



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Approccio Hamiltoniano e simulazioni numeriche per lo studio del moto di una molla risonante e oscillante

**Hamiltonian approach and numerical simulations for the study of the
motion of a resonant swinging spring**

Candidato:
Nicola Cionfrini

Relatore:
Prof. Marco Coco

Anno Accademico 2023-2024



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Approccio Hamiltoniano e simulazioni numeriche per lo studio del moto di una molla risonante e oscillante

**Hamiltonian approach and numerical simulations for the study of the
motion of a resonant swinging spring**

Candidato:
Nicola Cionfrini

Relatore:
Prof. Marco Coco

Anno Accademico 2023-2024

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA
Via Brezze Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

A tutti coloro che ci sono sempre stati

Ringraziamenti

Un GRAZIE alla mia ragazza per essere stata sempre presente ed avermi aiutato nei momenti più difficili. Non dimenticherò mai quelle parole che hai speso per sollevarmi. Sai essere la mia cura ed il mio posto sicuro.

Un GRAZIE alla mia famiglia per avermi sostenuto ed insegnato a credere in me stesso.

Un GRAZIE ai Drughi perché avete dimostrato di essere quelle persone di cui mi potrò sempre fidare. Tenete bene a mente che questa è la seconda dedica che vi faccio, perché siete già compresi in quella precedente.

Un GRAZIE a tutti gli "ingegneri quelli seri" per avermi fatto trascorrere i tre anni più belli della mia vita. Senza il vostro aiuto non ce l'avrei mai fatta.

Un GRAZIE al compagno di vita. Con te ho dei ricordi indelebili.

Un GRAZIE al miglior vicino di banco della storia. La nostra intesa fuori e dentro al campo è inarrivabile.

Un GRAZIE a tutti coloro che ci sono sempre stati.

Un GRAZIE a tutti coloro che non hanno creduto in me. Siete la mia motivazione.

Un GRAZIE al professor Marco Coco per la sua professionalità e disponibilità.

Un GRAZIE a me stesso per non aver mai mollato, anche nei momenti più bui.

Ancona, Luglio 2024

Nicola Cionfrini

Indice

1	Introduzione	1
2	Preliminari teorici	5
2.1	Il Moto Armonico	5
2.2	Caso forzato	6
2.3	Caso smorzato	7
2.4	Caso smorzato e forzato	9
3	Pulsazione e precessione di un pendolo elastico risonante	11
3.1	Equazioni della dinamica	11
3.1.1	Equazioni mediate nel tempo	12
3.1.2	Equazioni delle tre onde	12
3.1.3	Riduzione del sistema	15
3.1.4	Le equazioni per $ C ^2$	16
3.2	Modulazione a piccola ampiezza degli stati stazionari	17
3.2.1	Moto in stato stazionario	17
3.2.2	Perturbazione riguardo al moto ellittico-parabolico	18
3.3	Soluzioni analitiche delle equazioni delle tre onde	19
3.3.1	Soluzione nella funzione ellittica di Weirestrass	19
3.3.2	Soluzione nella funzione ellittica di Jacobi	22
3.4	Formule approssimate per l'angolo di precessione	26
4	Simulazione numerica	29
4.1	Soluzioni numeriche delle equazioni differenziali	29
4.2	Determinazione dell'angolo di precessione	31
4.3	Determinazione dell'ampiezza di pulsazione	32
5	Conclusione	37
6	Appendice	39
6.1	Appendice A. Relazioni di Manley-Rowe	39
6.2	Appendice B. Modi ellittico-parabolici	41
6.3	Appendice C. Soluzioni periodiche	43
6.4	Appendice D. Metodo di Eulero esplicito	46
6.4.1	Metodo	46
6.4.2	Algoritmo	47

Indice

6.4.3 Convergenza 48

Elenco delle figure

3.1	Il pendolo elastico.	11
3.2	Polinomiale Φ_0 come funzione di $ C ^2$	16
3.3	La funzione \mathcal{P} di Weirestrass.	20
3.4	Contorni C_1 e C_2 nel piano Z	27
4.1	Andamento temporale di $\xi, \eta, \zeta, C ^2, \phi, \Delta\phi$	30
4.2	DGC	33
4.3	ALT	33
4.4	OPT	33
4.5	P-esatto	35
4.6	P-approx	35
6.1	Moti periodici.	45
6.2	Metodo di Eulero esplicito.	46
6.3	Convergenza del metodo di Eulero.	48

Capitolo 1

Introduzione

Le oscillazioni del pendolo elastico offrono una piattaforma ideale per scavare a fondo nei principi della meccanica classica. Il presente lavoro di tesi ripercorre tutte le tappe necessarie ad uno studio approfondito del moto tridimensionale di una molla risonante e oscillante. Più nello specifico, investiga lo scambio di energia tra le oscillazioni quasi-verticali e quasi-orizzontali (pulsazione) e la variazione dell'angolo azimutale (precessione). Dunque, la domanda alla base del lavoro di tesi sorge spontanea: "Si può ricostruire l'intera dinamica del sistema senza risolvere le equazioni, date determinate condizioni iniziali?" Prima di rispondere, l'elaborato si preoccupa di gettare, al principio, le basi del moto armonico analizzandone le tre casistiche principali. Come si può evincere già dal titolo, la parte centrale e di conseguenza tutto il resto del lavoro, si basa su una forte supposizione iniziale: il rapporto tra le frequenze dei due modi di oscillare è 2:1, situazione in cui si perviene al fenomeno della risonanza; vi è, così, un trasferimento periodico di energia tra i due modi. L'approccio Hamiltoniano consente di ottenere le equazioni delle tre onde a partire dalla costruzione della Lagrangiana media; sviscerando le condizioni imposte dall'articolo sulle parentesi di Poisson, è possibile determinare la coordinata p e l'impulso q utilizzate per la scrittura in forma canonica delle equazioni differenziali. Questo passaggio è cruciale per la dimostrazione a pagina 13. Lo step successivo consiste nella riduzione del sistema: la scrittura in forma polare delle equazioni delle tre onde, solleva il problema di ricavare le tre ampiezze e le tre fasi. Le prime tre sono legate tra loro dalle relazioni di Manley-Rowe, dunque è sufficiente trovarne una sola ($|C|$), in forma chiusa in termini di funzioni ellittiche, per poi arrivare a tutte le altre; le tre fasi sono connesse tra loro mediante una costruzione periodica di ζ : trovare ξ e η per quadrature, consente di risalire facilmente a γ . A questo punto viene considerato il caso in cui le variazioni delle ampiezze rispetto ai loro valori medi sono piccole. Ciò consente di derivare stime semplici del periodo di pulsazione e del tasso di precessione; da queste due quantità, segue immediatamente l'angolo di precessione. Vengono successivamente trovate soluzioni analitiche "esatte" per le ampiezze e per le fasi utilizzando prima l'approccio di Weierstrass e poi quello di Jacobi. Tuttavia, le espressioni approssimate per l'angolo di precessione non derivano da quest'ultime ma vengono ricavate direttamente dalle equazioni delle tre onde. L'elaborato, infine, esamina i risultati ottenuti: vengono risolte le equazioni

Capitolo 1 Introduzione

differenziali che governano il sistema con il metodo di Eulero esplicito ed analizzati i relativi andamenti temporali; sono state plottate le tre formule approssimate per l'angolo di precessione e successivamente comparate, prendendo come riferimento i valori analitici "esatti"; in ultimo, è stata ricavata un'espressione approssimata dell'ampiezza di pulsazione. Questa è stata plottata e comparata con l'espressione analitica "esatta", conseguita mediante risoluzione della cubica $\Phi(|C|^2)$.

È necessario, però, fare le seguenti premesse:

- Il capitolo 2 è stato trascritto senza apporto critico dal libro “Paolo Biscari. Meccanica razionale. Springer Nature, 2022”.
- Il capitolo 3 è stato tradotto con l'utilizzo dell'intelligenza artificiale, a meno di termini non adeguati o tradotti male, dall'articolo “Peter Lynch and Conor Houghton. Pulsation and precession of the resonant swinging spring. Science Direct, 2004”; la traduzione è stata rivisitata in base ai criteri scelti per la redazione (per esempio l'utilizzo della scrittura in terza persona); tutte le figure utilizzate in questo capitolo sono state prese dallo stesso articolo citato in precedenza; tutte le formule sono state scritte autonomamente; a pagina 13 è stata dimostrata l'uguaglianza delle parentesi di Poisson e sono stati aggiunti commenti personali; a pagina 12 è stato scritto un commento sulle relazioni di Manley-Rowe; sempre a pagina 14 sono state aggiunte formule e commenti sull'ellisse istantaneo; a pagina 17 sono state aggiunte formule e commenti sulle EP-modes; a pagina 18 sono state aggiunte formule e commenti sul tasso di precessione.
- Il capitolo 4 è un rifacimento dell'analogo capitolo dell'articolo “Peter Lynch and Conor Houghton. Pulsation and precession of the resonant swinging spring. Science Direct, 2004”; è stato riformulato secondo le esigenze del lavoro di tesi; la sezione 4.1 è stata scritta autonomamente con formule ricavate e commenti personali; le sezioni 4.2 e 4.3 sono state tradotte con l'utilizzo dell'intelligenza artificiale, a meno di termini non adeguati o tradotti male, dall'articolo; la traduzione è stata rivisitata in base ai criteri scelti per la redazione (per esempio l'utilizzo della scrittura in terza persona); a pagina 31 la formula relativa alla cubica è stata ricavata e scritta autonomamente; a pagina 32 ne ho riportato le soluzioni e la differenza tra due delle radici; la figura 4.5 è stata ottenuta utilizzando il software “Matlab” (come anche le altre figure della simulazione numerica) ma questa in particolare è stata ricavata a partire da un'equazione di base risolta con l'utilizzo del software “Wolfram Mathematica 11”
- Il capitolo 6 è stato tradotto con l'utilizzo dell'intelligenza artificiale, a meno di termini non adeguati o tradotti male e a meno sezioni già in italiano trascritte, degli articoli elencati nella bibliografia; la traduzione è stata rivisitata in base ai criteri scelti per la redazione (per esempio l'utilizzo della

scrittura in terza persona); tutte le figure utilizzate in questo capitolo sono state prese dagli articoli citati in bibliografia; tutte le formule sono state scritte autonomamente; da pagina 46 a 48 vi è una rivisitazione del pdf citato in bibliografia in quanto originalmente troppo schematico.

Capitolo 2

Preliminari teorici

2.1 Il Moto Armonico

Il moto armonico è un moto di tipo oscillatorio caratterizzato da un'equazione differenziale del secondo ordine espressa come:

$$mq'' + kq = 0.$$

$q(t)$ è la coordinata libera del sistema. Questa equazione può essere scritta nella forma:

$$q'' + \omega^2 q = 0$$

dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$ e definisce delle oscillazioni lineari libere.

Il moto armonico sarà descritto da due costanti A e B secondo l'equazione:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Allo stesso modo si può scrivere:

$$q(t) = r \cos(\omega t + \sigma)$$

Le due equazioni sono equivalenti quando l'ampiezza r scelta risulta essere uguale a:

$$r^2 = A^2 + B^2.$$

Un'altra grandezza importante è la fase σ che si ottiene da:

$$\cos \sigma = \frac{A}{r}, \quad \sin \sigma = -\frac{B}{r}.$$

I valori di A e B sono forniti dalle condizioni iniziali, cioè dai valori q_0 e \dot{q}_0 assunte dal sistema per $t = 0$. Nello specifico si ha che

$$q_0 = A, \quad \dot{q}_0 = \omega B.$$

I rispettivi valori di r e σ sono dati da:

$$r^2 = q_0^2 + \frac{\dot{q}_0}{\omega^2}, \quad \tan \sigma = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega}.$$

Qualunque siano le condizioni iniziali il punto materiale compie oscillazioni armoniche di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ampiezza r e fase iniziale σ .

2.2 Caso forzato

Un possibile caso ottenuto a partire dal moto armonico è quello di un punto sul quale agisce una forza $F(t)$ detta forzante. L'equazione del moto può essere scritta nella forma:

$$q'' + \omega^2 q = f(t).$$

In cui $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ e definisce un'oscillazione lineare forzata. La soluzione in questo caso è:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \tilde{q}(t).$$

In cui si ha $\tilde{q}(t)$ soluzione particolare.

Risulta essere importante approfondire il caso di una forza sinusoidale:

$$f(t) = \Gamma \cos(vt), \quad (\Gamma > 0).$$

Applicando l'ipotesi di $v \neq \omega$ una soluzione particolare è:

$$\tilde{q}(t) = \frac{\Gamma}{\omega^2 - v^2} \cos(vt).$$

Da cui si ottiene:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\Gamma}{\omega^2 - v^2} \cos(vt).$$

Introducendo una nuova variabile $\epsilon = v - \omega$ è verificato che

$$\cos(vt) = \cos(\epsilon t + \omega t) = \cos(\epsilon t) \cos(\omega t) + \sin(\epsilon t) \sin(\omega t).$$

$$\omega^2 - v^2 = -(2\omega + \epsilon)\epsilon.$$

Sostituendo i termini si ottiene:

$$q(t) = \left[-\frac{\Gamma}{(2\omega + \epsilon)\epsilon} \cos(\epsilon t) + A \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{\Gamma}{(2\omega + \epsilon)\epsilon} \sin(\epsilon t) + B \right] \sin(\omega t).$$

Per ϵ molto piccolo le grandezze in gioco variano molto lentamente nel tempo dando luogo ad oscillazioni con ampiezza modulata lentamente detta battimento. Per $\epsilon = 0$ risulta che $v = \omega$ ed in particolare si ha:

$$\tilde{q}(t) = \frac{\Gamma}{2\omega^2} [wt \sin(\omega t) - \cos(\omega t)],$$

pertanto:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\Gamma}{2\omega^2} [wt \sin(\omega t) - \cos(\omega t)],$$

con q_0 e \dot{q}_0 condizioni iniziali. Da questa equazione si deduce che nel caso di un moto armonico forzato con forzante sinusoidale, l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo. Tale fenomeno, detto di risonanza, avviene quando viene applicata una sollecitazione periodica al sistema di frequenza pari alla sua oscillazione propria ovvero la frequenza alla quale il sistema oscilla autonomamente quando è libero di farlo, senza essere influenzato da forze esterne.

2.3 Caso smorzato

In questo caso si considera il moto armonico tenendo conto della resistenza del mezzo in cui avviene. Si applica una forza di natura viscosa che si oppone al moto in maniera proporzionale alla velocità del punto pari a $-h\dot{q}$. h è un coefficiente che quantifica il smorzamento. L'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{q} + h\dot{q} + kq = 0. \quad (h > 0, k > 0).$$

Moltiplicando l'equazione per \dot{q} e sostituendo $\ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{q}^2$ e $\dot{q} = \frac{1}{2} \frac{dq^2}{dt}$ si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 \right) = -h \dot{q}.$$

Si può osservare che, nel caso in cui $h = 0$, la somma dell'energia potenziale e l'energia cinetica si conserva:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 \right) = E_0.$$

E_0 è l'energia totale del sistema nell'istante iniziale.

Nel caso in cui $h > 0$, invece l'equazione differenziale può essere espressa come:

$$q'' + 2\gamma q' + \omega_0^2 q = 0 \quad \left(\gamma = \frac{h}{2m} > 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right),$$

γ è definito fattore di smorzamento.

Capitolo 2 Preliminari teorici

La soluzione generale dell'equazione differenziale si ottiene da:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Il discriminante è $(\gamma^2 - \omega_0^2)$ e definisce tre possibilità:

1. $(\gamma^2 - \omega_0^2) > 0, (\gamma > \omega_0) \Leftrightarrow k < \frac{h^2}{4m}$
2. $(\gamma^2 - \omega_0^2) = 0, (\gamma = \omega_0) \Leftrightarrow k = \frac{h^2}{4m}$
3. $(\gamma^2 - \omega_0^2) < 0, (\gamma < \omega_0) \Leftrightarrow k > \frac{h^2}{4m}$

Studiando i vari casi si ottiene:

1. $\gamma > \omega_0$ si definisce moto sovrasmorzato, le radici di λ sono reali e diverse tra loro: definito $w^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -\gamma - w, \lambda_2 = -\gamma + w.$$

pertanto l'equazione diventa:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 \exp(wt) + c_2 \exp(-wt)],$$

c_1 e c_2 sono due quantità dipendenti dalle condizioni iniziali:

$$q_0 = c_1 + c_2, \dot{q}_0 = -\gamma(c_1 + c_2) + w(c_2 - c_1).$$

Segue che $c_1 = \frac{q_0}{2} - \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{2w}$ e $c_2 = \frac{q_0}{2} + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{2w}$. Sostituendo si ottiene:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)\left[q_0 \cosh(wt) + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{w} \sinh(wt)\right].$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

2. $\gamma = \omega_0$ si definisce smorzamento critico, le radici di λ sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione è:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 + c_2 t].$$

Dalle condizioni iniziali si ottengono c_1 e c_2 tali che

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[q_0 + (\dot{q}_0 + \gamma q_0)t].$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

3. $\gamma < \omega_0$ si definisce oscillazione smorzata, le radici di λ sono complesse coniugate: definito $w^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -\gamma - iw, \lambda_2 = -\gamma + iw.$$

Pertanto l'equazione diventa:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$$

e sostituendo c_1 e c_2 determinati dalle condizioni iniziali, si ha:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)\left[q_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{\omega} \sin(\omega t)\right].$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

In tutte le casistiche, a prescindere dalle condizioni iniziali, il moto risulta essere smorzato dal termine $\exp(-\gamma t)$.

2.4 Caso smorzato e forzato

Si prende in considerazione il caso smorzato a cui viene applicata una forzante sinusoidale. L'equazione del moto è:

$$q'' + 2\gamma q' + \omega_0^2 q = \Gamma \cos(\omega t).$$

Si introduce una funzione incognita a valori complessi $\epsilon(t)$ necessaria per dedurre una soluzione particolare dell'equazione e si ottiene:

$$\epsilon'' + 2\gamma \epsilon' + \omega_0^2 \epsilon = \Gamma \exp(i\omega t).$$

Si osserva che $\text{Re}[\Gamma \exp(i\omega t)] = \Gamma \cos(\omega t)$. Una possibile soluzione è della forma

$$\epsilon(t) = A \exp(i\omega t),$$

da cui si ha:

$$\epsilon'(t) = A i \omega \exp(i\omega t), \quad \epsilon''(t) = -A \omega^2 \exp(i\omega t).$$

Per l'uguaglianza si ha,

$$A = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \exp(-i\delta),$$

δ è definito dalle relazioni:

$$\cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \sin \delta = \frac{2\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Pertanto :

$$\tan \delta = \frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Capitolo 2 Preliminari teorici

La soluzione particolare si definisce come:

$$\epsilon(t) = r \exp[i(vt - \delta)],$$

nella quale $r = \sqrt{\frac{\Gamma}{(\omega_0^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}}$. La parte reale di questa equazione fornisce un integrale particolare reale dell'equazione del moto:

$$x''(t) = r \cos(vt - \delta).$$

L'ampiezza dell'oscillazione della soluzione particolare r è sempre finita in quanto fornita da un rapporto con denominatore mai nullo. [1]

Capitolo 3

Pulsazione e precessione di un pendolo elastico risonante

3.1 Equazioni della dinamica

Il sistema fisico in questione è un pendolo elastico costituito da una massa sospesa da un punto fisso tramite una molla in movimento sotto l'azione g della gravità. Supponiamo una lunghezza non tesa di l_0 , lunghezza l all'equilibrio, costante della molla k e massa m . La Lagrangiana, approssimata all'ordine cubico nelle ampiezze, è

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}[\omega_R^2(x^2 + y^2) + \omega_Z^2 z^2] + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2)z, \quad (3.1)$$

Dove x , y e z sono le coordinate cartesiane centrate sul punto di equilibrio, $\omega_R = \sqrt{g/l}$ è la frequenza del moto pendolare lineare, $\omega_Z = \sqrt{k/m}$ è la frequenza delle sue oscillazioni elastiche e $\lambda = l_0\omega_Z^2/l^2$. Ci sono due costanti del moto, l'energia totale e il momento angolare rispetto alla verticale, e il sistema non è integrabile.

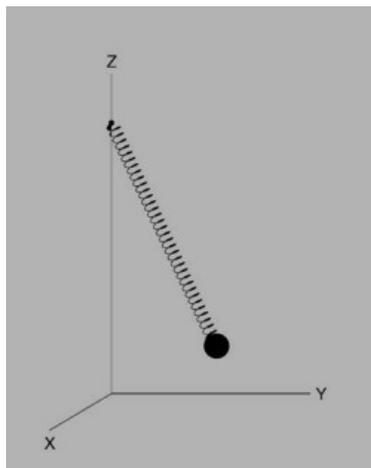


Figura 3.1: Il pendolo elastico.

3.1.1 Equazioni mediate nel tempo

Si applica, a questo punto, la tecnica della Lagrangiana media, concentrandosi sul caso risonante $\omega_Z = 2\omega_R$. Si assume che la soluzione abbia la forma:

$$x = \Re[a(t) \exp(i\omega_R t)], \quad (3.2)$$

$$y = \Re[b(t) \exp(i\omega_R t)], \quad (3.3)$$

$$z = \Re[c(t) \exp(2i\omega_R t)]. \quad (3.4)$$

Si assume che i coefficienti $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ varino su una scala temporale molto più lunga rispetto a quella delle oscillazioni, $\tau = 1/\omega_R$. La Lagrangiana viene mediata su questo tempo, ottenendo

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{2} \omega_R [\Im(\dot{a}a^* + \dot{b}b^* + \dot{c}c^*) + \Re(\mathbf{k}(a^2 + b^2)c^*)], \quad (3.5)$$

dove $\mathbf{k} = \lambda/4\omega_R$. Le equazioni di Hamilton risultanti sono le equazioni di modulazione per la dinamica del sistema:

$$i\dot{a} = \mathbf{k}a^*c, \quad (3.6)$$

$$i\dot{b} = \mathbf{k}b^*c, \quad (3.7)$$

$$i\dot{c} = \frac{1}{4}\mathbf{k}(a^2 + b^2). \quad (3.8)$$

3.1.2 Equazioni delle tre onde

Ora si applica un cambio delle variabili:

$$A = \frac{1}{2}\mathbf{k}(a + ib), \quad B = \frac{1}{2}\mathbf{k}(a - ib), \quad C = \mathbf{k}c. \quad (3.9)$$

Dunque le equazioni per la dinamica del sistema assumono la seguente forma:

$$i\dot{A} = B^*C, \quad (3.10)$$

$$i\dot{B} = CA^*, \quad (3.11)$$

$$i\dot{C} = AB. \quad (3.12)$$

Queste tre equazioni differenziali per le grandezze complesse A , B e C che variano lentamente sono le equazioni delle tre onde. Esse governano la risonanza delle onde quadratiche nei fluidi e nei plasmi. Le equazioni delle tre onde sono caratterizzate dai seguenti tre invarianti:

$$H = \frac{1}{2}(ABC^* + A^*B^*C) = \Re(ABC^*), \quad (3.13)$$

$$N = |A|^2 + |B|^2 + 2|C|^2, \quad (3.14)$$

$$J = |A|^2 - |B|^2. \quad (3.15)$$

Queste equazioni sono completamente integrabili. Possono essere scritte in forma canonica con l'Hamiltoniana H e le parentesi di Poisson $[A, A^*] = [B, B^*] = [C, C^*] = -2i$, come

$$i\dot{A} = i\left\{A, H\right\} = 2\frac{\partial H}{\partial A^*}, \quad (3.16)$$

$$i\dot{B} = i\left\{B, H\right\} = 2\frac{\partial H}{\partial B^*}, \quad (3.17)$$

$$i\dot{C} = i\left\{C, H\right\} = 2\frac{\partial H}{\partial C^*}. \quad (3.18)$$

La prima uguaglianza di ognuna delle tre equazioni sopra riportate non è così immediata. La nuova variabile C , infatti, non è indipendente da a e b . Derivando A nel tempo e sostituendone l'espressione in (3.10), si ottiene

$$i\left[\frac{1}{2}k(\dot{a} + i\dot{b})\right] = \frac{1}{2}k^2(a + ib)c,$$

da cui, con qualche manipolazione algebrica, si ricava:

$$c = \frac{1}{k(a^2 + b^2)}[\dot{a}b - a\dot{b} + i(\dot{a}a + b\dot{b})].$$

A questo punto le nuove espressioni di C e C^* sono ottenute conseguentemente. Di vitale importanza è ora il calcolo della $H = H(a, b, \dot{a}, \dot{b})$, trovata semplicemente sostituendo C e C^* in (3.13):

$$H = \frac{1}{4}k^2(\dot{a}b - a\dot{b}).$$

Si procede ora con lo sviluppo delle parentesi di Poisson presenti nella (3.16), prendendo come coordinata e impulso rispettivamente $p = \frac{1}{2}ka$ e $q = \frac{1}{2}kb$:

$$i\left\{A, H\right\} = i\left[\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right] = i\left[\frac{1}{2}k(\dot{a} + i\dot{b})\right] = i\dot{A}.$$

La dimostrazione è analoga per (3.17) e (3.18).

Le seguenti combinazioni definite positive di N e J sono fisicamente significative:

$$N_+ = \frac{1}{2}(N + J) = |A|^2 + |C|^2, \quad N_- = \frac{1}{2}(N - J) = |B|^2 + |C|^2.$$

Queste combinazioni sono conosciute come relazioni di Manley-Rowe, di cui si trova un approfondimento in Appendice A. [2] Se l'energia dell'onda con scala intermedia (il terzo componente) cresce, sia le onde più piccole che quelle più grandi devono perdere energia. Allo stesso modo, i componenti più grandi e più piccoli crescono insieme a spese di quello intermedio. Poiché $J = N_+ - N_- = |A|^2 - |B|^2$ è costante, i quadrati delle ampiezze $|A|$ e $|B|$ aumentano e diminuiscono insieme in quantità uguali. Quindi, è impossibile che l'energia venga trasferita solo a scale più grandi o più piccole. Queste condizioni pongono forti vincoli sulla distribuzione dell'energia nell'atmosfera e sono la ragione principale per cui c'è una preponderanza di energia a grandi scale. Le relazioni di Manley-Rowe consentono l'eliminazione di due delle ampiezze, producendo un'unica equazione per la terza. Insieme all'Hamiltoniana H , forniscono tre costanti indipendenti del moto. Notiamo che H è invariante sotto le trasformazioni di simmetria:

$$(A, B, C) \rightarrow (Ae^{i\mathcal{X}}, Be^{-i\mathcal{X}}, C), \quad (3.19)$$

$$(A, B, C) \rightarrow (Ae^{i\mathcal{X}}, B, Ce^{i\mathcal{X}}), \quad (3.20)$$

$$(A, B, C) \rightarrow (A, Be^{i\mathcal{X}}, Ce^{i\mathcal{X}}). \quad (3.21)$$

Queste simmetrie sono associate, tramite il teorema di Noether, con le tre invarianti $[J, N_+, N_-]$. Due qualsiasi delle trasformazioni generano la terza. Questo riflette l'interdipendenza di J , N_+ e N_- .

[3] Introduciamo ora un'ellisse che approssima la proiezione orizzontale della traiettoria del pendolo. Si riprende la soluzione completa della componente orizzontale, riscritta in questo modo:

$$x = \Re[a \exp(i\omega_R t)] = |a| \cos(\omega_R t + \alpha),$$

$$y = \Re[b \exp(i\omega_R t)] = |b| \cos(\omega_R t + \beta),$$

Dove α e β sono le fasi di a e b . Si presume che le ampiezze e le fasi varino lentamente. Se queste vengono considerate costanti sul periodo τ , la proiezione orizzontale della traiettoria del pendolo data da (3.2) e (3.3) è un'ellisse centrale,

$$Px^2 + 2Qxy + Ry^2 = S,$$

dove $P = |b|^2$, $Q = -|ab| \cos(\alpha - \beta)$, $R = |a|^2$, e $S = J^2$. La sua orientazione ϕ rispetto all'asse x è data da

$$\tan 2\phi = \frac{2\Re(ab^*)}{aa^* - bb^*}. \quad (3.22)$$

Questo è equivalente all'equazione (4.20) in [3]. Usando la trasformazione (3.9), assume una forma ancora più semplice:

$$\tan 2\phi = \frac{\Im(AB^*)}{\Re(AB^*)} = \arg(AB^*). \quad (3.23)$$

Mentre A, B e C variano, l'orientazione ϕ cambia, causando la precessione dell'ellisse istantaneo. L'eccentricità dell'ellisse cambia anche, variando da (quasi-)circolare a altamente eccentrica; questo è il fenomeno della pulsazione.

3.1.3 Riduzione del sistema

Si riportano le grandezze complesse in forma polare, per ridurre il sistema:

$$A = |A| \exp(i\xi), \quad (3.24)$$

$$B = |B| \exp(i\eta), \quad (3.25)$$

$$C = |C| \exp(i\gamma). \quad (3.26)$$

In generale, le fasi di A, B e C non sono periodiche singolarmente. Tuttavia, $\zeta = \gamma - (\xi + \eta)$ è periodico; ciò è chiaro da (3.31) qui sotto. L'Hamiltoniana può essere scritta come:

$$H = |A||B||C| \cos \zeta. \quad (3.27)$$

L'Hamiltoniana H è nulla se una qualsiasi delle ampiezze si annulla, o se $\cos \zeta = 0$. L'ampiezza $|C|$ sarà ottenuta in forma chiusa in termini di funzioni ellittiche. Una volta nota $|C|$, $|A|$ e $|B|$ seguono immediatamente dalle relazioni di Manley-Rowe:

$$|A| = \sqrt{N_+ - |C|^2}, \quad |B| = \sqrt{N_- - |C|^2}. \quad (3.28)$$

Da (3.23) l'angolo di precessione è legato alle fasi da $\phi = (\xi - \eta)/2$. Le fasi ξ e η possono ora essere determinate. Usando le equazioni delle tre onde (3.10)-(3.12) insieme alle equazioni (3.24)-(3.26), troviamo

$$\dot{\xi} = -\frac{H}{|A|^2} \quad \dot{\eta} = -\frac{H}{|B|^2}, \quad (3.29)$$

così che ξ e η possono essere ottenuti per quadrature. Infine, ζ è determinato inequivocabilmente da

$$\frac{d|C|^2}{dt} = -2H \tan \zeta \quad e \quad H = |A||B||C| \cos \zeta. \quad (3.30)$$

Segue anche da (3.29) e (3.30) che

$$\dot{\zeta} = H \left(\frac{1}{|A|^2} + \frac{1}{|B|^2} + \frac{1}{|C|^2} \right). \quad (3.31)$$

La fase di C segue immediatamente, $\gamma = \xi + \eta + \zeta$, e quindi è possibile ricostruire la soluzione completa usando (3.24)-(3.26).

3.1.4 Le equazioni per $|C|^2$

Dall'Eq. (3.12) per C , e il suo complesso coniugato, otteniamo

$$\frac{d|C|^2}{dt} = 2\Im(ABC^*). \quad (3.32)$$

Utilizzando la definizione dell'Hamiltoniana, segue che

$$|A|^2|B|^2|C|^2 = H^2 + [\Im(ABC^*)]^2. \quad (3.33)$$

Applicando questo al quadrato di (3.32) e utilizzando le definizioni delle quantità di Manley-Rowe, si ottiene immediatamente un'equazione per $|C|$:

$$\left(\frac{d|C|^2}{dt}\right)^2 = 4[(N_+ - |C|^2)(N_- - |C|^2)|C|^2 - H^2]. \quad (3.34)$$

Si definisce il polinomio cubico Φ_0 (rappresentato in Figura 3.2) come

$$\Phi_0(|C|^2) = (N_+ - |C|^2)(N_- - |C|^2)|C|^2. \quad (3.35)$$

Quindi il lato destro di (3.34) può essere scritto come $4[\Phi_0(|C|^2) - H^2]$. Per H^2 piccolo, questo cubico ha tre radici reali positive. Se queste radici, in ordine decrescente di ampiezza, sono indicate con C_1^2, C_2^2, C_3^2 , segue che

$$0 \leq C_3^2 \leq C_2^2 \leq N_- \leq \frac{1}{2}N \leq N_+ \leq C_1^2 \leq N. \quad (3.36)$$

(Si suppone senza perdita di generalità che $J \geq 0$.) Nel caso di uguaglianza delle radici, la soluzione può essere ottenuta in termini di funzioni elementari. Si assume in generale che questo non sia il caso e si risolve per $|C|$ in termini di funzioni ellittiche. Tuttavia, prima di fare ciò, si investiga il moto di perturbazione intorno alle soluzioni stazionarie.

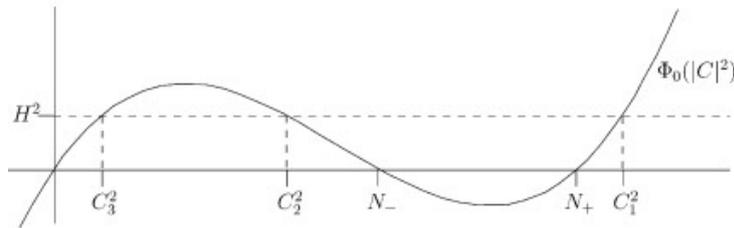


Figura 3.2: Polinomiale Φ_0 come funzione di $|C|^2$.

3.2 Modulazione a piccola ampiezza degli stati stazionari

Si considera il caso in cui le variazioni delle ampiezze rispetto ai loro valori medi sono piccole. Ciò consente di fare ulteriori approssimazioni e derivare stime semplici del periodo di pulsazione e del tasso di precessione. Da queste due quantità, segue immediatamente l'angolo di precessione.

3.2.1 Moto in stato stazionario

Prima si considerano le soluzioni per le quali le ampiezze $|A|$, $|B|$ e $|C|$ sono costanti. I casi più semplici sono quelli in cui le fasi sono anch'esse costanti; quindi le equazioni delle tre onde diventano

$$B^*C = CA^* = AB = 0,$$

che danno tre soluzioni particolari

$$A = A_0, B = C = 0. \quad (3.37)$$

$$B = B_0, C = A = 0. \quad (3.38)$$

$$C = C_0, A = B = 0. \quad (3.39)$$

Le prime due soluzioni corrispondono a movimenti conici: il pendolo si muove in un cerchio, in senso orario o antiorario, mentre la molla traccia un cono. Queste soluzioni sono stabili rispetto a piccole perturbazioni. Il terzo caso particolare rappresenta oscillazioni puramente verticali; questo movimento è instabile.

In generale, da (3.30), la costanza delle ampiezze implica che $\zeta = \gamma - (\xi + \eta) = 0$ così che $H = |A||B||C|$, e le equazioni delle tre onde diventano

$$-|A|\dot{\xi} = |B||C|, \quad -|B|\dot{\eta} = |C||A|, \quad -|C|\dot{\gamma} = |A||B|. \quad (3.40)$$

Differenziando (3.34), una semplice manipolazione algebrica produce

$$|C|^2 = C_0^2 = \frac{1}{6}(2N - \sqrt{N^2 + 3J^2}). \quad (3.41)$$

Le altre ampiezze sono date da

$$|A|^2 = A_0^2 = \frac{1}{6}[(N + 3J) + \sqrt{N^2 + 3J^2}], \quad |B|^2 = B_0^2 = \frac{1}{6}[(N - 3J) + \sqrt{N^2 + 3J^2}].$$

Queste soluzioni sono state studiate da Lynch, che le ha chiamate modalità ellittico-paraboliche (EP-modes) a causa della forma della traiettoria del pendolo (vi è un approfondimento a riguardo in Appendice B). Il tasso di precessione è dato da $\Omega = \dot{\phi} = \frac{1}{2}(\dot{\xi} - \dot{\eta})$. Questa non è altro che l'espressione della (lenta) frequenza di rotazione che consente di stimare la precessione a gradini del pendolo elastico (la

determinazione della precessione a gradini non è oggetto di questa trattazione, per maggiori dettagli vedi [3]). Da (3.40) segue che

$$\Omega = \frac{JC_0^2}{2H_0}, \quad (3.42)$$

dove $H_0 = A_0B_0C_0$. Per $J = 0$ abbiamo un movimento planare con

$$|C|^2 = \frac{1}{6}N, \quad |A|^2 = |B|^2 = \frac{1}{3}N.$$

Queste sono le soluzioni a forma di tazza e cappuccio di Vitt e Gorelik [4] (vi è un approfondimento in Appendice C).

3.2.2 Perturbazione riguardo al moto ellittico-parabolico

Sono state considerate piccole deviazioni rispetto alle soluzioni stabili della modalità EP (Ellittica-Parabolica). Si può scrivere $|C|^2 = C_0^2 + \epsilon$ dove C_0^2 è dato da (3.41) e $|\epsilon| \ll C_0^2$. Quindi, se (3.34) viene differenziata e i termini non lineari in ϵ vengono omessi, si ottiene

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + (2\sqrt{N^2 + 3J^2})\epsilon = 0. \quad (3.43)$$

La soluzione è $\epsilon(t) = \epsilon(0) \cos(\omega_P t)$, un'oscillazione attorno a C_0^2 con pulsazione:

$$\omega_P = \sqrt{2}\sqrt[4]{N^2 + 3J^2}. \quad (3.44)$$

Per le modalità EP, la proiezione orizzontale è un'ellisse che precessiona a una velocità costante Ω . La perturbazione è un moto pulsante, con variazione sinusoidale nel tempo, in cui gli assi maggiore e minore dell'ellisse si espandono e si contraggono alternativamente con periodo $T_p = 2\pi/\omega_P$. L'area dell'ellisse è proporzionale a J e rimane costante. È semplice derivare espressioni in termini di funzioni elementari per le ampiezze restanti e le fasi, ma non sono necessarie per determinare l'angolo di precessione.

Notiamo da (3.44) che $\sqrt{2N} \leq \omega_P \leq 2\sqrt{2N}$. Dalla velocità di precessione e dalla pulsazione, l'angolo di precessione segue immediatamente: $\Delta\phi = \Omega T_p$. Usando (3.41), (3.42) e (3.44), questo ci dà:

$$\Delta\phi = \frac{JC_0^2}{2H_0} \frac{2\pi}{\omega_P} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{J}{\sqrt{8H_0}} \right) \left[\frac{2N - \sqrt{N^2 + 3J^2}}{\sqrt[4]{N^2 + 3J^2}} \right]. \quad (3.45)$$

Per piccoli momenti angolari $J \ll N$, il termine tra parentesi quadre è vicino a \sqrt{N} e

$$\Delta\phi \simeq \frac{\pi}{3} \left(\frac{J\sqrt{N}}{\sqrt{8H_0}} \right). \quad (3.46)$$

3.3 Soluzioni analitiche delle equazioni delle tre onde

3.3.1 Soluzione nella funzione ellittica di Weierstrass

Ora si ottiene una soluzione analitica esplicita per $|C|^2$, valida per ampiezze finite. Le soluzioni per $|A|^2$ e $|B|^2$ seguono immediatamente dalle relazioni di Manley-Rowe. Quindi (3.29) vengono integrate per le fasi.

Soluzione per le ampiezze

Il termine quadratico a destra di (3.34) viene eliminato da una semplice trasformazione $u = |C|^2/N - 1/3$ e $\tau = \sqrt{N}t$. Allora si ottiene

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3). \quad (3.47)$$

Questa è la forma standard dell'equazione per le funzioni ellittiche di Weierstrass. Le costanti g_2 e g_3 , chiamate invarianti, sono date da

$$g_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{J^2}{N^2}\right), \quad g_3 = \left(-\frac{1}{27} + \frac{J^2}{3N^2} + \frac{4H^2}{N^3}\right). \quad (3.48)$$

Per piccoli H^2 , il discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ è positivo e le tre radici sono reali. Questo è il caso di interesse fisico, e assumiamo che le radici del cubico siano ordinate in modo che $e_1 > e_2 > e_3$. Si nota che $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. La soluzione generale di (3.47) è

$$u = \mathcal{P}(\tau + \alpha), \quad (3.49)$$

dove α è una costante arbitraria (complessa). La funzione $\mathcal{P}(z)$ è definita da

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right], \quad (3.50)$$

dove la somma è su tutti gli interi m, n eccetto $m = n = 0$. Ha poli sulla retta reale ed è doppiamente periodica: $\mathcal{P}(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \mathcal{P}(z)$ per tutti gli interi m e n . La quantità ω_3 è definita imponendo $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Si può dimostrare che

$$\mathcal{P}(\omega_1) = e_1, \quad \mathcal{P}(\omega_2) = e_2, \quad \mathcal{P}(\omega_3) = e_3. \quad (3.51)$$

Nel caso presente, ω_1 è reale e ω_3 è puramente immaginaria (sono date espressioni esplicite di seguito). Sulla retta reale, $\mathcal{P}(z)$ è reale, con valori nell'intervallo $[e_1, +\infty)$. Sulla linea $z = \omega_3 + x$ assume valori reali nell'intervallo $[e_3, e_2]$. Inoltre, mentre z varia lungo il bordo del rettangolo da 0 a ω_1 a $\omega_1 + \omega_3 (= -\omega_2)$ a ω_3 a 0, $\mathcal{P}(z)$ è reale e diminuisce monotonicamente da $+\infty$ a e_1 a e_2 a e_3 a $-\infty$. Per soddisfare le condizioni iniziali, scegliamo $\alpha = \omega_3 - \tau_0$, dove τ_0 è reale e può essere

assunto come zero con una scelta opportuna dell'origine temporale. Allora $\mathcal{P}(\tau + \omega_3)$ è reale e oscilla tra e_3 e e_2 . La soluzione per l'ampiezza è

$$|C|^2 = N\left[\frac{1}{3} + \mathcal{P}(\tau + \omega_3)\right]. \quad (3.52)$$

Il comportamento della funzione \mathcal{P} di Weierstrass è mostrato in Fig. 3.3. Per z generico assume valori complessi. Sulla linea $\Im(z) = \omega_3$ la funzione è reale con oscillazioni periodiche, come indicato dalle linee spesse nella parte anteriore della figura.

Soluzione per gli angoli di fase

La funzione zeta di Weierstrass è definita come

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\mathcal{P}(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} [\zeta(z) - z^{-1}] = 0. \quad (3.53)$$

È quasi-periodica nel senso che

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1). \quad (3.54)$$

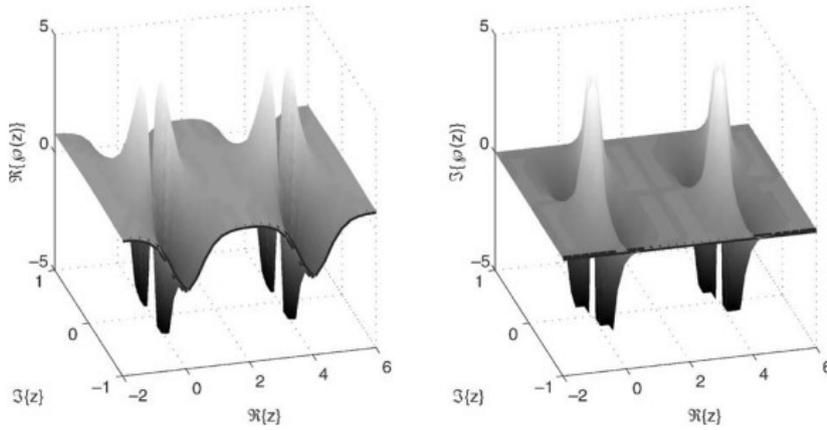


Figura 3.3: La funzione \mathcal{P} di Weierstrass.

Notiamo come $\zeta(z)$ sia una funzione dispari di z e useremo le relazioni:

$$\omega_1\zeta(\omega_2) - \omega_2\zeta(\omega_1) = \frac{1}{2}\pi i. \quad (3.55)$$

La funzione sigma è definita come

$$\frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \zeta(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1. \quad (3.56)$$

ed è anche quasi-periodica, come

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -\exp[2\zeta(\omega_1)(z + \omega_1)]\sigma(z). \quad (3.57)$$

3.3 Soluzioni analitiche delle equazioni delle tre onde

Tre altre funzioni sigma possono essere definite. La relazione tra le funzioni sigma e la funzione \mathcal{P} di Weierstrass è simile a quella tra le funzioni theta e le funzioni ellittiche di Jacobi. Sarà necessaria l'identità:

$$\frac{\mathcal{P}'(\alpha)}{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(\alpha)} = \zeta(z - \alpha) - \zeta(z + \alpha) + 2\zeta(\alpha). \quad (3.58)$$

La soluzione (3.52) porta ad una soluzione per $|A|^2$:

$$|A|^2 = \frac{1}{6}(N + 3J) - N\mathcal{P}(\tau + \omega_3). \quad (3.59)$$

Sostituendo nella prima di (3.29) si ottiene

$$\sqrt{N} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{6H}{6N\mathcal{P}(\tau + \omega_3) - (N + 3J)}. \quad (3.60)$$

Si introducono quindi le costanti ausiliarie k_{\pm} definite come

$$\mathcal{P}(k_+) = \frac{N + 3J}{6N} = e_+, \quad \mathcal{P}(k_-) = \frac{N - 3J}{6N} = e_-. \quad (3.61)$$

Usando (3.47), segue che

$$[\mathcal{P}'(k_+)]^2 = [\mathcal{P}'(k_-)]^2 = -\left(\frac{4H^2}{N^3}\right). \quad (3.62)$$

Si deve stabilire quale segno prendere per le derivate. Da (3.36) si ha

$$-\frac{1}{3} \leq e_3 \leq e_2 \leq e_- \leq \frac{1}{6} \leq e_+ \leq e_1 \leq \frac{2}{3}. \quad (3.63)$$

Dal momento che $e_2 < e_- < e_+ < e_1$, segue che k_{\pm} giace sulla linea tra ω_1 e $\omega_1 + \omega_3$, il che determina il segno delle derivate come $\mathcal{P}'(k_{\pm}) = 2iH/N^{3/2}$, un numero immaginario positivo. L'equazione per ξ diventa quindi

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \left(\frac{1}{2i}\right) \frac{\mathcal{P}'(k_+)}{\mathcal{P}(\tau + \omega_3) - \mathcal{P}(k_+)}. \quad (3.64)$$

Usando (3.58) questo può essere espresso in termini di funzioni zeta e utilizzando (3.56) può essere integrato immediatamente per ottenere

$$\xi - \xi_0 = \left(\frac{1}{2i}\right) \left[\log \left(\frac{\sigma(\tau + \omega_3 - k_+)}{\sigma(\tau + \omega_3 + k_+)} \right) + 2\zeta(k_+)\tau \right]. \quad (3.65)$$

Una simile espressione vale per $\eta - \eta_0$ con k_- al posto di k_+ . Si ottiene quindi l'espressione per l'angolo azimutale come funzione del tempo:

$$\phi - \phi_0 = \left(\frac{1}{2i}\right) \left[[\zeta(k_+) - \zeta(k_-)]\tau + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sigma(\tau + \omega_3 - k_+)\sigma(\tau + \omega_3 + k_-)}{\sigma(\tau + \omega_3 + k_+)\sigma(\tau + \omega_3 - k_-)} \right) \right].$$

Questa è la soluzione per l'azimut come funzione del tempo. Usando le proprietà quasi-periodiche (3.54) e (3.57), la variazione di ϕ quando τ varia di $2\omega_1$ può essere calcolata come:

$$\Delta\phi = -i\omega_1(\zeta(k_+) - \zeta(k_-)) + i\zeta(\omega_1)(k_+ - k_-). \quad (3.66)$$

Questa è l'espressione analitica desiderata per l'angolo di pulsazione. Si evidenziano due casi speciali di (3.66). Quando $J = 0$ abbiamo $k_+ = k_-$, ottenendo un risultato nullo per $\Delta\phi$. Quando $H = 0$, si ha $k_+ = \omega_1$ e $k_- = -\omega_2$, quindi

$$\Delta\phi = -i[\omega_1\zeta(\omega_2) - \omega_2\zeta(\omega_1)] = \frac{1}{2}\pi, \quad (3.67)$$

Questi due casi speciali si intersecano nell'orbita omoclinica (con $J = H = 0$) che ha un tempo di transizione infinito.

3.3.2 Soluzione nella funzione ellittica di Jacobi

Mentre (3.66) rappresenta la soluzione analitica, non è immediatamente ovvio come possano essere estratte informazioni numeriche da essa. Le quantità sul lato destro sono tutte calcolabili in principio, ma a costo di uno sforzo considerevole. È quindi utile cercare un'espressione alternativa, in termini di funzioni ellittiche di Jacobi.

Soluzione per le ampiezze

Ricordando che con la trasformazione $u = |C|^2/N - \frac{1}{3}$ e $\tau = \sqrt{N}t$, (3.34) è stata trasformata in (3.47), che riportiamo nuovamente per comodità:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3). \quad (3.68)$$

Per soluzioni di interesse fisico, H^2 è sufficientemente piccolo affinché le tre radici del cubo siano reali. Definendo le quantità:

$$k^2 = \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right) \quad v^2 = (e_1 - e_3),$$

una ulteriore trasformazione:

$$w = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \quad s = v\tau,$$

porta l'Eq. (3.68) alla forma standard:

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 = (1 - w^2)(1 - k^2w^2). \quad (3.69)$$

3.3 Soluzioni analitiche delle equazioni delle tre onde

La soluzione è espressa come $w = sn(s - s_0)$, o

$$u = e_3 + (e_2 - e_3)sn^2(s - s_0),$$

dove s_0 è arbitrario. La funzione ellittica di Jacobi sn ha un periodo di $4K$, dove

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \quad (3.70)$$

quindi $sn^2(s - s_0)$ ha un periodo di $2K$. Per convenienza, si imposta $s_0 = 0$, il che significa scegliere l'origine del tempo dove la soluzione ha un minimo:

$$|C|^2 = C_3^2 + (C_2^2 - C_3^2)sn^2(v\sqrt{N}t). \quad (3.71)$$

Chiaramente, $|C|$ oscilla tra C_3 e C_2 con periodo:

$$T = \frac{2K}{v\sqrt{N}}. \quad (3.72)$$

Le ampiezze restanti, $|A|$ e $|B|$, seguono dalle relazioni di Manley-Rowe:

$$|A|^2 = N_+ - |C|^2, \quad |B|^2 = N_- - |C|^2.$$

Hanno lo stesso periodo di $|C|$ ma variano in antifase con esso e in fase tra di loro. Si possono denotare i valori minimi e massimi di $|A|$ con A_3 e A_2 , e similmente per $|B|$. Quindi

$$N_+ = A_3^2 + C_2^2 = A_2^2 + C_3^2, \quad N_- = B_3^2 + C_2^2 = B_2^2 + C_3^2.$$

I valori iniziali delle ampiezze (per $s_0 = 0$) sono

$$|A(0)| = A_2, \quad |B(0)| = B_2, \quad |C(0)| = C_3.$$

Si evidenzia qui una importante invarianza di scala delle equazioni delle tre onde. Se le ampiezze vengono ingrandite da un fattore costante e il tempo viene contratto dallo stesso fattore, la forma delle equazioni rimane invariata. Così, il periodo del moto dell'involuppo di modulazione varia inversamente con la sua ampiezza. La scala complessiva può essere misurata da \sqrt{N} e la dipendenza inversa di T da questo è vista in (3.72).

Le soluzioni (3.52) e (3.71) devono essere equivalenti. Questo deriva da identità che riguardano le funzioni ellittiche di Weierstrass e Jacobi. Il modulo complementare è definito come $k' = \sqrt{1 - k^2}$, e scriviamo $K' = K(k')$. I parametri sono correlati da

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}, \quad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}, \quad \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Quindi si ha

$$\mathcal{P}(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{sn^2(\sqrt{e_1 - e_3}z)}.$$

Ma la funzione Jacobi $sn(s + iK')$ è data in termini del suo valore sulla linea reale da

$$sn(s + iK') = \frac{1}{k sn s}$$

e l'equivalenza tra le due forme di soluzione segue immediatamente.

Soluzione per gli angoli di fase

Resta da determinare le fasi. L'integrazione di (3.29) fornisce gli angoli ξ e η . Si definiscono

$$\begin{aligned} \gamma_+^2 &= \frac{C_2^2 - C_3^2}{N_+ - C_3^2} = \frac{e_2 - e_3}{e_+ - e_3}, & \lambda_+ &= \frac{H}{v\sqrt{N}A_2^2} = \frac{H/N^{3/2}}{\sqrt{e_1 - e_3}(e_+ - e_3)}, \\ \gamma_-^2 &= \frac{C_2^2 - C_3^2}{N_- - C_3^2} = \frac{e_2 - e_3}{e_- - e_3}, & \lambda_- &= \frac{H}{v\sqrt{N}B_2^2} = \frac{H/N^{3/2}}{\sqrt{e_1 - e_3}(e_- - e_3)}. \end{aligned}$$

Dalla (3.63) si deduce che $k^2 < \gamma_+^2 < \gamma_-^2 < 1$. Si può ora scrivere (3.29) nella forma:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{\lambda_+}{1 - \gamma_+^2 sn^2 s}, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{\lambda_-}{1 - \gamma_-^2 sn^2 s}. \quad (3.73)$$

I lati destri sono gli integrandi che si verificano nell'integrale ellittico di terza specie di Legendre. Possono essere messi in forma algebrica standard definendo $x = sn s$. Scrivendo

$$\Pi(s, a, k) = \int_0^s \frac{ds}{1 - a sn^2 s} = \int_0^x \frac{dx}{(1 - ax^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

la soluzione per ξ diventa

$$\xi - \xi_0 = -\lambda_+ \Pi(s, \gamma_+^2, k). \quad (3.74)$$

Esiste una soluzione analoga per η . Le variazioni di ξ e η durante un semiperiodo $s \in [0, K]$ sono

$$\frac{1}{2}\Delta\xi = -\lambda_+ \Pi(\gamma_+^2, k), \quad \frac{1}{2}\Delta\eta = -\lambda_- \Pi(\gamma_-^2, k).$$

dove l'integrale ellittico completo è definito come $\Pi(a, k) = \Pi(K, a, k)$. L'angolo azimutale del pendolo è $\phi = (1/2)(\xi - \eta)$. Quindi, il cambiamento nell'azimut durante un periodo completo è

$$\Delta\phi = -(\lambda_+ \Pi(\gamma_+^2, k) - \lambda_- \Pi(\gamma_-^2, k)). \quad (3.75)$$

3.3 Soluzioni analitiche delle equazioni delle tre onde

Nella Sezione 3.2 è stato utilizzato un semplice schema di approssimazione per calcolare una formula (3.45) per l'angolo di precessione vicino alle modalità EP. Questa formula può essere recuperata dall'espressione esatta (3.75). Le modalità EP sono caratterizzate da un valore di H tale che le due radici C_2^2 e C_3^2 della cubica $\Phi(|C|^2)$ siano uguali:

$$C_0^2 = C_2^2 = C_3^2. \quad (3.76)$$

Poiché $\Phi(|C|^2) = |C|^2(N_+ - |C|^2)(N_- - |C|^2) - H^2$, ciò significa che, per le modalità EP:

$$H = H_0 \equiv \sqrt{C_0^2(N_+ - C_0^2)(N_- - C_0^2)}. \quad (3.77)$$

Ma $C_2^2 = C_3^2$ implica $e_2 = e_3$, $k = 0$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Quindi, per $H = H_0$, l'integrale ellittico completo di terza specie si riduce a $\pi/2$, poiché entrambi i suoi argomenti sono nulli, e

$$\Delta\phi = -(\lambda_+ - \lambda_-)\frac{1}{2}\pi \quad (3.78)$$

Inoltre, sostituendo v e H nelle espressioni per λ_+ e λ_- si ottiene

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sqrt{N - 3C_0^2}} \frac{C_0\sqrt{N_- - C_0^2}}{\sqrt{N_+ - C_0^2}},$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{N - 3C_0^2}} \frac{C_0\sqrt{N_+ - C_0^2}}{\sqrt{N_- - C_0^2}}.$$

Sostituendo questi in (3.78) si ottiene

$$\Delta\phi = \frac{\pi J C_0}{2\sqrt{N - 3C_0^2}\sqrt{N_+ - C_0^2}\sqrt{N_- - C_0^2}}.$$

Utilizzando (3.41) e (3.77), questo può essere scritto come

$$\Delta\phi = \frac{\pi J C_0^2}{\sqrt{2}H_0(N^2 + 3J^2)^{1/4}},$$

in accordo con il calcolo precedente, (3.45). Questo mostra che il limite della formula esatta (3.75) quando $H \rightarrow H_0$ corrisponde esattamente al valore per perturbazioni infinitesime delle modalità EP ottenute nella Sezione 3.2.

3.4 Formule approssimate per l'angolo di precessione

Per l'angolo di precessione è stata derivata un'espressione analitica esatta, coinvolgendo integrali ellittici. È interessante ottenere formule approssimate più convenienti, che coinvolgano solo funzioni elementari. Potrebbe sembrare che il modo più semplice per farlo sia approssimare direttamente (3.75). Tuttavia, risulta essere più facile e trasparente tornare alle equazioni differenziali che governano il sistema, usarle per scrivere un integrale per l'angolo di precessione e approssimare questo integrale.

L'angolo di precessione è $\phi = (1/2)(\xi - \eta)$. Combinando le due componenti di (3.29), si ottiene

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{JH}{2|A|^2|B|^2}. \quad (3.79)$$

L'equazione (3.32) può essere scritta come:

$$\frac{d|C|^2}{dt} = \pm 2\sqrt{|A|^2|B|^2|C|^2 - H^2}. \quad (3.80)$$

Calcolando il quoziente di queste due equazioni, si ottiene

$$\frac{d\phi}{d|C|^2} = \pm \frac{JH}{4|A|^2|B|^2\sqrt{|A|^2|B|^2|C|^2 - H^2}}. \quad (3.81)$$

La pulsazione dell'ampiezza $|C|$ avviene tra C_2 e C_3 , dove C_3^2 e C_2^2 sono le due radici più piccole del polinomio:

$$\Phi = |A|^2|B|^2|C|^2 - H^2 = |C|^2(|C|^2 - N_+)(|C|^2 - N_-) - H^2. \quad (3.82)$$

È anche utile scrivere $\Phi = \Phi_0 - H^2$ dove

$$\Phi_0 = |A|^2|B|^2|C|^2 = |C|^2(|C|^2 - N_+)(|C|^2 - N_-),$$

è come definito da (3.35) e illustrato in Fig. 2. I due segni nell'equazione differenziale (3.81) corrispondono a cambiamenti di fase durante gli alterni semicicli della pulsazione. L'integrale di (3.81) su un ciclo completo può essere scritto formalmente come:

$$\Delta\phi = \frac{JH}{2} \int_{C_3^2}^{C_2^2} \frac{d|C|^2}{|A|^2|B|^2\sqrt{\Phi}}. \quad (3.83)$$

È conveniente cambiare i limiti di integrazione; per fare questo, si considera (3.83) come un integrale sul piano complesso Z , dove $Z = |C|^2$ sull'asse reale positivo. Questo dà

$$\Delta\phi = \frac{JH}{4} \int_{C_1} \frac{dZ}{(Z - N_+)(Z - N_-)\sqrt{\Phi(Z)}}. \quad (3.84)$$

3.4 Formule approssimate per l'angolo di precessione

Il contorno C_1 incirchia C_3^2 e C_2^2 e la radice quadrata nell'integranda ha due tagli di ramo, uno da C_3^2 a C_2^2 e l'altro da C_1^2 a $+\infty$. Questo è illustrato nella Fig. 4. Oltre ai tre punti di ramo, l'integranda ha due poli semplici in $Z = N_+$ e $Z = N_-$. Infatti, i residui a questi due poli si annullano:

$$Res(N_+) = -Res(N_-) = \frac{-iJ}{4} \frac{1}{N_+ - N_-} = -\frac{i}{4}. \quad (3.85)$$

Inoltre, l'integranda tende sufficientemente rapidamente a zero come $|Z| \rightarrow \infty$ da poter sostituire il contorno C_1 con C_2 (Fig. 3.4). Tornando all'integrale originale (3.83), questo corrisponde a un cambiamento dell'intervallo di integrazione a

$$\Delta\phi = \frac{JH}{2} \int_{C_1}^{\infty} \frac{d|C|^2}{|A|^2|B|^2\sqrt{\Phi}}. \quad (3.86)$$

Questo intervallo è più conveniente rispetto al precedente perché l'integranda è piccola ovunque tranne che vicino al limite inferiore dell'integrazione e perché il punto di flesso in Φ può causare difficoltà nell'approssimare Φ vicino a C_2^2 .

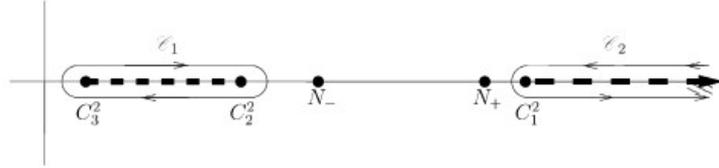


Figura 3.4: Contorni C_1 e C_2 nel piano Z .

Poiché l'integranda è dominata dal suo comportamento vicino a C_1^2 , l'approccio ovvio sarebbe quello di trovare un polinomio quadratico che approssimi Φ vicino a questo punto. Poiché C_1^2 è la radice di un cubico, può essere scritto in funzione di H , J e N , ma questa espressione è complicata e non fornisce un'approssimazione conveniente. È più semplice considerare il comportamento di Φ in $N_+ = (N + J)/2$. Questo punto è vicino a C_1^2 perché H^2 deve essere piccolo rispetto a N affinché il moto periodico esista.

Avendo deciso di approssimare in N_+ piuttosto che in C_1^2 , il passo successivo è approssimare $\Phi_0 = Z(Z - N_+)(Z - N_-)$ con un quadratico con una radice in N_+ :

$$\Psi_0 = Z_0(Z - N_+)(Z - Z_1). \quad (3.87)$$

È possibile eseguire l'integrale approssimativo risultante. Tuttavia, la soluzione è complicata a meno che $Z_1 = N_-$. Quindi, si considera

$$\Psi_0 = Z_0(Z - N_+)(Z - N_-). \quad (3.88)$$

Il quadratico Ψ_0 e il cubico Φ_0 si annullano entrambi in $Z = N_+$ e $Z = N_-$. Sono anche uguali quando $Z = Z_0$. Si considerano due scelte di Z_0 . Innanzitutto, si sceglie Z_0 come media di $Z = N_+$ e $Z = N_-$, cioè $Z_0 = N/2$. L'integrale (3.86) diventa

$$\Delta\phi = \frac{JH}{2} \int_{Z_+}^{\infty} \frac{dZ}{(Z - N_+)(Z - N_-)\sqrt{\Psi_0(Z) - H^2}}, \quad (3.89)$$

dove Z_+ è la radice maggiore di $\Psi_0 - H^2 = 0$. Definendo $\sigma = 2Z - N$, si ottiene

$$\Delta\phi = \int_{\sigma_+}^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}JH d\sigma}{(\sigma^2 - J^2)\sqrt{\sigma^2 - (J^2 + 8H^2/N)}}, \quad (3.90)$$

dove $\sigma_+ = \sqrt{J^2 + 8H^2/N}$. Questo può essere integrato analiticamente per dare

$$\Delta\phi = -\tan^{-1} \left\{ \left(\frac{\sqrt{8H}}{\sqrt{NJ}} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - (J^2 + 8H^2/N)}} \right\} \Big|_{\sigma_+}^{+\infty} = \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{8H}}{\sqrt{NJ}} \right) \right]. \quad (3.91)$$

Notando che $\tan^{-1} x = (\pi/2) - \tan^{-1}(1/x)$, il cambiamento di fase su un ciclo completo è

$$\Delta\phi \approx \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{NJ}}{\sqrt{8H}} \right). \quad (3.92)$$

Ci si riferisce a questa formula approssimativa elegante per l'angolo di precessione come la formula DGC. Gli esperimenti numerici indicano che è di alta precisione in tutto il dominio accessibile.

Una scelta alternativa di approssimazione quadratica richiede che Ψ_0 e Φ_0 abbiano derivate uguali in $Z = N_+$. In questo caso $Z_0 = N_+$. Integrando, prendendo di nuovo il limite inferiore come la radice maggiore di $\Psi_0 - H^2 = 0$, si ottiene

$$\Delta\phi \approx \tan^{-1} \left(\frac{J\sqrt{N+J}}{\sqrt{8H}} \right). \quad (3.93)$$

Sarà mostrato di seguito che questa formula è anche in ragionevole accordo con la soluzione analitica.

Le approssimazioni sopra sono sottili: è stato sostituito un cubico con un quadratico, cambiando l'integranda, ma cambiamo anche il limite inferiore. Questi effetti tendono a compensarsi, risultando in approssimazioni sorprendentemente accurate. Inoltre, si trova che le due approssimazioni (3.92) e (3.93) hanno errori di segno opposto e approssimativamente uguali. Scegliendo $Z_0 = (N + \alpha J)/2$ in (3.88), si ottiene l'approssimazione:

$$\Delta\phi \approx \tan^{-1} \left(\frac{J\sqrt{N + \alpha J}}{\sqrt{8H}} \right). \quad (3.94)$$

I risultati numerici utilizzando le varie approssimazioni verranno presentati nella sezione seguente e si scoprirà che (3.94) produce risultati notevolmente accurati. [5]

Capitolo 4

Simulazione numerica

In questa sezione si analizza il comportamento delle grandezze che compaiono nelle equazioni differenziali che governano il sistema, mediante metodo numerico. Le tre formule approssimate per l'angolo di precessione si discostano in maniera differente dalla formula analitica "esatta", per questo vengono messe a confronto evidenziandone la più efficace dal punto di vista operativo. In ultimo, viene comparata l'espressione approssimata ottenuta per l'ampiezza di pulsazione con quella analitica "esatta".

4.1 Soluzioni numeriche delle equazioni differenziali

La scrittura in forma polare delle grandezze A , B e C utilizzate per modellare il sistema, conduce ad una forma differente delle equazioni (3.10)-(3.12). Con qualche manipolazione algebrica e scrivendo tutto in funzione dei tre invarianti H , J e N , si arriva ad una scrittura di questo tipo:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{H}{\frac{1}{2}(N+J)-|C|^2} \\ \frac{d\eta}{dt} = -\frac{H}{\frac{1}{2}(N-J)-|C|^2} \\ \frac{d|C|^2}{dt} = -2H \tan \zeta \\ \frac{d\zeta}{dt} = H \left(\frac{1}{\frac{1}{2}(N+J)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(N-J)} - \frac{1}{|C|^2} \right). \end{cases}$$

Si perviene così ad un sistema di quattro equazioni in quattro incognite e dunque facilmente risolvibile. Il sistema viene risolto mediante il metodo di Eulero esplicito, di cui si trova un approfondimento in Appendice D. Per la risoluzione è stato utilizzato un tempo totale $T = 10s$ ed un passo temporale $dt = 0.01s$. Nella figura 4.1 viene riportato l'andamento temporale delle grandezze in questione. Dalle prime due figure in alto, si può subito evidenziare il comportamento molto simile di ξ e η . L'andamento si stabilizza e diventa monotono crescente per $t > 2s$; le due fasi, infatti, interagiscono tra loro in quanto A e B dipendono entrambi dai coefficienti a e b utilizzati per la costruzione della Lagrangiana mediata al tempo τ . L'andamento di ζ manifesta a tutti gli effetti il suo comportamento periodico, derivante per costruzione dalle fasi di A, B e C . $|C|^2$ inizialmente tende a diminuire nel tempo, suggerendo una prevalenza delle forze dissipative; la sua successiva stabilizzazione

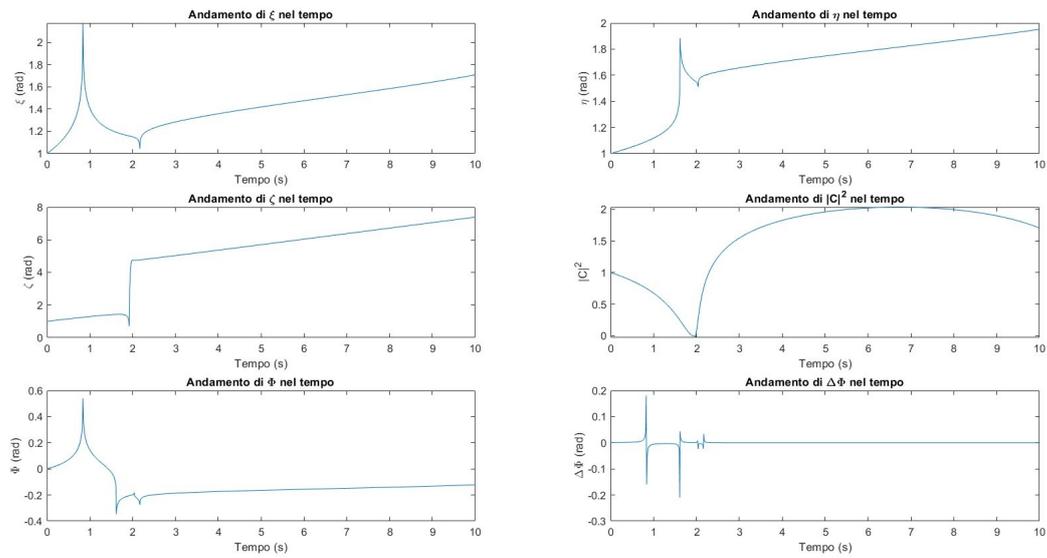


Figura 4.1: Andamento temporale di $\xi, \eta, \zeta, |C|^2, \phi, \Delta\phi$.

indica, invece, il raggiungimento di un equilibrio dinamico in cui le dissipazioni e le forze elastiche si bilanciano. Gli ultimi due grafici in basso mostrano come, per $t > 2s$, l'angolo di precessione aumenta lentamente nel tempo. Questo spiega come la variazione dello stesso risulti praticamente nulla, evidenziando così una precessione pressoché uniforme.

4.2 Determinazione dell'angolo di precessione

Si mostra ora che l'involuppo del moto può essere determinato con alta precisione utilizzando formule approssimate che coinvolgono solo funzioni elementari. Sono stati utilizzati i valori analitici come riferimento per valutare la precisione delle formule approssimate. Vengono mostrati i confronti tra le espressioni approssimate per $\Delta\phi$. Sono riportati i valori assoluti di questi errori. L'errore massimo nella formula DGC (Fig. 4.2) è di circa 2.2° , e si verifica per $J \approx \frac{1}{2}$ e H al suo valore massimo consentito. L'errore nella formula alternativa (3.93) è di entità comparabile, con un massimo di circa 2.5° (Fig. 4.3), ma di segno opposto. Il valore ottimale $\alpha = 0.458$ del parametro nella formula (3.94) è stato trovato sperimentalmente. La Fig. 4.4 (OPT) è quella relativa alla formula significativamente più accurata, con un errore massimo inferiore a 0.4° . Questo è un livello di precisione notevole, considerando la semplicità della formula. La compensazione degli errori porta a ciò che potrebbe essere descritto come l'irragionevole efficacia dell'approssimazione. Per dati N e J , il valore massimo della cubica $\Phi_0(Z)$ è a $Z_{\max} = (1/6)[2N - \sqrt{N^2 + 3J^2}]$. Così, il valore massimo di H è

$$H_0 = H_0(N, J) = \sqrt{\Phi_0(Z_{\max})}.$$

$$\Phi_0(Z_{\max}) = \left[\frac{1}{2}(N + J) - Z_{\max} \right] \left[\frac{1}{2}(N - J) - Z_{\max} \right] Z_{\max}.$$

Le equazioni sono state plottate per una gamma di valori $0 \leq J \leq 1$ e H coprendo il dominio dei parametri accessibili $0 \leq H \leq H_0$. H_0 è rappresentata dalla linea spessa nera. Prendiamo $N = 1$ in tutti i casi; ciò non comporta perdita di generalità, poiché equivale ad un ridimensionamento delle ampiezze di $N^{-1/2}$ e del tempo di $N^{1/2}$.

4.3 Determinazione dell'ampiezza di pulsazione

La misura in cui l'energia viene scambiata tra le modalità elastiche e pendolari di oscillazione può essere misurata dall'ampiezza relativa della pulsazione definita come

$$P = \frac{2(C_2^2 - C_3^2)}{N}. \quad (4.1)$$

Questa quantità varia da $P = 0$ per nessuno scambio di energia a $P = 1$ per uno scambio massimo. Per $H = 0$, si riduce a $P = 1 - \frac{J}{N}$. Dati gli invarianti H , N e J , è possibile calcolare P risolvendo l'equazione cubica $\Phi(Z) = 0$, dove, come prima, $\Phi(Z) = \Phi_0(Z) - H^2$, con $Z = |C|^2$ e Φ_0 definita da (3.35). Il cubico è stato risolto in Z con l'utilizzo del software Wolfram Mathematica; le radici ottenute sono le seguenti:

$$Z_1 = \frac{3J^2 + \left(N + \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3} \right)^2}{6 \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3}},$$

$$Z_2 = \frac{N}{3} + \frac{i(i + \sqrt{3})(3J^2 + N^2)}{12 \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3}} - \frac{1}{12}i(-i + \sqrt{3}) \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3},$$

$$Z_3 = \frac{N}{3} - \frac{i(-i + \sqrt{3})(3J^2 + N^2)}{12 \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3}} + \frac{1}{12}i(i + \sqrt{3}) \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3}.$$

Come si può evincere dalla (4.1), è altresì necessario calcolare la differenza d_{23} tra le radici Z_2 e Z_3 :

$$d_{23} = - \frac{i \left(-3J^2 - N^2 + \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{2/3} \right)}{\sqrt{3}N \left(108H^2 + 9J^2N - N^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{432H^4 - (J^3 - JN^2)^2 + 8H^2(9J^2N - N^3)} \right)^{1/3}}.$$

Per la determinazione dell'involuppo, l'uso di (4.1) è ideale. Notando che $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = N$, si può scrivere l'ampiezza della pulsazione come

$$P = \frac{2(2C_2^2 + C_1^2 - N)}{N}.$$

4.3 Determinazione dell'ampiezza di pulsazione

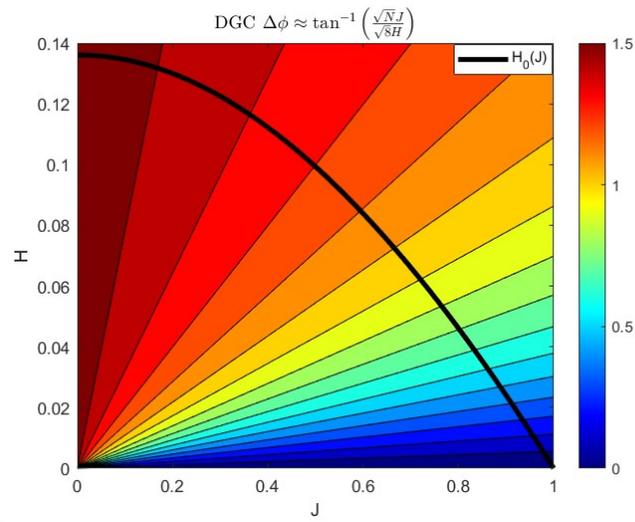


Figura 4.2: DGC

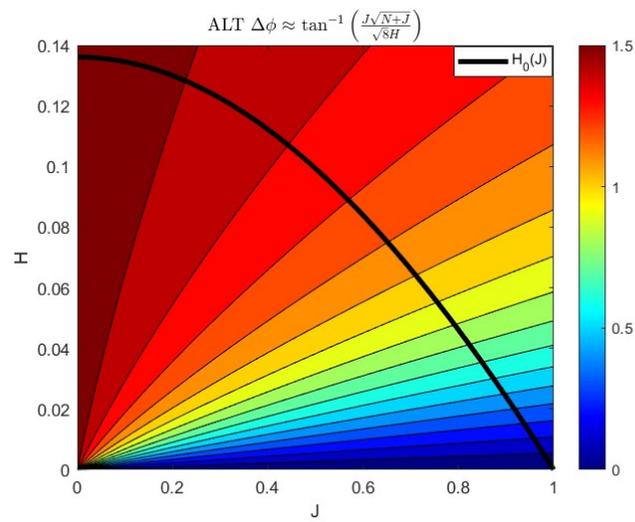


Figura 4.3: ALT

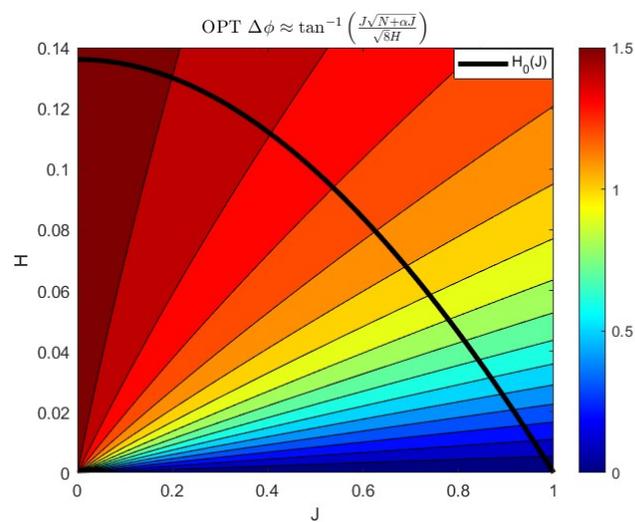


Figura 4.4: OPT

È stato già introdotto in (3.88) un quadratico ψ_0 che approssima il cubico Φ_0 nell'intervallo $[C_2^2, C_1^2]$. Se si usano le radici di $\psi_0 - H^2 = 0$ come stime di C_1^2 e C_2^2 , un'espressione approssimata per P può essere ottenuta:

$$P = 1 - \sqrt{\frac{J^2}{N^2} + \frac{4H^2}{N^2 Z_0}}. \quad (4.2)$$

Per P fissato, questo rappresenta un'ellisse nello spazio (J, H) . Segue immediatamente che: quando $H = 0$ allora $P = 1 - \frac{J}{N}$ (che è esatto); quando $J = 0$ allora $P = 1 - \frac{2H}{N\sqrt{Z_0}}$ (che non è esatto). Vengono plottati i valori esatti dell'ampiezza di pulsazione, ottenuti risolvendo l'equazione cubica $\Phi(Z) = 0$, in Fig. 4.5 (P-esatto). Si noti che $P = 0$ quando $H = H_0$ e $P = 1$ quando $H = J = 0$. I valori approssimati calcolati usando (4.2) sono mostrati in Fig. 4.6 (P-approx). L'approssimazione è piuttosto accurata quando P è grande. Questa è la regione di principale interesse fisico, corrispondente ad un moto fortemente pulsante. Per valori grandi di H , l'approssimazione non è più valida. Valgono le stesse considerazioni fatte nella sezione 4.2 per il dominio di H e J e per la curva $H_0(J)$. [5]

4.3 Determinazione dell'ampiezza di pulsazione

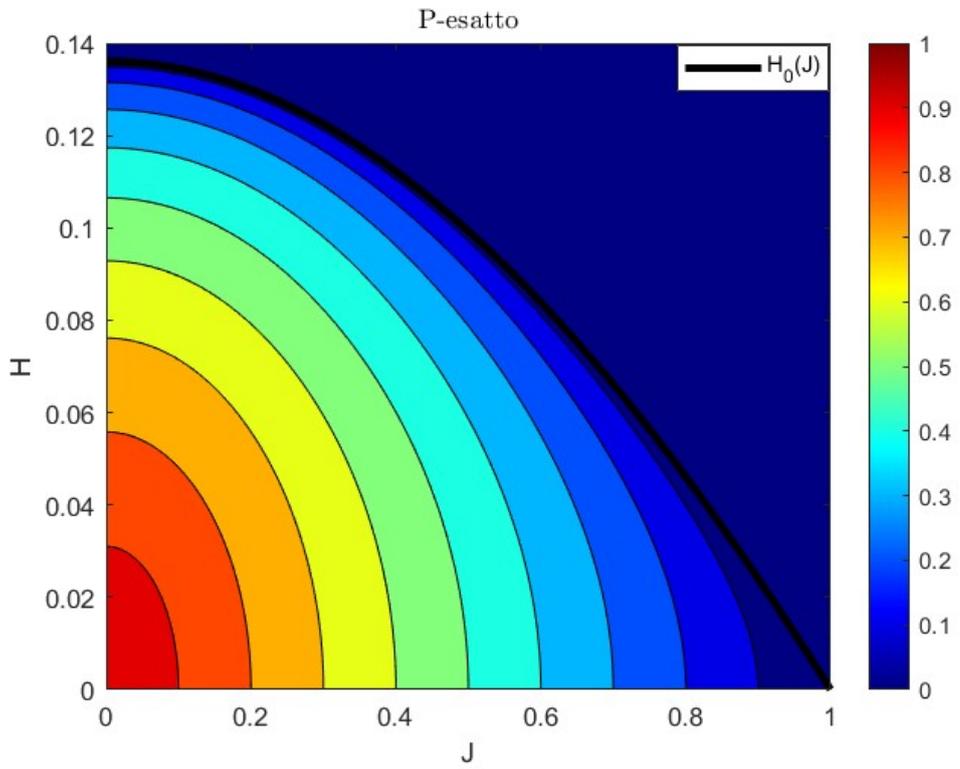


Figura 4.5: P-esatto

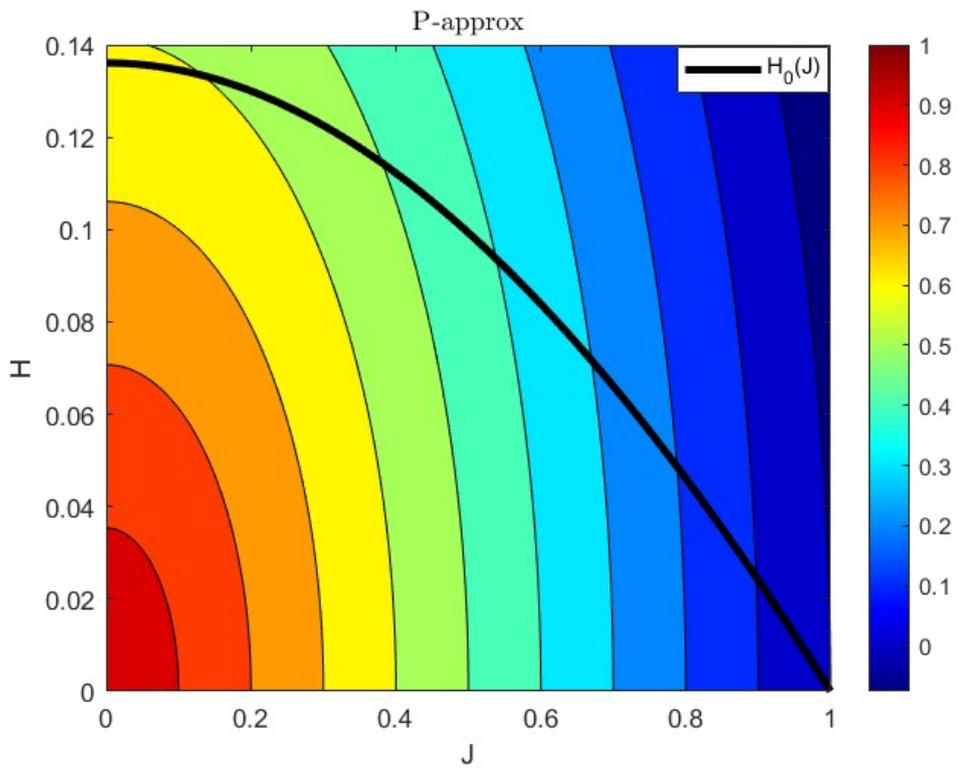


Figura 4.6: P-approx

Capitolo 5

Conclusione

L'obiettivo principale del lavoro di tesi era quello di rispondere alla domanda introduttiva. Sono state derivate espressioni analitiche e semplificate sia per l'angolo di precessione che per l'ampiezza di pulsazione. La formula ottimale (OPT) è risultata essere la più accurata, con un massimo errore di 0.4° . L'approssimazione di P è risultata essere sufficientemente accurata in corrispondenza di valori di ampiezza elevati, nonché regione di principale interesse fisico. In aggiunta, sono state risolte le equazioni differenziali con metodo numerico per analizzare da un altro punto di vista le grandezze in gioco e verificarne la coerenza con quanto detto in precedenza. Dunque, è possibile affermare di aver fornito una risposta completa e positiva alla domanda in questione.

Capitolo 6

Appendice

6.1 Appendice A. Relazioni di Manley-Rowe

Per comprendere al meglio le relazioni di Manley-Rowe, si considera l'interazione reciproca di tre onde ottiche di frequenza ω_1 , ω_2 e $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ che si propagano attraverso un mezzo ottico non lineare senza perdite. Si riporta l'espressione dell'intensità associata ad ognuna delle tre onde:

$$I_i = 2n_i\epsilon_0cA_iA_i^*.$$

La sua variazione spaziale è descritta da:

$$\frac{dI_i}{dz} = 2n_i\epsilon_0c\left(A_i^*\frac{dA_i}{dz} + A_i\frac{dA_i^*}{dz}\right),$$

la quale, definendo anche

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2}A_3A_2^*e^{-i\Delta kz},$$

consente di ottenere la variazione spaziale dell'onda di frequenza ω_1 e similmente quella delle altre due:

$$\frac{dI_1}{dz} = -8\epsilon_0d_{eff}\omega_1\Im\left(A_3A_1^*A_2^*e^{-i\Delta kz}\right),$$

$$\frac{dI_2}{dz} = -8\epsilon_0d_{eff}\omega_2\Im\left(A_3A_1^*A_2^*e^{-i\Delta kz}\right),$$

$$\frac{dI_3}{dz} = 8\epsilon_0d_{eff}\omega_3\Im\left(A_3A_1^*A_2^*e^{-i\Delta kz}\right).$$

Dalle equazioni sopra riportate, si può osservare che il segno di dI_1/dz è lo stesso di quello di dI_2/dz , ma opposto a quello di dI_3/dz . Si osserva inoltre che la direzione del flusso di energia dipende dalle fasi relative dei tre campi che interagiscono. Il set di equazioni mostra che il flusso totale di potenza è conservato, come ci si aspetta per la propagazione attraverso un mezzo senza perdite. Per dimostrare questo fatto,

l'intensità totale è definita da:

$$\frac{dI}{dz} = \frac{dI_1}{dz} + \frac{dI_2}{dz} + \frac{dI_3}{dz} = -8\epsilon_0 d_{eff}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \Im \left(A_3 A_1^* A_2^* e^{i\Delta kz} \right) = 0$$

Il set di equazioni implica inoltre che

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right).$$

Queste uguaglianze sono le equazioni di Manley-Rowe. Dato che l'energia di un fotone di frequenza ω_i è $h\omega_i$, la quantità I_i/ω_i che appare in queste relazioni è proporzionale all'intensità dell'onda misurata in fotoni per unità di area per unità di tempo. Le relazioni di Manley-Rowe possono essere espresse come

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2} \right) = 0.$$

Integrando queste equazioni, si trovano le tre quantità M_1, M_2, M_3 che si conservano

$$M_1 = \frac{I_1}{\omega_1} + \frac{I_3}{\omega_3},$$

$$M_2 = \frac{I_2}{\omega_2} + \frac{I_3}{\omega_3},$$

$$M_3 = \frac{I_1}{\omega_1} - \frac{I_2}{\omega_2}.$$

Dalle equazioni sopra riportate, troviamo che il tasso a cui vengono creati fotoni alla frequenza ω_1 è uguale al tasso a cui vengono creati fotoni alla frequenza ω_2 ed è uguale al tasso a cui vengono distrutti fotoni alla frequenza ω_3 . Quindi, in un mezzo senza perdite, la creazione di un fotone a ω_1 deve essere accompagnata dalla creazione di un fotone a ω_2 e dalla distruzione di un fotone a ω_3 . [6]

6.2 Appendice B. Modi ellittico-parabolici

Le equazioni a piccole ampiezze corrispondenti alla Lagrangiana sono:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_R^2 x &= \lambda x z, \\ \ddot{y} + \omega_R^2 y &= \lambda y z, \\ \ddot{z} + 4\omega_R^2 z &= \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

Se si cercano soluzioni che all'ordine più basso abbiano una forma periodica semplice:

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon(A \cos \omega t) + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \\ y &= \varepsilon(B \sin \omega t) + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \\ z &= \varepsilon(C \cos 2\omega t) + \varepsilon^2 z_2 + \dots,\end{aligned}$$

dove A , B ed C sono costanti e $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots$, il requisito che i termini secolari nelle equazioni del secondo ordine svaniscano porta alle condizioni:

$$\begin{aligned}2\omega_R\omega_1 A + \frac{1}{2}\lambda AC &= 0, \\ 2\omega_R\omega_1 B - \frac{1}{2}\lambda BC &= 0, \\ 8\omega_R\omega_1 C + \frac{1}{4}\lambda(A^2 - B^2) &= 0.\end{aligned}$$

Si hanno tre equazioni in quattro incognite, A , B , C e ω_1 . Se $A = 0$ o $B = 0$ si hanno soluzioni a forma di tazza e a forma di cappuccio. Per $C = 0$ si ha un moto conico (con $A = B$ e $\omega_1 = 0$). Per $ABC \neq 0$ non ci sono soluzioni a queste equazioni. Si cercano soluzioni più generali trasformando le equazioni in coordinate rotanti:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dove ϕ può variare nel tempo. Se si assume che gli assi $(\xi - \eta)$ ruotino con velocità angolare costante $\dot{\phi} = \Omega$, le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + (\omega_R^2 - \Omega^2)\xi - 2\Omega\dot{\eta} &= \lambda\xi\zeta, \\ \ddot{\eta} + (\omega_R^2 - \Omega^2)\eta - 2\Omega\dot{\xi} &= \lambda\eta\zeta, \\ \ddot{\zeta} + 4\omega_R^2\zeta &= \frac{1}{2}\lambda(\xi^2 + \eta^2).\end{aligned}$$

Queste differiscono da (28)-(30) per due motivi: la frequenza ω_R^2 nelle equazioni orizzontali è modificata diventando $(\omega_R^2 - \Omega^2)$, e ci sono termini di Coriolis

aggiuntivi $(-2\Omega\dot{\eta}, +2\Omega\dot{\xi})$ in queste equazioni. Si cercano soluzioni della forma:

$$\xi = \varepsilon(A \cos \omega t) + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots,$$

$$\eta = \varepsilon(B \sin \omega t) + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots,$$

$$\zeta = \varepsilon(C \cos 2\omega t) + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots,$$

Si assume ora che la rotazione sia piccola: $\Omega = \varepsilon\Omega_1$. Allora le equazioni del primo ordine non contengono Ω , implicano $\omega_0 = \omega_R$ e danno le soluzioni:

$$\xi_1 = A \cos \omega_R t,$$

$$\eta_1 = B \sin \omega_R t,$$

$$\zeta_1 = C \cos 2\omega_R t.$$

Il moto è ellittico nella sua proiezione orizzontale e le proiezioni lungo $(\xi - \zeta)$ e $(\eta - \zeta)$ sono paraboliche, una a forma di tazza e una a forma di cappuccio. Il requisito che i termini secolari nelle equazioni del secondo ordine svaniscano porta alle condizioni:

$$2\omega_R\omega_1 A + \frac{1}{2}\lambda AC + 2\Omega_1\omega_R B = 0,$$

$$2\omega_R\omega_1 B - \frac{1}{2}\lambda BC + 2\Omega_1\omega_R A = 0,$$

$$8\omega_R\omega_1 C + \frac{1}{4}\lambda(A^2 - B^2) = 0.$$

Queste sono facili da risolvere per valori dati di A e B :

$$C = \pm \left(\frac{A^2 - B^2}{2\sqrt{2(A^2 + B^2)}} \right),$$

$$\omega_1 = \mp \left(\frac{3\sqrt{2(A^2 + B^2)}}{16l} \right) \omega_R,$$

$$\Omega_1 = \pm \left(\frac{3AB}{4l\sqrt{2(A^2 + B^2)}} \right) \omega_R.$$

Si nota che $|\Omega_1/\omega_1| = 2AB/(A^2 + B^2) \leq 1$, con uguaglianza per un'orbita circolare.

[7]

6.3 Appendice C. Soluzioni periodiche

In questa parte della trattazione ci si assicura che le seguenti equazioni di Lagrange, scritte in questo modo

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z + \left(\frac{1}{2} \frac{g}{l} \varphi^2 - \dot{\varphi}^2 \right) = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi + \left(\frac{g}{l} z \varphi + 2\dot{z} \dot{\varphi} + 2z \ddot{\varphi} \right) = 0,$$

possiedano soluzioni in cui z e φ (rispettivamente elongazione relativa della molla e angolo di deviazione) sono funzioni periodiche, approssimativamente funzioni sinusoidali, del tempo e le condizioni iniziali sono tali che non vi sia trasferimento di energia tra i sistemi componenti. Poiché verrà usato il metodo delle perturbazioni, si introduce – per limitare l'ordine di grandezza dei vari valori e in accordo con l'assunzione che z e φ siano piccoli – il parametro piccolo ϵ tramite le equazioni

$$z = \epsilon x,$$

$$\varphi = \epsilon y.$$

Introducendo le variabili x e y nelle equazioni di Lagrange, ignorando i termini di ordine superiore al primo in ϵ , e assumendo che $\sqrt{k/m} = 2\sqrt{g/l} = 2\beta$, si ottiene

$$\ddot{x} + 4\beta^2 x = \epsilon \left(\dot{y}^2 - \frac{1}{2} \beta^2 y^2 \right),$$

$$\ddot{y} + \beta^2 y = \epsilon (\beta^2 xy - 2\dot{x}\dot{y}).$$

Quando $\epsilon = 0$, queste equazioni ci forniscono una soluzione periodica "non perturbata", in cui x e y sono funzioni sinusoidali del tempo, con una frequenza con rapporto 2:1. Si assume che per $\epsilon \neq 0$ esista una soluzione periodica con un rapporto di frequenze 2:1, che tende a questa soluzione quando $\epsilon = 0$, e verrà trovata questa soluzione periodica. Si indica con ω la frequenza dell'oscillazione orizzontale in questa soluzione "perturbata", e si suppone che si distingua dalla frequenza corrispondente della soluzione non perturbata β per una grandezza dell'ordine di ϵ . Si ottiene

$$\omega^2 = \beta^2 + \epsilon a,$$

dove a è un certo valore finito. Introducendo ω^2 nelle equazioni di Lagrange in x e y e ancora una volta rifiutando i termini dell'ordine di ϵ^2 , si ottiene

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = \epsilon \left(\dot{y}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y^2 \right) + 4ax,$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \epsilon (\omega^2 xy - 2\dot{x}\dot{y}) + ay.$$

Capitolo 6 Appendice

Si cerca una soluzione nella forma di serie in potenze di ϵ :

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \dots$$

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \dots$$

Sostituendo queste serie nelle nuove equazioni ed eguagliando i coefficienti in potenze uguali di ϵ , si ottiene

$$\ddot{x}_0 + 4\omega^2 x_0 = 0,$$

$$\ddot{y}_0 + 4\omega^2 y_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_1 + 4\omega^2 x_1 = \dot{y}_0^2 - \frac{1}{2}\omega^2 y_0^2 + 4ax_0,$$

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = \omega^2 x_0 y_0 - 2\dot{x}_0 \dot{y}_0 + ay_0.$$

Si scrive la soluzione delle prime due equazioni selezionando un determinato origine del tempo, nella forma:

$$x_0 = A \cos 2\omega t,$$

$$y_0 = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t.$$

Affinché x_0 e y_0 siano una soluzione approssimativamente periodica delle nuove equazioni di Lagrange, è necessario che i termini di risonanza siano ridotti a zero quando vengono collocati nel lato destro delle ultime due equazioni scritte sostituendo le serie di potenze; cioè, nel lato destro della prima i termini di frequenza 2ω e nel lato destro della seconda i termini di frequenza ω . Queste condizioni danno il seguente sistema di equazioni per determinare le ampiezze A , B_1 , e B_2 , e la frequenza ω :

$$B_1 B_2 = 0,$$

$$4aA - \frac{3}{4}\omega^2(B_1^2 - B_2^2) = 0,$$

$$(a - \frac{3}{2}\omega^2 A)B_1 = 0,$$

$$(a + \frac{3}{2}\omega^2 A)B_2 = 0.$$

Questo sistema consente una soluzione con tre varianti:

1. $B_1 = \pm\sqrt{8}A$, $B_2 = 0$, $\omega = \omega_1 = \beta(1 + \frac{3}{4}\epsilon A)$,
2. $B_1 = 0$, $B_2 = \pm\sqrt{8}A$, $\omega = \omega_2 = \beta(1 - \frac{3}{4}\epsilon A)$,
3. $B_1 = B_2 = 0$, $a = 0$.

Il terzo caso è l'oscillazione verticale già considerata nell'introduzione. Come sappiamo, è instabile. Le soluzioni a forma di tazza, con parabola concava verso

l'alto, hanno una frequenza leggermente depressa (2), mentre quelle a forma di cappuccio, con una traiettoria concava verso il basso, hanno una frequenza leggermente aumentata (1).

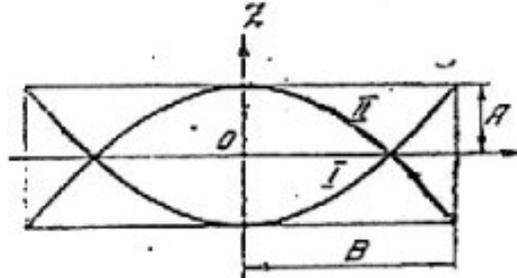


Figura 6.1: Moti periodici.

La figura di Lissajous corrispondente alle oscillazioni dei tipi 1 e 2 è illustrata nella Figura 6.1. Il rapporto delle frequenze dell'oscillazione 2 (più lenta rispetto a quella non perturbata) e dell'oscillazione 1 (più veloce rispetto a quella non perturbata) è

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{3}{2}\epsilon A$$

Quando le oscillazioni sono di tipo 1 e 2, Il collegamento tra i sistemi componenti è efficace solo nel senso che la frequenza della loro oscillazione cambia. Non avviene alcuno scambio di energia tra i sistemi componenti. [4]

6.4 Appendice D. Metodo di Eulero esplicito

6.4.1 Metodo

Si illustra il problema di Cauchy e si discretizza l'intervallo I:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [x_0, x_0 + \beta] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, \dots, n \quad h = \frac{\beta}{n}$$

I valori esatti $y(x_i)$ vengono approssimati con i valori y_i . Si procede con lo sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(\tau_1)h^2 \\ &= y(x_0) + f(x_0, y(x_0))h + \frac{1}{2}y''(\tau_1)h^2 \\ &\text{con } \tau_1 \in [x_0, x_1] \end{aligned}$$

La soluzione approssimata è la seguente:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

L'errore globale di troncamento è il seguente:

$$e_1(x_1) = y(x_1) - y_1 = \overline{P_1T_1}$$

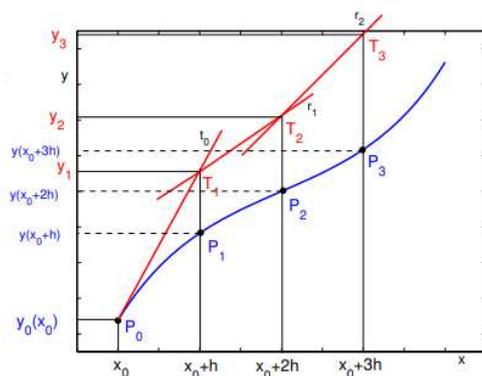


Figura 6.2: Metodo di Eulero esplicito.

6.4.2 Algoritmo

A questo punto si introduce l'algoritmo utilizzato per il calcolo della soluzione approssimata:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

L'errore globale di troncamento ha due contributi:

- L'errore locale di troncamento, dovuto al fatto che la soluzione esatta $y(x)$ viene approssimata localmente con una retta:

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = \frac{1}{2}h^2 y''(\tau_i) \quad \tau_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$R(x_i, y(x_i); h; f) = O(h^2) \quad \rightarrow \quad \text{Primo ordine}$$

- L'accumularsi degli errori locali di troncamento, per cui al generico passo $i \geq 1$ ci si muove lungo la retta r_i che è una approssimazione della retta tangente alla soluzione in $P_i = [x_i, y(x_i)]$.

6.4.3 Convergenza

Si definisce innanzitutto cosa significa che un metodo numerico è convergente: un metodo numerico per la soluzione approssimata di un'equazione differenziale si definisce convergente se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y(\bar{x}) \quad \text{con} \quad \bar{x} = x_0 + ih$$

Dalla Figura 6.3 è evidente che, se si riduce il passo h , si riduce anche l'errore $e_i = \overline{P_i T_i}$. Per di più

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} |e_i| = 0$$

Dunque il metodo di Eulero è convergente.

Un metodo numerico è convergente se è:

- Consistente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x, y; h; f)}{h} = 0$$

- Stabile

L'accumularsi degli errori locali di troncamento si mantiene limitato. [8]

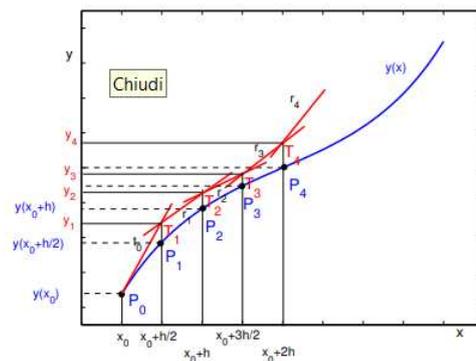


Figura 6.3: Convergenza del metodo di Eulero.

Bibliografia

- [1] Paolo Biscari. *Meccanica razionale*. Springer Nature, 2022.
- [2] Peter Lynch. Resonant rossby wave triads and the swinging spring. *The Irish Meteorological Service*, 2001.
- [3] Peter Lynch and Darryl D. Holm. Stepwise precession of the resonant swinging spring. *Applied Dynamical Systems*, 2002.
- [4] A.Vitt and G.Gorelik. Oscillations of an elastic pendulum as an example of the oscillations of two parametrically coupled linear systems. *Journal of Technical Physics*, 1933.
- [5] Peter Lynch and Conor Houghton. Pulsation and precession of the resonant swinging spring. *Science Direct*, 2004.
- [6] Dr. Ruchi Singh. The manley–rowe relations, 2020.
- [7] Peter Lynch. Resonant motions of the three-dimensional elastic pendulum. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002.
- [8] Domenico Vitulano. *Metodi matematici per l'ingegneria*, 2019-2020.