



Università Politecnica delle Marche

Corso di laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

Tesi di laurea sperimentale

Stabilizzazione Frozen-Time di sistemi tempo-varianti

Frozen-Time stabilization of time-varying systems

Relatore

prof.ssa Valentina Orsini

Candidato

Antonio Lanciotti

A.A. 2019/2020

Indice

Introduzione	2
1 Risultati preliminari	4
1.1 Matrici simmetriche e definitezza	4
1.1.1 Proprietà	4
1.1.2 Condition number	4
1.1.3 Complemento di Schur	5
1.1.4 Linear Matrix Inequalities	5
1.2 Criterio di Lyapunov	5
1.2.1 Funzioni quadratiche	6
1.2.2 Stabilità esponenziale	6
1.3 Lemma di Gronwall-Bellman	6
2 Controllo Gain-Scheduling	7
2.1 Modello matematico	7
2.2 Scenario informazione completa	8
2.3 Scenario stato non accessibile	10
3 Controllo Slowly-Varying con approccio Frozen Time	12
3.1 Forma <i>Perturbed Frozen Time</i> e studio stabilità	12
3.2 Stabilizzazione di sistemi LPV stato accessibile	15
3.3 Stabilizzazione scenario stato non noto	18
4 Simulazioni	20
4.1 Metodo di Eulero per la discretizzazione	20
4.2 Stabilizzazione pendolo linearizzato	21
4.3 Stabilizzazione sistema massa-molla-smorzatore	22
4.4 Sistema di controllo con osservatore	23
Bibliografia	27

Introduzione

In questa tesi verranno studiate delle soluzioni computazionalmente più efficienti per il controllo di una particolare classe di sistemi, quelli lineari a parametri varianti.

Tale classe di sistemi è nata dalla necessità ingegneristica di ottenere prestazioni migliori per dinamiche non lineari e tempo varianti, comuni in molte applicazioni industriali, rispetto a quelle ottenute utilizzando i classici sistemi lineari stazionari (LTI, linear time-invariant). Tuttavia tale classe gode del vantaggio che molti risultati della teoria per sistemi LTI possano essere recuperati.

Si è scelto di studiare solo il caso a tempo discreto, che ha come vantaggio una diretta corrispondenza con l'implementazione dell'algoritmo di controllo. Ciò comporta che eventuali processi di cui sia noto il modello a tempo continuo debbano essere discretizzati prima di poter applicare le tecniche di controllo che saranno dimostrate.

Il problema della stabilizzazione di sistemi lineari a parametri tempo varianti è generalmente affrontato mediante controllori di tipo gain scheduling, ovvero capaci di aggiornare i propri parametri “on-line” sulla base delle variazioni dei parametri dell'impianto da controllare. In questo tipo di approccio la legge di controllo viene aggiornata ad ogni passo comportando una notevole pesantezza dal punto di vista computazionale.

Lo scopo di questa tesi è quella di sviluppare una soluzione computazionalmente efficiente basata sulla definizione di un controllore esso stesso lentamente variabile nel tempo, preservando però la stabilità del sistema tempo variante.

In determinate situazioni applicative, soprattutto nel caso in cui il processo abbia una dinamica sufficientemente lenta, questa nuova tecnica permette risparmiare tempo all'interno del passo di campionamento evitando di misurare il parametro tempo variante ad ogni istante.

Innanzitutto però verranno effettuati dei richiami sulle proprietà delle matrici e delle LMIs (Linear Matrix Inequalities), strumenti necessari all'applicazione del criterio di Lyapunov per lo studio della stabilità. Il controllore slowly-varying sarà realizzato basandosi sul concetto di sistema congelato perturbato e sul lemma di Gronwall-Bellman. Saranno studiati due scenari applicativi: sia quello con informazione completa, ovvero stato accessibile, sia quello con stato inaccessibile, nel quale sarà necessaria la progettazione di un osservatore.

Verranno infine riportati degli esempi di sistemi di controllo realizzati in simulazione, che ci permetteranno di confrontare le prestazioni del controllore slowly-varying rispetto a quelle del classico controllore gain-scheduling.

Capitolo 1

Risultati preliminari

1.1 Matrici simmetriche e definitezza

- Una matrice quadrata $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice simmetrica se $M = M^T$
- Una matrice simmetrica M si dice definita positiva ($M > 0$) se e solo se $\forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, x^T M x > 0$
- Una matrice simmetrica M si dice definita negativa ($M < 0$) se e solo se $-M > 0$

1.1.1 Proprietà

- $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$
- $A \geq 0, B \geq 0 \Leftrightarrow \mu A + \lambda B \geq 0, \mu, \lambda \geq 0$
- $A > 0 \implies \exists A^{-1} > 0$
- $A > 0 \implies$ Tutti gli autovalori di A sono strettamente positivi.
- $A > 0 \Leftrightarrow W^T A W > 0, W \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{rank}(W) = \max\{m, n\}$

1.1.2 Condition number

Consideriamo una matrice $A = A^T > 0$, siano η e γ rispettivamente il minimo e il massimo dei suoi autovalori. Si definisce *condition number* di A :

$$K(A) = \frac{\gamma}{\eta} \tag{1.1.1}$$

Vale la proprietà:

$$\eta I \leq A \leq \gamma I \tag{1.1.2}$$

1.1.3 Complemento di Schur

Siano $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, allora:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow Q > 0, R - S^T Q^{-1} S > 0 \quad (1.1.3)$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow R > 0, Q - S R^{-1} S^T > 0 \quad (1.1.4)$$

1.1.4 Linear Matrix Inequalities

Una *linear matrix inequality* (LMI) è un'espressione del tipo:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^m \text{ incognita} \quad (1.1.5)$$

Tale espressione è una condizione di definitezza per la matrice $F(x)$, funzione del vettore di coefficienti x .

L'insieme delle soluzioni di una LMI è un insieme convesso.

Lemma

Il seguente lemma permette di linearizzare una disuguaglianza matriciale nella quale compaia un blocco inverso.

Siano X, Y, Z tre matrici di dimensioni appropriate con $X = X^T > 0$ e $Z = Z^T > 0$, allora:

$$\begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & Z^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \exists \sigma > 0 : \begin{bmatrix} X & \sigma Y^T & 0 \\ \sigma Y & 2\sigma I & Z \\ 0 & Z & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (1.1.6)$$

1.2 Criterio di Lyapunov

Il criterio di Lyapunov permette di studiare la stabilità dei punti di equilibrio di un sistema dinamico. Consideriamo i sistemi lineari del tipo $x_{k+1} = A(k)x_k$; in questi sistemi il punto $x = 0$ è un punto di equilibrio.

Se esiste una funzione continua $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \quad \forall x \neq 0$

allora il punto di equilibrio $x = 0$ è asintoticamente stabile.

1.2.1 Funzioni quadratiche

In molti casi, come funzione $V(x)$, viene scelta una funzione (o forma) quadratica, ovvero una funzione del tipo:

$$V(x) = x^T P x$$

Tali funzioni hanno come vantaggio che dalle condizioni del criterio di Lyapunov derivino delle LMIs. Ad esempio, considerando un classico sistema LTI:

$$x_{k+1} = A x_k$$

- $V(x) > 0 \implies P > 0$
- $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0 \implies A^T P A - P < 0$

1.2.2 Stabilità esponenziale

Un sistema si dice esponenzialmente stabile se $\forall x_{k_0}$ esistono due costanti $m > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tali che:

$$\|x_k\| \leq m \|x_{k_0}\| \lambda^{k-k_0} \quad \forall k \geq k_0 \quad (1.2.1)$$

Tale condizione nei sistemi lineari diventa:

$$\|\Phi_{k,k_0}\| \leq m \lambda^{k-k_0} \quad \forall k \geq k_0 \quad (1.2.2)$$

dove Φ_{k,k_0} è la matrice di transizione dello stato.

1.3 Lemma di Gronwall-Bellman

Il lemma di Gronwall-Bellman fornisce una maggiorazione che limita la soluzione di un'equazione alle differenze.

Siano y_k , p_k e q_k delle successioni non negative tali che:

$$y_k \leq p_k + \sum_{i=0}^{k-1} q_i y_i \quad (1.3.1)$$

allora vale la seguente maggiorazione per y_k :

$$y_k \leq p_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 + q_i) \quad (1.3.2)$$

Capitolo 2

Controllo Gain-Scheduling

2.1 Modello matematico

Un sistema lineare a parametri varianti è descritto dalle seguenti equazioni:

$$x_{k+1} = A(\rho_k)x_k + Bu_k \quad (2.1.1)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.1.2)$$

con:

$$\rho_k \in \mathbb{R}^\ell; \quad x_k \in \mathbb{R}^n; \quad u_k \in \mathbb{R}^m; \quad y_k \in \mathbb{R}^p$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}; \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Consideriamo il caso in cui la dipendenza delle matrici del sistema dal vettore dei parametri ρ_k sia di tipo lineare o al più affine, e che ogni elemento del vettore dei parametri appartenga ad un sottoinsieme compatto di \mathbb{R} . In questo caso è possibile definire un insieme politopico convesso per il vettore dei parametri:

$$\mathcal{P} = \left\{ \rho(\alpha) \in \mathbb{R}^\ell : \rho(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i, \alpha \in \Lambda_N, N = 2^\ell \right\} \quad (2.1.3)$$

dove Λ_N è il semplice di ordine N definito da:

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (2.1.4)$$

A questo punto è possibile definire degli insiemi politopici convessi anche per la matrice $A(\rho_k)$ del sistema sulla base dei vertici del politopo \mathcal{P} :

$$A_i = A(\rho_i) \quad A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} A_i \quad \alpha_k \in \Lambda_N \quad N = 2^\ell \quad (2.1.5)$$

2.2 Scenario informazione completa

Il problema che ci si pone è quello di determinare una legge di controllo in retroazione dallo stato, nell'ipotesi in cui lo stato del sistema sia accessibile e il valore del parametro α_k sia misurabile in tempo reale:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k \quad (2.2.1)$$

tale che il sistema a ciclo chiuso:

$$x_{k+1} = [A(\alpha_k) + BK(\alpha_k)]x_k = A_f(\alpha_k)x_k \quad (2.2.2)$$

sia asintoticamente stabile.

Per studiare la stabilità di tale sistema sfruttiamo il criterio di Lyapunov, ovvero cerchiamo una funzione $V(x, \alpha)$ definita positiva in x tale che:

$$V(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) - V(x_k, \alpha_k) < 0 \quad (2.2.3)$$

In particolare, scegliendo una funzione quadratica del tipo:

$$V(x_k, \alpha_k) = x_k^T P(\alpha_k)x_k \quad P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} P_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.2.4)$$

si ottiene la seguente disuguaglianza di Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) - V(x_k, \alpha_k) < 0 &\Leftrightarrow \\ x_{k+1}^T P(\alpha_{k+1})x_{k+1} - x_k^T P(\alpha_k)x_k < 0 &\Leftrightarrow \\ x_k^T A_f^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1})A_f(\alpha_k)x_k - x_k^T P(\alpha_k)x_k < 0 &\Leftrightarrow \\ x_k^T [A_f^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1})A_f(\alpha_k) - P(\alpha_k)]x_k < 0 &\Leftrightarrow \\ P(\alpha_k) - A_f^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1})A_f(\alpha_k) > 0 & \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Sfruttiamo la rappresentazione convessa di P in modo da poter applicare le proprietà di scaling e additività per le matrici definite positive:

$$\begin{aligned} P(\alpha_k) - A_f^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1})A_f(\alpha_k) > 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{j=1}^N \alpha_{k+1_j} [P(\alpha_k) - A_f^T(\alpha_k)P_j A_f(\alpha_k)] > 0 &\Leftrightarrow \\ \forall j = 1, \dots, N \quad P(\alpha_k) - A_f^T(\alpha_k)P_j A_f(\alpha_k) > 0 & \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

A questo punto è possibile applicare il complemento di Schur e poi nuovamente la rappresentazione convessa e le proprietà di scaling e additività:

$$\begin{aligned}
 \forall j = 1, \dots, N \quad & P(\alpha_k) - A_f^T(\alpha_k)P_j A_f(\alpha_k) > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P(\alpha_k) & A_f^T(\alpha_k) \\ A_f(\alpha_k) & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall j = 1, \dots, N \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \begin{bmatrix} P_i & (A_i + BK_i)^T \\ A_i + BK_i & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall i, j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P_i & (A_i + BK_i)^T \\ A_i + BK_i & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Ora si sfrutta una trasformazione di congruenza:

$$\begin{aligned}
 \forall i, j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P_i & (A_i + BK_i)^T \\ A_i + BK_i & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall i, j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i & (A_i + BK_i)^T \\ A_i + BK_i & P_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall i, j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P_i^{-1} & P_i^{-1}(A_i + BK_i)^T \\ (A_i + BK_i)P_i^{-1} & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \\
 \forall i, j = 1, \dots, N \quad & \begin{bmatrix} P_i^{-1} & (A_i P_i^{-1} + BK_i P_i^{-1})^T \\ (A_i P_i^{-1} + BK_i P_i^{-1}) & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Infine introduciamo due cambi di variabile $Y_i = P_i^{-1}$, $Z_i = K_i Y_i$ in modo da ottenere le LMI:

$$\forall i, j = 1, \dots, N \quad \begin{bmatrix} Y_i & (A_i Y_i + B Z_i)^T \\ A_i Y_i + B Z_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \tag{2.2.9}$$

In definitiva, le condizioni del criterio di Lyapunov si traducono nelle seguenti LMI:

$$Y_i = Y_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{2.2.10}$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & (A_i Y_i + B Z_i)^T \\ A_i Y_i + B Z_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \tag{2.2.11}$$

Risolviendo le LMI si ottengono le Y_i e le Z_i , dalle quali si ricavano la matrice di Lyapunov:

$$P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} P_i \quad P_i = Y_i^{-1} \tag{2.2.12}$$

e la matrice di guadagno della legge di controllo:

$$K(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} K_i \quad K_i = Z_i P_i = Z_i Y_i^{-1} \tag{2.2.13}$$

La legge di controllo ottenuta viene detta "gain-scheduling" e comporta ad ogni istante di tempo k la misurazione del vettore di parametri p_k e il calcolo della combinazione lineare convessa delle K_i .

2.3 Scenario stato non accessibile

Se lo stato del processo non è accessibile, è necessario progettare un osservatore di Luenberger:

$$\hat{x}_{k+1} = A(\alpha_k)\hat{x}_k + Bu_k + L(\alpha_k)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.3.1)$$

La stima dello stato \hat{x} sarà utilizzata nella legge di controllo così definita:

$$u_k = -K(\alpha_k)\hat{x}_k \quad (2.3.2)$$

Il sistema a ciclo chiuso che si va ad ottenere è descritto dalle seguenti equazioni:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + Bu_k \quad (2.3.3)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.3.4)$$

$$\hat{x}_{k+1} = A(\alpha_k)\hat{x}_k + Bu_k + L(\alpha_k)(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.3.5)$$

$$u_k = -K(\alpha_k)\hat{x}_k \quad (2.3.6)$$

Andando a semplificare sostituendo u ed y si ottiene:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k - BK(\alpha_k)\hat{x}_k \quad (2.3.7)$$

$$\hat{x}_{k+1} = L(\alpha_k)Cx_k + [A(\alpha_k) - BK(\alpha_k) - L(\alpha_k)C]\hat{x}_k \quad (2.3.8)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.3.9)$$

Introduciamo al posto della variabile \hat{x}_k la variabile errore di stima $e_k \triangleq x_k - \hat{x}_k$. Le equazioni diventano:

$$x_{k+1} = [A(\alpha_k) - BK(\alpha_k)]x_k + BK(\alpha_k)e_k \quad (2.3.10)$$

$$e_{k+1} = [A(\alpha_k) - L(\alpha_k)C]e_k \quad (2.3.11)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.3.12)$$

La matrice della dinamica del sistema a ciclo chiuso rispetto allo stato esteso $(x_k, e_k)^T$ è:

$$\Sigma(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) - BK(\alpha_k) & BK(\alpha_k) \\ 0 & A(\alpha_k) - L(\alpha_k)C \end{bmatrix} \quad (2.3.13)$$

A questo punto applichiamo il criterio di Lyapunov al sistema a ciclo chiuso, considerando la funzione quadratica $V(x) = x^T P(\alpha_k)x$, e in maniera analoga al caso con stato accessibile (passaggi da (2.2.5) a (2.2.7)), si arriva al set di LMIs:

$$\forall i, j = 1, \dots, N \quad \begin{bmatrix} P_i & \Sigma_j^T \\ \Sigma_j & P_j^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.3.14)$$

dove i Σ_j sono i vertici della rappresentazione convessa di $\Sigma(\alpha_k)$. Qui si può applicare il lemma (1.1.6) da cui si ottiene:

$$\forall i, j = 1, \dots, N \quad \begin{bmatrix} P_i & \sigma_j \Sigma_j^T & 0 \\ \sigma_j \Sigma_j & 2\sigma_j I & P_j \\ 0 & P_j & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.3.15)$$

Consideriamo il termine prodotto $\sigma_j \Sigma_j$ (e l'analogo trasposto):

$$\sigma_j \Sigma_j = \sigma_j \begin{bmatrix} A_j - BK_j & BK_j \\ 0 & A_j - L_j C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_j A_j - B\sigma_j K_j & B\sigma_j K_j \\ 0 & \sigma_j A_j - \sigma_j L_j C \end{bmatrix} \quad (2.3.16)$$

Effettuiamo i cambi di variabile $\tilde{K}_j = \sigma_j K_j$ e $\tilde{L}_j = \sigma_j L_j$ in modo da eliminare i prodotti tra le variabili del problema.

$$\tilde{\Sigma}_j = \sigma_j \Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_j A_j - B\tilde{K}_j & B\tilde{K}_j \\ 0 & \sigma_j A_j - \tilde{L}_j C \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

In definitiva si ottiene il set di LMI:

$$P_i = P_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}; \quad \sigma_i > 0; \quad \tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \tilde{L}_i \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (2.3.18)$$

$$\forall i, j = 1, \dots, N \quad \begin{bmatrix} P_i & \tilde{\Sigma}_j^T & 0 \\ \tilde{\Sigma}_j & 2\sigma_j I & P_j \\ 0 & P_j & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.3.19)$$

Da queste LMI si ricavano le matrici:

$$K_i = \tilde{K}_i / \sigma_i \quad L_i = \tilde{L}_i / \sigma_i \quad (2.3.20)$$

Capitolo 3

Controllo Slowly-Varying con approccio Frozen Time

3.1 Forma *Perturbed Frozen Time* e studio stabilità

In certe situazioni pratiche la misura del parametro α_k può risultare un'operazione troppo onerosa dal punto di vista computazionale per essere effettuata ad ogni passo di campionamento: se sappiamo che la variazione del parametro è abbastanza lenta si potrebbe effettuare l'aggiornamento della matrice di guadagno della legge di controllo non ad ogni passo, ma ad istanti di tempo prefissati in maniera meno frequente. Tuttavia in questo modo non è garantita la stabilità del sistema a ciclo chiuso, a meno che non vengano rispettate delle specifiche condizioni che andremo a dimostrare.

Per studiare tali condizioni consideriamo l'equazione della dinamica di un sistema LPV nella cosiddetta forma *Perturbed Frozen-Time* (PFT): consideriamo una successione di interi positivi $k_\ell, \ell = 0, 1, \dots$ con $k_0 = 0$. Sia $\chi(k)_{[k_\ell, k_{\ell+1})}$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[k_\ell, k_{\ell+1})$. Definiamo le seguenti matrici:

$$A_\ell = A(\alpha_{k_\ell}) \quad (3.1.1)$$

$$(A(\alpha_k) - A_\ell)\chi(k)_{[k_\ell, k_{\ell+1})} = \Delta A_\ell(k) \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \chi(k)_{[k_\ell, k_{\ell+1})} = A'(k) \quad (3.1.3)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \Delta A_\ell(k) = \Delta A'(k) \quad (3.1.4)$$

Si può verificare come $A(\alpha_k) = A'(k) + \Delta A'(k)$.

La forma PFT del sistema LPV è:

$$x_{k+1} = (A'(k) + \Delta A'(k))x_k + Bu_k \quad (3.1.5)$$

che all'interno dell'intervallo $I_\ell = [k_\ell, k_{\ell+1})$ si semplifica in:

$$x_{k+1} = (A_\ell + \Delta A_\ell(k))x_k + Bu_k \quad (3.1.6)$$

Consideriamo il sistema non forzato ($u_k = 0 \forall k \geq 0$):

$$x_{k+1} = (A_\ell + \Delta A_\ell(k))x_k \quad (3.1.7)$$

La risposta del sistema nell'intervallo I_ℓ si può calcolare come nel caso LTI:

$$x_k = A_\ell^{k-k_\ell} x_{k_\ell} + \sum_{j=k_\ell}^{k-1} A_\ell^{k-j-1} \Delta A_\ell(j) x_j \quad (3.1.8)$$

Per procedere facciamo alcune ipotesi sul sistema:

1. Le matrici A_ℓ hanno autovalori $|\lambda_i(A_\ell)| < 1 \quad \forall \ell = 0, 1, \dots$
2. In ogni intervallo I_ℓ si ha che $\|\Delta A_\ell(k)\| \leq \rho_\ell \quad \forall k \in I_\ell$

Per la prima ipotesi, applicando la definizione di stabilità esponenziale:

$$\|A_\ell^{k-k_\ell}\| < m_\ell a_\ell^{k-k_\ell} \quad (3.1.9)$$

Applichiamo l'operatore norma all'equazione della risposta nello stato del sistema:

$$\|x_k\| \leq \|A_\ell^{k-k_\ell}\| \cdot \|x_{k_\ell}\| + \sum_{j=k_\ell}^{k-1} \|A_\ell^{k-j-1}\| \cdot \|\Delta A_\ell(j)\| \cdot \|x_j\| \quad (3.1.10)$$

Possiamo maggiorare ulteriormente sfruttando le ipotesi fatte:

$$\|x_k\| \leq m_\ell a_\ell^{k-k_\ell} \|x_{k_\ell}\| + \sum_{j=k_\ell}^{k-1} m_\ell a_\ell^{k-j-1} \rho_\ell \|x_j\| \quad (3.1.11)$$

A questo punto moltiplichiamo entrambi i membri per a_ℓ^{-k} :

$$a_\ell^{-k} \|x_k\| \leq m_\ell a_\ell^{-k_\ell} \|x_{k_\ell}\| + \sum_{j=k_\ell}^{k-1} m_\ell a_\ell^{-j-1} \rho_\ell \|x_j\| \quad (3.1.12)$$

Definendo $a_\ell^{-k} \|x_k\| \triangleq x'_k$ si ottiene:

$$x'_k \leq m_\ell x'_{k_\ell} + \sum_{j=k_\ell}^{k-1} m_\ell a_\ell^{-1} \rho_\ell x'_j \quad (3.1.13)$$

Qui si può applicare il lemma di Gronwall-Bellman ottenendo:

$$x'_k \leq m_\ell x'_{k_\ell} \prod_{j=k_\ell}^{k-1} (1 + m_\ell a_\ell^{-1} \rho_\ell) \quad (3.1.14)$$

Da cui:

$$a_\ell^{-k} \|x_k\| \leq m_\ell a_\ell^{-k_\ell} \|x_{k_\ell}\| (1 + m_\ell a_\ell^{-1} \rho_\ell)^{k-k_\ell} \quad (3.1.15)$$

$$\|x_k\| \leq m_\ell a_\ell^{k-k_\ell} \|x_{k_\ell}\| (1 + m_\ell a_\ell^{-1} \rho_\ell)^{k-k_\ell} \quad (3.1.16)$$

$$\|x_k\| \leq m_\ell \|x_{k_\ell}\| (a_\ell + m_\ell \rho_\ell)^{k-k_\ell} \quad (3.1.17)$$

Il membro di destra di quest'ultima relazione rappresenta una funzione esponenziale decrescente se $\rho_\ell < \frac{1-a_\ell}{m_\ell}$. Chiamiamo $\beta_\ell \triangleq a_\ell + m_\ell \rho_\ell < 1$, e iterando all'indietro l'ultima relazione si ottiene:

$$\|x_k\| \leq m_\ell \beta_\ell^{k-k_\ell} \left(\prod_{j=0}^{\ell-1} m_j \beta_j^{(k_{j+1}-k_j)} \right) \|x_{k_0}\| \quad (3.1.18)$$

Se l'espressione all'interno della produttoria è minore di 1, questa relazione garantisce la stabilità esponenziale asintotica del sistema.

$$m_j \beta_j^{(k_{j+1}-k_j)} < 1 \quad (3.1.19)$$

$$m_j < \beta_j^{-(k_{j+1}-k_j)} \quad (3.1.20)$$

$$\log_{\beta_j}(m_j) > -(k_{j+1} - k_j) \quad (3.1.21)$$

$$k_{j+1} - k_j > -\log_{\beta_j}(m_j) \quad (3.1.22)$$

$$L_j > -\log_{\beta_j}(m_j) \quad (3.1.23)$$

In definitiva se esiste un $\rho_\ell > 0$ e un intero L_ℓ^* tali che $\|\Delta A_\ell(k)\| \leq \rho_\ell, \forall k \in I_\ell$ e $L_\ell \geq L_\ell^*, \forall \ell$, allora il sistema è asintoticamente stabile.

I valori ρ_ℓ e L_ℓ^* soddisfano:

$$\rho_\ell < \frac{1-a_\ell}{m_\ell} \quad L_\ell^* > -\log_{\beta_\ell}(m_\ell) \quad \beta_\ell = a_\ell + m_\ell \rho_\ell \quad (3.1.24)$$

3.2 Stabilizzazione di sistemi LPV stato accessibile

Consideriamo un sistema LPV $x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + Bu_k$ da stabilizzare. Osserviamo che se il sistema è puntualmente raggiungibile, applicando una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_k = K(\alpha_{k_\ell})x_k = K_\ell x_k$ su ogni intervallo I_ℓ viene garantita la prima ipotesi, ovvero che le matrici del sistema a ciclo chiuso:

$$A_\ell^f = A^f(\alpha_{k_\ell}) = A(\alpha_{k_\ell}) + BK(\alpha_{k_\ell}) = A_\ell + BK_\ell \quad (3.2.1)$$

abbiano autovalori

$$|\lambda_i(A_\ell^f)| < 1 \quad \forall \ell \quad (3.2.2)$$

Inoltre possiamo verificare che:

$$\|\Delta A_\ell^f(\alpha_k)\| = \|A(\alpha_k) + BK_\ell - (A_\ell + BK_\ell)\| = \|A(\alpha_k) - A_\ell\| = \|\Delta A_\ell(\alpha_k)\| \quad (3.2.3)$$

Applichiamo la definizione di stabilità esponenziale su ogni intervallo I_ℓ :

$$\|A_\ell^f\| < m_\ell a_\ell^{k-k_\ell} \quad (3.2.4)$$

Dato che la matrice $A^f(\alpha_k)$ è la combinazione convessa dei vertici $A_i + BK_i$, possiamo cercare dei valori m e a unici, validi su tutto l'insieme politopico convesso.

Se il sistema è stabilizzabile, esiste una matrice $P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} P_i$ simmetrica e definita positiva tale che la funzione $V(x) = x_k^T P(\alpha_k) x_k$ rispetti le condizioni del criterio di Lyapunov.

Siano η_i e γ_i rispettivamente gli autovalori minimo e massimo di ogni matrice P_i . Possiamo pertanto scrivere per ogni vertice, sfruttando la (1.1.2):

$$\begin{aligned} \eta_i I &\leq P_i \leq \gamma_i I \\ \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \eta_i I &\leq \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} P_i \leq \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \gamma_i I \\ \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \eta_i I &\leq P(\alpha_k) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \gamma_i I \\ \min_i(\eta_i) I &\leq P(\alpha_k) \leq \max_i(\gamma_i) I \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Chiamando $\eta \triangleq \min_i(\eta_i)$ e $\gamma \triangleq \max_i(\gamma_i)$ scriviamo:

$$\eta I \leq P(\alpha_k) \leq \gamma I \quad K(P(\alpha_k)) \triangleq \frac{\gamma}{\eta} \quad (3.2.6)$$

da cui si ottiene che:

$$\eta \|x_k\|^2 \leq V(x_k, \alpha_k) \leq \gamma \|x_k\|^2 \quad (3.2.7)$$

Fissiamo uno scalare $\varepsilon \in (0,1)$ e imponiamo:

$$V(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) - \varepsilon V(x_k, \alpha_k) < 0 \quad (3.2.8)$$

Iterando tale espressione si ottiene la condizione:

$$V(x_k, \alpha_k) < \varepsilon^k V(x_0, \alpha_0) \quad (3.2.9)$$

Si può in definitiva scrivere la catena di disuguaglianze:

$$\eta \|x_k\|^2 \leq V(x_k, \alpha_k) < \varepsilon^k V(x_0, \alpha_0) \leq \varepsilon^k \gamma \|x_0\|^2 \quad (3.2.10)$$

Dal primo e dall'ultimo membro si ottiene:

$$\|x_k\| \leq (\sqrt{\varepsilon})^k \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} \|x_0\| \quad (3.2.11)$$

che è la condizione di stabilità esponenziale. Pertanto, per confronto, si ricavano i valori:

$$a = \sqrt{\varepsilon} \quad m = \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} = \sqrt{K(P(\alpha_k))} \quad (3.2.12)$$

Il soddisfacimento della condizione (3.2.8) porta, con passaggi analoghi all'approccio Gain-Scheduling, alle seguenti LMIs:

$$Y_i = Y_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon Y_i & (A_i Y_i + B Z_i)^T \\ A_i Y_i + B Z_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (3.2.14)$$

Se ammettono soluzione allora:

$$P_i = Y_i^{-1} \quad (3.2.15)$$

$$K_i = Z_i P_i = Z_i Y_i^{-1} \quad (3.2.16)$$

$$K(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} K_i \quad (3.2.17)$$

Nella sezione precedente si è visto come la stabilità del sistema sia garantita se la variazione della norma della matrice della dinamica all'interno di ogni intervallo I_ℓ sia limitata da uno scalare ρ_ℓ che per semplicità poniamo costante, $\rho = \sup_\ell \{\rho_\ell\}$, per tutti gli intervalli.

Per rendere il meno stringente possibile tale limitazione, vogliamo massimizzare il valore di $\rho = \frac{1-a}{m}$. Innanzitutto osserviamo che al diminuire di $a = \sqrt{\varepsilon}$ il valore di ρ aumenta, pertanto il primo passo è scegliere il valore ε più piccolo possibile, tuttavia nel fare ciò la condizione (3.2.8) diventa più stringente e il problema da un certo valore in poi non ammette più soluzione.

Fissato un valore compatibile di ε , quello che si può fare è minimizzare m e di conseguenza il condition number della matrice $P(\alpha_k)$. Tuttavia il problema della minimizzazione di un rapporto non è un problema di semplice risoluzione, ma possiamo considerare un problema ausiliario molto più semplice: Nella (3.2.6) dividiamo tutti i membri per η ottenendo:

$$I \leq P(\alpha_k)/\eta \leq m^2 I \quad (3.2.18)$$

Effettuando il cambio di variabile $\widehat{P}_i = P_i/\eta$ possiamo scrivere:

$$\widehat{P}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k_i} \widehat{P}_i \quad (3.2.19)$$

$$I \leq \widehat{P}_i \leq m^2 I \quad (3.2.20)$$

Per ricondurci alle LMI (3.2.13) poniamo inoltre:

$$\widehat{Y}_i = \widehat{P}_i^{-1} = \eta Y_i \quad (3.2.21)$$

$$\widehat{Z}_i = K_i \widehat{Y}_i = \eta Z_i \quad (3.2.22)$$

Otteniamo pertanto la condizione:

$$\nu I \leq \widehat{Y}_i \leq I \quad \nu \triangleq \frac{1}{m^2} \quad (3.2.23)$$

Osservando che:

$$K_i = Z_i Y_i^{-1} = \widehat{Z}_i \widehat{Y}_i^{-1} \quad (3.2.24)$$

Otteniamo in definitiva il problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \max \quad \nu > 0 \\ & \nu I \leq \widehat{Y}_i \leq I \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & \begin{bmatrix} \varepsilon \widehat{Y}_i & (A_i \widehat{Y}_i + B \widehat{Z}_i)^T \\ A_i \widehat{Y}_i + B \widehat{Z}_i & \widehat{Y}_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Se tale problema ammette soluzione, ricaviamo i vertici $K_i = \widehat{Z}_i \widehat{Y}_i^{-1}$ della matrice di guadagno della legge di controllo da aggiornare solo negli istanti di tempo k_ℓ e il valore del parametro $m = \sqrt{1/\nu}$, dal quale poi si ricavano i valori di ρ e L^* che ci danno le limitazioni che la matrice della dinamica del processo deve rispettare per garantire la stabilità.

3.3 Stabilizzazione scenario stato non noto

Come nel caso gain-scheduling, se lo stato del sistema non è noto, è necessario progettare un osservatore, tuttavia non volendo misurare il parametro α_k in tutti gli istanti di tempo, l'osservatore avrà una matrice di guadagno L che sarà aggiornata solo negli istanti k_ℓ e sarà basato su una versione nominale del processo, ovvero considerando come matrice della dinamica il centro del politopo:

$$A_{nom} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i \quad (3.3.1)$$

L'equazione dell'osservatore sull'intervallo di tempo I_ℓ sarà pertanto:

$$\hat{x}_{k+1} = A_{nom}\hat{x}_k + Bu_k + L_\ell(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.3.2)$$

Le equazioni del sistema a ciclo chiuso sono:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + Bu_k \quad (3.3.3)$$

$$\hat{x}_{k+1} = A_{nom}\hat{x}_k + Bu_k + L_\ell(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.3.4)$$

$$u_k = -K_\ell\hat{x}_k \quad (3.3.5)$$

$$y_k = Cx_k \quad (3.3.6)$$

Andando a sostituire la legge di controllo e l'equazione di uscita si ottiene:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k - BK_\ell\hat{x}_k \quad (3.3.7)$$

$$\hat{x}_{k+1} = L_\ell Cx_k + A_{nom}\hat{x}_k - BK_\ell\hat{x}_k - L_\ell C\hat{x}_k \quad (3.3.8)$$

$$y_k = Cx_k \quad (3.3.9)$$

Introducendo la variabile di stato errore $e_k = x_k - \hat{x}_k$ al posto della stima dell'osservatore si ha:

$$x_{k+1} = [A(\alpha_k) - BK_\ell]x_k + BK_\ell e_k \quad (3.3.10)$$

$$e_{k+1} = [A(\alpha_k) - A_{nom}]x_k + [A_{nom} - L_\ell C]e_k \quad (3.3.11)$$

$$y_k = Cx_k \quad (3.3.12)$$

La matrice della dinamica del sistema a ciclo chiuso nell'intervallo I_ℓ è:

$$A^f(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) - BK_\ell & BK_\ell \\ A(\alpha_k) - A_{nom} & A_{nom} - L_\ell C \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

La sua variazione vale:

$$\Delta A_\ell^f(k) = \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(k) & 0 \\ \Delta A_\ell(k) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

La norma di tale matrice può essere calcolata in funzione della norma di $\Delta A_\ell(k)$, infatti:

$$\begin{aligned} \|\Delta A_\ell^f(k)\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \Delta A_\ell^T(k) & \Delta A_\ell^T(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_\ell(k) & 0 \\ \Delta A_\ell(k) & 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 2\Delta A_\ell^T(k)\Delta A_\ell(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = 2\|\Delta A_\ell(k)\|^2 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Pertanto:

$$\|\Delta A_\ell^f(k)\| = \sqrt{2}\|\Delta A_\ell(k)\| \quad (3.3.16)$$

Per applicare la legge di controllo slowly-varying, tale norma deve essere minore dello scalare ρ che andremo a determinare. Ciò comporta per il processo che:

$$\|\Delta A_\ell(k)\| < \rho/\sqrt{2} \quad (3.3.17)$$

Come nello scenario stato accessibile, scegliamo una funzione di Lyapunov quadratica $V(x_k, \alpha_k) = x_k^T P(\alpha_k) x_k$ con matrice $P(\alpha_k)$ politopica.

Fissiamo uno scalare $\varepsilon \in (0,1)$ e dalla condizione (3.2.8) ricaviamo, seguendo i passaggi del caso gain-scheduling e aggiungendo la minimizzazione del condition number della matrice di Lyapunov, le seguenti LMIs:

$$P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}; \quad \tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad \tilde{L}_i \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (3.3.18)$$

$$\min \quad \kappa > 0 \quad (3.3.19)$$

$$\sigma_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.3.20)$$

$$I \leq \hat{P}_i \leq \kappa I \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon P_i & \tilde{\Sigma}_j^T & 0 \\ \tilde{\Sigma}_j & 2\sigma_j I & P_j \\ 0 & P_j & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (3.3.22)$$

con:

$$\tilde{\Sigma}_j = \begin{bmatrix} \sigma_j A_j - B\tilde{K}_j & B\tilde{K}_j \\ \sigma_j(A_j - A_{nom}) & \sigma_j A_{nom} - \tilde{L}_j C \end{bmatrix} \quad (3.3.23)$$

Se il problema ammette soluzione, si ha:

$$K_i = \tilde{K}_i/\sigma_i; \quad L_i = \tilde{L}_i/\sigma_i \quad (3.3.24)$$

$$m = \sqrt{\kappa}; \quad a = \sqrt{\varepsilon} \quad (3.3.25)$$

$$\rho < \frac{1-a}{m}; \quad \beta = a + m\rho; \quad L^* = -\log_\beta(m) \quad (3.3.26)$$

Capitolo 4

Simulazioni

In questo capitolo verranno presentati degli esempi di applicazione dei risultati visti nei precedenti capitoli, realizzati in ambiente *MATLAB*. Le LMI sono state risolte sfruttando la libreria *YALMIP* con il solver *SeDuMi*.

4.1 Metodo di Eulero per la discretizzazione

La discretizzazione dei modelli a tempo continuo dei sistemi fisici presentati in questo capitolo verrà eseguita con il cosiddetto metodo di Eulero in avanti: esso consiste nell'approssimare un'equazione differenziale con una alle differenze sostituendo l'operazione di derivazione con un rapporto incrementale calcolato su un intervallo di tempo sufficientemente breve (metodo alle differenze finite).

Consideriamo il caso di un'equazione lineare:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) \quad (4.1.1)$$

Sostituiamo al termine derivato il corrispondente rapporto incrementale calcolato su un intervallo di tempo T :

$$\frac{x(t+T) - x(t)}{T} = A(t)x(t) + Bu(t) \quad (4.1.2)$$

$$x(t+T) - x(t) = TA(t)x(t) + TBu(t) \quad (4.1.3)$$

$$x(t+T) = [I + TA(t)]x(t) + TBu(t) \quad (4.1.4)$$

$$t = kT \quad x_{k+1} = [I + TA(k)]x_k + TBu_k \quad (4.1.5)$$

In definitiva quindi si ha $A^d = I + TA^c$; $B^d = TB^c$. Osserviamo come tale metodo conservi l'eventuale rappresentazione polinomica della matrice della dinamica, infatti se $A^c = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i^c$, allora

$$A^d = I + T \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i^c = \sum_{i=1}^N \alpha_i (I + TA_i^c) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i^d \quad (4.1.6)$$

4.2 Stabilizzazione pendolo linearizzato

Come primo esempio consideriamo il seguente sistema lineare, ottenuto dalla linearizzazione del modello di un pendolo nell'intorno del suo punto di equilibrio instabile:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -b(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (4.2.1)$$

Il vettore di stato $x(t)$ ha come componenti la posizione $\theta(t)$ e la velocità angolare $\dot{\theta}(t)$ del pendolo, mentre l'ingresso $u(t)$ rappresenta la coppia esercitata sul pendolo. Assumendo come valori dei parametri $g = 9.8ms^{-2}$, $l = 1m$, $m = 1kg$, $b(t) \in [0, 0.2]s^{-1}$ e discretizzando con il metodo di Eulero con un passo $T = 0.1s$ si ottengono le matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.98 & 0.98 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.98 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

Applicando le LMIs per il controllo gain-scheduling (2.2.11) si ottengono i seguenti guadagni per la legge di controllo:

$$K_1 = [-14.5368 \quad -9.8047] \quad K_2 = [-14.5368 \quad -10.0047] \quad (4.2.3)$$

Scegliendo invece l'approccio slowly-varying, dalle LMIs (3.2.25), fissando $\varepsilon = 0.95^2$ si ottengono i seguenti guadagni:

$$K_1 = [-15.5203 \quad -10.5894] \quad K_2 = [-15.5204 \quad -10.7894] \quad (4.2.4)$$

Il valori $m = \sqrt{\nu} = 1.7148$ e $a = \sqrt{\varepsilon} = 0.95$ implicano $\rho < \frac{1-a}{m} = 0.0292$. Scegliendo $\rho = 0.017$ si ha $\beta = a + m\rho = 0.9792$ da cui $L^* = -\log_{\beta}(m) = 25.5846$. Pertanto il sistema a ciclo chiuso risulta stabile aggiornando la legge di controllo ogni 25 passi purché la norma della variazione della matrice della dinamica si mantenga minore di ρ .

Consideriamo come realizzazione quella che si ottiene con:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.08 \sin(k) \\ 0.5 - 0.08 \sin(k) \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

In figura (4.1) sono riportate le simulazioni effettuate su tale realizzazione, a partire dallo stato iniziale $x_0 = (0.1, 0.1)^T$ per una durata di 10 secondi (100 passi di campionamento): si può osservare come il sistema converga al punto di equilibrio con la stessa velocità, a fronte di un notevole risparmio computazionale con il controllore slowly-varying il quale ha avuto bisogno di sole 4 misurazioni del parametro α_k .

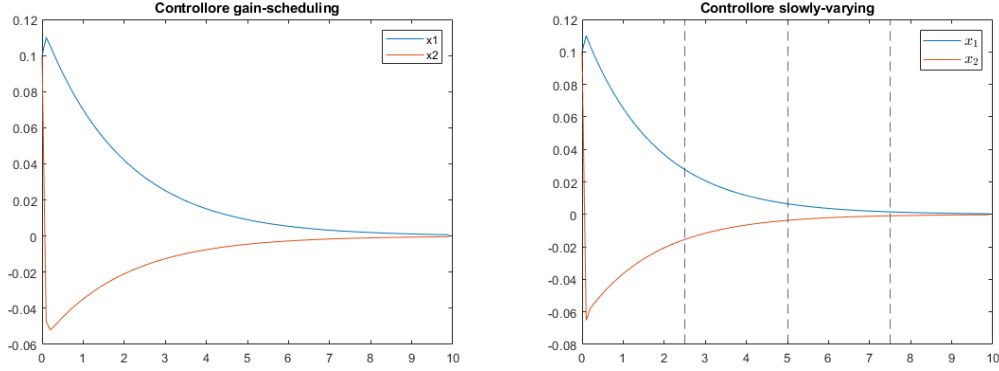


Figura 4.1. Simulazioni pendolo linearizzato

4.3 Stabilizzazione sistema massa-molla-smorzatore

Come secondo esempio consideriamo il sistema massa-molla-smorzatore descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$m\Delta\ddot{x} + c(t)\Delta\dot{x} + k(t)\Delta x = F(t) \quad (4.3.1)$$

I valori dei parametri che assumiamo sono:

$$m = 1 \text{ kg} \quad (4.3.2)$$

$$c(t) \in [0.6, 1.4] \text{ N/(ms}^{-1}\text{)} \quad (4.3.3)$$

$$k(t) \in [1.4, 2.6] \text{ N/m} \quad (4.3.4)$$

Il modello in spazio di stato del sistema è il seguente, ponendo $x(t) = (\Delta x(t), \Delta \dot{x}(t))^T$, $u(t) = F(t)$:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{m} & -\frac{c(t)}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (4.3.5)$$

La matrice della dinamica appartiene all'insieme politopico definito dai seguenti $N = 4$ vertici:

$$\begin{aligned} A_1^c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4 & -0.6 \end{bmatrix} & A_2^c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4 & -1.4 \end{bmatrix} \\ A_3^c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6 & -0.6 \end{bmatrix} & A_4^c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6 & -1.4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Andiamo a discretizzare il sistema con il metodo di Eulero considerando un passo $T = 0.1s$ ottenendo le matrici:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.14 & 0.94 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.14 & 0.86 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.26 & 0.94 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.26 & 0.86 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$B^c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

Sfruttando l'approccio gain-scheduling, risolvendo le LMI (2.2.11) si ottengono come vertici del politopo della matrice di guadagno della legge di controllo $u = Kx$ le matrici:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -3.1489 & -9.1309 \end{bmatrix} & K_2 &= \begin{bmatrix} -3.1489 & -8.3309 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -1.9489 & -9.1309 \end{bmatrix} & K_4 &= \begin{bmatrix} -1.9489 & -8.3309 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Scegliendo invece l'approccio slowly-varying con le LMI (3.2.25), ponendo $\varepsilon = 0.95^2$ si hanno le matrici:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -3.6541 & -8.6665 \end{bmatrix} & K_2 &= \begin{bmatrix} -3.6541 & -7.8665 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -2.4541 & -8.6665 \end{bmatrix} & K_4 &= \begin{bmatrix} -2.4541 & -7.8665 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Si ricava inoltre $m = \sqrt{1/\nu} = 1.7148$, $a = \sqrt{\varepsilon} = 0.95$, $\rho < \frac{1-a}{m} = 0.0292$. Scegliendo $\rho = 0.02$ si ha $\beta = a + m\rho = 0.9843$ da cui $L^* = -\log_\beta(m) = 34.0672$. Pertanto il sistema a ciclo chiuso è stabile se si aggiorna la matrice della legge di controllo ogni 34 passi, purché la norma della variazione della matrice della dinamica si mantenga minore di ρ .

Una particolare realizzazione del sistema che soddisfa tale condizione è ad esempio:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0.25 - 0.25k/300 \\ 0.75 - 0.75k/300 \\ 0.75k/300 \\ 0.25k/300 \end{pmatrix} \quad k \leq 300 \quad (4.3.11)$$

Su questa realizzazione sono state effettuate le simulazioni sia con l'approccio gain-scheduling che con quello slowly-varying, in entrambi i casi si è simulato per un tempo di 100 passi (10 secondi) il sistema a ciclo chiuso in evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $x_0 = (1, 0)^T$.

Come si può vedere in figura 4.2, le prestazioni dei due sistemi di controllo sono pressoché identiche, ma con il controllore slowly-varying sono state effettuate soltanto 3 misurazioni del parametro α_k , una all'istante iniziale e le altre due negli istanti segnalati dalle linee tratteggiate verticali, mentre con il controllore gain.scheduling la misurazione è avvenuta a tutti gli istanti di tempo.

4.4 Sistema di controllo con osservatore

Consideriamo il seguente sistema a tempo discreto:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 + p_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (4.4.1a)$$

$$y_k = [1 \ 0 \ 2] x_k \quad (4.4.1b)$$

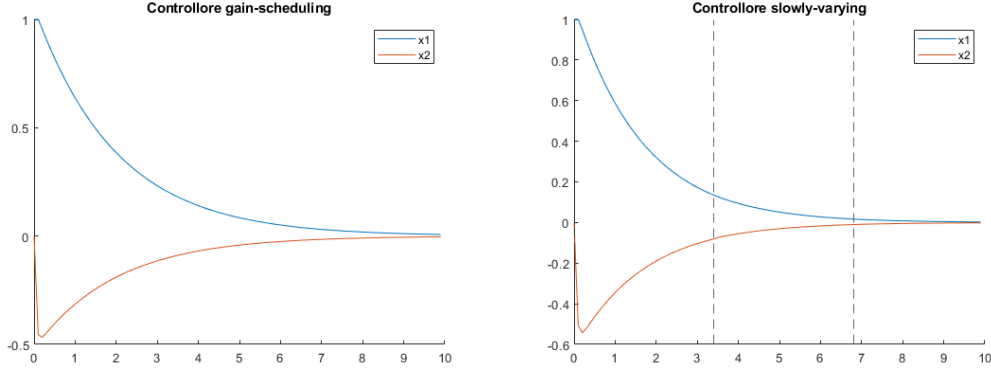


Figura 4.2. Simulazioni sistema massa-molla-smorzatore

con $p \in [0, 0.5]$. Gli $N = 2$ vertici del politopo della matrice della dinamica sono pertanto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

Scegliendo l'approccio gain-scheduling con le LMIs (2.3.18) si ottengono le matrici di guadagno del controllore:

$$\begin{aligned} K_1 &= [0.0512 \quad 0.1999 \quad 0.1640] \\ K_2 &= [0.0459 \quad 0.1786 \quad 0.3529] \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

e quelle dell'osservatore:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0772 \\ 0.0051 \\ 0.2349 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.0794 \\ 0.0096 \\ 0.4447 \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Per applicare le LMIs relative al controllo slowly-varying con osservatore (3.3.18)-(3.3.22), si farà riferimento alla matrice $A_{nom} = (A_1 + A_2)/2$.

Fissando $\varepsilon = 0.95^2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} K_1 &= [0.0475 \quad 0.1200 \quad 0.1244] \\ K_2 &= [0.0212 \quad 0.1313 \quad 0.3455] \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0778 \\ 0.0042 \\ 0.3303 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.0949 \\ -0.0044 \\ 0.4614 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

Si ricava inoltre $m = \sqrt{\kappa} = 1.2304$, $a = \sqrt{\varepsilon} = 0.95$, $\rho < \frac{1-a}{m} = 0.0406$. Scegliendo $\rho = 0.03$ si ha $\beta = a + m\rho = 0.9869$ da cui $L^* = -\log_{\beta}(m) = 15.7371$. Il sistema a

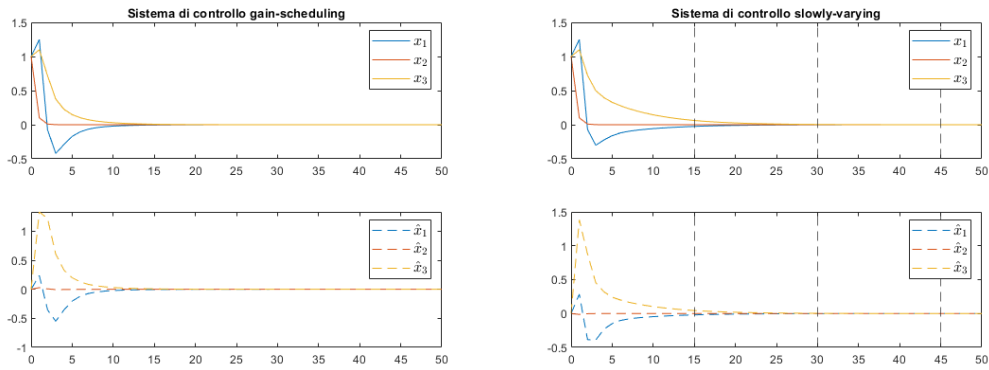


Figura 4.3. Simulazioni sistema di controllo con osservatore

ciclo chiuso è stabile purché la norma della variazione della matrice della dinamica si mantenga minore di $\rho/\sqrt{2}$.

La realizzazione su cui sono state effettuate le simulazioni in figura 4.3 è la seguente.

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} \frac{3k}{1000} \\ 1 - \frac{3k}{1000} \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

Anche in questo caso la differenza di prestazione tra i due sistemi di controllo è irrilevante e il risparmio computazionale è notevole, viste le sole 4 misurazioni del parametro α_k nel sistema di controllo slowly-varying contro le 50 di quello gain-scheduling.

Conclusione

Si è pertanto visto come con il sistema di controllo slowly-varying si riesca ad ottenere un notevole risparmio computazionale rispetto ai classici controllori gain-scheduling che misurano il parametro tempo variante in ogni passo di campionamento.

Rimane tuttavia evidente come l'applicazione del controllore slowly-varying necessiti di condizioni aggiuntive sul processo che non sempre possono essere soddisfatte. In particolare è necessaria una buona conoscenza a priori del comportamento del parametro tempo variante, che non sempre è facile da studiare su sistemi fisici.

Se le condizioni sono verificate l'approccio slowly-varying permette di ridurre il passo di campionamento e quindi l'impatto della discretizzazione rispetto al sistema fisico a tempo continuo, difatti questo tipo di tecnica è molto utile per sistemi che hanno una dinamica veloce, e che quindi richiedono passi di campionamento brevi, ma non hanno una tempo-varianza così accentuata, permettendo quindi di evitare la misurazione costante dei parametri.

Con l'ausilio delle simulazioni MATLAB è stato possibile dimostrare anche nella pratica come, nel caso in cui le condizioni siano soddisfatte, la differenza di prestazioni tra i due sistemi di controllo sia trascurabile a fronte di un abbattimento del numero di misurazioni del parametro, a giustificare quindi l'uso di tale metodo.

In definitiva le due tecniche sono entrambe valide in situazioni diverse, il controllore gain-scheduling è ottimo nel caso in cui non si abbia una conoscenza approfondita del processo e non si abbia una forte necessità di abbattere il carico computazionale e ha come vantaggio una più semplice implementazione, il controllore slowly-varying è invece consigliato quando si ha una buona conoscenza del comportamento dei parametri tempo varianti del processo e sia necessario un risparmio computazionale all'interno del passo di campionamento.

Bibliografia

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.
- [2] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261 – 265, 1999.
- [3] L. Jetto and V. Orsini. Switched supervised stabilization of linear time-varying systems with bounded parameter variation rate. In *2007 American Control Conference*, pages 2096–2102, 2007.
- [4] L. Jetto and V. Orsini. Relaxed conditions for the exponential stability of a class of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7):1580–1585, 2009.
- [5] L. Jetto and V. Orsini. *Relaxed stability conditions for linear time-varying systems with applications to the robust stabilization problem*, pages 259–289. Nova science, 01 2011.
- [6] Q. Rong and G. W. Irwin. Lmi-based control design for discrete polytopic lpv systems. In *2003 European Control Conference (ECC)*, pages 1489–1494, 2003.
- [7] R. Toth. *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*. Lecture notes in control and information sciences. Springer, Germany, 2010.