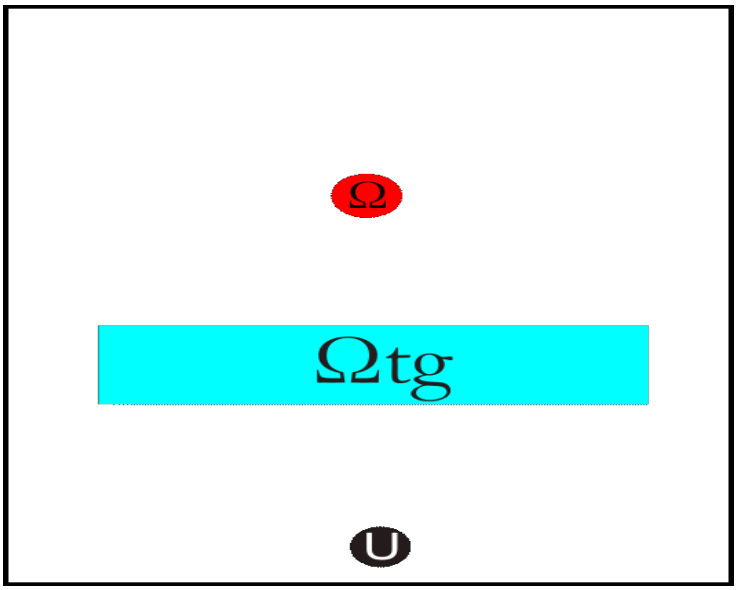
$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \overline{\overline{\mathbf{M}}} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

Ottimizzazione topologica 3

L'ottimizzazione topologica è un metodo di progettazione nato alla fine degli anni '80, per ottenere distribuzioni di materiale nelle strutture che offrissero la rigidezza massima. In tempi più recenti è stato applicato alla progettazione di metodi per il controllo delle onde acustiche.

3.1 Il problema[3]



Una sorgente sonora U emette onde. Si vuole massimizzare la pressione sonora in Ω, disponendo materiale in Ωtg . Il problema può essere così formulato:

$$max_{\varepsilon} \log(F) = \log\left(\left(\frac{1}{\int_{\Omega} d\boldsymbol{r}}\right)\int_{\Omega} |p(\boldsymbol{r},\varepsilon)|^2 d\boldsymbol{r}\right)$$

funzione obbiettivo, che viene soggetta a:

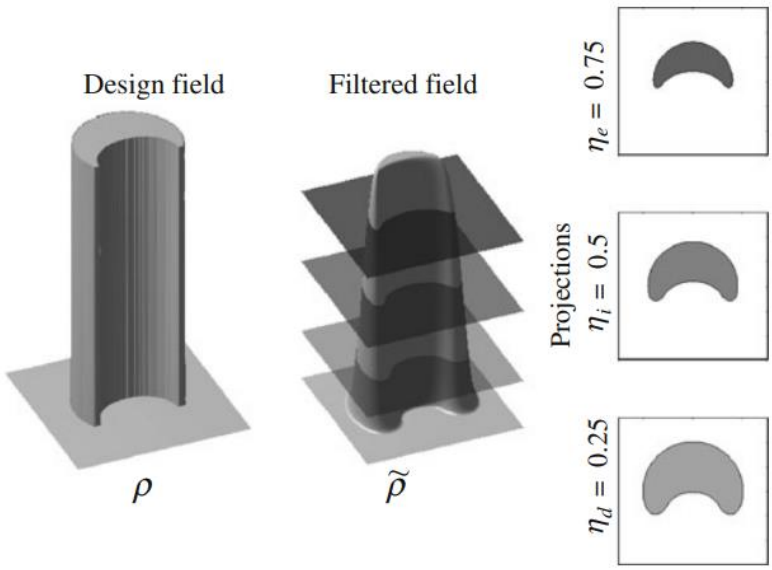
$$\left(\frac{1}{\int_{\Omega tg} d\boldsymbol{r}}\right)\int_{\Omega tg} \varepsilon(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} - \beta \leq 0$$

limite di volume. β rappresenta la frazione volumetrica da (magari per motivi di peso) $\beta = 1$ non presenta limiti di volume, tutto Ωtg è utilizzabile.

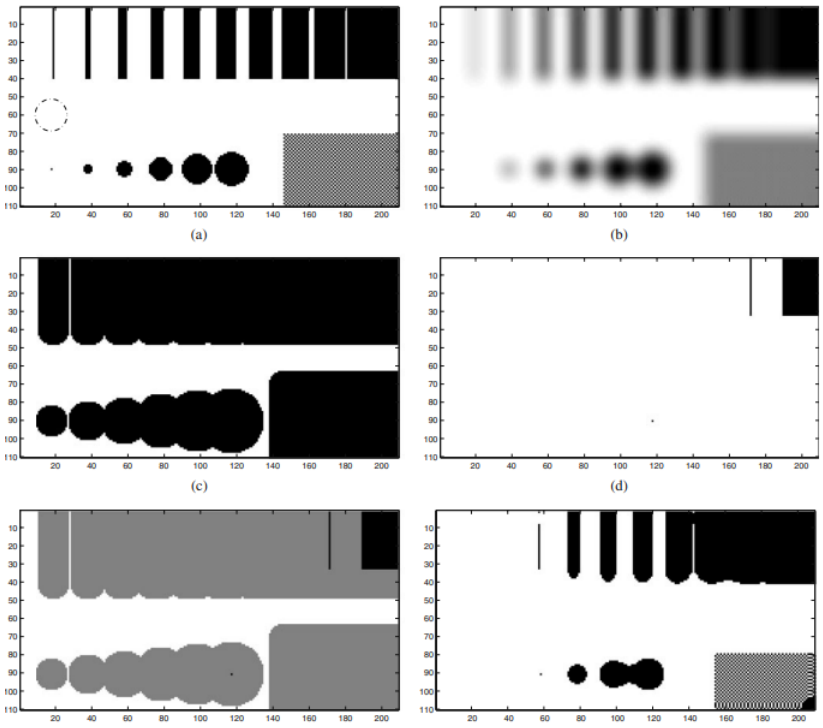
$0 \leq \varepsilon(\boldsymbol{r}) \leq 1$ è la variabile di progetto: si tratta di una variabile normalizzata, es.: se si volesse ottimizzare una distribuzione di materiale rispetto alla sua densità ρ_0 si porrebbe $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$. ε varia per il volume tra 0 e 1, ma il materiale ha densità normalizzata uguale a 1.

3.2 Filtraggi della soluzione[4]

Si affronta il problema di come filtrare la soluzione: si immagini di usare diversi treshold η per filtrare il risultato



[On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization Fengwen Wang · Boyan Stefanov Lazarov · Ole Sigmund]



[On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization Fengwen Wang · Boyan Stefanov Lazarov · Ole Sigmund]

Dal risultato in alto a destra, si possono ottenere le configuazioni illustrate. Non è difficile immaginare le differenze sostanziali di performance tra il risultato calcolato, ed il prodotto finito. I metamateriali consentirebbero di “replicare” i gradienti di grigio con le loro proprietà effettive, anche da questo deriva l’interesse per il loro sviluppo

Omogenizzazione 4

Si definisce omogenizzazione la caratterizzazione del metamateriale attraverso parametri effettivi, corrispondenti a quelli che descrivono un materiale tradizionale omogeneo. L'ottenimento di questi parametri è fondamentale, perché lo studio e la progettazione dei metamateriali si effettuano riferendosi a questi. Non esistono tecniche di omogenizzazione universalmente valide, bensì tecniche diverse si prepongono obbiettivi diversi: la riduzione dell'errore di previsione su tutti gli intervalli di frequenza, l'ottenimento di parametri accurati in un range limitato, la descrizione del comportamento all'interno dell'unità strutturale, piuttosto che la sua interazione con il mezzo esterno. Molti metodi sono limitati nella loro applicabilità a particolari geometrie dell'unità strutturale o del reticolo, se non per ragioni intrinseche della specifica modalità, per la complessità o l'insufficienza degli strumenti matematici su cui essi sono basati. I metodi possono avere carattere analitico (basati sulla descrizione matematica), o sperimentale (basati sull'elaborazione di dati ottenuti sperimentalmente, tipicamente da analisi su guide d'onda). I primi sono meno economicamente dispendiosi e potenzialmente permettono di non dover effettuare verifiche sperimentali per la validazione del

materiale, ma tendono ad essere meno precisi. I secondi tendono a dare risultati più precisi, analizzando con relazioni matematiche semplici, spesso ridotte alle semplici definizioni dei parametri, ma per essere applicati necessitano che il materiale sia realizzato prima, e che le sue proprietà vengano ottenute solo successivamente.

È evidente che per la progettazione dei metamateriali sia preferibile procedere con metodi analitici: se ne è selezionato uno per verificarne la capacità predittiva, applicandolo ad un metamateriale di cui i parametri sono stati ottenuti con metodo sperimentale.

4.1 Caratterizzazione del metamateriale attraverso metodi sperimentale[5]:

richiamando il concetto di *matriceme di trasferimento,* precedentemente illustrato:

$$\begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_l = \bar{\bar{\mathbf{M}}} \begin{bmatrix} p \\ V \end{bmatrix}_0$$

4.1.1 Metodo inversione diretta:

Riferendosi alla schematizzazione precedentemente illustrata, si immagini un materiale composto dal ripetersi di unità n strutturali (us) di lunghezza l come in illustrazione:

I coefficenti R e T sono quelli di riflessione e trasmissione (*coefficienti di scattering*).

È possibile scrivere la matrice $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{tot}}$ (matrice di trasferimento relativa all'intero materiale) in funzione di questi coefficienti:

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{tot}} = 1/2T \begin{bmatrix} 1 - R^2 + T^2 & ((1 + R^2) - T^2)Z_f \\ ((1 - R^2) - T^2)Z_f & 1 - R^2 + T^2 \end{bmatrix}$$

Z_f= impedenza del fluido che circonda il metamateriale

La *matrice di trasferimento* della singola US è data da:

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{US}} = \begin{bmatrix} \cos(k_{eff}l) & iZ_{eff}\sin(k_{eff}l) \\ iZ_{eff}{}^{-1}\sin(k_{eff}l) & \cos(k_{eff}l) \end{bmatrix}$$

dove

k_{eff}= numero d'onda effettivo

Z_{eff}=impedenza effettiva

La matrice $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{tot}}$ può essere scritta come $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{tot}} = [\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{US}}]^n$, ossia il prodotto della matrice di trasferimento della US, tante volte quante US siano presenti nel materiale. Praticamente, questa operazione consiste nel sostituire i termini l

Con nl:

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\boldsymbol{tot}} = \begin{bmatrix} \cos(k_{eff}nl) & iZ_{eff}\sin(k_{eff}nl) \\ iZ_{eff}{}^{-1}\sin(k_{eff}nl) & \cos(k_{eff}nl) \end{bmatrix}$$

È possibile ricavare i parametri effettivi:

$$Z_{eff} = \sqrt{\frac{M_{tot1,2}}{M_{tot2,1}}}$$

e

$$k_{eff} = \pm \frac{arcos(M_{tot1,1})}{nl} + \frac{2\pi m}{nl}$$

Si segnala che l'ambiguità del segno viene superata dal fatto che la condizione di materiale passivo impone che la parte immaginaria di k_{eff} minore o uguale a 0. Il secondo termine è aggiunto per dare continuità a k_{eff} e assicurare l'omogenizzazione su tutte le frequenze.

4.1.2 Metodo differenziale

Basato sul metodo di Bianco e Parodi, consiste nel considerare due materiali, composti dalla stessa US, ripetuta rispettivamente n e $n+1$ volte

Le matrici di trasferimento dei due materiali sono

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{1tot}} = 1/2T \begin{bmatrix} 1 - {R_1}^2 + {T_1}^2 & ((1 + {R_1}^2) - {T_1}^2)Z_f \\ ((1 - {R_1}^2) - {T_1}^2)Z_f & 1 - {R_1}^2 + {T_1}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{2tot}} = 1/2T \begin{bmatrix} 1 - {R_2}^2 + {T_2}^2 & ((1 + {R_2}^2) - {T_2}^2)Z_f \\ ((1 - {R_2}^2) - {T_2}^2)Z_f & 1 - {R_2}^2 + {T_2}^2 \end{bmatrix}$$

Si divida il materiale composto da n US in due sezioni s1 e s2: la sua matrice di trasferimento può essere scritta come $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{1tot}} = \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{s1}}\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{s2}}$, per analogia la matrice del materiale composto da $n+1$ US avrà

matrice: $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{2tot}} = \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{s1}}\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{US}}\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{s2}}$. Moltiplicando $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{2tot}}$ per l'inversa di $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{1tot}}$, si ottiene l'uguaglianza:

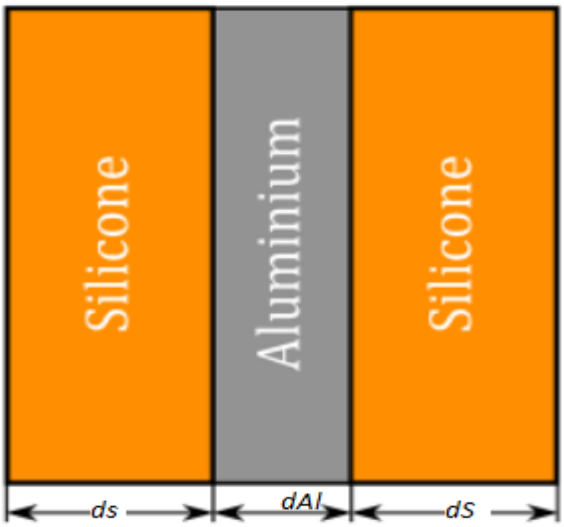
$$Tr\left(\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{2tot}}(\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{1tot}})^{-1}\right) = Tr(\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{US}})$$

E ricordando la definizione di $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{US}}$, si ottiene che

$$k_{eff} = \pm\frac{arcos(\frac{Tr\left(\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{2tot}}(\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{\mathbf{1tot}})^{-1}\right)}{2})}{l} + \frac{2\pi m}{l}$$

Z_{eff} è anche ricavabile da semplici formule.

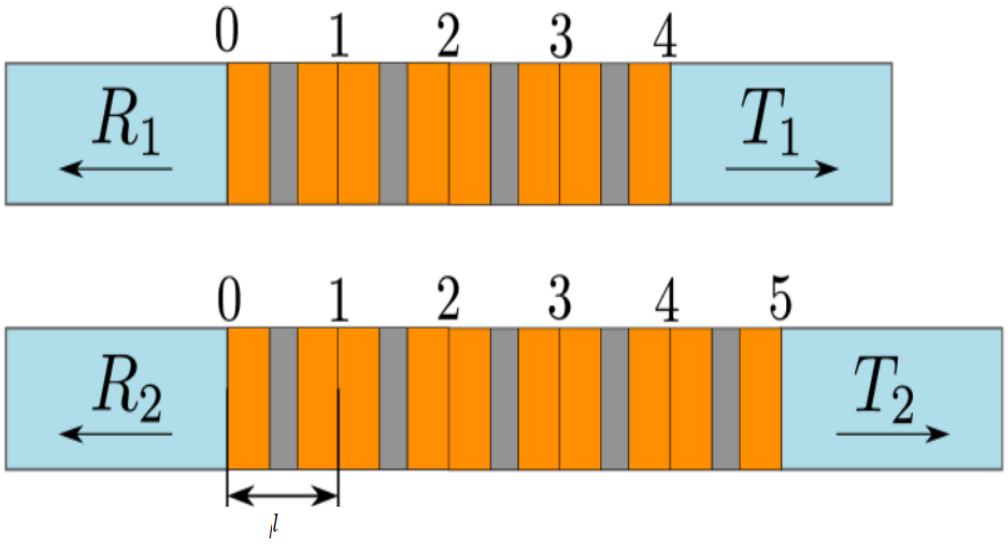
Applicazione: caso monodimensionale



LA prima applicazione è effettuata su un materiale monodimensionale: una US a sezione circolare composta dall'alternarsi di uno strato di Silicone di spessore dS=15 [mm], è seguito da uno strato di

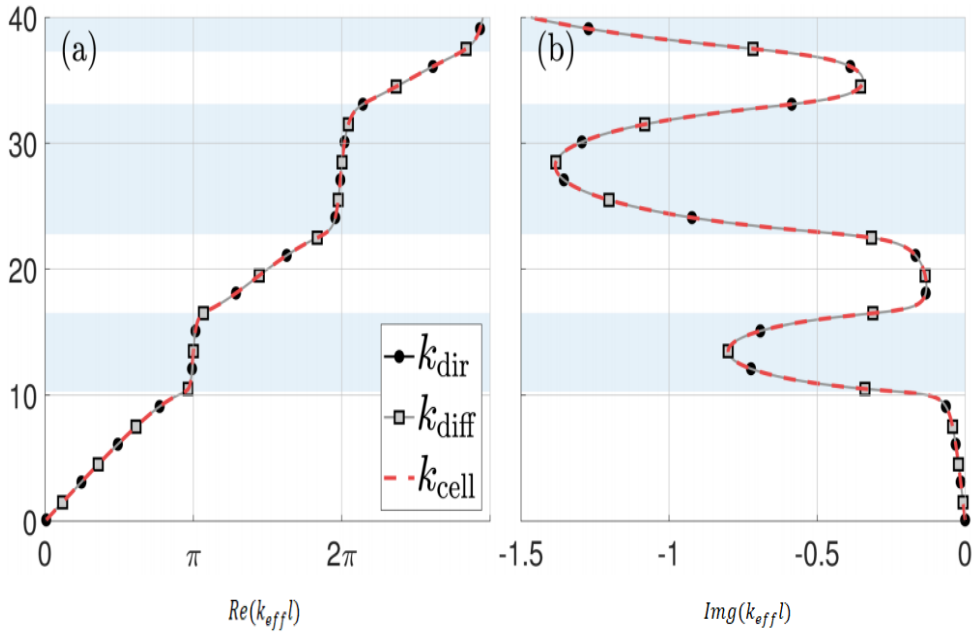
alluminio di spessore dAL=10 [mm], poi di nuovo da uno strato di silicone dS.

La vengono realizzate misurazioni per materiali composti da 4 e 5 US



L'omogenizzazione viene effettuata fino a 40 kHz

Dai parametri misurati R e T è possibile ricavare k_{eff}



I grafici hanno in ordinata la frequenza in kHz

Si nota come i k_{eff} ricavati con entrambi i metodi si accordino perfettamente. Essi vengono ricavati dall'elaborazione dei parametri legati a questa grandezza dalle definizioni stesse, come si è precedentemente illustrato.

4.2 Metodo analitico[6]:

È stato selezionato un metodo di omogenizzazione relativamente recente (2014), preferendolo ad altri già presenti in letteratura, e di cui sono già state effettuate applicazioni sia in campo acustico che, soprattutto, in campo elettromagnetico, settore in seno al cui sono stati concepiti. Questi metodi sono accomunati dall'approssimazione di campo diffuso (*scattered, "scatterato"*) trascurabile: L' approssimazione non si può assumere scontatamente valida per metamateriali acustici, perché, essi possono comportarsi come dei risonatori di cui la lunghezza d'onda è di dimensione comparabile. Il metodo presentato propone di confrontare il campo "*scatterato*" dei due ordini più bassi (monopolare e dipolare) sulla superficie della US del metamateriale in esame, con quello del materiale omogeneo, basandosi sul *teorema di Green* applicato al *problema esterno*

4.2.1 Funzione delta di Dirac $\delta(x)$

Si introduce questo strumento matematico superficialmente, dato il suo utilizzo estensivo sia nel metodo stesso, che nello sviluppo e le definizioni degli altri strumenti (*funzione di Green)*.

Non si tratta di una vera e propria funzione, bensì di una *funzione generalizzata*, o *distribuzione.*

Il *delta di Dirac* è così definibile :

$$\int_b^a \delta(x)dx = \begin{cases} 1 \text{ se a} < 0 < \text{b} \\ 0 \end{cases}$$

Inoltre:

$$\int_b^a f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

e

$$\int_b^a f(x)\delta(x - x')dx = f(x')$$

4.2.2 Funzione di Green[9]:

I problemi ondulatori vengono modellati con l'equazione di Helmotz:

$$\nabla^2 f(x) + \lambda f(x) = g(x)$$

Che per $g(x) = 0$ assume la sua forma omogenea. Immaginiamo l'esistenza di una perturbazione puntiforme in $x = x'$, ossia $\delta(x - x')$:

$$\nabla^2 f(x) + \lambda f(x) = \delta(x - x')$$

La *funzione di Green* è soluzione di questo integrale, per cui

$$\nabla^2 G(x; x') + \lambda G(x; x') = \delta(x - x')$$

Specifichiamo questo risultato per un piano in coordinate circolari (r, ϑ), e poniamo l'origine della discontinuità in $r' = 0$: sia la funzione δ che l'operatore Laplaciano ∇^2 sono simmetrici:

$$G|(r - r')| = G|r' - r| = G(r)$$

Scriviamo l'equazione di Helmotz in termini di coordinate cilindriche. Ulteriormente, porremo $\lambda = k$ dove k rappresenta il numero d'onda per un'onda piana, così da avvicinare la struttura dell'equazione a quella usata nella trattazione successiva, specifica per fenomeni ondulatori acustici:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta^2}+k^2\right)G(r,\vartheta)=\delta(x-x')$$

Dal principio di sovrapposizione degli effetti si può ricavare che la soluzione di un' equazione di Helmotz:

$$\nabla^2\phi(x)+\lambda\phi(x)=g(x)$$

È

$$\int G(x)g(x)dx$$

Con $g(x)$ funzione generica.

4.2.3 Espansione della funzione di Green per autovalori ed autovettori[7]:

Dati $\phi_i(x)$ gli autostati di un sistema vibrante, e ω_i le sue auto frequenze angolari, è possibile scrivere la *funzione di Green* del sistema come:

$$\sum_i \frac{\phi_i(x) * \phi^*{}_i(x)}{\rho_i(\,\omega_i{}^2-\omega^2)}$$

ϕ^*rappresentai il complesso coniugato di ϕ

ρ_i è definita come: $\int_\Omega \phi^*{}_i(x)\rho\,\phi_i(x)dx$.

Si rimanda al testo "*continuum michromechanics"*

4.3 Metodo proposto:

Immaginiamo di voler analizzare un metamateriale composto da US che si ripetono nello spazio e poniamo che le proprietà del materiale dipendano principalmente dal campo *diffuso* da queste US (nell' uso comune si corre spesso alla italianizzazione del termine inglese *scattered* per definire questo campo: "scatterato". L'usanza deriva dalla prevalenza dell'uso della lingua inglese nella letteratura scientifica). Dall'applicazione del *teorema di Green* al *problema degli esterni*[8], si deduce che il campo *diffuso* da ogni US, è dipendente solo dai valori che la funzione di Green della singola US G assume al bordo dell'US stessa. Si rimanda sia al testo Fourier Acoustics che all'articolo stesso. Il passo successivo è quello di "campionare" la risposta superficiale della US per eccitazioni definite sul bordo della US ortonormali monopolari e dipolari

$$G_{\alpha\alpha} = \int_{\Omega} \varphi_{\alpha}^{*} G \varphi_{\alpha}$$

per α=0 nel caso monopolare/1 nel caso bipolare.

Questi Campionamenti vengono poi eguagliati a quelli effettuati sul materiale omogeneo che ha come caratteristiche effettive quelle del metamateriale in esame

$$G_{\alpha\alpha} = \bar{G}_{\alpha\alpha}$$

4.4 Caso modimensionale

La configurazione di vero contatto tra i due metodi proposti è quella monodimensionale per ragioni che verranno successivamente illustrate. Si procede all'analisi di questo caso.

4.4.1 Materiale omogeneo

L'equazione di Helmotz prende la ben nota forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{k}^2\right)\bar{\phi}(x) = 0$$

Da accompagnare con la condizione al contorno di Neumann per la propagazione di onde acustiche:

$$\psi(\xi) = \omega\bar{Z}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x)}{\partial\left(\bar{k}x\right)^2}|_{x=\xi}$$

Dove ξ è il valore della coordinata x al bordo della SU.

Immaginiamo che l' US si estenda da - a a a, ed introduciamo un'eccitazione monopolare ai suoi estremi

$$\psi(a) = -\psi(-a) = 1/\sqrt{2}$$

Il campo $\bar{\phi}$ nella US assume la forma

$$\bar{\phi}(x) = -\frac{\cos\,(\bar{k}x)}{\sqrt{2}\omega\bar{Z}\sin\,(\bar{k}a)}$$

Per ottenere $\bar{G}_{00}(monopolare)$:

$$\bar{G}_{00} = [\bar{\phi}(a) + \bar{\phi}(-a)]/\sqrt{2} = -\frac{\cot(\bar{k}a)}{\omega\bar{Z}}$$

Per $\bar{G}_{11}(dipolare)$ si ha che

$$\psi(a) = \psi(-a) = 1/\sqrt{2}$$

$$\bar{\phi}(x) = -\frac{\sin(\bar{k}x)}{\sqrt{2}\omega\bar{Z}\cos(\bar{k}a)}$$

$$\bar{G}_{11} = \frac{\tan(\bar{k}a)}{\omega\bar{Z}}$$

Il primo valore (e più importante, dato che in quasi tutte le tecniche di omogenizzazione, tutte le grandezze ottenibili derivano da questo; non fanno eccezione i metodi presentati) chesi ottiene è

$$\frac{\bar{G}_{00}}{\bar{G}_{11}} = -\cot\ ^\wedge 2(\bar{k}a)$$

Da questa equazione è possibile ricavare $\bar{k}$, e da esso si possono far discendere le altre grandezze effettive per calcoli diretti.

4.4.2 Studio US

L'US è descritta in termini di *funzione di Green* espansa per autovettori ed autovalori. Per ottenere le risposte monopolari e dipolari si applicano rispettivamente:

$$\varphi_0 = (\delta(x-a) + \delta(x+a))/2$$

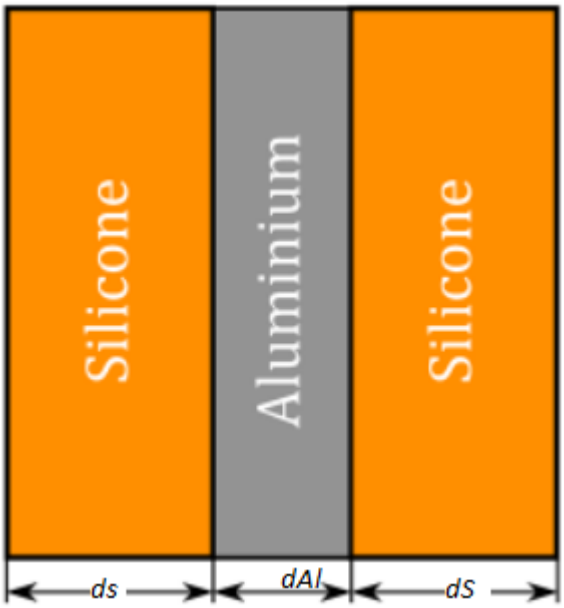
$$\varphi_1 = (\delta(x-a) - \delta(x+a))/2$$

Quindi

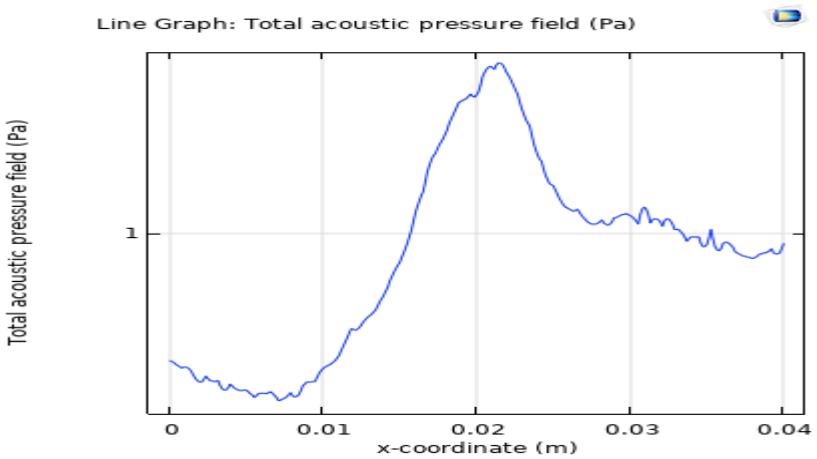
$$G_{00} = \sum_i \frac{\phi^*{}_i(a)(\phi_i(a) + \phi_i(-a))}{\rho_i(\,\omega_i{}^2 - \omega^2)}$$

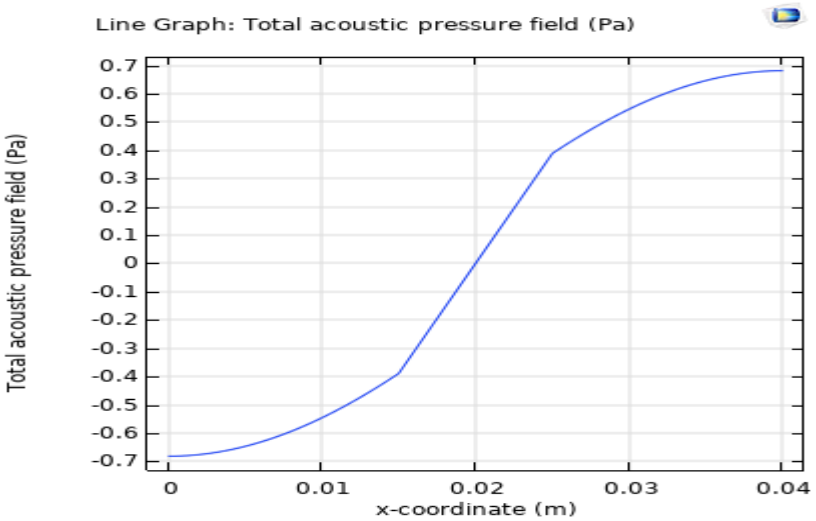
$$G_{11} = \sum_i \frac{\phi^*{}_i(a)(\phi_i(a) - \phi_i(-a))}{\rho_i(\,\omega_i{}^2 - \omega^2)}$$

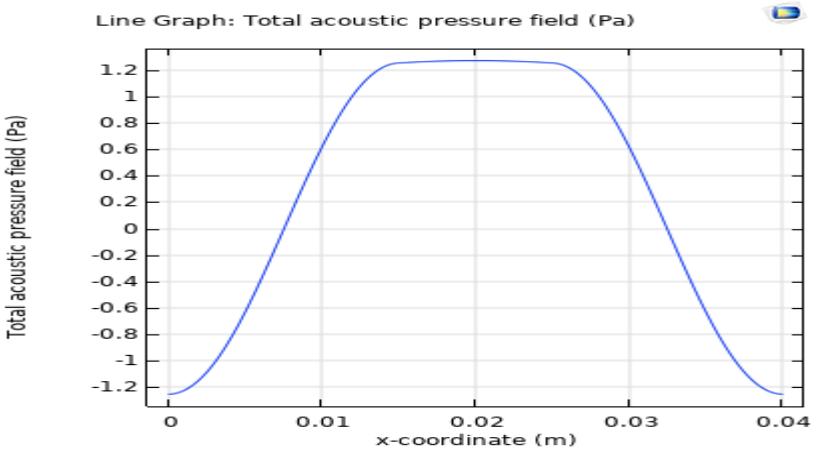
Si procede ora a ricavare $G_{\alpha\alpha}$ della nostra US.



Ricordando che dS=15mm dAl=10, che la velocità del suono è c=1000 m/s nel silicone e c=6200 m/s nell'alluminio, e che le densità di alluminio e silicone sono rispettivamente $\rho_{al} = 2700\, Kg/m$^3 e $\rho_{si} = 1250\, Kg/m$^3 è possibile ottenere gli autovettori ed autovalori del campo di pressione sonora nella cella col softwere COMSOL MULTIPHISICS. Di seguito i diagrammi dei primi 3 modi di pressione acustica




Line Graph: Total acoustic pressure field (Pa)
Total acoustic pressure field (Pa)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
0
0.01
0.02
0.03
0.04
x-coordinate (m)


Line Graph: Total acoustic pressure field (Pa)
Total acoustic pressure field (Pa)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
0.01
0.02
0.03
0.04
x-coordinate (m)

Si sono estratti i vettori modali valutati a coordinate prestabilite sull'intero volume, e si è proceduto al calcolo su MATLAB:

Inizialmente si sono prestabiliti i punti in cui discretizzare il dominio per poi effettuare i calcoli e le integrazioni

```
%% punti campionamento

xo=0;
xe=0.04;
xstep=0.001;
x=(xo:xstep:xe);
```

si sceglie anche il dominio per ω

```
omegao=0;
omegah=4*10^5;
omegastep=10^3;
omega=(omegao:omegastep:omegah);
```

Nella successiva parte, si definisce la distribuzione della densità nel dominio e si calcolano le masse modali ρ_i

```
for kk=1:15
   rho(kk)=rhosi;
end
for kk=16:26
   rho(kk)=rhoal;
end
for kk=27:41
   rho(kk)=rhosi;
end

for aa=1:size(phii_no_normal,2)

rhoi(aa)=sum((phii_no_normal(:,aa).*(conj(phii_no_normal(:,aa)).*rho(:).*
dL)));
end
```

Si è scelto di calcolare i $\bar{G}_{00}$ per ogni modo che compone la funzione di Green della US, e successivamente di sommarli

```
for kk=27:41
   rho(kk)=rhosi;
end

for aa=1:size(phii_no_normal,2)

rhoi(aa)=sum((phii_no_normal(:,aa).*(conj(phii_no_normal(:,aa)).*rho(:).*
dL)));
end
G00ii=[];
for nn=1:size(phii_no_normal,2)
   for zz=1:size(omega,2)

G00ii(zz,nn)=(conj(phii_no_normal(1,nn)).*(phii_no_normal(1,nn)+phii_no
_normal(41,nn)))./(rhoi(1,nn).*(omegai(nn,1)^2-omega(zz)^2));
   end
end
```

e la stessa operazione si è effettuata per i G_{11}

```
G00=sum(G00ii,2);

for nn=1:size(phii_no_normal,2)
   for zz=1:size(omega,2)
   G11ii(zz,nn)=(conj(phii_no_normal(1,nn)).*(phii_no_normal(1,nn)-
phii_no_normal(41,nn)))./(rhoi(1,nn).*(omegai(nn,1)^2-omega(zz)^2));
   end
end

G11=sum(G11ii,2);
```

Ottenuti i termini G_{11} e G_{00} si è potuto applicare is solutore all'equazione omogenea

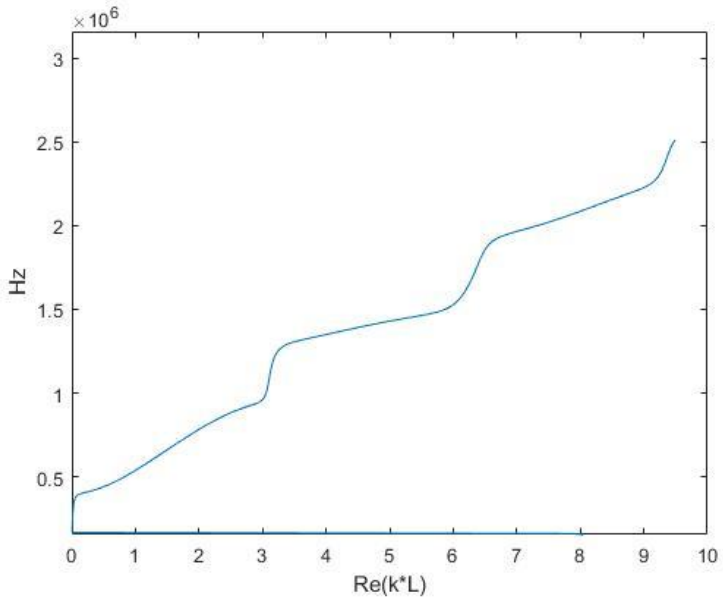
$$0 = -\cot^2(\bar{k}a) - \frac{\bar{G}_{00}}{\bar{G}_{11}}$$

```
part=G00./G11;
k=[]
for kn = 1:size(part,1)
   eqn = -cot(0.02.*x)^2-part(kn,1);
   fun = matlabFunction(eqn);
   k(kn) = fsolve(fun,x0);
   x0=k(kn);
 end
```

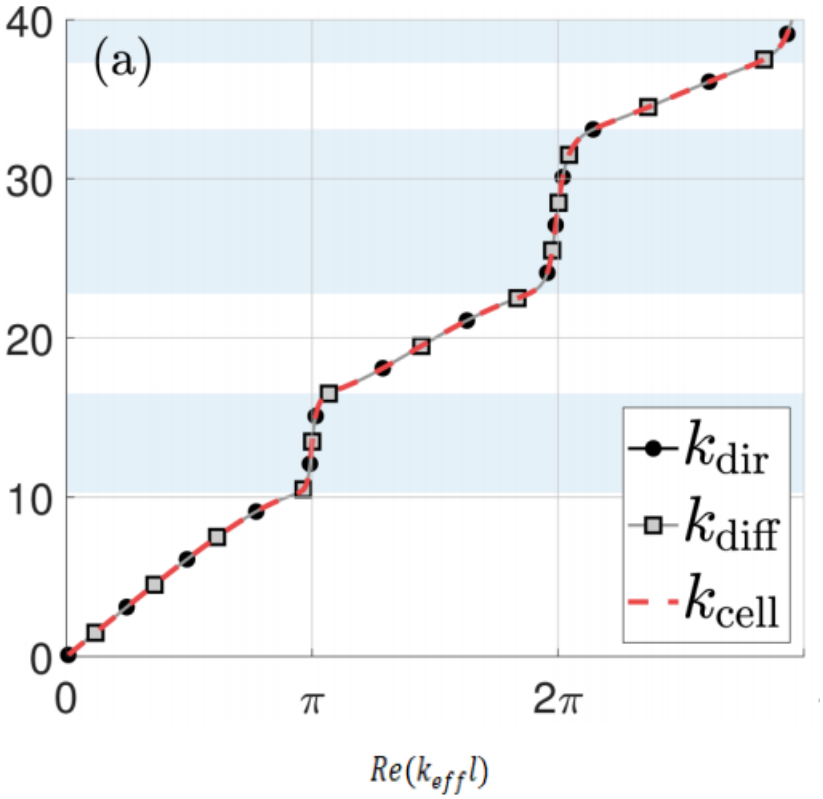
il risultato è il numero d'onda $\bar{k}$ desiderato al variare di ω

4.4.4 Risultati

è ora possibile confrontare questo valore con quello ottenuto dai metodi sperimentali



E per paragone si riporta quello relativo ai metodi sperimentali nella parte reale di k



Si nota discreto agreement fino a 12KHz, per frequenze maggiori, per quanto gli andamenti siano qualitativamente simili, i dati non sono confrontabili. Il metodo sembra dare buoni risultati fino al primo *band-gap*

La parte immaginaria non è di altrettanto semplice accordo, ma bisogna tenere presente che il metodo sperimentale studia un sistema naturalmente smorzato, quello analitico un sistema ideale

4.5 Caso bidimensionale

Il metodo, per i casi bidimensionali, è limitato a US con contorni circolari: questo limite è dovuto alle difficoltà matematiche relative alla soluzione dell'integrale di Helmotz su dominio rettangolare, o diverso dal circolare, con condizione al contorno di Neumann (in letteratura è ben nota la soluzione al contorno di Dirichlet). Il confronto quantitativo con i dati sperimentali coi metodi sperimentali è escluso a priori: le guide d'onda, per loro natura, costringono i bordi della cella a prendere forma rettangolare. Si illustra un'applicazione del metodo ad un'ipotetica cella cilindrica (potrebbe essere utile per l'approssimazione di una cella esagonale, ben più simile rispetto ad una di forma rettangolare).

4.5.1 Materiale omogeneo

Immaginiamo un' US circolare di raggio a

Abbiamo già presentato il problema di Helmotz su regione circolare

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta^2}+k^2\right)\bar{\phi}(x)=0$$

L'equazione omogenea va associata alla condizione al contorno

$$\psi(a,\vartheta)=\omega\bar{Z}\frac{\partial\bar{\phi}(r,\vartheta)}{\partial(\bar{k}r)}|_{r=a}$$

La soluzione al problema omogeneo è data dalla sommatoria di *armoniche cilindriche* o *funzioni di Bessel* moltiplicate per un coefficiente A_n e $\cos(n\vartheta)$

$$\bar{\phi}(x) = \sum_n A_n J_n(\mathrm{kr})\cos(n\vartheta)$$

la condizione al contorno è sulla derivata prima J'_n è :

$$J'_n = (J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r))/2$$

Associandola alla condizione al contorno si ottiengono i coefficienti A_n

$$A_n = 2/(\omega\bar{Z}(J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r))$$

Si riportano i risultati per $\bar{G}_{00}$ e $\bar{G}_{11}$, rimandando all'articolo per lo svolgimento dei passaggi necessari; lo scopo di quanto riportato è per dimostrare che la soluzione per geometria cilindrica è non solo nota, ma gli strumenti matematici sono di facile reperibilità in letteratura e largamente applicati. Lo stesso non vale per geometrie diverse.

$$\bar{G}_{00} = -J_0(\bar{k}a)/(\omega\bar{Z}J_1(\bar{k}a))$$

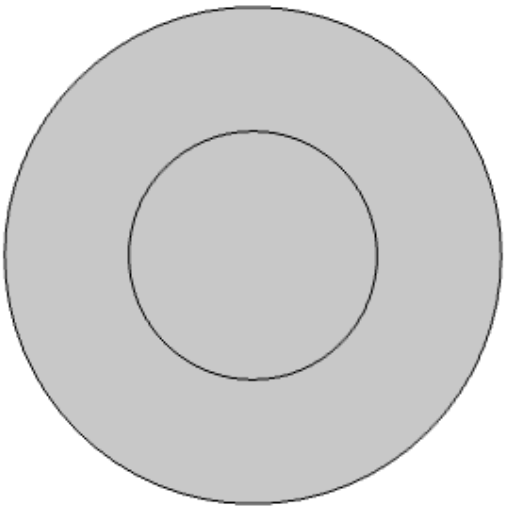
$$\bar{G}_{11} = \frac{\bar{k}aJ_1(\bar{k}a)}{\omega\bar{Z}[\bar{k}aJ_0(\bar{k}a) - J_1(\bar{k}a)]}$$

Come precedentemente, il numero d'onda è il primo dato ricavato, da esso discendono gli altri

$$\frac{\bar{G}_{00}}{\bar{G}_{11}} = \frac{J_0(\bar{k}a)J_1(\bar{k}a) - \bar{k}a{J_1}^2(\bar{k}a)}{\bar{k}a{J_1}^2(\bar{k}a)}$$

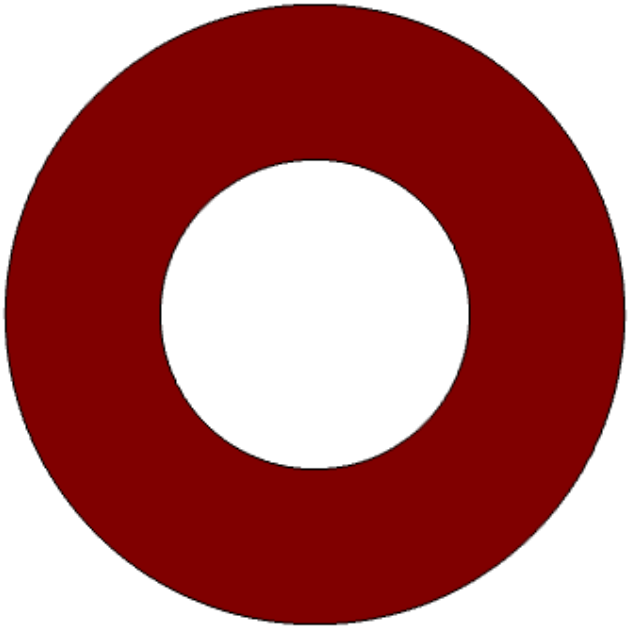
4.5.2 Studio US :

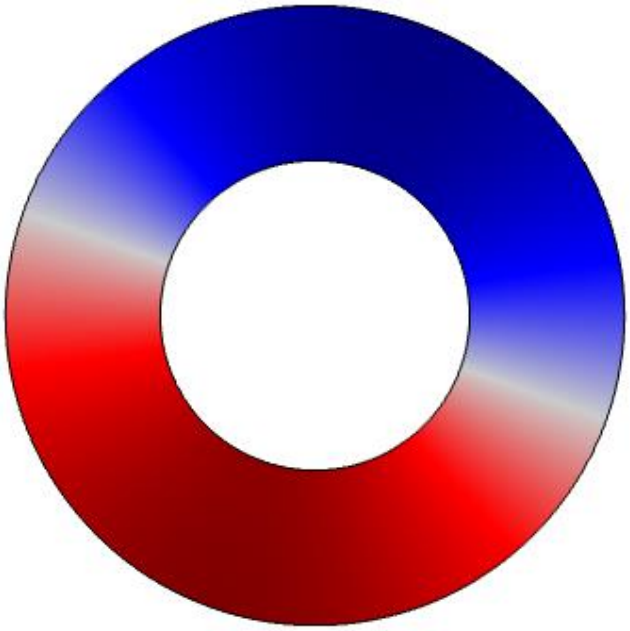
Si procede ora a ricavare $G_{\alpha\alpha}$ della nostra US.

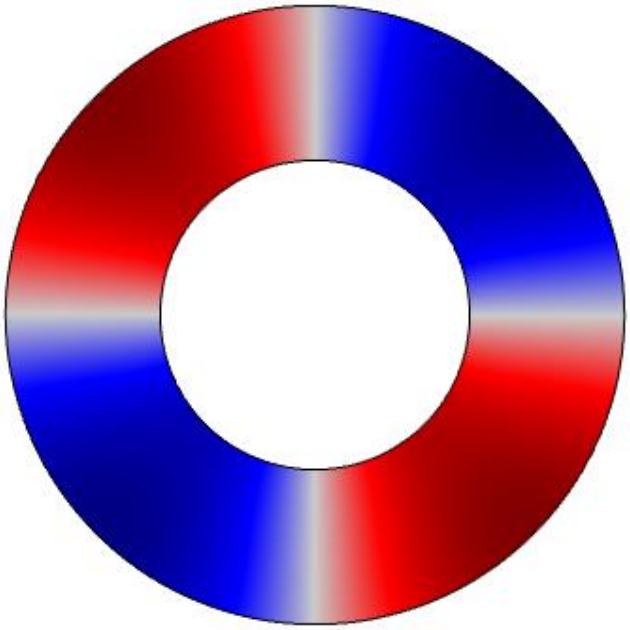


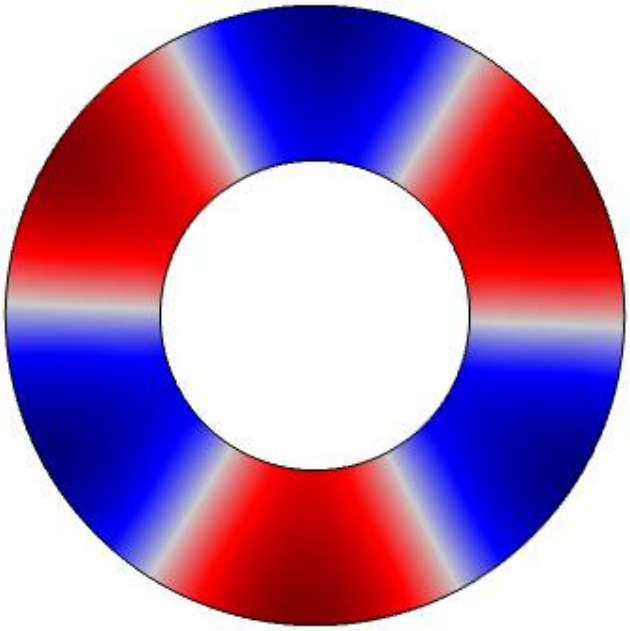
Il cilindro centrale è rigido, ed ha raggio 1cm, il raggio esterno della cella è 2cm

I modi e le autofrequenze vengono ricavati con COMSOL.



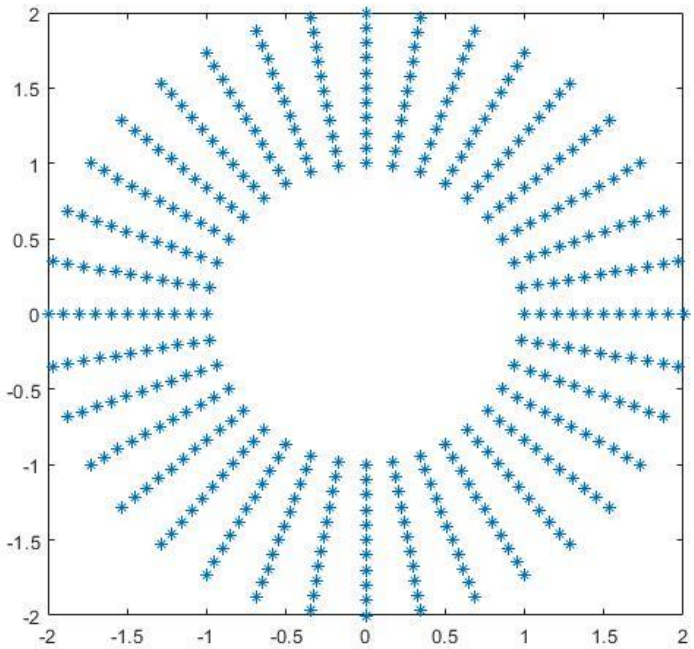






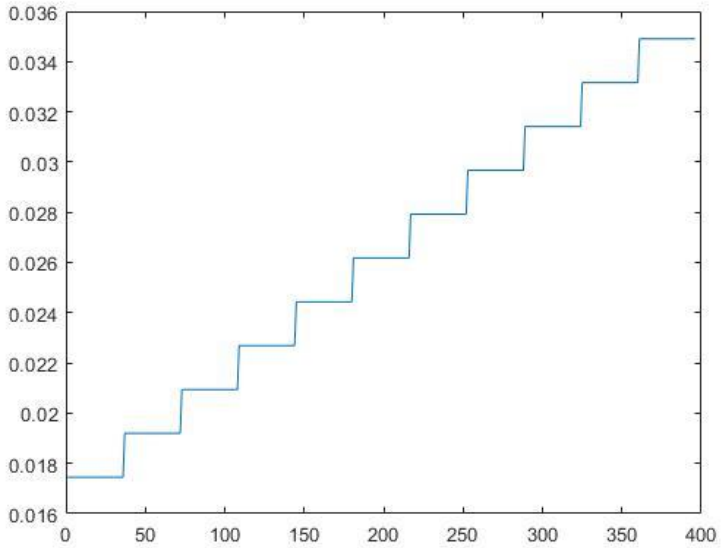
L'esportazione è più complessa rispetto al caso monodimensionale: è necessario creare un vettore di coordine x, y su MATLAB per poi inserirlo su comsol per valutare ed esportare i valori assunti dai modi di pressione acustica nei punti prestabiliti

```
ri=1;
re=2;
rstep=0.1;
thstep=10*pi/180;
r=ri:rstep:re;
th=0:thstep:2*pi-thstep;
```



I modi vengono valutati in 396 punti in COMSOL, esportati i un documento di testo txt, e reimportati im MATLAB per i successivi calcoli.

Per gli integrali di superficie, ad ogni punto di campionamento è associato un elemento ΔS di dimensioni diverse (minore a raggi minori, e crescente col raggio)



Si procede al calcolo delle ρ_i

```
rho=1.292;
rhoi=real(sum(( phii.*rho.*conj(phii)).*dV));
```

Poi di G_{00}

```
integral_phii_a_monpl=sum(phii_a.*dL);
integral_phii_aconj_monpl=sum(conj(phii_a).*dL);
integral_product_monpl=integral_phii_a_monpl.*integral_phii_aconj_monp
l;
G00i=[];
for kk=1:size(omegai,1)-1;
   for nn=1:size(omega,2)

G00i(kk,nn)=integral_product_monpl(1,kk+1)./(rhoi(1,kk+1).*(omegai(kk+
1,1)^2-omega(1,nn)^2-i.*beta(kk+1,1).*omega(1,nn)));

   end
end

G00=(re/2*pi)*sum(G00i,1);
```

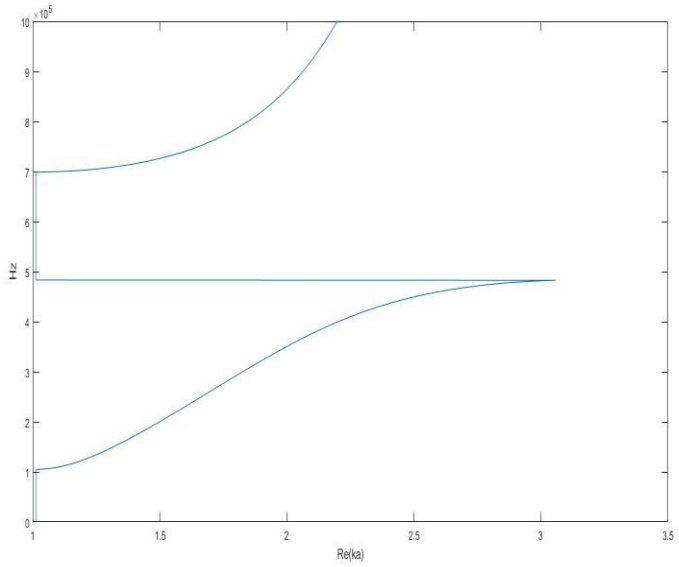
e G_{11}

```
for xxx=1:size(phii_a,2)

   phiidL_dipl(:,xxx)=cos(th').*phii_a(:,xxx).*dL;
   phiiconjdL_dipl(:,xxx)=cos(th').*conj(phii_a(:,xxx)).*dL;

end

integral_phii_dip=sum(phiidL_dipl,1);
integral_phiiconj_dip=sum(phiiconjdL_dipl,1);
integral_product_dipl=integral_phii_dip.*integral_phiiconj_dip;


G11i=[];
for kk=1:size(omegai,1)-1;
   for nn=1:size(omega,2);

G11i(kk,nn)=integral_product_dipl(1,kk+1)/(rhoi(1,kk+1).*(omegai(kk+1,1
)^2-omega(1,nn)^2));

   end
end
G11=(re/pi)*sum(G11i,1);
```

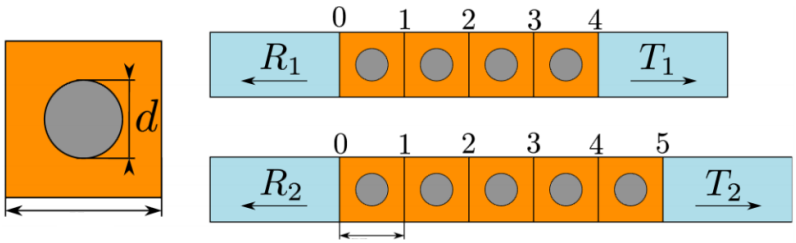
È ora possibile far risolvere al solutore l'equazione omogenea:

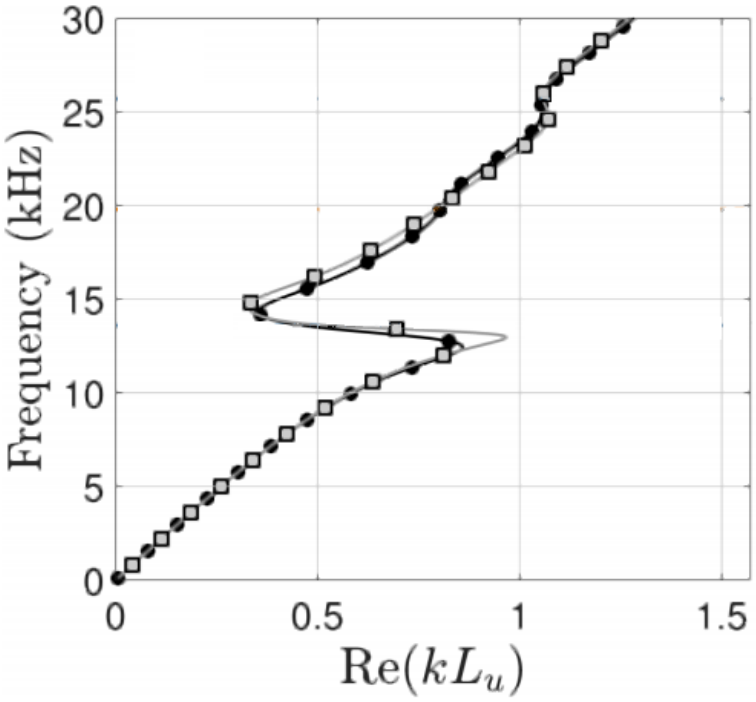
$$\frac{J_0(\bar{k}a)J_1(\bar{k}a) - \bar{k}aJ_1{}^2(\bar{k}a)}{\bar{k}aJ_1{}^2(\bar{k}a)} - \frac{\bar{G}_{00}}{\bar{G}_{11}} = 0$$

```
for kn = 1:size(part,2)
   eqn = (besselj(0,2*x)*besselj(1,2*x)-
(besselj(0,2*x)*2*x)^2)/(2*x*besselj(1,2*x)^2)-part(1,kn);
   fun = matlabFunction(eqn);
   k(kn) = fsolve(fun,x0);
 end
k = k';
```



I risultati non sembrano altrettanto incoraggianti. C'è un notabile problema a frequenze bassissime, poi il grafico assume un andamento "verosimile" fino al primo picco. Non sembra mostrare affidabilità soddisfacente dopo. Per confronto, i dati per un materiale a cella quadrata, con inclusione cilindrica omogenizzato con la tecnica sperimentale precedentemente illustrata




30
25
20
15
10
5
0
Frequency (kHz)
0
0.5
1
1.5
$\mathrm{Re}(kL_u)$

Conclusioni 5

Si sono confrontati due metodi applicati allo stesso caso monodimensionale, e a casi bidimensionali simili.

I metodi empirici mostrano una marcata ”intuitività” nel loro funzionamento, fanno a meno di approssimazioni significative, trattando i dati attraverso le loro stesse definizioni. Naturalmente hanno tempi di set-up consistenti, che devono essere ripetuti per ogni nuova caratterizzazione in tutte le loro fasi, inclusa la realizzazione del materiale prima che le sue proprietà vengano effettivamente verificate.

I metodi che non necessitano di ricorrere ad esperimenti fisici sono concettualmente ben più complessi, ed adottano assunzioni e semplificazioni che ne limitano il campo di applicabilità.

Entrambi i tipi di metodi soffrono di limitazioni geometriche: le guide d’onda usate nei metodi sperimentali ne impongono la geometria della cella, che nel caso bidimensionale avrà tendenzialmente frontiera rettangolare. I metodi analitici, pur non soffrendo di questa limitazione intrinseca, per essere applicati a geometrie quadrate dovrebbero ricorrere a strumenti matematici che ne complicherebbero ulteriormente l’utilizzo. Il metodo presentato dimostra una certa “affidabilità” a basse frequenze nel caso monodimensionale, ed in certe condizioni può essere

considerato accettabile nel caso bidimensionale a basse frequenze.

Bibliografia

[1] “Introduction to Acoustic Metamaterials” J.-P. Groby Laboratoire d’Acoustique de l’Universit´e du Mans, UMR CNRS 6613 (LAUM), Le Mans, France

[2] “Acoustic Metamaterials and Sonic Crystals: Introduction to Brillouin Zone and Plane Wave Expansion” A. Cebrecos1 , V. Romero-Garc´ıa2 & J.-P. Groby2 1 Instituto de Instrumentaci´on para Imagen Molecular (i3M) CSIC, Universitat Polit`ecnica de Val`encia, Camino de Vera, S/N, 46022, Valencia, Spain, 2Laboratoire d’Acoustique de l’Universit´e du Maine, UMR CNRS 6613 (LAUM), Le Mans, France Brussels, September 2019

[3] “Acoustic design by topology optimization” Maria B. Du¨hring, Jakob S. Jensen, Ole Sigmund Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, Nils Koppels Alle´, Building 404, DK-2800 Kgs. Lyngby, Denmark

[4] “On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization” Fengwen Wang, Boyan Stefanov Lazarov, Ole Sigmund

[5] “Homogenization of acoustic metamaterials using retrieval methods” Laetitia Roux, Charles Croënne, Christian Audoly, and Anne-Christine Hladky-Hennion

[6] “Homogenization scheme for acoustic metamaterials” Min Yang, Guancong Ma, Ying Wu, Zhiyu Yang, Ping Sheng

[7] “Continuum Michromecchanics” P. Suquet

[8] “Fourier acoustics” E.G. Williams

[9] “Elements of Green function and Propagation” G. Burton