



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

**Dinamica e condizioni di salto di un  
cilindro eccentrico che rotola lungo  
un piano inclinato.**

**The Jump effect of an eccentric  
cylinder rolling on an inclined plane**

Relatore:  
**Prof. Marco Coco**

Tesi di Laurea di:  
**Aurelio Papiri**

A.A. 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Preliminari teorici</b>	<b>4</b>
2.1	Equazioni cardinali per un corpo rigido . . . . .	4
2.2	Studio del moto dei sistemi di punti materiali e di corpi rigidi vincolati . . . . .	5
2.2.1	Reazioni vincolari ed equazioni del moto in presenza di vincoli. . . . .	6
2.2.2	Vincoli di contatto . . . . .	8
2.2.3	Vincolo di puro rotolamento . . . . .	9
2.2.4	Vincoli dissipativi e attrito . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Studio del moto di un disco su un piano orizzontale e sul piano inclinato</b>	<b>10</b>
3.1	Disco che rotola senza strisciare su una guida fissa orizzontale e inclinato . . . . .	12
3.1.1	Rotolamento con strisciamento . . . . .	15
3.2	Alcuni esempi di studio del moto del disco che rotola su un piano inclinato . . . . .	15
3.2.1	La dinamica di un disco eccentrico che rotola lungo un piano inclinato secondo Theron . . . . .	23
3.2.2	Modello Yanzhu . . . . .	27
3.2.3	Studi sperimentali e Comparazioni numeriche . . . . .	33
<b>4</b>	<b>L'effetto di salto di un cilindro eccentrico che rotola lungo un piano inclinato</b>	<b>44</b>
4.0.1	Commento di alcuni risultati sperimentali . . . . .	57

# 1 Introduzione

L'obiettivo del presente elaborato di laurea sta nel comprendere totalmente la dinamica di un cilindro eccentrico che rotola lungo un piano inclinato (eccentrico perché il centro geometrico non coincide con il centro di massa). Lo studio inerente al cilindro viene ricondotto, in alcune sezioni, ad un problema bidimensionale equivalente: moto del disco che rotola lungo un piano inclinato. Si analizzeranno 3 differenti casi di moto: Puro rotolamento, rotolamento con strisciamento e moto libero dopo il salto (Jumping). L'obiettivo del lavoro è trovare le condizioni per cui si possa passare direttamente dal puro rotolamento al moto libero dopo il salto senza il moto intermedio di contatto senza puro rotolamento. Il seguente scritto sarà costituito da 3 sezioni: una prima parte che permette di riprendere alcuni concetti teorici di base fondamentali per capire il problema; una seconda parte che avrà come fine ultimo lo studio del moto dell'oggetto sul piano orizzontale e successivamente sul piano inclinato ed alcuni studi eseguiti su di esso; la terza e ultima parte sarà interamente dedicata alla discussione delle condizioni per cui si può avere salto non preceduto da strisciamento. L'attività di tirocinio è stata svolta presso il DIISM (Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche) dell'Università Politecnica delle Marche sotto la supervisione del Professore Marco Coco che ha rivestito il ruolo di tutor aziendale ed accademico.

**Keywords:** Dinamica del Disco, Transizione diretta da puro rotolamento a moto libero dopo il salto, strisciamento, forza d'attrito

## 2 Preliminari teorici

Nel capitolo 2 verranno introdotti e analizzati dettagliatamente alcuni concetti teorici che fungeranno da base per le successive sezioni, tra i più importanti: equazioni cardinali per un corpo rigido, definizione di vincolo, studio dei vincoli ideali di contatto e dissipativi, attrito.

### 2.1 Equazioni cardinali per un corpo rigido

Si consideri un corpo rigido di massa  $m$ ; sia  $P_0$  il suo centro di massa e sia  $P_0(x', y', z')$  la terna principale d'inerzia con origine in  $P_0$ . Le equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido risultano essere

$$m\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}^e \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{K}}(P_0) = \mathbf{M}^e(P_0) \quad (2)$$

dove  $\mathbf{R}^e$  e  $\mathbf{M}^e(\mathbf{P}_0)$  sono la Risultante ed il Momento Risultante delle forze esterne rispetto al centro di massa, proiettando lungo le tre direzioni cartesiane la prima equazione cardinale della dinamica si ottiene

$$m\ddot{x} = R_1^e \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = R_2^e \quad (4)$$

$$m\ddot{z} = R_3^e \quad (5)$$

un tipico problema riguardo lo studio di un corpo rigido è la determinazione delle configurazioni di equilibrio ed il calcolo delle reazioni vincolari all'equilibrio. I concetti di vincolo ed analogamente di reazione vincolare verranno trattati nel capitolo seguente.

## 2.2 Studio del moto dei sistemi di punti materiali e di corpi rigidi vincolati

Un punto materiale, soggetto o meno ad un insieme di forze, libero da restrizioni ai valori possibili delle sue coordinate viene detto **punto libero o non vincolato**, il suo moto può svolgersi in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^3$  e ha dimensione  $l=3$ . Estendendo il ragionamento ad un insieme di  $N$  punti materiali non vincolati, il loro moto può svolgersi in tutto lo spazio  $\mathbb{R}^{3N}$  e ha quindi dimensione  $l=3N$ . I sistemi meccanici che si studiano nell'Ingegneria, tuttavia, sono riconducibili ad insieme di punti materiali in cui il moto non si svolge in tutto  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^{3N}$  ma in un suo sottoinsieme di dimensione minore. Si pensi, ad esempio, ad un punto  $P$  di massa  $m$  che si muove su una superficie piana: scegliamo come piano di coordinate  $(x,y)$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio. Le coordinate  $x$  ed  $y$  sono libere, mentre la coordinata  $z$  è fissata dall'equazione  $z=0$ , si dice allora che il punto materiale risulta essere **vincolato** e l'equazione  $z=0$  è definita **equazione di vincolo**, lo spazio si riduce ad  $\mathbb{R}^2$ . Si supponga ora che il punto  $P$ , oltre al vincolo costituito dall'equazione scritta precedentemente, sia costretto a muoversi lungo una curva  $\gamma$  appartenente a tale piano. Le coordinate  $x$  ed  $y$  non sono più indipendenti tra di loro ma sono legate dal fatto che  $P$  giace sulla curva  $\gamma$  e quindi selezionato un valore di  $x$  la  $y$  è determinata dalle condizione di appartenenza. Le equazioni di vincolo sono ora due e lo spazio da  $\mathbb{R}^3$  si riduce ad  $\mathbb{R}^1$ .

Possiamo dunque dare alcune importanti definizioni:

- Si dice **vincolo** un qualunque dispositivo atto a limitare l'intervallo di variazione di una o più coordinate di un sistema di punti materiali. L'espressione

matematica di un vincolo può essere data da un'equazione o disequazione e parleremo dunque di **equazione o disequazione** di vincolo.

- Si definisce **numero dei gradi di libertà**  $l$  di un sistema di punti materiali vincolati il numero dei parametri liberi e indipendenti necessari a descrivere il sistema.

L'insieme dei vincoli cui è sottoposto un insieme di punti materiali è detto **sistema di vincoli**. In assenza di vincoli, i punti materiali sono liberi di spostarsi lungo una qualunque direzione dello spazio.

I vincoli possono essere classificati in:

- **Vincoli fissi e mobili:** Un vincolo si dice fisso quando le equazioni (o disequazioni) di vincolo non contengono esplicitamente il tempo; se lo contengono il vincolo si dice mobile; ad esempio, un punto materiale  $P$  vincolato a scorrere lungo la retta di equazione  $y=ax$  del piano cartesiano  $O(x,y)$ ; se  $a$  è una costante allora il vincolo è fisso, mentre se  $a$  varia nel tempo allora il vincolo sarà mobile.
- **Vincoli geometrici e vincoli cinematici:** quando nelle equazioni (o disequazioni) di vincolo compaiono funzioni delle sole coordinate, il vincolo si dice **geometrico o di posizione**; quando tra gli argomenti ci sono anche le velocità, il vincolo si dice **cinematico o di mobilità**.
- **Vincoli olonomi:** un vincolo si dice olonomo quando è allo stesso tempo geometrico e bilatero, in altre parole, un vincolo per un punto materiale si dice olonomo quando è espresso mediante un'equazione del tipo  $f(x,y,z,t)=0$ . Un vincolo non olonomo è definito come vincolo **anolonomo**.

### 2.2.1 Reazioni vincolari ed equazioni del moto in presenza di vincoli.

Si supponga di avere un punto materiale che è vincolato a muoversi su una superficie piana orizzontale, in modo che i gli spostamenti consentiti siano quelli nel

piano. Sul punto agisce la forza peso, diretta verso il basso, ma gli spostamenti del punto in direzione ortogonale al piano sono impediti, quindi, poiché il punto non può scendere sotto il piano è necessario introdurre al secondo membro delle equazioni del moto un termine aggiuntivo che viene denominato con il termine di **reazione vincolare**. Questo termine ha dimensione fisica di una forza. Un sistema di  $N$  punti materiali ad  $m$  vincoli corrisponderanno analogamente  $m$  reazioni vincolari. L'equazione del moto per un sistema di punti materiali sarà allora

$$\sum_{i=1}^N m_i a_i = \sum_{i=1}^N F_i + \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (6)$$

#### Reazioni vincolari e Gradi di Libertà:

Un punto materiale non soggetto a vincoli possiede 3 gradi di libertà:  $l=3$ ; un insieme di  $N$  punti materiali non vincolati ha  $l=3N$  gradi di libertà, tre per ciascun punto. Si supponga che ora  $N$  punti materiali siano soggetti a  $m$  vincoli olonomi e che le equazioni di vincolo siano compatibili e indipendenti tra di loro. Si possono presentare i 3 seguenti casi:

- $m < 3N$

il numero dei vincoli è inferiore al numero dei gradi di libertà del sistema; in tal caso il sistema si definisce **labile** e possiede  $l=3N-m$  gradi di libertà

- $m=3N$

- il numero dei vincoli è pari al numero dei gradi di libertà del sistema; si definisce **isostatico** e non ha gradi di libertà; la sua configurazione è interamente determinata dai vincoli e la rimozione anche di un solo vincolo rende labile il sistema.

- $m > 3N$

il numero dei vincoli è maggiore del numero dei gradi di libertà del sistema; in tal caso il sistema si definisce **iperstatico** e, come nel caso dell'isosta-

tico, non ha gradi di libertà; a differenza del caso isostatico, tuttavia, è possibile rimuovere uno dei vincoli senza che il sistema diventi labile.

Le reazioni vincolari che compaiono nell'equazione (6) costituiscono ulteriori incognite per il sistema di  $N$  punti materiali; siccome, per avere un'unica soluzione delle equazioni del moto, il numero di incognite e delle equazioni devono coincidere, si tengono in considerazione anche le equazioni di vincolo. Si è visto che se un sistema di  $N$  punti materiali di cui si va ad analizzare il moto è sottoposto ad  $m$  equazioni di vincolo allora il sistema possiede  $l = 3N - m$  gradi di libertà, a questo punto il numero di nuove incognite introdotte dalle reazioni vincolari deve essere pari a  $3N - l$ . Il panorama dei vincoli è molto ampio e una loro corretta comprensione è fondamentale per tutte le applicazioni della meccanica, le condizioni scritte in precedenza permettono di dedurre il tipo di reazione vincolare da associare ad un generico vincolo a partire dalla restrizione cinematica da esso imposta. Tra i vincoli più importanti:

- Vincolo di contatto liscio unilatero e bilatero
- Vincolo di rotolamento senza strisciamento
- Vincoli per sistemi piani: cerniera, carrello, pattino e incastro.
- Vincoli di avvitamento.

### 2.2.2 Vincoli di contatto

Il vincolo di contatto bilatero impedisce il distacco fra un punto e una superficie, oppure tra due superfici. Questo vincolo si traduce nella restrizione che impone l'uguaglianza delle componenti **normali** delle velocità dei punti istantaneamente a contatto. La reazione di un vincolo di contatto è perpendicolare ad esse. L'esempio più semplice è quello di un punto vincolato a rimanere su una superficie  $S$ : risulta evidente come le velocità e gli spostamenti ammissibili per il punto generano lo spazio tangente alla superficie. Se invece il vincolo impone solo che il punto **non oltrepassi** la superficie (unilatero) allora può

essere soddisfatta solo da una reazione vincolare perpendicolare alla superficie e orientata verso la porzione di spazio permessa per il moto del punto.

In un contatto bilatero non si pongono restrizioni riguardo al suo orientamento, mentre nel caso di vincolo unilatero la reazione vincolare ha carattere "repulsivo".

### 2.2.3 Vincolo di puro rotolamento

Un vincolo di grande importanza teorica e applicativa è costituito dal **puro rotolamento** (o **rotolamento senza strisciamento**) fra due corpi. Le superfici dei due corpi che rotolano hanno punto di contatto in comune. La restrizione sull'atto di moto che impone questo determinato vincolo sta nel fatto che, in ogni istante, le velocità dei due punti a contatto siano coincidenti. Infatti, se le componenti normali al piano tangente comune alle superfici di contatto fossero diverse avremo il **distacco**, mentre se fossero diverse le componenti secondo le direzioni tangenti allora si avrà **strisciamento**. In questo caso, la differenza tra le componenti tangenti delle velocità dei punti a contatto viene chiamata **velocità di strisciamento**. A questo vincolo si può e si deve associare una reazione vincolare non tutta perpendicolare alla superficie di contatto ma comprendente anche una parte tangente, che si deve interpretare come dovuta alla presenza dell'attrito. In definitiva:

- il puro rotolamento è un vincolo ideale, per il quale la reazione vincolare è costituita da una forza di direzione arbitraria nel punto di contatto.
- questo vincolo ammette e presuppone la presenza di una parte tangente della reazione vincolare, dovuta alla presenza di attrito statico.

L'approfondimento di tale vincolo verrà ripreso nel successivo capitolo nella quale verrà approfondito lo studio inerente al moto di un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea fissa o inclinata.

#### 2.2.4 Vincoli dissipativi e attrito

In conclusione del capitolo sui "Preliminari teorici" verrà trattata quella tipologia di vincoli chiamati **dissipativi**. Il vincolo di contatto è definito come **vincolo scabro**. Per mezzo di osservazioni empiriche si è giunti alla conclusione che sia la parte tangente  $\phi_t$  che la componente normale  $\phi_n$  debbono soddisfare la **disuguaglianza di Coulomb-Marin**

$$|\phi_t| \leq \mu_s |\phi_n| \quad (7)$$

dove  $\mu_s$  è una quantità adimensionale, detta **coefficiente d'attrito statico**. In condizioni dinamiche la disuguaglianza non viene più rispettata e l'equazione (7) diventa

$$\phi_t = -\mu_d \phi_n \quad (8)$$

dove  $\mu_d$  è definito **coefficiente di attrito dinamico**.

### 3 Studio del moto di un disco su un piano orizzontale e sul piano inclinato

In questo capitolo verrà approfondito il movimento di un disco che rotola senza strisciare su una guida fissa orizzontale e successivamente inclinata. Al centro del comportamento di un sistema di rotolamento c'è l'interazione tra la componente normale e tangenziale della forza d'attrito. Per un disco perfettamente bilanciato, la reazione vincolare normale alla superficie è semplicemente una funzione della forza peso e dell'angolo della superficie, di conseguenza, un disco simmetrico può rotolare con o senza strisciamento. Al contrario, un disco sbilanciato o eccentrico ha una forza normale che dipende dal moto del sistema stesso. In accordo con questo fatto, si è notato, col passare del tempo, che un disco con massa non bilanciata mostri un'ampia gamma di comportamento. Il comportamento

di un disco o di un cerchio sbilanciato in massa fu originariamente notato nel 1953 da Littlewood [1]: Littlewood [1] affermò che un cerchio privo di massa con una massa puntiforme aggiunta striscia prima di saltare. Il primo a rivisitare il problema del cerchio eccentrico posto da Littlewood fu Tokieda [2] nel 1997, che sostenne che un cerchio eccentrico rigido salterà anche se costretto a rotolare senza strisciare. Confutazioni effettuate da Pritchett [3] nel 1999, Theron [4] e Yanzhu [5] hanno superato le ipotesi di Tokieda [2] e hanno affermato che un disco eccentrico deve violare la condizione antistrisciamento prima del salto. In altre parole, il consenso tra i rispondenti a Tokieda [2] è che quando la forza normale si avvicina allo zero (cioè una condizione necessaria per il salto ma non sufficiente), così fa la forza d'attrito statico. Pertanto, non ci sarà più forza sufficiente per mantenere il rotolamento senza strisciamento. In seguito agli studi di Tokieda, le indagini di Gomez suggeriscono che un disco asimmetrico di massa ha tre regimi di comportamento dinamico qualitativamente distinti: rotolamento senza strisciamento, rotolamento con strisciamento e moto libero dopo il salto. Inoltre, Pritchett [3] e Theron [4] notarono che lo strisciamento poteva manifestarsi come slittamento o rotazione. Lo slittamento è quando la velocità del centro geometrico è maggiore della velocità angolare scalata dal raggio. Al contrario, la rotazione è quando la velocità angolare in scala è maggiore rispetto alla velocità del centro geometrico. Questi due regimi di strisciamento descrivono le due possibili direzioni di moto relativo tra il punto di contatto e la superficie, e di conseguenza le due direzioni della forza d'attrito.

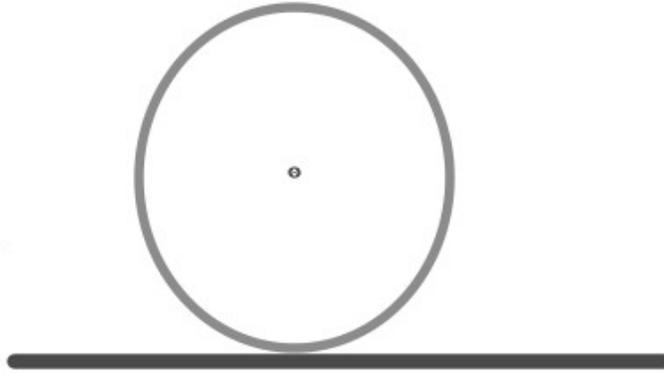


Figura 1: Disco che rotola su un piano orizzontale

### 3.1 Disco che rotola senza strisciare su una guida fissa orizzontale e inclinato

In riferimento alla figura (1), si sceglie un sistema di riferimento  $O(x,y)$  solidale con la guida, la posizione del disco è assegnata dalle coordinate  $(x,y)$ , dalla posizione del baricentro  $G$  e da un angolo di rotazione antioraria  $\theta$ . Per garantire il soddisfacimento del vincolo di puro rotolamento senza strisciamento si deve trovare una relazione che lega la coordinata  $x$  del disco con l'angolo di rotazione, quindi si impone che la velocità del punto di contatto  $C$  sia nulla (questo equivale a dire che l'atto di moto del disco sia rotatorio intorno al punto  $C$  e assume il ruolo di centro di istantanea rotazione). Dopo aver introdotto i versori  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  paralleli agli assi coordinati e  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  posso scrivere che:

$\mathbf{v}(G) = \dot{x}\mathbf{i}$  e  $\omega = -\dot{\theta}\mathbf{k}$  ed indicato il vettore  $(G-C) = -R\mathbf{j}$ , usando la formula fondamentale del moto rigido si può scrivere che

$$\mathbf{v}(C) = \mathbf{v}(G) + \omega \wedge (G - C) = (\dot{x} - R\dot{\theta})\mathbf{i} \quad (9)$$

La condizione  $\mathbf{v}_c=0$  ( $C$  è centro di istantanea rotazione), permette di ottenere una relazione di proporzionalità tra la velocità di avanzamento del disco e la velocità di rotazione del disco.

$$\dot{x} = R\dot{\theta} \quad (10)$$

Integrando si ottiene la seguente espressione

$$x = R\theta + cost \quad (11)$$

Preso un punto  $P$  qualsiasi del disco la velocità che esso possiede è **perpendicolare** al vettore  $(C-P)$ , di orientamento coerentemente deducibile con  $\omega$  e di intensità proporzionale alla distanza da  $C$ . In vista di molte applicazioni è opportuno andare ad analizzare le velocità che competono al centro  $G$  e ad un punto  $H$  diametralmente opposto a  $C$ ; posto il raggio  $R$  allora la velocità del centro è parallela alla guida fissa e di intensità pari ad  $\omega R$  mentre nel punto  $H$  si avrà una velocità doppia.

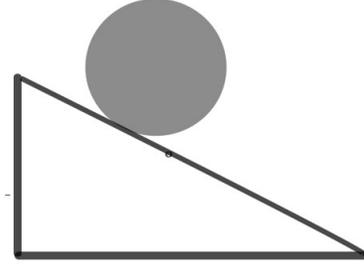


Figura 2: Disco che rotola lungo un piano inclinato

Si supponga che, in presenza d'attrito il disco rotoli senza strisciare e rispetti quindi la condizione di puro rotolamento

$$\dot{x}_g = R\dot{\theta} \quad (12)$$

Le forze che agiscono sul disco sono: forza peso  $m\mathbf{g}$  applicata in  $G$  (centro di massa del disco) e la reazione vincolare  $\phi$  applicata nel punto di contatto con la superficie d'appoggio.

Dalla prima equazione cardinale della dinamica si può visualizzare che

$$m\ddot{x}_g = mg \sin \alpha + \phi_t \quad (13)$$

$$m\ddot{y}_g = -mg \cos \alpha + \phi_n \quad (14)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di inclinazione del piano inclinato.

L'ipotesi di puro rotolamento richiede la presenza di una ben precisa componente d'attrito, dalla Legge di Coulomb-Marin assegnato  $\mu_s$  coefficiente di attrito statico, la componente d'attrito deve soddisfare  $|\phi_t| \leq \mu_s |\phi_n|$  e nel caso che segue

$$\mu_s > \frac{\tan \alpha}{3}$$

Qualora il coefficiente d'attrito non sia sufficientemente grande da garantire l'equilibrio del disco, allora si deve abbandonare l'ipotesi del puro rotolamento e studiare il moto usando la versione dinamica della legge di Coulomb-Marin.

### 3.1.1 Rotolamento con strisciamento

Facendo riferimento alla figura (2), se (10) non viene più soddisfatta allora le due incognite cinematiche  $x_g$  e  $\theta$  non sono più legate dalla relazione precedente (12). Le equazioni cardinali della dinamica assumeranno la forma

$$m\ddot{x}_g = mg \sin \alpha - \mu_d |\phi_n|$$

$$m\ddot{y}_g = -mg \cos \alpha + |\phi_n|$$

Essendo il punto di contatto non fermo risulta opportuno introdurre una nuova grandezza definita come **velocità di strisciamento**. Definiamo velocità di strisciamento la componente orizzontale della velocità nel punto di contatto, usando la formula fondamentale dei corpi rigidi si può scrivere

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \wedge (G - K) = \dot{x}_g - R\dot{\theta}$$

## 3.2 Alcuni esempi di studio del moto del disco che rotola su un piano inclinato

Nel corso della storia fu **Tadashi F. Tokieda** [2], che, dopo Littlewood [1] nel 1997 andò ad analizzare le possibili condizioni di salto di un disco con un punto  $P$  nel bordo di massa  $m$  che rotola lungo un piano orizzontale. Il quesito che Tokieda si pose fu "Quali sono le condizioni affinché si verifichi il salto?". L'approccio utilizzato per dimostrare le sue ipotesi fu di calcolare la forza che il cerchio esercita contro il pavimento nel punto di contatto e verificare che diventi negativa dopo che il cerchio ha compiuto una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$ . L'approccio funziona, ma difficilmente spiega perché il cerchio dovrebbe saltare. Secondo Tokieda [2] se il

disco mantiene il contatto con la superficie d'appoggio, allora un punto  $P$  che si trova sul bordo del disco si muove lungo una cicloide.

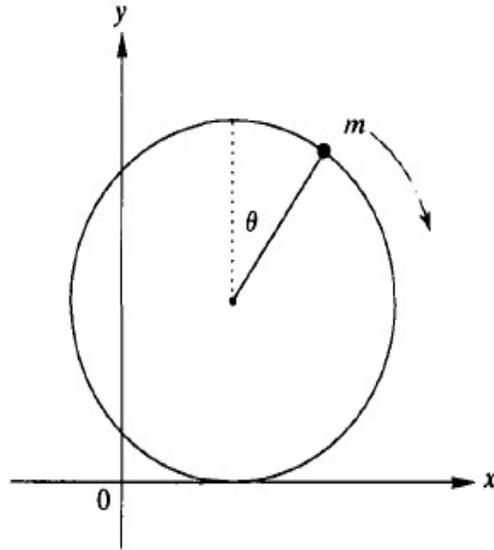


Figura 3: Disco Tokieda [2]

In riferimento alla figura (3), chiamando  $\mathbf{g}$  l'accelerazione di gravità ed  $R$  il raggio del disco allora si possono scrivere le equazioni dell'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m}{2}v_0^2$$

e potenziale

per il principio di conservazione dell'energia si può scrivere che

$$E_i = E_f = T_i + U_i = T_f + U_f = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2}v_0^2 + mg2R \quad (15)$$

dove  $\mathbf{v}_0$  è la velocità iniziale del disco che, per semplicità, imponiamo essere nulla.

Lungo la cicloide si ha che

$$x(t) = R\theta(t) + R \sin \theta(t) \quad (16)$$

$$y(t) = R + R \cos \theta(t) \quad (17)$$

sviluppando le derivate prime si ottiene

$$\dot{x} = R\dot{\theta} + R\dot{\theta} \cos \theta \quad (18)$$

$$\dot{y} = -R\dot{\theta} \sin \theta \quad (19)$$

sostituendo queste ultime due espressioni nell'espressione (15) viene fuori un'espressione del tipo

$$\frac{m}{2} \left[ (R\dot{\theta} + R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-R\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + mg(R + R \cos \theta) = \frac{m}{2} v_0^2 + mg2R \quad (20)$$

svolvendo i calcoli con l'obiettivo di isolare il termine  $\dot{\theta}^2$

$$\frac{m}{2} \left[ R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] + mgR + mgR \cos \theta = \frac{m}{2} v_0^2 + mg2R$$

$$\frac{m}{2} \left[ R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right] + mgR \cos \theta = \frac{m}{2} v_0^2 + mgR$$

si ottiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\frac{v_0^2}{2} + gR(1 - \cos \theta)}{R^2(1 + \cos \theta)}$$

sviluppando la derivata seconda a partire dall'equazione (19) si ottiene che

$$\ddot{y} = -R\dot{\theta}^2 \cos \theta - R\ddot{\theta} \sin \theta \quad (21)$$

sostituendo il termine  $\dot{\theta}^2$  nell'espressione (19) si ottiene

$$\dot{y} = -R \sin \theta \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + gR(1 - \cos \theta)} \quad (22)$$

il disco salterà quando

$$\ddot{y}(\theta(t)) < g$$

allora si ha che

$$\ddot{y} = -R\dot{\theta}^2 \cos \theta - R\ddot{\theta} \sin \theta < |g|$$

In particolare quando  $\mathbf{v}_0=0$  allora  $\theta=\frac{\pi}{2}$  [2]. Se le condizioni imposte da Tokieda [2] sono strettamente rispettate, allora il disco non effettuerà il salto. Nell'articolo [3] si considera un disco rigido circolare di raggio  $R$  e massa  $M$  che, inizialmente rotola senza strisciare. Preso un sistema di riferimento  $O(x,y)$  solidale con la superficie d'appoggio, le 2 coordinate  $x(t)$  e  $y(t)$  del centro del disco (si ipotizza coincidente con il centro di massa) e l'angolo di rotazione  $\theta(t)$  devono rispettare 3 condizioni:

1. Se il disco è rigido e non soggetto a nessuna deformazione nel momento in cui compie il moto di puro rotolamento sarà valida la relazione:

$$(x(t) - x_c(t))^2 + (y(t) - y_c(t))^2 = R^2$$

2. Poiché si presume che, anche la superficie di appoggio sia rigida, l'altezza verticale del disco deve soddisfare  $y_c(t)$  fintanto che quest'ultimo e la superficie sono in contatto.
3. Finché non c'è strisciamento, la posizione del centro del disco e la coordinata angolare  $\theta(t)$  sono correlate dalla relazione  $x_c(t)=R\theta(t)$

Questi tre vincoli implicano che fintanto che il disco rotoli senza strisciare lungo la superficie di appoggio, il centro di massa del sistema si sposta una cicloide accorciata, nota anche come trocoide, in cui le equazioni sono

$$x(t) = R\theta(t) + R \sin \theta \quad (23)$$

$$y(t) = R + R \cos \theta \quad (24)$$

Ogni vincolo è mantenuto da una forza corrispondente, in particolare, vincoli 2 e 3 derivano dalla forza di contatto tra il disco e la superficie di appoggio: la condizione  $y_c(t)=R$  è mantenuta dalla cosiddetta componente normale, cioè la componente della forza di contatto che agisce perpendicolarmente alla superficie, mentre il vincolo di "non strisciamento",  $x_c(t) = R\theta(t)$ , è mantenuto dall'attrito, cioè dalla componente della forza di contatto che agisce parallelamente alla superficie. Andando a scrivere la prima equazione cardinale della dinamica si ottiene

$$M\ddot{x}(t) = \phi_t \quad (25)$$

$$M\ddot{y}(t) = \phi_n - Mg \quad (26)$$

dove  $\mathbf{g}$ ,  $\phi_n$  e  $\phi_t$  sono, rispettivamente, l'accelerazione di gravità, la componente normale e tangenziale della forza d'attrito. Quando il disco perde il contatto con la superficie di appoggio, ( $\phi_n$  e  $\phi_t = 0$ ), le equazioni di Newton descrivono una traiettoria parabolica e le componenti normale e tangenziale della forza d'attrito si annullano e la seconda equazione cardinale della dinamica assume la forma  $\ddot{\theta}(t)=0$ . Pertanto, il disco ruota semplicemente attorno al suo centro di massa con una velocità angolare costante e pari alla sua velocità angolare nell'istante in cui le forze di contatto tendono a zero. Allo stesso modo, le equazioni che descrivono il moto traslatorio del centro di massa, cioè le equazioni di Newton, si riducono alle equazioni per un corpo in caduta libera con un'accelerazione costante verso il basso. Questo simultaneo movimento di rotazione e caduta libera continua fino a quando l'altezza  $y_c(t)$  del centro del cerchio decresce nuovamente a  $R$ , momento in cui  $\phi_n$  acquisisce un valore positi-

vo. L'equazione di governo che descrive simultaneamente il moto di traslazione e rotazione è espressa dalla seconda legge della dinamica nella forma

$$\frac{I}{M}\ddot{\theta} = \phi_n(x(t) - x_c(t)) - \phi_t y(t) \quad (27)$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia del disco. Sviluppando le derivate delle equazioni (23) e (24)

$$\dot{x}(t) = R\dot{\theta} + R\dot{\theta} \cos \theta \quad (28)$$

$$\dot{y}(t) = -R\dot{\theta} \sin \theta \quad (29)$$

,

la derivata seconda risulta essere

$$\ddot{x}(t) = R\ddot{\theta} + R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (30)$$

$$\ddot{y}(t) = -R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (31)$$

Sostituendo queste ultime due equazioni (25) e (26) nell'equazione (27) si ottiene l'equazione pura del moto

$$\frac{I}{M}\ddot{\theta} = M \left[ g - R\ddot{\theta} \sin \theta - R\dot{\theta}^2 \cos \theta \right] (x_c(t) - x(t)) - M \left[ R\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2 \sin \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta \right] y(t) \quad (32)$$

Un approccio alternativo può essere l'equazione di conservazione dell'energia dove si ha che

$$\frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = Mgy(t) \quad (33)$$

sostituendo i vari valori trovati in precedenza, l'obiettivo è isolare  $\dot{\theta}^2$

$$\frac{1}{2}M \left[ (R\dot{\theta} + R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-R\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = Mgy(t) \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}M \left[ R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right] + \frac{1}{2}I \dot{\theta}^2 = Mg(R + R \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2}M \left[ 2R^2 \dot{\theta}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right] + \frac{1}{2}I \dot{\theta}^2 = Mg(R + R \cos \theta)$$

il valore di  $\dot{\theta}^2$  può essere espresso nella seguente maniera

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \frac{1}{2}I + \cos \theta} \quad (35)$$

Tokieda [2] osservò che il salto doveva verificarsi al primo valore di  $\theta(t)$  per il quale si allontana la traiettoria parabolica del centro di massa in caduta libera dalla traiettoria trocoidale imposta dal disco in rotolamento, ma, facendo riferimento all'equazione (26) allora  $\phi_n=0$ , per cui la componente normale della forza di contatto tra il disco e la superficie di appoggio tende a zero. Andando a combinare le equazioni (35), (26) e (24) si può esprimere il valore della reazione vincolare  $\phi_n$  ed ottenere la seguente espressione

$$\phi_n = Mg - MR\ddot{\theta} \sin \theta - MR \cos \theta \frac{g}{R} \frac{1 + \cos \theta}{1 + \frac{1}{2}I + \cos \theta} \quad (36)$$

nel momento in cui il disco salta, si ha che  $\phi_n=0$ , si va a ricercare a questo punto il valore dell'angolo  $\theta$

$$0 = Mg - MR\tau \frac{g}{R} \frac{1 + \tau}{1 + \frac{1}{2}I + \tau} - MR\ddot{\theta} \sin \theta \quad (37)$$

dove  $\tau = \cos \theta$ , andando a sviluppare l'equazione del secondo ordine trovando il corrispettivo valore di  $\theta$  per cui il disco perde il contatto con la superficie d'appoggio. Se effettivamente accadrà, il sistema avrà traslazione del centro di massa lungo la traiettoria parabolica corrispondente alla caduta libera, le cui equazioni sono

$$x(t) = x_1(t) + \dot{x}(t - t_1) \quad (38)$$

$$y(t) = y_1(t) + \dot{y}(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \quad (39)$$

combinare alla rotazione attorno al centro di massa

$$\theta = \theta_1 + \dot{\theta}_1(t - t_1) \quad (40)$$

$(x_1, y_1)$  e  $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$  sono rispettivamente la posizione e la velocità del centro di massa all'istante di tempo  $t_1$  quando  $\phi_n=0$ . Se a questo punto si vanno a sostituire le equazioni (38) e (40) all'equazione (26) si può ottenere l'espressione della coordinata  $y_c$  al tempo  $t > t_1$ . In questo modo, si arriva ad una visione alternativa del perché il disco salta: sta semplicemente ruotando attorno al suo centro di massa, mentre quel centro di massa cade liberamente sotto l'influenza della forza peso. Questo significa che un istante dopo che la forza normale tra il disco e la superficie va a zero, il centro del disco non si muove verso l'alto, ma verso il basso, risultato che si sarebbe potuto ottenere altrettanto bene calcolando l'accelerazione  $\ddot{y}_c(t_1)$ . Pertanto, anche se in  $t_1$  la componente normale della forza di contatto è istantaneamente zero, non può rimanere zero per una durata non nulla. Questo è perché il centro del cerchio sta accelerando verso il basso e la forza normale risulta positiva per far rispettare il vincolo 2 e impedire che l'altezza del centro del disco non vada sotto R.

### 3.2.1 La dinamica di un disco eccentrico che rotola lungo un piano inclinato secondo Theron

**Theron** [4], in tempi più recenti nel 2000, ha studiato il comportamento del disco che rotola per un rapporto di massa tra la massa caricata sul bordo e il totale compreso tra 0.5 e 0.8 e ha previsto angoli di salto compresi tra  $\frac{3}{2}\pi$  e  $2\pi$ . Andando a testare queste previsioni sperimentalmente [4] si scopre che il modello di Theron è corretto e predice gli angoli ai quali il disco salta a differenza di Littlewood [1] che, nel 1953, si presuppone gli angoli per la quale si ha il salto del disco variano tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3}{2}\pi$ .

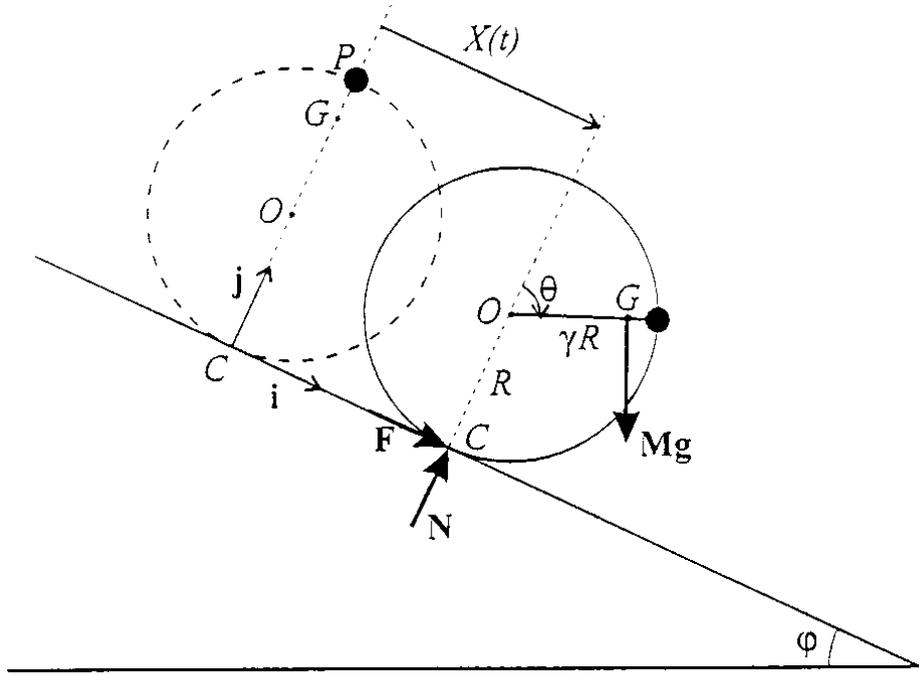


Figura 4: Disco che rotola lungo un piano inclinato [4]

Theron ha studiato un disco perfettamente rigido con massa puntiforme sul bordo. Il disco ha raggio  $R$  e rotola lungo un piano inclinato di un angolo pari a  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. il punto  $P$  è la massa attaccata,  $\theta$  è l'angolo di rotazione e  $G$  rappresenta il centro di massa distante di una quantità  $\eta R$  rispetto al centro geometrico, definito il rapporto

$$\eta = \frac{m_a}{m_t}$$

e  $C$  il punto di contatto tra la superficie e la rampa dove agiscono la forza tangenziale e normale della forza di attrito. Le coordinate del centro geometrico sono descritte da  $(X(t), Y(t))$  mentre quelle del centro di massa sono identificate da  $(x(t), y(t))$ . Il disco ha 3 gradi di libertà  $\theta, X(t), Y(t)$  il vincolo di corpo rigido impone che

$$x(t) = X(t) + \eta R \sin \theta(t) \quad (41)$$

$$y(t) = Y(t) + \eta R \cos \theta(t) \quad (42)$$

In riferimento alla dinamica del disco le forze agenti su di esso sono: la forza peso  $Mg$  e la forza d'attrito. Risulta utile sviluppare le derivate prime e seconde delle componenti del centro geometrico

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t) + \eta R \dot{\theta} \cos \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{Y}(t) - \eta R \dot{\theta} \sin \theta(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{X}(t) - \eta R \dot{\theta}^2 \sin \theta + \eta R \ddot{\theta} \cos \theta \quad (43)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{Y}(t) - \eta R \dot{\theta}^2 \cos \theta - \eta R \ddot{\theta} \sin \theta \quad (44)$$

Si può scrivere a questo punto la prima equazione cardinale della dinamica lungo le direzioni del sistema di riferimento preso come origine, sfruttando 3 termini adimensionali  $\psi = \frac{\dot{X}}{\sqrt{gR}}$ ,  $\delta = (\frac{R}{g})\dot{\theta}^2$  e  $\gamma = \frac{R}{g}\ddot{\theta}$

$$\frac{F}{Mg} = \frac{\ddot{X}}{g} + \eta\gamma \cos \theta - \eta\alpha - \eta\psi \sin \theta \quad (45)$$

$$\frac{N}{Mg} = \cos \alpha - \eta(\gamma \sin \theta + \psi \cos \theta) \quad (46)$$

Si analizzano 3 differenti tipi di moto: puro rotolamento, rotolamento con strisciamento e salto:

- puro rotolamento

Se il disco sta rotolando senza strisciare allora vale la relazione  $\ddot{X} = R \ddot{\theta}$  e la prima equazione cardinale si trasforma in

$$\frac{F}{Mg} = \frac{R\ddot{\theta}}{g} + \eta\gamma \cos \theta - \eta\alpha - \eta\psi \sin \theta \quad (47)$$

durante questo tipo di moto , la legge di Coulomb-Marini risulta essere della forma:  $\mathbf{F} < \mu_s \mathbf{N}$  dove  $\mu_s$  è coefficiente di attrito statico.

Nel momento in cui il disco supera la condizione di attrito statico la disuguaglianza non risulta più valida ed il disco può incorrere in due differenti tipi di moto:

- slittamento e strisciamento

Nel momento in cui  $\mathbf{F} = \mu_d \mathbf{N}$ , dove  $\mu_d$  risulta essere coefficiente d'attrito dinamico e  $\dot{X} < R\dot{\theta}$  si ha che quando il disco **slitta** l'equazione risulta essere in termini adimensionali

$$\frac{\ddot{X}}{g} = \sin \alpha - \eta(\gamma \cos \theta - \psi \sin \theta) + \mu_d N \quad (48)$$

al contrario per lo strisciamento

$$\frac{\ddot{X}}{g} = \sin \alpha - \eta(\gamma \cos \theta - \psi \sin \theta) - \mu_d N \quad (49)$$

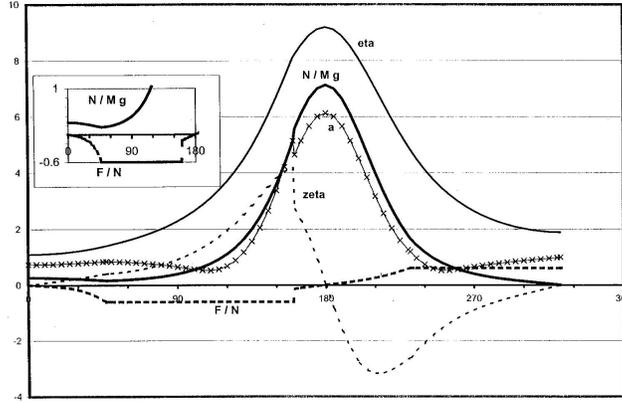


Figura 5: Grafici Theron [4]

Sperimentalmente [4] si è visto che l'angolo di salto risulta essere compreso tra  $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ . Le equazioni scritte in precedenza (45),(46),(47),(48),(49) che descrivono la dinamica del disco possono essere semplificate in un modello a quattro parametri indicato con il simbolo  $\mathbf{R}$  in cui il comportamento dipende da: coefficiente d'attrito  $\mu$ , rapporto di massa  $\eta$ , velocità iniziale  $v_0$  e l'angolo di inclinazione  $\alpha$ . In figura viene mostrato un esempio per valori di  $\mathbf{R}=(0.5;1;1;0.6)$  [4]. Osservando i grafici relativi a  $N$  e  $F/N$  (5), è chiaro che il disco rotola inizialmente con  $\frac{|F|}{N} < \mu$  e  $F < 0$  fino alla posizione in cui  $\theta_1=46,9^\circ$  nella quale inizia a strisciare. Il movimento di slittamento dura fino alla posizione di  $\theta_2=160^\circ$ , a questo punto, le forze e le accelerazioni cambiano in modo discontinuo e il cerchio parte rotolando nuovamente a causa della reazione normale molto ampia in prossimità di  $\theta_3=180^\circ$ . La fase di rotolamento dura fino a  $\theta_4=231,3^\circ$ , infine nella posizione  $\theta_5=322,6^\circ$  la componente normale della reazione vincolare si annulla ed il disco inizia a saltare.

### 3.2.2 Modello Yanzhu

Yanzhu [5] ha studiato il comportamento dinamico di un disco che rotola con una massa puntiforme sbilanciata sotto l'influenza della forza peso; il disco non può mantenere un puro rotolamento prima di saltare e lo slittamento è

inevitabile. Il salto del può avvenire solo quando la derivata dell'accelerazione verticale rispetto al tempo è positiva.

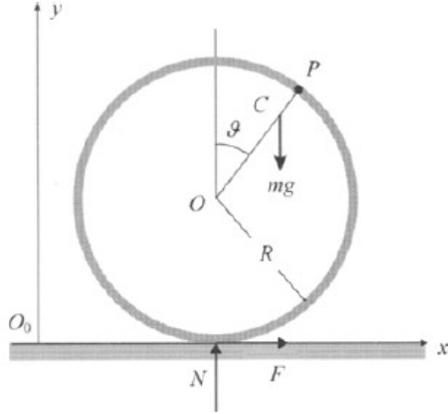


Figura 6: Moto di puro rotolamento di un disco con punto di massa attaccato [5]

Viene considerato un disco rigido di raggio  $R$  e massa  $m$ . Un punto  $P$  di massa  $\lambda m$  è attaccato all'estremità del disco, la massa totale del sistema risulta essere  $m$ . Si denota con  $C$  il centro di massa del sistema e con  $O$  il centro geometrico del disco rispettivamente con le coordinate  $(x_c, y_c)$  e  $(x, y)$  rispetto ad un sistema di riferimento  $O(x, y)$ . Indicando con  $\theta$  l'angolo di rotazione del disco ed il momento d'inerzia  $I = (1 - \lambda^2)mR^2$  e con  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{F}$  rispettivamente la componente normale e tangenziale della forza d'attrito, le equazioni cardinali della dinamica sono descritte dalle seguenti equazioni

$$m\ddot{x}_c = F \quad (50)$$

$$m\ddot{y}_c = N - mg \quad (51)$$

$$I\ddot{\theta} = -F(x - x_c) + Ny \quad (52)$$

un'altra condizione da imporre risulta essere che il centro geometrico si muova lungo una trocoide di equazione

$$x_c = x + \lambda R \sin \theta \quad (53)$$

$$y_c = y + \lambda R \cos \theta \quad (54)$$

Al fine di scrivere le equazioni cardinali della dinamica risulta utile sviluppare la derivata prima e seconda

$$\dot{x}_c = \dot{x} + \lambda R \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y}_c = \dot{y} - \lambda R \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} + \lambda R \ddot{\theta} \cos \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (55)$$

$$\ddot{y}_c = \ddot{y} - \lambda R \ddot{\theta} \sin \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (56)$$

Per mantenere contatto con la superficie d'appoggio una condizione da imporre risulta essere  $y=R$  e dunque  $\ddot{y}=\dot{y}=0$ .

Ora possono essere scritte le equazioni cardinali della dinamica nella forma

$$M \left[ \ddot{x} + \lambda R \ddot{\theta} \cos \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \sin \theta \right] = F \quad (57)$$

$$M \left[ -\lambda R \ddot{\theta} \sin \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \cos \theta \right] = N - mg \quad (58)$$

$$I \ddot{\theta} = -M \left[ \ddot{x} + \lambda R \ddot{\theta} \cos \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \sin \theta \right] (x - x_c) + M y (g - \lambda R \ddot{\theta} \sin \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (59)$$

In condizioni di puro rotolamento si ha che al posto di  $x$  si sostituisce la relazione  $x=R\theta$  e di conseguenza  $\dot{x}=R\dot{\theta}$  e  $\ddot{x}=R\ddot{\theta}$  e l'equazione (60) diventa

$$I \ddot{\theta} = -M \left[ R \ddot{\theta} + \lambda R \ddot{\theta} \cos \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \sin \theta \right] (x - x_c) + M y (g - \lambda R \ddot{\theta} \sin \theta - \lambda R \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (60)$$

si ottiene dunque un'equazione differenziale del secondo ordine che viene risolta imponendo le condizioni iniziali al tempo  $t=t_0$  con  $\theta(t_0)=\theta_0$  e  $\dot{\theta}(t_0)=\dot{\theta}_0$ . Sperimentalmente [5] si è visto che per valori di  $\theta \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$   $\mathbf{F}$  cresce con  $\theta$ , mentre nel momento in cui la componente della forza d'attrito tangenziale supera un certo valore critico, la disuguaglianza di Coulomb-Marini non viene rispettata ed il disco comincerà a slittare. Per studiare le condizioni di salto, bisogna stabilire che ad un determinato tempo  $t_1$  il disco perde contatto con la superficie d'appoggio e devono essere soddisfatte due condizioni:

- Sia la componente normale che tangenziale della forza d'attrito tendono a zero e dunque le equazioni cardinali per il moto libero dopo il salto diventano

$$\ddot{x}_c(t_1) = 0 \quad (61)$$

$$\ddot{y}_c(t_1) = -g \quad (62)$$

$$\ddot{\theta}(t_1) = 0 \quad (63)$$

All'istante  $t=t_1$  il rotolamento (con strisciamento) continua ed il centro geometrico  $O$  trasla con moto rettilineo uniforme. Riprendendo l'equazione (56) si ottiene che

$$-g = -\lambda R \dot{\theta}^2 \cos \theta_1 \quad (64)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\lambda R \cos \theta_1} \quad (65)$$

Affinché si verifichi il salto bisogna imporre che  $\cos \theta_1 > 0$  e dunque  $\frac{3}{2}\pi < \theta_1 < \frac{5}{2}\pi$  e  $|\dot{\theta}_1| > \sqrt{\frac{g}{\lambda R}}$  [5].

- il centro geometrico  $O$  ha una tendenza a muoversi verticalmente verso l'alto a  $t=t_1$ . In questo momento il disco è istantaneamente libero e non sottoposto ad alcun tipo di vincolo. Il centro di massa  $C$  effettua un movimento parabolico sotto l'azione della forza peso ed il disco ruota attorno

al centro di massa  $C$  con velocità uniforme nello stesso tempo. L'accelerazione del centro  $O$  è uguale alla somma dell'accelerazione gravitazionale e l'accelerazione centripeta del punto  $O$ , il tutto può essere espresso come

$$\ddot{y}(t_1) = -g + \lambda R \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \quad (66)$$

Ciò significa che il disco non ha né velocità verticale né l'accelerazione verticale, al fine di controllare la tendenza del moto è necessario calcolare la derivata terza di  $y(t)$

$$\dddot{y}(t) = -\lambda R \dot{\theta}_1^3 \sin \theta_1 > 0 \quad (67)$$

il centro  $O$  ha una tendenza a staccarsi dalla superficie d'appoggio e, analogamente, compiere il moto verso l'alto, la disuguaglianza scritta in precedenza risulta essere valida se

$$\pi < \theta_1 < 2\pi, \dot{\theta}_1 > 0$$

Queste ultime due condizioni devono essere unite a  $\frac{3}{2}\pi < \theta_1 < \frac{5}{2}\pi$  e  $|\dot{\theta}_1| > \sqrt{\frac{g}{\lambda R}}$

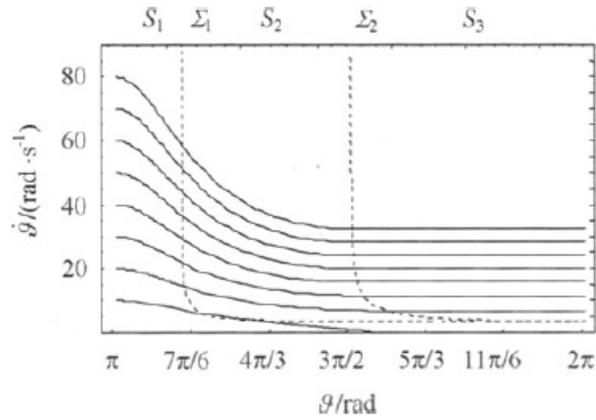


Figura 7: Traiettorie di fase [5]

In conclusione si può affermare che un disco con una massa puntiforme non può mantenere un moto di puro rotolamento prima di saltare e uno slittamento è inevitabile. Il disco non ha né velocità verticale né l'accelerazione verticale nel momento in cui la componente normale della forza d'attrito tende a zero. Il salto del disco può avvenire solo quando la derivata dell'accelerazione verticale rispetto al tempo è positiva nello stesso tempo in cui il vincolo normale è uguale a zero. I moti inerenti al puro rotolamento, rotolamento con strisciamento e salto sono mostrati dalle traiettorie di fase in figura (7)

### 3.2.3 Studi sperimentali e Comparazioni numeriche

Nell'articolo [1] viene illustrata una serie di prove sperimentali utilizzate per studiare il comportamento di un cilindro eccentrico (realizzazione fisica di un disco eccentrico) che rotola lungo un piano inclinato. La figura seguente mostra un'illustrazione del sistema sperimentale e le relative dimensioni:

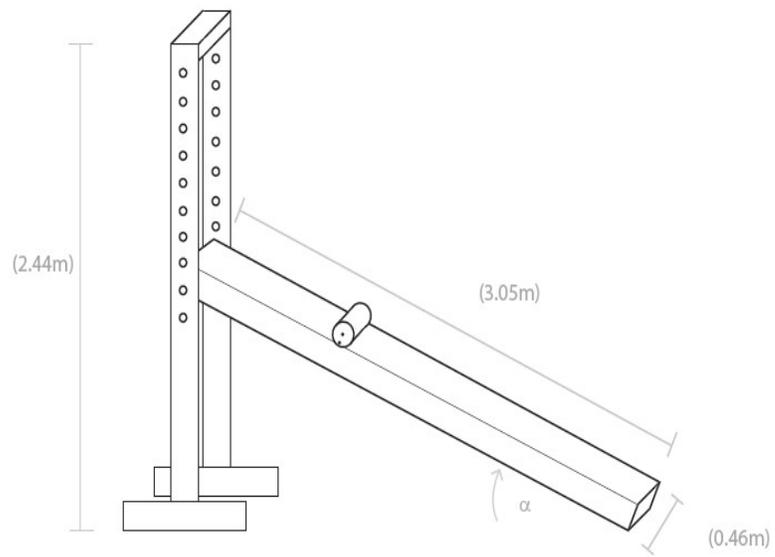


Figura 8: Illustrazione di un cilindro che rotola lungo una rampa usato per le prove sperimentali [1]

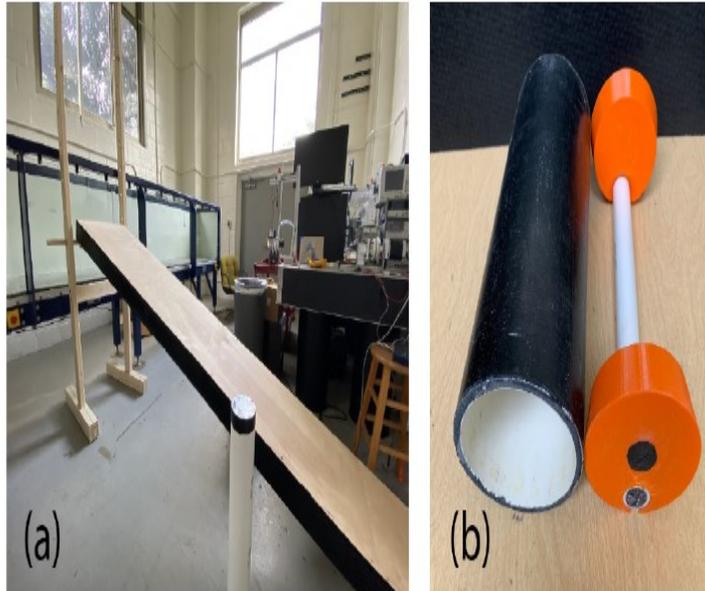


Figura 9: rampa e cilindro rivestito in gomma [1]

mentre le figure (9(a) e (b)) mostrano un'immagine della rampa fabbricata e del cilindro utilizzato durante le prove sperimentali. Il più alto punto della rampa, è stato progettato per essere regolabile e consentire diversi angoli di inclinazione.

Il cilindro eccentrico che risulta essere la realizzazione fisica del disco eccentrico è stato costruito da un grande tubo in PVC, lati stampati in 3D e una serie di tubi in PVC più piccoli intercambiabili riempiti con masse diverse. I piccoli tubi sono stati fissati sulla superficie interna del tubo grande con tappi terminali stampati in 3D. Gli esperimenti sono stati eseguiti con la superficie esterna del cilindro non rivestito e rivestito con un sottile rivestimento in gomma in modo tale da aumentare il coefficiente di attrito statico e quindi ritardare l'inizio

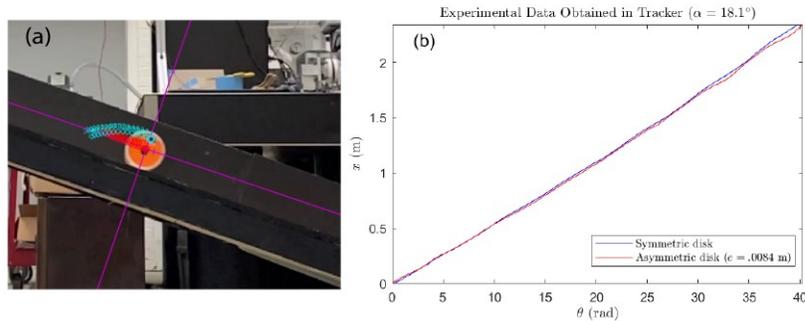


Figura 10: Screenshot dallo strumento di analisi video Tracker(a) ed Esempio di dati sperimentali per un sistema simmetrico cilindro (blu) e un cilindro debolmente asimmetrico (rosso) (b). [1]

dello scorrimento. L'illustrazione dell'approccio di elaborazione delle immagini utilizzato per tracciare il movimento del cilindro è mostrato nell'immagine che segue (10): i marcatori sono stati posizionati al centro geometrico e nella posizione della massa aggiunta. Il video è stato registrato a 240 fps utilizzando una fotocamera da 12 MP e tutti i dati sono stati elaborati in Matlab. Per ottenere una traccia della traslazione e della rotazione del disco lungo la rampa, il processo richiede di definire un sistema di assi coordinati. La figura (10) mostra il tracciamento delle coordinate nel sistema di riferimento del cilindro. Un cilindro senza eccentricità è stato utilizzato come controllo per garantire che la misurazione, il tracciamento e i metodi di elaborazione dei dati fossero validi.

La prima serie di esperimenti è stata eseguita con il cilindro rivestito in gomma che corrisponde a  $\mu_f=0.35$ . In figura (11) viene mostrato un confronto tra dati numerici sperimentali per un cilindro con un'eccentricità relativamente piccola  $e = 0.0042$  m che è stato fatto rotolare verso il basso con un angolo di inclinazione  $\alpha= 15.2^\circ$ . Come mostrato nella figura (11(a)) , previsioni per  $x$  e  $R$  corrispondono molto bene ai dati sperimentali. Anche le osservazioni sperimentali e le previsioni per la velocità, mostrate nella figura (11(b)), sono molto simili. Una caratteristica degna di nota delle serie temporali di velocità osservabili sia nella simulazione che nell'esperimento è la divergenza di  $R\dot{\theta}$  e  $\dot{x}$ . Questa divergenza è una forte indicazione visiva di strisciamento e, infatti, si nota sia rotazione che lo strisciamento; la rotazione si verifica quando  $R\dot{\theta} > \dot{x}$  e lo strisciamento è quando  $R\dot{\theta} < \dot{x}$ . A causa dei vincoli sulla dimensione della rampa, il sistema sperimentale non ha effettuato il salto entro l'intervallo di tempo osservato. Nella simulazione, il salto è stato previsto a  $t = 1.832$  s subito dopo la fine dell'esperimento. Tuttavia, lo strisciamento si è verificato vicino al tempo di scorrimento previsto  $t_s = 0.985$  s. Successivamente, per mostrare ulteriormente la congruenza tra simulazione ed esperimento, i risultati dello stesso sistema di sopra ( $e = 0.0042$  m,  $\mu_f = 0.35$ ) sono esaminati nel piano di fase (12(a)) e (12(b)).

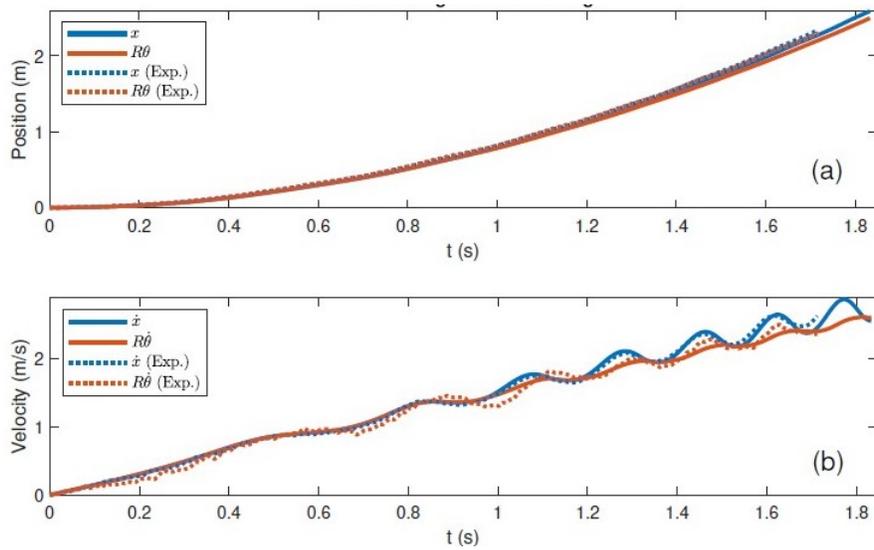


Figura 11: (a) Confronto di serie temporali numeriche e sperimentali per la posizione di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0042$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.35$ . (b) Confronto tra serie temporali numeriche e sperimentali per la velocità di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0042$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.35$ . In simulazioni numeriche, il primo scorrimento è avvenuto a  $t = 0.985$  s e il primo salto è avvenuto a  $t = 1.832$  s. [1]

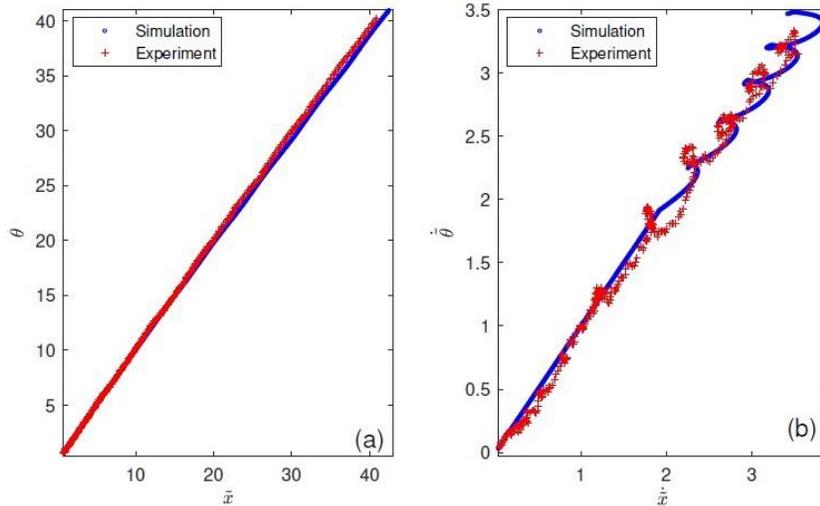


Figura 12: (a) Confronto delle misurazioni sperimentali con le previsioni numeriche nel piano di fase per posizione di un cilindro con  $e = 0.0042$  m e  $\mu_f = 0.35$ . (b) Confronto delle misurazioni sperimentali con previsioni numeriche nel piano di fase per la velocità di un cilindro con  $e = 0.0042$  m ed  $\mu_f = 0.35$  [1]

La seconda serie di esperimenti è stata condotta con il cilindro non rivestito che corrisponde a  $\mu_f=0.25$ . La Figura (13) mostra un confronto tra simulazioni numeriche e osservazioni sperimentali per i materiali meno abrasivi, il cilindro ha un'eccentricità di  $e = 0.0120$  m che rotola lungo un piano inclinato di un angolo in linea di  $\alpha=18.1^\circ$ . Si può notare come l'esperimento corrisponde bene alla previsione nella serie temporale sia per la posizione (13(a)) che per la velocità (13(b)). La Figura 13(b) mostra sia lo strisciamento che la rotazione nelle osservazioni sperimentali e nella simulazione numerica. Infine, nella simulazione sono stati osservati strisciamenti e salti. Ora i risultati per lo stesso cilindro ( $e = 0.0120$  m,  $\mu_f = 0.25$ ) sono presentati nel piano di fase. Figura (14(a)) mostra un confronto tra la simulazione e i dati sperimentali nel piano di fase. Su questo piano, la previsione corrisponde molto bene all'esperimento. Nella figura (14(b)) è mostrato un confronto nel piano della velocità.

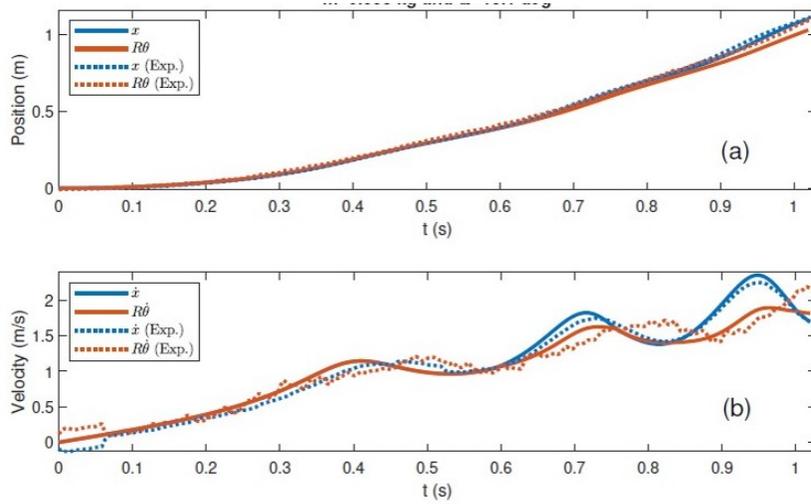


Figura 13: (a) Confronto di serie temporali numeriche e sperimentali per la posizione di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0120$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.25$ . (b) Confronto tra serie temporali numeriche e sperimentali per la velocità di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0120$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.35$ . In simulazioni numeriche, il primo scorrimento è avvenuto a  $t = 0.595$ s ed il primo salto è avvenuto a  $t = 1.019$ s. [1]

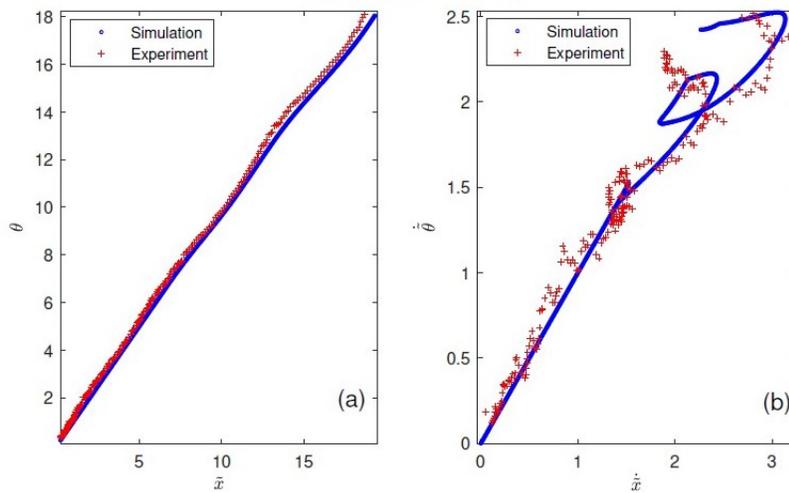


Figura 14: (a) Confronto delle misurazioni sperimentali con le previsioni numeriche nel piano di fase per posizione di un cilindro con  $e = 0.0120$  m e  $\mu_f = 0.25$ . (b) Confronto delle misurazioni sperimentali con previsioni numeriche nel piano di fase per la velocità di un cilindro con  $e = 0.0120$  m ed  $\mu_f = 0.25$  [1]

L'ultima prova sperimentale è stata realizzata con un cilindro fatto rotolare lungo un piano inclinato  $\alpha=15.2^\circ$  con un'eccentricità di  $e = 0.0168$  m e un coefficiente di attrito statico di  $\mu_f = 0.25$ . La serie temporale per la posizione è data nella figura (15(a)) e la previsione corrisponde molto bene all'esperimento. Nella figura (15(b)), si mette in luce ancora una volta un notevole accordo tra le previsioni e osservazioni. Nelle serie di velocità, il modello è in grado di catturare il tempo e la direzione dello scorrimento, l'unica differenza notevole tra la serie temporale della velocità sperimentale e quella simulata è una leggera differenza nella pendenza verso la fine della serie. Per il resto, entrambe le serie sono simili e sia quella sperimentale che quella simulata il sistema ha subito strisciamenti e salti. Infine, i risultati della prova finale ( $e = 0.0168$  m,  $\mu_f = 0,25$ ) sono mostrati come ritratti di fase nella figura 11. Come prove precedenti, le previsioni si allineano con l'esperimento sia nel piano di posizione, mostrato nella figura (16(a)), sia nel piano di velocità, mostrato nella figura (16(b)).

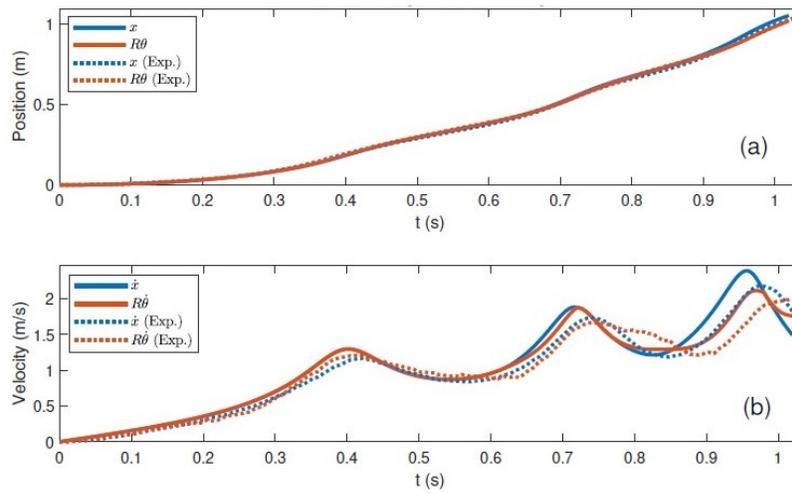


Figura 15: (a) Confronto di serie temporali numeriche e sperimentali per la posizione di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0168$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.25$ . (b) Confronto tra serie temporali numeriche e sperimentali per la velocità di un cilindro eccentrico ( $e = 0.0120$  m) con coefficiente di attrito  $\mu_f = 0.35$ . In simulazioni numeriche, il primo scorrimento è avvenuto a  $t = 0.617$  s ed il primo salto è avvenuto a  $t = 1.019$  s. [1]

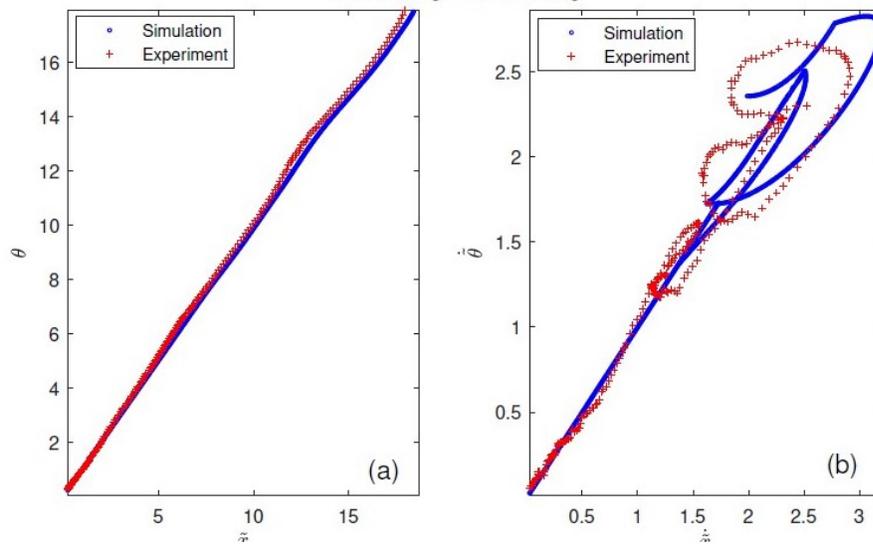


Figura 16: (a) Confronto delle misurazioni sperimentali con le previsioni numeriche nel piano di fase per posizione di un cilindro con  $e = 0.0168$  m e  $\mu_f = 0.25$ . (b) Confronto delle misurazioni sperimentali con previsioni numeriche nel piano di fase per la velocità di un cilindro con  $e = 0.0168$  m ed  $\mu_f = 0.25$  [1]

#### 4 L'effetto di salto di un cilindro eccentrico che rotola lungo un piano inclinato

In questa sezione verrà analizzato [6] il problema principale della tesi, cioè :”è possibile passare dal moto di puro rotolamento del cilindro al moto libero dopo il salto senza passare per il moto intermedio di rotolamento con strisciamento?”. Al fine di rispondere in maniera precisa, risulta di fondamentale importanza capire la fisica dell’oggetto in esame: il sistema fisico è costituito da un cilindro eccentrico (il centro di massa si trova ad una distanza  $\mathbf{d}$  dal centro geometrico) di massa  $M$  e raggio  $R$  che percorre un piano inclinato con attrito. Quest’ultimo è inclinato di un angolo pari ad  $\alpha$  rispetto all’orizzontale. Il moto di rotolamento del disco è descritto dall’angolo  $\theta$ . Nella sezione precedente è stato studiato quali fossero le possibili condizioni di salto di un disco su un piano orizzontale

e inclinato, in questa sezione, invece, si andrà a derivare i possibili moti che il cilindro può effettuare e vedere quali sono i criteri per passare da uno stato all'altro.

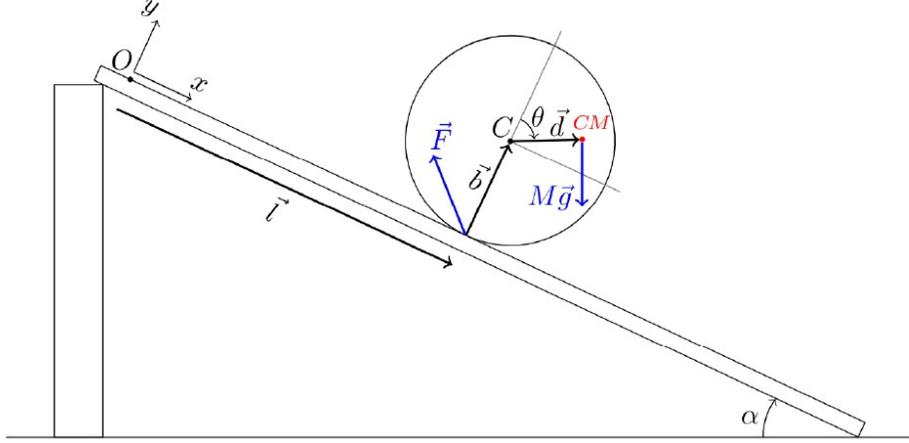


Figura 17: Configurazione schematica del sistema fisico che mostra un cilindro che rotola lungo una rampa inclinata di un angolo  $\alpha$ . [6]

si definiscono i seguenti dati

$$(H-O)=s$$

$$(CM-C)=d$$

$$(C-H)=R$$

### Puro rotolamento

Facendo ricorso alle equazioni cardinali della dinamica per il puro rotolamento si deve tener presente che  $s=R\theta$ .

$$(CM-O)=(CM-C)+(C-O)= (s+d\sin\theta)\mathbf{i}+(R+d\cos\theta)\mathbf{j}.$$

Derivando due volte si ottiene che

$$\frac{d}{dt}(CM - O) = (\dot{s} + d\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{i} - d\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{d}{dt}(CM - O) = (\ddot{s} - d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta)\mathbf{i} + (-d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$= (R\ddot{\theta} + d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta)\mathbf{i} + (-d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta)\mathbf{j} \quad (68)$$

Tenendo conto del fatto che la reazione vincolare ha due componenti:  $\phi_t$  lungo la direzione  $x$  e  $\phi_n$  lungo la direzione  $y$  si può scrivere la prima equazione cardinale della dinamica

$$M\ddot{x}_{CM} = Mgsin\alpha - \phi_t$$

$$M\dot{y}_{CM} = -Mgcos\alpha + \phi_n$$

in cui

$$\dot{x}_{CM} = R\dot{\theta} + d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

e

$$\dot{y}_{CM} = -d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

La seconda equazione cardinale della dinamica assume la forma

$$\mathbf{M}^e = \dot{\mathbf{K}}$$

si può scegliere di operare in due modi:

- si sceglie come polo il centro di massa  $CM$
- si sceglie come polo il punto di contatto tra il cilindro ed il piano inclinato  $H$

Scegliendo la prima opzione, che nello svolgimento dei calcoli risulta essere la più semplice, si deve fare ricorso al Teorema di Huygens-Steiner:

Bisogna calcolare, in primis, il momento d'inerzia rispetto al centro geometrico  $C$ , quindi preso un sistema di riferimento  $O' \equiv C(x', y')$  passando in coordinate polari si ottiene

$$x' = p \cos \theta$$

$$y' = p \sin \theta$$

$$dS = p dp d\theta$$

dove  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq p \leq R$ . Dalle simmetrie materiali appare chiaro che i piani  $(x', z')$  e  $(y', z')$  sono di simmetria materiale e quindi il sistema di riferimento è principale d'inerzia. A questo punto appare chiaro che  $I_{11} = I_{22} = \frac{I_{33}}{2}$  e quindi è sufficiente calcolare solo quest'ultimo termine

$$I_{33} = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R p dp d\theta p^2 = \frac{1}{2} MR^2$$

A questo punto, riprendendo il Teorema di Huygens-Steiner

$$I_{11} = I_{11CM} + Md^2 \sin^2 \theta$$

$$I_{22} = I_{22CM} + Md^2 \cos^2 \theta$$

$$I_{33} = I_{33CM} + Md^2$$

dunque

$$I_{11CM} = I_{11} - Md^2 \sin^2 \theta$$

$$I_{22CM} = I_{22} - Md^2 \cos^2 \theta$$

in conclusione

$$I_{33CM} = I_{33} - Md^2$$

per il calcolo del Momento scegliendo come polo il centro di massa si ha che

$$\mathbf{M}^e = \phi \wedge (H - CM)$$

$$(H - CM) = (-d \sin \theta) \mathbf{i} + (-R - d \cos \theta) \mathbf{j}$$

svolgendo il prodotto vettoriale ed andando a svolgere il determinante simbolico della matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dot{\phi}_t & \dot{\phi}_n & 0 \\ -d \sin \theta & -R - d \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$M^e = \dot{\phi}_t (R + d \cos \theta) \mathbf{i} + \dot{\phi}_n d \sin \theta \mathbf{j}$$

allora la seconda equazione cardinale della dinamica diventa

$$\left( \frac{1}{2} MR^2 - Md^2 \right) \ddot{\theta} = \dot{\phi}_t (R + d \cos \theta) + \dot{\phi}_n d \sin \theta \quad (69)$$

### Rotolamento con strisciamento

La relazione  $s=R\theta$  non è più valida, i termini  $s$  e  $\theta$  sono indipendenti tra di loro, alla relazione del puro rotolamento si sostituisce la seguente espressione

$$\dot{s} = -\eta R \dot{\theta}$$

dove  $\eta$  è un parametro che misura la deviazione del vincolo cinematico dal rotolamento puro.

A questo punto la prima equazione cardinale della dinamica risulta

$$M \ddot{x}_{CM} = Mg \sin \alpha - \dot{\phi}_t \quad (70)$$

dove

$$\ddot{x}_{CM} = -\eta R \ddot{\theta} + d \ddot{\theta} \cos \theta - d \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

e

$$\ddot{y}_{CM} = -d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta$$

dall'equazione pura del moto si ricavano i valori delle reazioni vincolari

$$\phi_t = Mg\sin\alpha - M\left[-\eta R\ddot{\theta} + d\ddot{\theta}\cos\theta - d\dot{\theta}^2\sin\theta\right]$$

$$\phi_n = Mg\cos\alpha + M\left[-d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta\right]$$

sostituendo nella seconda equazione cardinale della dinamica (69) viene fuori che

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 - Md^2\right)\ddot{\theta} = (R + d\cos\theta)(Mg\sin\alpha - M\left[-\eta R\ddot{\theta} + d\ddot{\theta}\cos\theta - d\dot{\theta}^2\sin\theta\right]) \quad (71)$$

$$+d\sin\theta \cdot (Mg\cos\alpha + M\left[-d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta\right]) \quad (72)$$

svolgendo i calcoli e semplificando la massa si può ottenere l'espressione finale di  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{R\dot{\theta}^2 + gdsin\theta\cos\alpha}{\frac{1}{2}R^2 - \eta R^2 - \eta Rdcos\theta} \quad (73)$$

### Moto libero dopo il salto

Nel moto libero dopo il salto si deve tener conto del vettore (CM-O)

$$(CM-O) = (CM-C) + (C-O) = (s + d\sin\theta)\mathbf{i} + (b + d\cos\theta)\mathbf{j}.$$

Derivando due volte la seguente espressione si ottiene che

$$\frac{d}{dt}(CM - O) = (\dot{s} + d\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{i} + (\dot{b} - d\dot{\theta}\sin\theta)\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}MR^2 - Md^2\right)\ddot{\theta} &= (\ddot{s} - d\ddot{\theta}\cos\theta - d\dot{\theta}^2\sin\theta)\mathbf{i} + (\ddot{b} - d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta)\mathbf{j} \\ &= (\ddot{s} + d\ddot{\theta}\cos\theta - d\dot{\theta}^2\sin\theta)\mathbf{i} + (-d\ddot{\theta}\sin\theta - d\dot{\theta}^2\cos\theta)\mathbf{j} \quad (74) \end{aligned}$$

Il cilindro ha perso il contatto con la superficie d'appoggio, il termine  $\phi$  scompare e la prima equazione cardinale della dinamica risulta avere un'espressione del tipo

$$M \left[ \ddot{s} + d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \right] = Mg \sin \alpha$$

$$M \left[ (\ddot{b} - d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta) \right] = -Mg \cos \alpha$$

dalla seconda equazione cardinale della dinamica, si nota che svolgendo i calcoli per l'equilibrio dei momenti attorno al centro di massa, il momento risultante è nullo e dunque l'espressione finale risulta essere del tipo  $\ddot{\theta}=0$ .

Allora le equazioni per il moto libero dopo il salto diventano

$$\ddot{s} - d\dot{\theta}^2 \sin \theta = g \sin \alpha$$

$$\ddot{b} - d\dot{\theta}^2 \cos \theta = -g \cos \alpha$$

$$\ddot{\theta}(t) = 0$$

### **Transizione dal puro rotolamento al moto libero dopo il salto**

Prendendo in esame la figura precedente (17), si può osservare come usando le coordinate del sistema di riferimento  $O(x,y)$  si può scrivere la posizione del centro di massa come somma di tre vettori

$$(CM-O) = (CM-C) + (C-H) + (H-O) = \mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{d} = (s + d \sin \theta) \mathbf{i} + (b + d \cos \theta) \mathbf{j}$$

dove il vettore  $(C-H)=\mathbf{b}$  risulta essere uguale ad  $R$  nel momento in cui il cilindro rimane in contatto con la superficie, mentre nel momento in cui

quest'ultimo perde il contatto si ha che

$$|\mathbf{b}| > R$$

risulta utile riscrivere la prima equazione cardinale della dinamica, mettendo in evidenza il valore della componente tangenziale e normale della forza d'attrito

$$\phi_t = Mg \sin \alpha - M \left[ \ddot{s} + d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \right]$$

$$\phi_n = Mg \cos \alpha + M \left[ \ddot{b} - d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \right]$$

Nel caso del puro rotolamento  $s=b\theta$

$$\phi_t = Mg \sin \alpha - M \left[ \ddot{b}\theta + d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta \right] \quad (75)$$

$$\phi_n = Mg \cos \alpha + M \left[ \ddot{b} - d\ddot{\theta} \sin \theta - d\dot{\theta}^2 \cos \theta \right] \quad (76)$$

La seconda equazione cardinale risulta essere identica a quella scritta precedentemente nel caso di rotolamento senza strisciamento, solamente che al posto del raggio  $R$ , si avrà che

$$\left( \frac{1}{2} MR^2 - Md^2 \right) \ddot{\theta} = \phi_t (b + d \cos \theta) + \phi_n d \sin \theta \quad (77)$$

Nel momento in cui il cilindro è a contatto con la superficie d'appoggio si ha che  $b=R$  ed in aggiunta  $\dot{b}=0$ . Sfruttando le equazioni (75) e (76) si può scrivere

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} MR^2 - Md^2 \right) \ddot{\theta} = & (R + d \cos \theta) (Mg \sin \alpha - MR\ddot{\theta} - Md\ddot{\theta} \cos \alpha + Md\dot{\theta}^2 \sin \theta) + \\ & d \sin \theta (Mg \cos \alpha - Md\ddot{\theta} \sin \theta - Md\dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} MR^2 - Md^2 \right) \ddot{\theta} = & MgR \sin \alpha + Mgd \sin \alpha \cos \theta - MR^2 \ddot{\theta} - \\ & MdR\ddot{\theta} \cos \theta - Md^2 \ddot{\theta} \cos^2 \theta + MdR\dot{\theta}^2 \sin \theta + Mgd \sin \theta \cos \alpha - Md^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

portando tutto al primo membro si ottiene

$$\ddot{\theta}(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2 + 2MdR \cos \theta) - MdR\dot{\theta}^2 \sin \theta - Mgr \sin \alpha - Mgd \sin \theta \cos \alpha = 0 \quad (78)$$

dividendo l'intera espressione per il termine  $MR^2$  si ottiene:

$$\ddot{\theta}(\frac{I_c}{MR^2} MR^2 + 1 + 2\frac{d}{R} \cos \theta) - \frac{d}{R}\dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{g}{R}(\sin \alpha) - g\frac{d}{R \sin \theta} \cos \alpha = 0 \quad (79)$$

dove il termine  $I_c$  rappresenta la matrice d'inerzia calcolata rispetto al centro geometrico (non centro di massa) sfruttando il Teorema di Huygens-Steiner.

Adimensionalizzando l'equazione chiamando  $\chi = \frac{d}{R}$  l'espressione finale risulta essere

$$\ddot{\theta}(\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta) - \chi\dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{g}{R}(\sin \alpha) - g\chi \sin \theta \cos \alpha = 0 \quad (80)$$

La condizione di salto è stata introdotta, in alcuni articoli trattati precedentemente [3],[2], dalla relazione  $\phi_n=0$ , vale a dire il salto avviene nel punto in cui la forza normale tende a zero. Tuttavia, questa condizione considera l'ipotesi che il salto non sia possibile dal puro rotolamento, il che significa che il cilindro debba strisciare prima di saltare. a questo punto la  $\phi_n=0$  non è vera (nel caso in cui si passi direttamente da puro rotolamento a salto del cilindro) e, in aggiunta, assume un valore positivo

$$\phi_n > 0$$

A questo punto per capire il passaggio diretto da puro rotolamento a moto libero dopo il salto bisogna effettuare alcune considerazioni: il cilindro, nel momento in cui è a contatto con la superficie, quindi prima del salto, ha un valore di  $b(t)=R$  ed analogamente  $\dot{b}=\ddot{b}=0$  e i valori di  $\theta(t), \dot{\theta}(t)$  e  $\ddot{\theta}(t)$  dipendono dall'equazione (77), perciò, prendendo in esame le equazioni per il moto libero dopo il salto, nell'istante iniziale in cui si supponga che  $\theta(t)=0$  si ha che  $\ddot{b}=-g \cos \alpha$ , successivamente si verrà a verificare un aumento del valore di  $\ddot{b}$  a causa del contributo

positivo di  $\dot{\theta}(t)$ . Dopo il salto, i valori di  $b=R$  e  $\dot{b}=0$  diventano le condizioni iniziali per  $b(t)$  nella condizione di moto libero dopo il salto. Conseguentemente, nel punto in cui vi è la transizione da puro rotolamento a salto del cilindro si deve avere che  $b=0$  e dunque nel caso di moto libero dopo il salto si avrà la seguente espressione

$$d\dot{\theta}^2 \cos \theta - g \cos \alpha = 0 \quad (81)$$

Il passaggio da puro rotolamento a moto libero dopo il salto deve avvenire per un certo angolo  $\theta=\theta_J$  in riferimento all'equazione (81) si ottiene

$$\dot{\theta}_J^2 = \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} \quad (82)$$

sostituendo (82) a (80) si ottiene

$$\ddot{\theta} \left( \frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta \right) - \chi \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} \sin \theta - \frac{g}{R} (\sin \alpha) - g\chi \sin \theta \cos \alpha = 0 \quad (83)$$

e isolando  $\ddot{\theta}_J$  si ottiene

$$\ddot{\theta}_J = \frac{\chi \sin \theta \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} + \frac{g}{R} \sin \alpha + g\chi \sin \theta \cos \alpha}{\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta_J} \quad (84)$$

Per avere salto dopo puro rotolamento senza passare per lo strisciamento deve essere rispettata la legge di Coulomb-Marin  $|\frac{\phi_t}{\phi_n}| < \mu_s$ , perciò al fine di restringere l'analisi al puro rotolamento si sostituiscono i termini  $\ddot{b}=0$  ed  $\ddot{s}=R\ddot{\theta}$  e si ottiene

$$\phi_t = MR \left[ \frac{g}{R} \sin \alpha - \ddot{\theta} (1 + \chi \cos \theta + \chi \dot{\theta}^2 \sin \theta) \right] \quad (85)$$

$$\phi_n = MR \left( \frac{g}{R} \cos \alpha - \chi \dot{\theta}^2 \cos \theta - \chi \ddot{\theta} \sin \theta \right) \quad (86)$$

interessante puntualizzare che all'inizio del moto l'energia cinetica è prossima allo zero e il centro di massa si trova nella sua posizione più alta in modo tale da permettere al cilindro di rotolare essendo in una condizione di equilibrio

instabile, la reazione vincolare  $\phi_n$  è positiva ma durante il moto all'aumentare dei valori di  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$  tende a zero, ma prima di diventare negativa la disuguaglianza data dalle legge di Coulomb-Marin entra in gioco e ciò significa che il cilindro inizia a strisciare.

Al fine di comprendere al meglio il valore ed il segno della componente tangenziale e normale della forza d'attrito, sostituendo le equazioni (81) e (84) alle equazioni (85) e (86)

$$\phi_{tJ} = MR \left[ \frac{g}{R} \sin \alpha + \chi \sin \theta_J \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} - (1 + \chi \cos \theta_J) \left( \frac{\frac{g}{R} \sin \alpha + g \chi \sin \theta_J \cos \alpha + \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} \chi \sin \theta_J}{\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta_J} \right) \right] \quad (87)$$

$$\phi_{nJ} = MR \left[ \frac{g}{R} \cos \alpha - \chi \frac{g \cos \alpha}{d} - (\chi \sin \theta_J) \left( \frac{\frac{g}{R} \sin \alpha + g \chi \sin \theta_J \cos \alpha + \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} \chi \sin \theta_J}{\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta_J} \right) \right] \quad (88)$$

si può notare da quest'ultima equazione che la componente  $\phi_n$  non è necessariamente uguale a zero, nel caso in cui  $\phi_{nJ} > 0$  e  $\theta > \theta_J$  allora  $\phi_n = 0$ , fisicamente ciò significa che prima di saltare il cilindro potrebbe aver strisciato e questo impone che la condizione di puro rotolamento non sia più valida. Come menzionato in precedenza, per avere salto la condizione di partenza è che la componente  $\phi_n > 0$  e per non avere strisciamento deve essere rispettata la legge di Coulomb-Marin, a questo punto iniziamo un'analisi volta a scoprire i possibili valori di  $\theta_J$ , non è difficile notare come

$$2\pi n - \alpha < \theta_J < 2\pi n \quad (89)$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$  dove  $n$  indica il numero completo dei giri del cilindro.

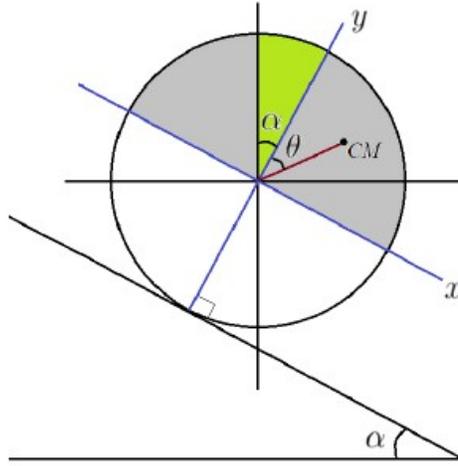


Figura 18: Rappresentazione degli angoli e sulla sezione trasversale del cilindro. [6]

Dalla figura (18) qui riportata si può notare come l'angolo  $\alpha + \theta$  è misura tra la verticale ed il vettore  $\mathbf{d}$ . Dalla configurazione geometrica è possibile mettere in luce che la regione grigia appartiene a quei punti dove  $\phi_{nJ} < 0$  mentre la regione verde appartiene a quei punti dove  $\phi_{nJ} > 0$ ; a questo punto, la regione dove è possibile che avvenga il salto direttamente dal puro rotolamento è quando il centro di massa si trova all'interno della regione verde e si può notare come la componente tangenziale  $\phi_{tJ} < 0$  il che significa che la forza d'attrito statico punta verso l'alto ( sistema di riferimento  $O(x,y)$ ). Alcune restrizioni per i possibili valori dell'angolo  $\theta_J$  possono essere ricavate dalla Legge di Coulomb-Marini andando a sfruttare le equazioni (85) e (86) , andando a fare il rapporto viene a generarsi un'espressione del tipo

$$\mu(\theta_J, I_c, \chi) = \frac{\frac{g}{R} \sin \alpha + \chi \sin \theta_J \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} - (1 + \chi \cos \theta_J) \frac{\chi \sin \theta_J \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} + \frac{g}{R} \sin \alpha + g \chi \sin \theta_J \cos \alpha}{\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta_J}}{\frac{g}{R} \sin \alpha - \chi \frac{\cos \alpha}{-\chi \sin \theta_J} \frac{\chi \sin \theta_J \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta_J} + \frac{g}{R} \sin \alpha + g \chi \sin \theta_J \cos \alpha}{\frac{I_c}{MR^2} + 1 + 2\chi \cos \theta_J}} < \mu_s \quad (90)$$

Una tipica soluzione della funzione può essere espressa

$$\frac{\frac{-k_m^2 + k_m + \chi^2}{(k_m - 1)\chi^2} + \cos^2 \theta_J}{\sin \theta_J \left( \frac{1}{\chi} + \cos \theta_J \right)} < \mu_s \quad (91)$$

$$\text{dove } \frac{I_c}{MR^2} = k_m + \frac{\chi^2}{1 - k_m}$$

Vale la pena notare che il dominio espresso dalla disequazione seguente è più grande rispetto a quello espresso dall'equazione (52), tuttavia è importante tenere presente che il limite inferiore per  $\theta_J$  deve essere maggiore o uguale a  $2\pi n - \alpha$ . Si nota anche che, a causa della consueta proprietà periodica delle funzioni trigonometriche che compaiono in  $\mu(\chi; k_m; \theta_J)$ , il grafico di questa funzione è lo stesso per qualsiasi valore intero  $n$ . Dopo alcune analisi si può concludere che per avere Salto direttamente da puro rotolamento:

- Deve esistere un minimo valore  $\mu_s$  per il coefficiente di attrito statico
- Per ogni  $\mu_s > \mu_{smin}$ ,  $\theta_{Jmin}$  e  $\theta_{Jmax}$  sono indicati rispettivamente da  $\mu_s > \mu_{smin}$  e  $\mu = \mu_{smin}$ , ci sono due soluzioni per la seguente equazione e sono rispettivamente  $\theta_{Jmin}$  e  $\theta_{Jmax}$ , mentre per valori  $\mu_s \gg \mu_{smin}$  c'è solo una soluzione data da  $\theta_{Jmax}$ .
- Poiché esiste un valore massimo per  $\theta_J$ , che è stato indicato con  $\theta_{Jmax}$ , allora esiste un valore minimo di  $\alpha$ , indicato con  $\alpha_{min}$  che soddisfa  $\alpha_{min} = 2\pi - \theta_{Jmax}$ , questo è vero perché  $\theta_J$  soddisfa la disuguaglianza data.

#### 4.0.1 Commento di alcuni risultati sperimentali

Per avere direttamente Salto a partire dalle condizioni iniziali del puro rotolamento, nell'articolo [6] verranno mostrate dei grafici (19) cui devono appartenere

nere determinati parametri affinché si verifichi questa condizione. Poiché essenzialmente si hanno cinque parametri ( $\chi, \mu_s, k_m, n$  e  $\alpha$ ), dovranno essere fissati almeno due parametri in modo che i restanti tre possano essere visualizzati in uno spazio tridimensionale. Fissando il valore dei parametri  $n$  e  $\mu_s$ , presentando le regioni dello spazio ( $\alpha; \chi; k_m$ ) e scegliendo un qualsiasi insieme di parametri  $\alpha$ ,  $\chi$  e  $k_m$  che appartengono a queste regioni, l'avvenimento del Salto risulta essere garantito. Andando a comparare le due figure si viene a notare che le regioni con  $\mu_s=1$  sono maggiori di  $\mu_s > 0.7$ . Questo risultato ha senso poiché per un coefficiente di attrito statico maggiore, ci si aspetta che il cilindro abbia più possibilità di mantenere il puro movimento di rotolamento. Per un valore fisso di  $\mu_s$  possiamo anche confrontare regioni ottenute con valori diversi di  $n$ . Ad esempio, dalla figura (19(a)), per il valore di  $\mu_s = 0.7$ , si deduce che all'aumentare dei valori di  $n$ , le regioni corrispondenti si stanno riducendo. L'interpretazione fisica di questo risultato è la seguente:  $n$  rappresenta il numero di giri compiuti dal cilindro, quindi per un dato valore di  $\mu_s$ , poiché  $n = 1$  è il più basso possibile valore per  $n$ , la maggiore possibilità di avere il salto si verifica prima che il cilindro completi il giro completo, e la possibilità diminuisce ogni volta che si aumenta tale valore. Per quanto riguarda l'inclinazione della rampa data dall'angolo  $\alpha$  (dove  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  è il suo valore massimo), si osserva che, all'interno delle regioni mostrate in figura (19), grandi valori di  $\alpha$  sono in corrispondenza di piccoli valori di  $\chi$ . Questo tipo di corrispondenza ha senso poiché per una elevata inclinazione della rampa, per evitare uno strisciamento, la forza normale non deve oscillare molto, e ciò avviene quando il valore di  $\chi$  è piccolo. Quando l'inclinazione della rampa si avvicina al valore di  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , si viene a notare che le regioni definite dai valori  $\chi$  e  $k_m$  diventano più piccole. Ciò è evidenziato dal fatto che quando  $\alpha$  tende a  $\frac{\pi}{2}$ , la regione dove si presenta il salto ha la forma di un cuneo il cui vertice è dato dal punto  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \chi = 0$  e  $k_m = 0$ . Per interpretare questo risultato ricordiamo che all'interno della regione in cui avviene il salto, grandi valori di  $\alpha$  sono in corrispondenza con piccoli valori di  $\chi$ , cioè quando il Centro di Massa è vicino al centro geometrico  $C$  del cilindro si hanno minori oscillazioni della forza normale, che non comporta strisciamento.

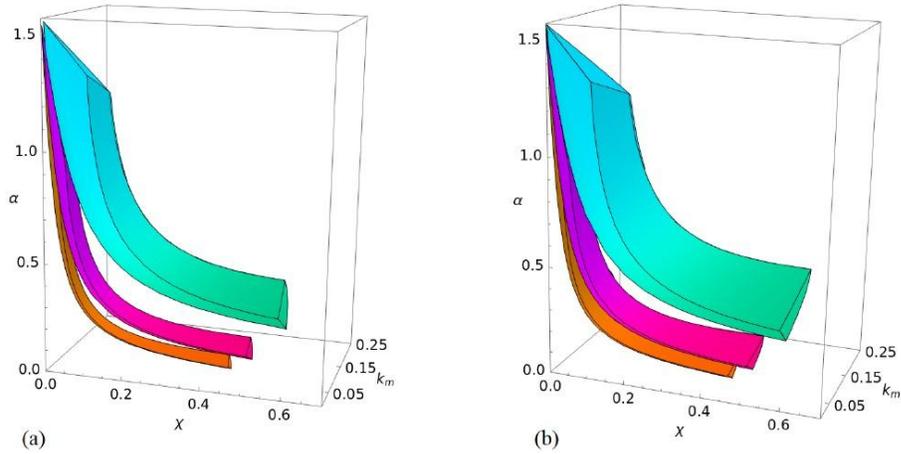


Figura 19: Regioni in cui si verifica il salto nello spazio dei parametri e km, per valori fissi di  $\mu_s, n$  e le condizioni iniziali  $\theta_0 = 0$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ . (a) Si è posto che  $\mu_s = 0.7$  e  $n = 1, 2, 3$  corrispondono rispettivamente ai solidi verde, viola e arancione. (b) il plot è uguale a quello precedente presentato in (a) ma con  $\mu_s = 1$ [6]

È utile osservare come sfruttando il teorema di Conservazione dell'energia si possa ricavare, tramite alcune prove in laboratorio, il valore di determinati angoli del piano inclinato attraverso la quale è possibile notare come il salto si manifesti. Riferendosi alla figura (17) si può chiarire che il cilindro, dopo aver percorso una distanza pari ad  $s=R\theta$  lungo il piano inclinato:

- il centro geometrico non è fisso ed è sceso di una quantità pari ad  $H_1=R\theta$
- il Centro di Massa, allo stesso modo, non si troverà nella stessa posizione di partenza, ma sarà sceso di una quantità pari a  $H_2=d(1-\cos\theta\cos\alpha)$

il valore dell'energia potenziale del cilindro sarà allora espresso dalla formula

$$U = Mg [R\theta \sin \alpha + d(1 - \cos \theta \cos \alpha)] \quad (92)$$

A questo punto calcolo l'energia cinetica rispetto al punto H ( centro di istantanea rotazione e punto di contatto tra cilindro e la superficie) , l'espressione per l'energia cinetica risulta essere

$$T = \frac{1}{2} I_H \dot{\theta}_H^2$$

per il calcolo di  $I_H$  si ricorre al Teorema di Huygens-Steiner

$$I_{11H} = I_{11CM} + M((H - CM)_y)^2 = \frac{1}{4}MR^2 - Md^2 \cos^2 \theta + M(R + d \cos \theta)^2 = \frac{5}{4}MR^2 + 2MRd \cos \theta$$

$$I_{22H} = I_{22CM} + M((H - CM)_x)^2 = \frac{1}{4}MR^2 - Md^2 \sin^2 \theta + Md^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4}MR^2$$

$$I_{33H} = I_{11H} + I_{22H} = \frac{3}{2}MR^2 + 2MRd \cos \theta$$

Dall'equazione  $L=T-V$  si può esprimere che

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}MR^2 + 2MRd \cos \theta \right) \dot{\theta}^2 - Mg [R\theta \sin \alpha + d(1 - \cos \theta \cos \alpha)] = 0 \quad (93)$$

$$(94)$$

$$\frac{3}{4}MR^2 + Mrd \cos \theta = Mg [R\theta \sin \alpha + d(1 - \cos \theta \cos \alpha)] \quad (95)$$

isolando il valore di  $\dot{\theta}^2$  si ottiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g [R\theta \sin \alpha + d(1 - \cos \theta \cos \alpha)]}{\frac{4}{3}MR^2 + Rd \cos \theta} \quad (96)$$

Per ricavare il valore di  $\dot{\theta}^2$  devo imporre che nel momento in cui cilindro perde il contatto con la superficie d'appoggio la forza centrifuga eguagli la componente della forza normale della reazione vincolare(  $\phi_n = Mg \cos \alpha$ )

$$F_c = -M\omega \wedge (\omega \wedge (CM - C)) = Md\dot{\theta}^2 \cos \theta$$

a questo punto posso eguagliare le due espressioni ed ottenere il valore desiderato

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta}$$

sostituendo il tutto nell'espressione 96 si ottiene

$$\frac{g \cos \alpha}{d \cos \theta} = \frac{g [R\theta \sin \alpha + d(1 - \cos \theta \cos \alpha)]}{\frac{4}{3}MR^2 + Rd \cos \theta} \quad (97)$$

Un modo semplice per arrivare a una soluzione di questa equazione è di plottare entrambi i membri e cercare la prima intersezione delle curve risultanti. I risultati per angoli di  $\alpha$  pari a  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$  sono mostrati in figura (20) e (21), in particolare, le linee tratteggiate corrispondono al membro di destra dell'equazione mentre quella continua corrisponde al membro di sinistra.

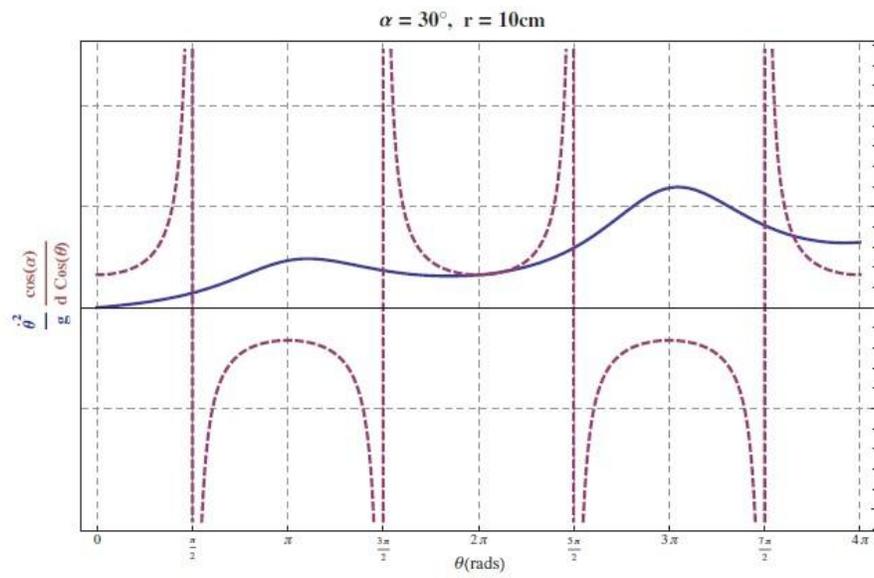


Figura 20: Grafico di  $\frac{\theta^2}{g}$  rispetto a  $\frac{d \cos \alpha}{d \cos \theta}$  per  $\alpha=30^\circ$  [7]

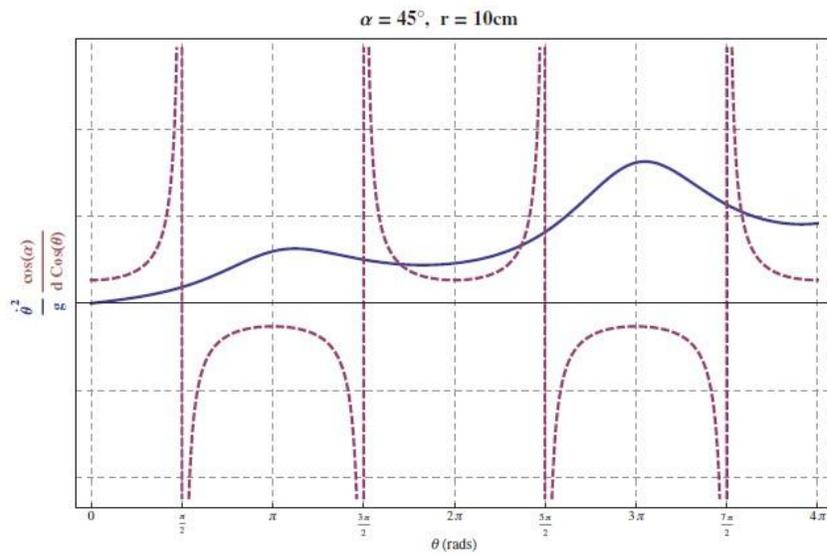


Figura 21: Grafico di  $\frac{\theta^2}{g}$  rispetto a  $\frac{\cos \alpha}{d \cos \theta}$  per  $\alpha=45^\circ$

Nell'articolo [7] viene riportato un esperimento volto a dimostrare la veridicità delle equazioni scritte ; durante il processo, viene utilizzato un cilindro di raggio  $r=10,00\pm 0,05$  cm , di altezza  $h=5,55\pm 0,05$  cm e una massa  $m_1= 34,20 + 0,05$ g di  $9,50\pm 0,01$  mm di diametro e con  $5,10\pm 0,01$  cm di lunghezza di piano inclinato in ottone di massa  $m = 32,10\pm 0,05$  g incorporata parallelamente all'asse del disco ad una distanza  $y = 5,50\pm 0,05$  cm da esso, quindi il centro di massa si trova ad una distanza  $d = 2,65\pm 0,09$  cm dal centro del cilindro. A questo punto viene fatto rotolare il disco lungo rampa inclinata di  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . Per determinare il luogo del salto, è stato registrato il movimento una videocamera ad alta velocità (Casio EX ZR100) a 240 e 480 fotogrammi al secondo (fps), con risoluzioni corrispondenti di  $432 \times 320$  e  $224 \times 160$  pixel. Le principali fonti di errore dell' esperimento sono la posizione iniziale del cilindro, che è stato preso in modo tale che il suo centro di massa fosse normale al piano inclinato, e il punto in cui il cilindro effettivamente salta. La posizione iniziale del cilindro viene impostata manualmente utilizzando come guida una squadra fissa perpendicolarmente al piano inclinato all'estremità dove è iniziato il movimento. Di particolare interesse è il caso in cui l'angolo  $\alpha=15^\circ$ , dove l'accelerazione iniziale e il moto di discesa del cilindro sono ben visibili, si vede chiaramente il rallentamento del cilindro ed i salti sia nel secondo caso ( $\alpha=30^\circ$ ) e nel terzo caso ( $\alpha=45^\circ$ ). Nel momento in cui l'inclinazione del piano inclinato risulta essere di  $\alpha=45^\circ$ , però, risulta difficile far avvenire il salto perché avviene prima che il disco abbia compiuto un intero giro e la sua velocità è relativamente piccola, quindi il salto è minimo.

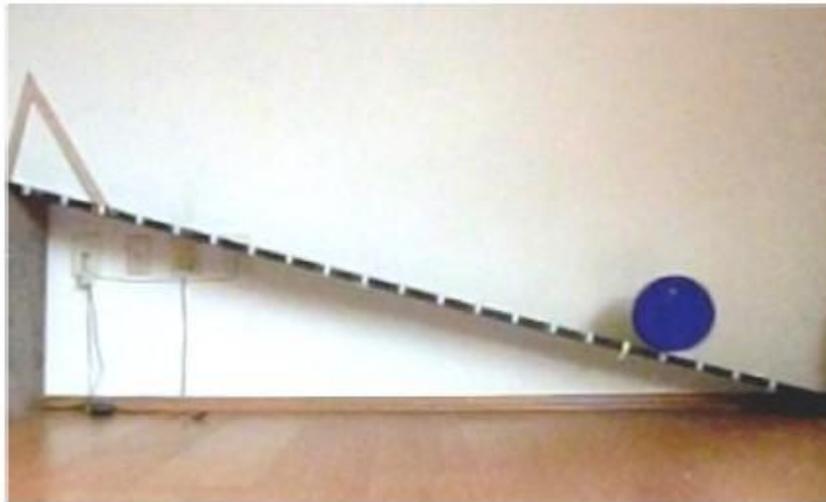


Figura 22: Fotogramma nel punto di salto per un piano inclinato ad  $\alpha = 15^\circ$ . [7]

## Riferimenti bibliografici

- [1] **S.A. Moore, Dean Culver, B.P. Mann,** "The Eccentric Disk and Its Eccentric Behavior", Dynamical Systems Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering and Material Science, Duke University, Durham, NC 27708, USA
- [2] **Jimmie D. Lawson,** "The Hopping Hoop", **Tadashi F. Tokieda.** C: Princeton University, Department of Mathematics. **152-154**, 1986.
- [3] **Timoty Pritchett,** "The Hopping Hoop Revisited", pp. 609-616, Aug-Sept 1999.
- [4] **W. F. D. Theron,** "The rolling motion of an eccentrically loaded wheel", American Journal of Physics 68, 812 (2000)
- [5] **LIU Yanzhu and XUE Yun** "QUALITATIVE ANALYSIS OF A ROLLING HOOP WITH MASS UNBALANCE", Department of Engineering Mechanics, Shanghai diaotong University, Shanghai 200030, China) (Department of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200233, China)
- [6] **E.Aldo Arroyo and M.Aparicio Alcade** "The jump effect of a general eccentric cylinder rolling on a ramp", Centro de Ciencias Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo ????, 09210-170 S ao Paulo, SP, Brazil. MARCH 17, 2023.
- [7] **R W G´omez, J J Hern´andez-G´omez and V Marquina** " A Jumping cylinder on an inclined plane", Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Aut´onoma de M´exico, DF 04510, Mexico, 25 July 2012

## Ringraziamenti

Grazie è una parola troppo semplice per esprimere la mia gratitudine nei confronti di tutte quelle persone che hanno reso possibile il raggiungimento di questa meta.

Prima di tutti, vorrei esprimere la mia più sincera gratitudine verso il Prof. Marco Coco che, grazie ai suoi consigli, ha contribuito alla mia crescita professionale e umana.

Desidero esprimere la mia riconoscenza verso i miei genitori, i quali, senza il loro incoraggiamento, mi hanno spinto sempre a dare il massimo.

Un ringraziamento particolare va ai compagni del Collegio Salesiani che sono stati sempre fonte di sostegno e mi hanno aiutato nei momenti difficili con una risata e hanno cercato sempre di tirarmi su il morale.

Un grosso ringraziamento va ai miei colleghi universitari, in particolare Matteo Saracini e Marcello Passarella, grazie alla loro generosa disponibilità, alla loro pazienza e alla loro chiarezza nell'espone gli argomenti in maniera semplice ed efficace, sono riuscito a superare le difficoltà riscontrate durante lo studio.