



**UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE**

FACOLTÀ DI  
**INGEGNERIA**

Corso di Laurea triennale in  
**Ingegneria informatica e dell'automazione**

**STUDIO, IMPLEMENTAZIONE E SINCRONIZZAZIONE DI  
OSCILLATORI NON-LINEARI PER IL CONTROLLO DELLA  
LOCOMOZIONE DI UN ROBOT BIONICO**

**STUDY, IMPLEMENTATION AND SYNCHRONIZATION OF  
NON-LINEAR OSCILLATORS FOR THE LOCOMOTION CONTROL  
OF A BIONIC ROBOT**

Relatore: Chiar.mo  
**Prof. Simone Fiori**

Tesi di Laurea di:  
**Federico Catalini**

A.A. 2020/2021



*A tutti quelli che amo  
e che mi fanno sentire amato,  
alla mia splendida famiglia,  
ed ai miei amici più cari,  
che mi hanno reso la persona che sono.*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	Descrizione generale del problema	9
1.2	Dal torso bionico al girovita bionico parallelo	9
1.3	Modelli CPG basati su oscillatori e sincronizzazione	10
1.4	Il metodo del controllo bionico	10
<b>2</b>	<b>Il girovita bionico parallelo</b>	<b>11</b>
2.1	Architettura del robot dotato di girovita	11
<b>3</b>	<b>Oscillatore armonico <math>\sigma</math>-Hopf</b>	<b>13</b>
3.1	Equazione matematica dell'oscillatore armonico $\sigma$ -Hopf	13
3.2	Simulazione numerica di un singolo oscillatore armonico $\sigma$ -Hopf	14
3.3	Approfondimento: Il metodo di Runge-Kutta del IV ordine	15
<b>4</b>	<b>Network</b>	<b>19</b>
4.1	Architettura della rete	19
4.2	Equazione matematica degli oscillatori $\sigma$ -Hopf accoppiati	20
4.3	I quattro motion patterns	20
4.4	Simulazione numerica dei motion patterns	21
<b>5</b>	<b>Sincronizzazione degli oscillatori <math>\sigma</math>-Hopf</b>	<b>25</b>
5.1	Teoria matematica sulla sincronizzazione e sulla convergenza	25
5.2	Verifica del processo di sincronizzazione	26
<b>6</b>	<b>Analisi della sincronizzazione</b>	<b>29</b>
6.1	Processo di convergenza di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$	29
6.1.1	Influenza dei diversi parametri con $\rho = 0.5$	34
6.1.2	Influenza dei diversi parametri con $\rho \neq 0.5$	37
6.2	Convergenza e deformazione della forma d'onda	39
6.3	Sostituzione di $k(t)$ con $k_e(t)$ ed effetto sulla sincronizzazione	41
<b>7</b>	<b>Conclusione</b>	<b>43</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>
	Riferimenti bibliografici	47



# Elenco delle figure

2.1	Struttura meccanica del robot con gambe munito di girovita bionico parallelo . . . . .	12
3.1	Oscillatore $\sigma$ -Hopf singolo . . . . .	15
4.1	Rete con architettura ad anello a due vie . . . . .	19
4.2	Motion pattern A . . . . .	22
4.3	Motion pattern B . . . . .	22
4.4	Motion pattern C . . . . .	23
4.5	Motion pattern D . . . . .	24
5.1	Rappresentazione grafica della norma della parte sincronizzante per il motion pattern C . . . . .	27
6.1	Rappresentazione grafica dell'andamento degli oscillatori appartenenti all'UNIVERSO 2 per il motion pattern B . . . . .	29
6.2	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\{\Delta \bar{v}_s\}$ per il primo oscillatore (motion pattern B) . . . . .	30
6.3	Rappresentazione grafica dell'andamento di $f\{\Delta \bar{v}_s\}$ per il primo oscillatore (motion pattern B) . . . . .	31
6.4	Rappresentazione grafica dell'andamento di $G\{\bar{v}_0\}$ per il primo oscillatore (motion pattern B) . . . . .	32
6.5	Rappresentazione grafica dell'andamento di $G\{\Delta \bar{v}_s\}$ per il primo oscillatore (motion pattern B) . . . . .	32
6.6	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ per il primo oscillatore (motion pattern B) . . . . .	33
6.7	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ con $\rho=0.5$ al variare del parametro $k$ . . . . .	34
6.8	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ con $\rho=0.5$ al variare dei <i>punti iniziali</i> . . . . .	35
6.9	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ con $\rho=0.5$ e $k=1$ al variare dei <i>phase factors</i> $\psi$ . . . . .	36
6.10	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ con $\rho=0.75$ al variare del parametro $k$ . . . . .	37
6.11	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ al variare del parametro $\rho$ . . . . .	38
6.12	Rappresentazione grafica dell'andamento di $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ con $\rho=0.75$ e $k=5$ al variare dei <i>phase factors</i> $\psi$ . . . . .	38
6.13	Convergenza e deformazione della forma d'onda . . . . .	40
6.14	Effetto di $k_e(t)$ sul processo di sincronizzazione . . . . .	42



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 DESCRIZIONE GENERALE DEL PROBLEMA

La sincronizzazione di oscillatori non lineari accoppiati, ispirati ad un generatore di pattern centrale (*Central Pattern Generator*, CPG), permette di controllare un robot bionico, promuovendo la coordinazione e la diversità della locomozione. Tuttavia, per un robot con una forte struttura mutuamente accoppiata, tale controllo neurobiologico era ancora mancante. Perciò, in questa tesi, viene presentato un  **$\sigma$ -Hopf harmonic oscillator con parametri disaccoppiati** per espandere lo spazio di movimento per la locomozione del robot.

A differenza della sincronizzazione degli oscillatori Hopf originali, il fattore asimmetrico dell'oscillatore  $\sigma$ -Hopf provoca una deformazione nella forma d'onda dell'oscillazione. Questi oscillatori sono, dunque, utilizzati per il controllo della locomozione di un **girovita bionico parallelo** appartenente ad un robot dotato di quattro gambe, che è un sistema altamente accoppiato. L'efficacia dell'approccio viene verificata sia nel comportamento indipendente che in quello di sintesi di quattro schemi di movimento tipici, che in gergo vengono chiamati "**motion patterns**".

Il risultato dimostra l'importanza della controllabilità della forma d'onda d'oscillazione e dello stato istantaneo della sincronizzazione, fattore che avvantaggia la transizione e la trasformazione della locomozione e rende più flessibile il movimento di accoppiamento.

### 1.2 DAL TORSO BIONICO AL GIROVITA BIONICO PARALLELO

Lo studio e l'implementazione di robot dotati di gambe hanno compiuto notevoli progressi negli ultimi decenni e hanno prodotto una serie di risultati molto noti (*Y. Zhu, Zhou, Gao, & Liu, 2019*). Ispirati dai biologi, facendo seguito alla richiesta di robot ad alta flessibilità e ad alta velocità, molti studiosi hanno svolto ricerche approfondite sul **torso bionico**.

La struttura bionica del torso può essere suddivisa in due categorie: torso con articolazione attiva e con giunto passivo. Un'articolazione attiva aggiuntiva su un busto può migliorare efficacemente la gamma di movimento e la destrezza di un robot. La maggior parte delle articolazioni passive utilizza elementi elastici per raccogliere energia durante il movimento e per migliorare la conformità. Tuttavia, questo tipo di torso biologico non è adatto per capacità di carico, movimento, coordinazione ed altri aspetti.

Pertanto, si lavora al fine di costruire un **girovita bionico parallelo** per andare a sostituire il torso rigido originale e ciò porta il vantaggio di una forte capacità di carico e di un'elevata precisione di controllo della struttura parallela. In realtà, il robot parallelo è stato ampiamente utilizzato nei vari campi dell'industria, ma, sebbene la struttura parallela sia stata applicata direttamente al robot con gambe, nessun metodo bionico è stato utilizzato su di essa.

Dunque, questa ricerca si sofferma su un **network basato su un modello CPG volto al controllo neurobiologicamente ispirato del girovita bionico parallelo** e ne discute le questioni correlate.

### 1.3 MODELLI CPG BASATI SU OSCILLATORI E SINCRONIZZAZIONE

Al momento, i modelli CPG sono stati applicati a vari robot e possono essere suddivisi in due categorie: modelli basati su neuroni (*neuron-based models*) e **modelli basati su oscillatori** (*oscillator-based models*). Questi ultimi possono generare periodicamente segnali di oscillazione non lineari e sono ampiamente utilizzati poiché contengono un numero inferiore di parametri e hanno teorie di implementazione di base sofisticate. In termini di forme d'onda, che determinano quali traiettorie verranno effettivamente eseguite da ciascuna articolazione durante un ciclo, l'oscillatore deve essere selezionato con cautela. In alcuni robot aventi una struttura semplice, la forma d'onda ha un effetto relativamente piccolo sul movimento della singola articolazione e dell'intero corpo.

Pertanto, per la piattaforma parallela presa in considerazione, **il meccanismo spaziale con sei gradi di libertà è correlato a sei arti di accoppiamento**. Il movimento di ciascun arto influisce direttamente sulla fluidità e sulla stabilità dell'intero sistema, dunque occorre concentrarsi sulla fluidità della transizione, sulla rapidità di trasformazione e sull'impatto di velocità/accelerazione dell'oscillatore.

**Sincronizzazione** significa una corrispondenza esatta dell'ampiezza scalata con una differenza di fase desiderata. Devono, perciò, essere individuati due concetti importanti. Il primo è la **stabilità della sincronizzazione**. La teoria della stabilità del sistema dell'oscillatore accoppiato può aiutare a determinare i parametri esatti e sono i vincoli che fanno convergere il sistema al momento finale. Il secondo concetto è che **il processo di transizione deve essere chiaro e controllabile**, poiché riguarda la traiettoria di ogni movimento degli arti e delle articolazioni. Infatti, una transizione irragionevole tra due stati stabili perfetti potrebbe portare anche a una locomozione inaspettata. Quindi, in definitiva, lo stato di transizione degli oscillatori non lineari accoppiati deve essere analizzato in dettaglio al fine di garantire una locomozione razionale in ogni singolo momento.

### 1.4 IL METODO DEL CONTROLLO BIONICO

Il girovita bionico parallelo è, dunque, una buona soluzione al problema sia da un punto di vista biologico che robotico. Al momento, la maggior parte dei robot paralleli utilizza la teoria del controllo del modello (*model control theory*). Sebbene questo metodo possa essere utilizzato nel robot bionico, è meglio, tuttavia, ricorrere al **metodo del controllo bionico** (*bionic control method*), poiché è difficile progettare in anticipo ogni possibile movimento nello spazio di locomozione. Pertanto, la sincronizzazione dei  $\sigma$ -Hopf oscillators per il girovita bionico parallelo di un robot con gambe è qui proposta con l'intento di realizzare un **controllo basato sulla neurobiologia**.

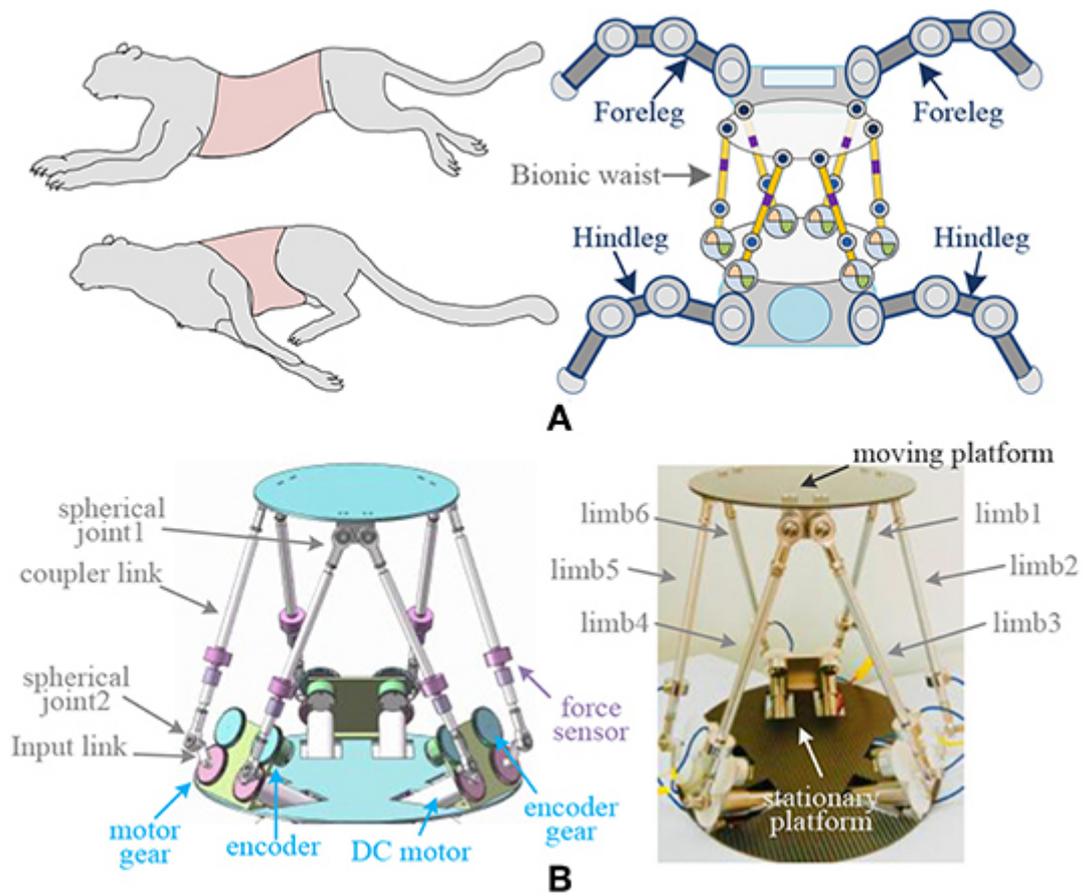
## Capitolo 2

# Il girovita bionico parallelo

### 2.1 ARCHITETTURA DEL ROBOT DOTATO DI GIROVITA

Nei mammiferi, il girovita, composto sia da ossa che da muscoli, svolge un ruolo fondamentale nel movimento e i ricercatori hanno verificato che i robot muniti di girovita hanno prestazioni migliori rispetto a quelli con un corpo rigido. In questa ricerca, la **piattaforma parallela** viene, dunque, utilizzata come il **girovita del robot a quattro zampe**, con l'obiettivo di ottenere una migliore capacità di coordinazione (*figura 2.1A* a pagina successiva).

La piattaforma mobile in vita collega le gambe anteriori, mentre le gambe posteriori sono collegate alla piattaforma fissa. L'intera piattaforma parallela rappresenta il torso del robot e garantisce movimenti di spostamento, rotazione e sintesi. Come mostrato in *figura 2.1B*, il **meccanismo di azionamento del girovita** è rappresentato da **sei arti identici che collegano la piattaforma mobile alla piattaforma fissa**. Sono presenti due giunti sferici tra i giunti di accoppiamento ed un giunto di rotazione per il collegamento tra un'asta d'ingresso e il motore. Dunque, la piattaforma mobile può muoversi efficacemente nello spazio con **6 gradi di libertà** grazie all'azionamento di 6 motori DC brushless. Inoltre, gli **encoder magnetici** sono montati accanto alle aste d'ingresso e sono collegati tramite degli ingranaggi, mentre i **sensori di forza** sono posizionati sugli arti e sono utilizzati per il calcolo del carico utile. Tutte le informazioni ottenute tramite gli encoder e i sensori di forza vengono, infine, inviate al controller per la generazione del movimento.



**Figura 2.1:** Struttura meccanica del robot con gambe munito di girovita bionico parallelo

(A) Struttura meccanica del robot bionico (B) Struttura meccanica del girovita bionico

## Capitolo 3

# Oscillatore armonico $\sigma$ -Hopf

### 3.1 EQUAZIONE MATEMATICA DELL'OSCILLATORE ARMONICO $\sigma$ -HOPF

Il ruolo fondamentale del CPG nel controllo bionico è evidente. È particolarmente importante soprattutto nell'applicazione di robot a più gradi di libertà o con più giunti, a causa della capacità di accoppiamento e di sincronizzazione dei segnali CPG, i quali possono formare una rete di trasmissione del segnale paragonabile alla creatura naturale.

In questa tesi, si prende in considerazione l'**oscillatore  $\sigma$ -Hopf** (dove  $\sigma$  è un parametro speciale che serve a distinguerlo dall'oscillatore Hopf originale) per due motivi. Il primo è la **stabilità**; infatti, il cerchio limite simmetrico previene il classico problema dell'instabilità dovuta alla commutazione tra due sistemi stabili. L'altra ragione è che, modificando ampiezza, frequenza, fase e forma d'onda, si può garantire un'**eccellente diversità e fluidità della locomozione**.

L'**equazione differenziale** che rappresenta l'accoppiamento sincrono di  $\sigma$ -Hopf è la seguente:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(x-a) - \sigma(y-b) \\ \sigma_1(y-b) + \sigma(x-a) \end{bmatrix} + \mathbf{g}(t) + \mathbf{u}(t) \quad (3.1)$$

dove

$$\begin{cases} \sigma = \pi / (\rho \cdot (e^{-\lambda y} + 1) \cdot \varphi) + \pi / ((1 - \rho) \cdot (e^{\lambda y} + 1) \cdot \varphi) \\ \sigma_1 = -\alpha ((x-a)^2 + (y-b)^2 - \mu) \end{cases} \quad (3.2)$$

In forma compatta:

$$\dot{v} = \mathbf{f}(v, \alpha, \mu, \sigma(\rho, \lambda, t)) + \mathbf{g}(t) + \mathbf{u}(t) \quad (3.3)$$

Nelle formule precedenti appaiono vari parametri e variabili:

- $x$  e  $y$  rappresentano le **variabili di stato**;
- $a$  e  $b$  sono il **centro del ciclo limite**;
- $\mu$  identifica l'**ampiezza delle oscillazioni**;
- $\alpha$  viene definito come **parametro di biforcazione**; esso può variare da -1 a 1 in modo tale da modificare la dinamica stabile del ciclo limite con una dinamica avente un punto di equilibrio globalmente stabile;
- $\lambda$  indica la **forza**;
- $\phi$  è il **periodo**;
- $0 < \rho < 1$  è un parametro che denota il "**duty factor**" e determina la velocità di trasformazione tra la fase ascendente e discendente;

Nella formula (3.2) possiamo notare come i parametri  $\phi$  e  $\rho$  sono incorrelati. Ciò significa che il periodo non è influenzato da alcun cambiamento del duty factor.

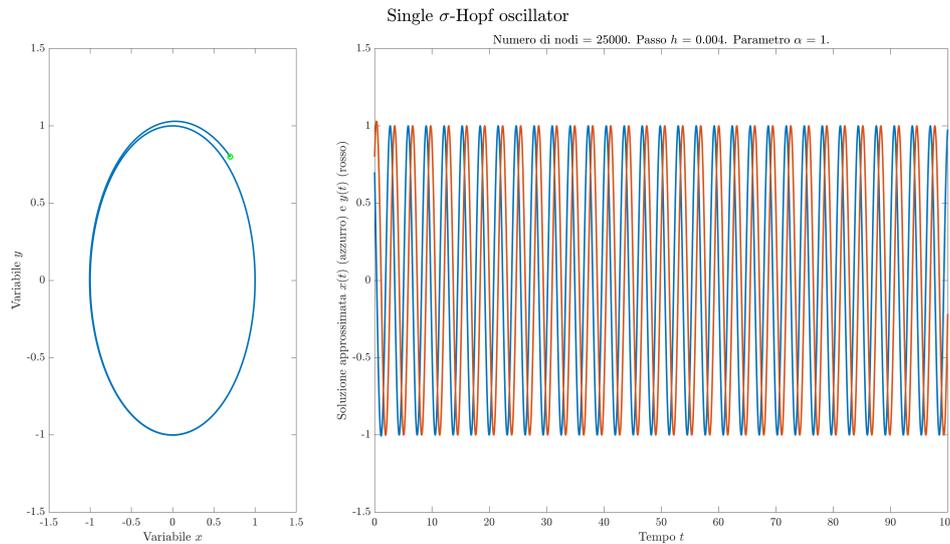
Infine, il termine  $\mathbf{g}(t)$  denota l'**input di accoppiamento** (per un singolo oscillatore  $\mathbf{g}(t) = 0$ ), mentre  $\mathbf{u}(t) = -\text{sign}(y)u$  è l'ingresso esterno che, basandosi sulle informazioni di rilevamento esterne, serve a controllare il segnale di oscillazione.

## 3.2 SIMULAZIONE NUMERICA DI UN SINGOLO OSCILLATORE ARMONICO $\sigma$ -HOPF

Per visionare l'andamento nel tempo dell'oscillatore  $\sigma$ -Hopf preso in considerazione, basta effettuare una semplice simulazione numerica utilizzando uno dei metodi proposti dall'analisi numerica. Si può, ad esempio, utilizzare il metodo di Eulero in avanti (*fEul*) o quello all'indietro (*bEul*), oppure, ancora, i metodi di Heun (*HM*) o di Runge (*RM*). In questo studio, tuttavia, è stato utilizzato il **metodo di Runge-Kutta del IV ordine** (*eRK4*), il quale verrà analizzato in modo più approfondito nella sezione successiva. Tutto ciò può essere realizzato grazie all'ausilio di piattaforme di calcolo adatte alla simulazione numerica, come, ad esempio, *MATLAB*, che è infatti lo strumento software utilizzato per questo studio.

Dunque, dopo essere andati a definire i parametri della simulazione (tra cui anche l'intervallo temporale, il numero di passi di calcolo e il passo numerico) e aver scritto l'equazione differenziale del modello, si può procedere con l'inizializzazione delle variabili di stato e, appunto, la simulazione numerica.

Rappresentando graficamente il risultato della simulazione si ottiene:



**Figura 3.1:** Oscillatore  $\sigma$ -Hopf singolo

dove il grafico a sinistra rappresenta l'andamento di  $x$  nei confronti dell'altra variabile di stato  $y$ , mentre quello a destra è l'andamento delle due variabili nel tempo. Come si può osservare, il parametro di biforcazione  $\alpha$  è stato settato a 1, valore che garantisce la miglior dinamica possibile, mentre l'intervallo temporale e il numero di nodi sono rispettivamente 100 e 25000.

### 3.3 APPROFONDIMENTO: IL METODO DI RUNGE-KUTTA DEL IV ORDINE

È chiaro che non si può risolvere analiticamente la maggior parte delle equazioni differenziali a più variabili, ottenendo cioè un'espressione esplicita per le soluzioni. Risulta infatti impossibile simulare esattamente la maggior parte dei modelli matematici.

In Analisi Numerica ci si occupa dei metodi numerici che consentono, tramite una piattaforma di calcolo, come, ad esempio, *MATLAB*, di determinare una **soluzione approssimata** il più fedele possibile alla soluzione esatta  $y(t)$  in  $\mathbb{R}^m$ , cioè nello spazio vettoriale delle soluzioni.

Tramite questi metodi, è possibile approssimare la soluzione dell'equazione differenziale, andando a suddividere l'intervallo temporale  $[t_0, t_f]$  in  $N$  intervalli di uguale durata, la cui ampiezza è pari a:

$$h := \frac{t_f - t_0}{N} \quad (3.4)$$

$h$  è un parametro costante e viene detto **passo del metodo numerico**.

Ad esempio, nella simulazione numerica dell'oscillatore  $\sigma$ -Hopf riportata nella sezione precedente, è stato scelto un intervallo temporale ( $t_f$ ) pari a 100 e un numero di nodi ( $N$ ) uguale a 25000. Dunque, considerando l'istante iniziale ( $t_0$ ) pari a 0, il passo numerico  $h$  sarà:

$$h := \frac{100 - 0}{25000} = 0.004 \quad (3.5)$$

Gli istanti temporali per i quali saranno disponibili soluzioni numeriche approssimate sono, quindi, sinteticamente:

$$t_n := t_0 + hn, \text{ per } n = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.6)$$

Terminata questa premessa, il **metodo esplicito di Runge-Kutta del IV ordine (eRK4) a piu' variabili** si scrive:

$$\begin{cases} k_{1,n} := f(t_n, y_n) \in \mathbb{R}^m \\ k_{2,n} := f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{1,n}) \in \mathbb{R}^m \\ k_{3,n} := f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{2,n}) \in \mathbb{R}^m \\ k_{4,n} := f(t_n + h, y_n + hk_{3,n}) \in \mathbb{R}^m, \\ y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{6}k_{1,n} + \frac{1}{3}k_{2,n} + \frac{1}{3}k_{3,n} + \frac{1}{6}k_{4,n}) \end{cases} \quad (3.7)$$

per  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

Partendo dalla condizione iniziale  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , una prima applicazione dell'iterazione eRK4 permette di determinare il punto della traiettoria  $(t_1, y_1) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$ , una seconda applicazione permette di determinare il punto della traiettoria  $(t_2, y_2) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^m$  e così via.

Questo è di gran lunga il metodo numerico più comunemente utilizzato nelle applicazioni e viene chiamato in modo più semplice "**metodo di Runge-Kutta del IV ordine**".

Come si può notare dalla formulazione matematica, esso è composto da quattro stadi:

- **Primo stadio:**  $k_{1,n} := f(t_n, y_n)$ , rappresenta una stima della velocità di variazione calcolata in  $t_n$  e coincide con la stima di Eulero nel metodo *fEul*;
- **Secondo stadio:**  $k_{2,n} := f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{1,n})$ , rappresenta una stima della velocità di variazione calcolata a metà dell'intervallo  $[t_n, t_n + 1]$ , cioè in  $t_n + \frac{h}{2}$ , e coincide con la stima di Runge nel metodo *RM*, ottenuta utilizzando la stima  $k_{1,n}$  per compiere il "mezzo passo" interno;
- **Terzo stadio:**  $k_{3,n} := f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{2,n})$ , rappresenta una stima della velocità di variazione calcolata a metà dell'intervallo  $[t_n, t_n + 1]$ , ovvero in  $t_n + \frac{h}{2}$  e coincide con la stima di Runge nel metodo *RM*, ottenuta utilizzando la stima  $k_{2,n}$  per compiere il "mezzo passo" interno;
- **Quarto stadio:**  $k_{4,n} := f(t_n + h, y_n + hk_{3,n})$ , rappresenta una stima della velocità di variazione calcolata in  $t_{n+1}$  e coincide con la stima di Runge nel metodo *RM*, ottenuta utilizzando la stima  $k_{3,n}$  per compiere un passo intero interno (ovvero un "mezzo passo" interno con passo  $2h$ );

Per concludere, il metodo eRK4 è, quindi, basato su quattro stime differenti della velocità di variazione: una all'inizio dell'intervallo  $[t_n, t_n + 1]$ , due al centro dell'intervallo e una alla fine dell'intervallo. Inoltre, l'incremento effettivo è calcolato come una somma pesata  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}k_{1,n} + \frac{h}{3}k_{2,n} + \frac{h}{3}k_{3,n} + \frac{h}{6}k_{4,n}$  dei quattro incrementi calcolati nei quattro stadi. Ogni stadio utilizza solo l'informazione calcolata nello stadio precedente. Si tratta quindi di un **metodo esplicito**.

Nel nostro caso, all'interno dell'ambiente *MATLAB*, si è, dunque, andati a definire la funzione (qui chiamata "*Phi*") per il metodo *eRK4* che sarà richiamato per effettuare le simulazioni numeriche di nostro interesse. Essa viene qui riportata:

```
1 % Definizione della funzione Phi per eRK4
2 function Phi = Phi_eRK4(t,y,f,h)
3 k1 = f(t,y); % Stadio I
4 k2 = f(t + h/2,y + (h/2)*k1); % Stadio II
5 k3 = f(t + h/2,y + (h/2)*k2); % Stadio III
6 k4 = f(t + h,y + h*k3); % Stadio IV
7 Phi = y + h*(k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6);
8 end
```

Saltano subito all'occhio i quattro stadi e l'incremento effettivo calcolato come somma pesata. Inoltre, come si può vedere tra le parentesi tonde, la funzione dipende da quattro parametri:  $t$  indica il **tempo**,  $y$  è la **variabile di stato**, che in questo caso è un vettore formato da due componenti,  $f$  rappresenta la **funzione differenziale** (la nostra  $\dot{v}$ ), mentre  $h$  è il **passo numerico**, di cui si è parlato in precedenza.

Gran parte di questo approfondimento è stato realizzato avvalendosi della teoria sulla simulazione numerica presente nelle dispense del corso di Analisi Numerica 2020-2021, erogato dal Professore Simone Fiori all'Università Politecnica delle Marche (*Fiori, 2021*).



# Capitolo 4

## Network

### 4.1 ARCHITETTURA DELLA RETE

La sincronizzazione consente ai diversi attuatori di oscillare con un anticipo o un ritardo di fase prescritto con il fine di determinare diversi schemi di movimento, i cosiddetti "**motion patterns**". Sulla base del numero di giunture, della connessione della struttura e delle caratteristiche comportamentali dei diversi robot, anche le reti di controllo del comportamento sono diverse. Altri fattori importanti sono il tipo di oscillatore e il metodo di determinazione della differenza di fase. L'**architettura della rete (o network)** è la seguente:

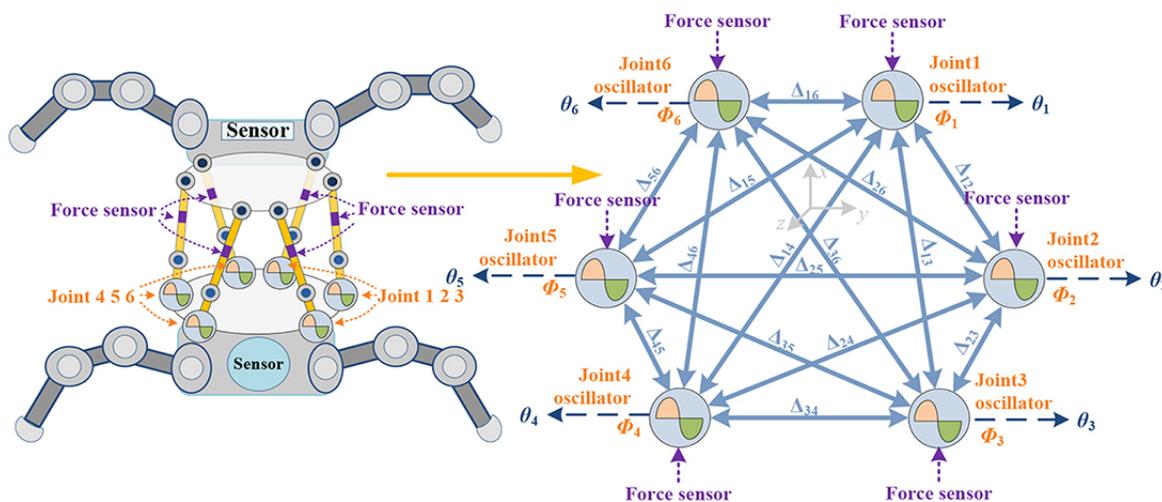


Figura 4.1: Rete con architettura ad anello a due vie

Ogni arto è composto da due collegamenti, due cerniere sferiche, un attuttore e un sensore di forza.  $\Phi_i$  denota la fase d'oscillazione del giunto i-esimo, mentre  $\theta_i$  è il segnale di controllo del giunto i-esimo. Viene utilizzata l'architettura ad anello bidirezionale completamente accoppiata poiché ha prestazioni di transizione migliori rispetto all'architettura ad anello unidirezionale.

## 4.2 EQUAZIONE MATEMATICA DEGLI OSCILLATORI $\sigma$ -HOPF ACCOPPIATI

Per gli oscillatori  $\sigma$ -Hopf accoppiati, l'equazione (3.3) può essere riscritta aggiungendo un termine rappresentante l'**accoppiamento diffusivo di un oscillatore con il suo vicino ruotato di fase**:

$$\dot{v}_i = f(v_i, \mu_i, \sigma_i(\rho_i, \lambda, t)) - k(t) \cdot \sum_{j \in \mathcal{R}_i}^{n_i} \left( v_i - \frac{\mu_i}{\mu_j} \mathbf{R}(\Delta\Phi_{ij}) v_j \right) + \mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

dove

$$\mathbf{R}(\Delta\Phi) = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\Phi) & -\sin(\Delta\Phi) \\ \sin(\Delta\Phi) & \cos(\Delta\Phi) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Nella (4.1) appaiono nuovi parametri:

- Lo scalare positivo  $\mathbf{k}(t)$  denota il **guadagno di accoppiamento** (*coupling gain*) e può variare nel tempo a seconda della locomozione;
- $\mathbf{R}(\Delta\Phi)\mathcal{S}\mathcal{O}(2)$  è una **trasformazione rotazionale in 2-D** della differenza di fase  $\Delta\Phi_{ij}$  tra l'oscillatore  $i$ -esimo e il  $j$ -esimo. Lo sfasamento desiderato  $\Delta\Phi_{ij}$  porta  $v_i$  a sincronizzarsi con  $v_j$ ;
- $N_i$  denota l'**insieme che contiene solo i vicini locali dell' $i$ -esimo oscillatore  $\sigma$ -Hopf**;
- $n_i$  rappresenta il **numero dei vicini**.

Sia  $N_i$  che  $n_i$  dipendono dagli oscillatori  $\sigma$ -Hopf accoppiati e dall'architettura della rete. Poiché il motion pattern di coordinazione del girovita bionico è determinato dalla fase relativa tra gli oscillatori, la **matrice  $\mathbf{R}(\Delta\Phi)\mathcal{S}\mathcal{O}(2)$** , che indica lo sfasamento  $\Delta\Phi_{ij}$ , è la **chiave del network**.

In genere,  $\Delta\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$  ( $i, j = 1, \dots, 6, 0 \leq \Delta\Phi_{ij} \leq 2\pi$ ),  $\Delta\Phi_{ij} = -\Delta\Phi_{ji}$ ,  $\Delta\Phi_{ij} = \Delta\Phi_{ik} + \Delta\Phi_{kj}$  e  $\Delta\Phi_{ii} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ). Dunque, **la locomozione del girovita è determinata da  $[\Delta\Phi_{12}, \Delta\Phi_{23}, \Delta\Phi_{34}, \Delta\Phi_{45}, \Delta\Phi_{56}, \Delta\Phi_{61}]$**  o, più semplicemente,  $[\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \Delta_{45}, \Delta_{56}, \Delta_{61}]$ .

Il network con tutti i suoi collegamenti è mostrato in figura (4.1) a pagina precedente.

## 4.3 I QUATTRO MOTION PATTERNS

In questa ricerca, vengono discussi quattro movimenti principali del busto dei mammiferi:

1. **Motion Pattern A**: allungamento e flessione lungo l'asse Z;
2. **Motion Pattern B**: movimento laterale lungo l'asse X;
3. **Motion Pattern C**: beccheggio intorno all'asse Y;
4. **Motion Pattern D**: torsione attorno all'asse Z.

Gli oscillatori lavorano sempre in maniera sincrona. Da una prospettiva laterale, tutti gli schemi di movimento menzionati sono simmetrici lungo l'asse X, eccetto il movimento di rotazione attorno all'asse Z.

I giunti 1-6, 2-5 e 3-4 hanno il senso di rotazione opposto per garantire il carico simmetrico, quindi  $\Delta_{16} = \Delta_{25} = \Delta_{34} = 180^\circ$  (per la torsione attorno all'asse Z,  $\Delta_{16} = \Delta_{25} = \Delta_{34} = 0^\circ$ ). L'ampiezza dell'oscillatore è simmetrica anche lungo l'asse X. Verticalmente:

- nel **motion pattern A**, gli oscillatori sullo stesso lato lungo l'asse X mantengono la stessa andatura, quindi  $\Delta_{12} = \Delta_{23} = 0^\circ$  e  $\Delta_{65} = \Delta_{54} = 0^\circ$ ;
- nel **motion pattern B**, si ha  $\Delta_{12} = \Delta_{65} = 0^\circ$  e  $\Delta_{23} = \Delta_{54} = 180^\circ$  in accordo con la struttura asimmetrica lungo l'asse Y;
- nel **motion pattern C**, abbiamo  $\Delta_{16} = \Delta_{25} = \Delta_{34} = 180^\circ$ ,  $\Delta_{12} = \Delta_{65} = 180^\circ$  e  $\Delta_{23} = \Delta_{54} = 0^\circ$ ; ciò perché gli oscillatori 1 e 6 sono localizzati nella metà positiva dell'asse X, mentre il 2 (o 3) e il 5 (o 4) si trovano nella metà negativa;
- nel **motion pattern D**, tutti gli oscillatori hanno lo stesso senso di rotazione, quindi  $\Delta_{16} = \Delta_{25} = \Delta_{34} = 0^\circ$ ,  $\Delta_{12} = \Delta_{65} = 180^\circ$ ,  $\Delta_{23} = \Delta_{54} = -180^\circ$  e  $\Delta_{13} = \Delta_{64} = 0^\circ$ .

Altri tipi di movimenti indipendenti o accoppiati possono essere ottenuti da considerazioni simili, anche se non si verificano mai nei vertebrati.

#### 4.4 SIMULAZIONE NUMERICA DEI MOTION PATTERNS

Avvalendoci del metodo numerico esplicito di Runge-Kutta del IV ordine, già analizzato in precedenza, è possibile simulare, nell'ambiente *MATLAB*, gli andamenti dei sei oscillatori per ognuno dei quattro motion patterns. È evidente che ciò che differenzia i patterns è il secondo termine dell'equazione differenziale (4.1), nel quale compare la matrice  $R(\Delta\Phi)S\mathcal{O}(2)$ , già definita in (4.2). Infatti, quest'ultima è costruita con gli sfasamenti  $\Delta\Phi_{ij}$  tra gli oscillatori, i quali hanno valori diversi a seconda del motion pattern considerato.

Per quanto riguarda il **motion pattern A**, si può notare come gli oscillatori, partendo dagli stessi punti iniziali (nel nostro caso si ha  $(x_0, y_0) = (0.7, 0.8)$ ), nei primi istanti temporali abbiano un regime transitorio; nel tempo, il loro andamento tende ad allinearsi con quello degli altri oscillatori e, infine, agli istanti 40-50 circa, l'ampiezza delle oscillazioni si esaurisce, tendendo a 0. Il grafico della simulazione è quello riportato a destra a pagina seguente, nel quale, per semplicità, viene raffigurato soltanto l'andamento della variabile di stato  $x$  nel tempo  $t$ . A sinistra, invece, è presente il grafico che rappresenta l'andamento della variabile di stato  $y$  nei confronti della variabile  $x$ .

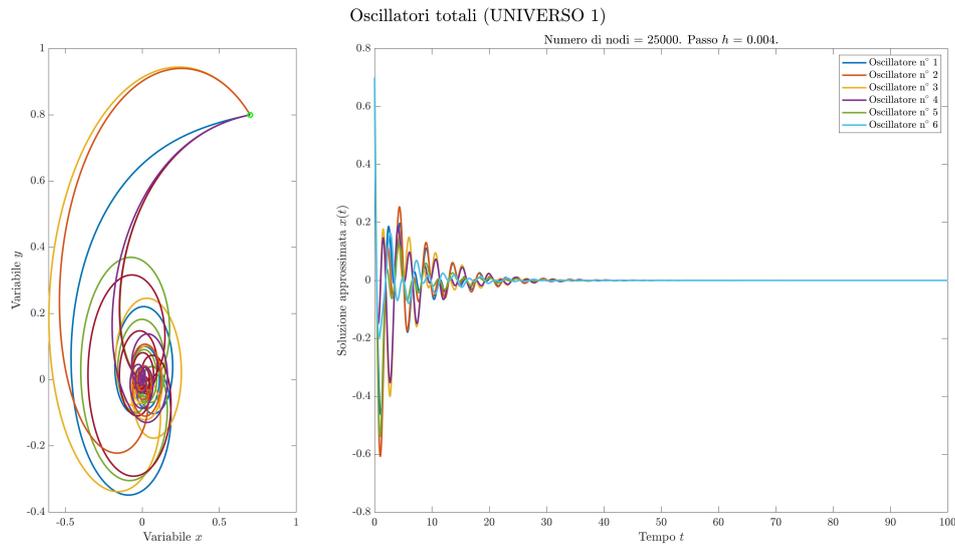


Figura 4.2: Motion pattern A

Considerando, invece, il **motion pattern B**, salta immediatamente all’occhio come, dopo circa 10 istanti temporali di regime transitorio, gli oscillatori raggiungano un regime permanente periodico, nel quale differiscono o per uno sfasamento o per una diversa ampiezza delle oscillazioni.

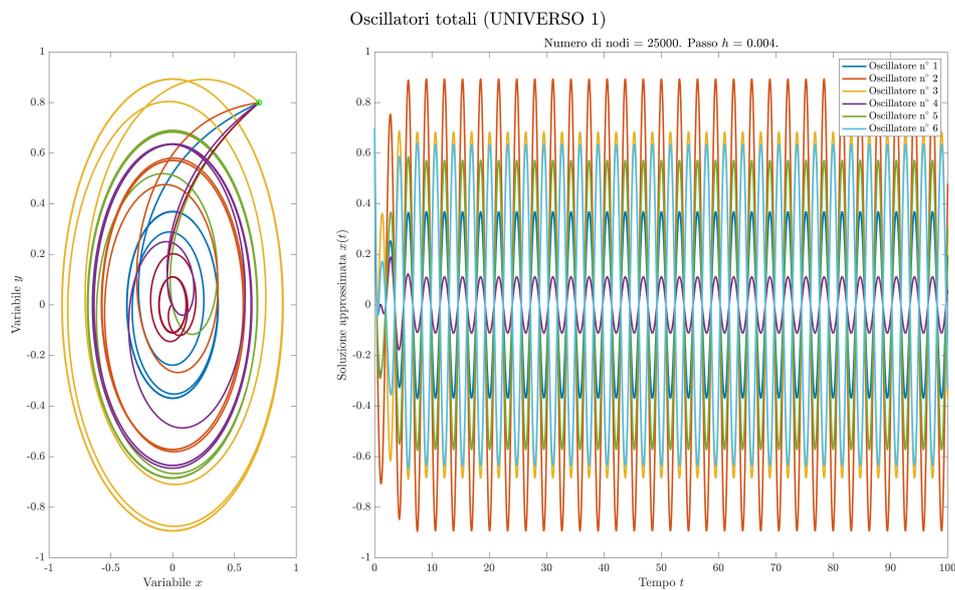


Figura 4.3: Motion pattern B

Riguardo il **motion pattern C**, prima di tutto bisogna precisare che per esso è stato ridefinito un nuovo intervallo temporale  $t_f$  pari a 300 (non più 100), perché il regime permanente viene raggiunto intorno all'istante 180; dunque, un valore pari a 100 non sarebbe bastato per visionare il comportamento completo dei sei oscillatori. Di conseguenza, essendo il passo numerico pari a  $h := \frac{t_f - t_0}{N}$ , in questo caso esso varrà 0.012.

Per quanto concerne l'andamento degli oscillatori, il comportamento è molto simile a ciò che accade nel motion pattern B; infatti, nei primi istanti temporali, il regime è transitorio, fino a quando, intorno a  $t=170-180$ , non viene raggiunto il regime permanente con un andamento periodico, sempre sinusoidale, degli oscillatori.

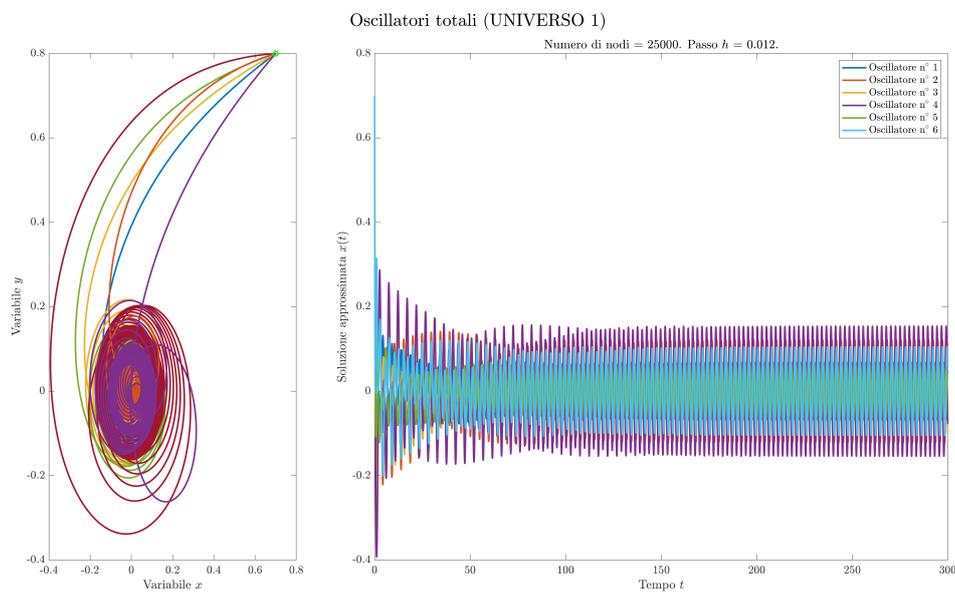
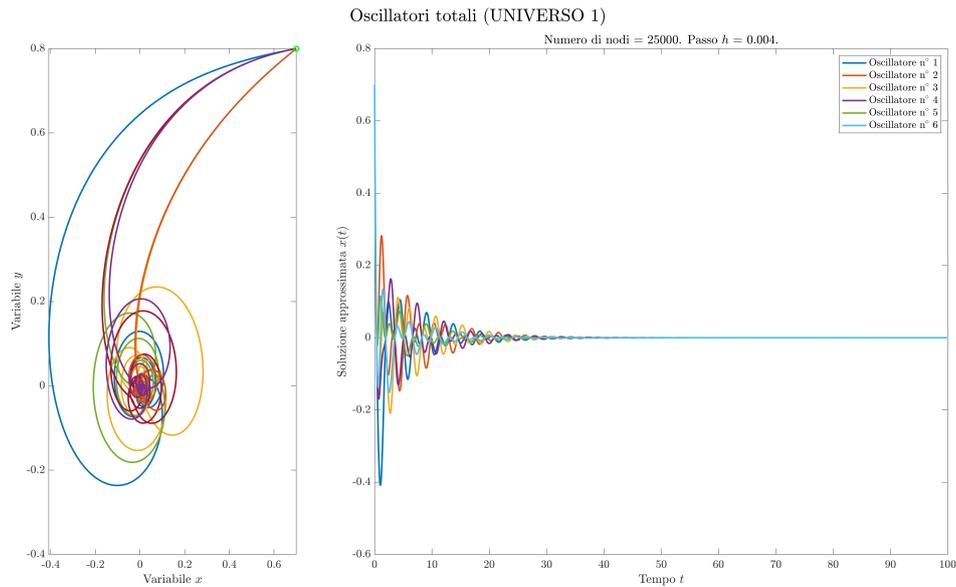


Figura 4.4: Motion pattern C

Infine, prendendo in considerazione il **motion pattern D**, possiamo notare come gli oscillatori si comportino in modo simile al caso del motion pattern A; infatti, nei primi 40-50 istanti temporali, i loro andamenti, inizialmente scorrelati, tendono sempre di più ad allinearsi, fino a quando le ampiezze non si esauriscono completamente.



**Figura 4.5:** Motion pattern D

## Capitolo 5

# Sincronizzazione degli oscillatori $\sigma$ -Hopf

### 5.1 TEORIA MATEMATICA SULLA SINCRONIZZAZIONE E SULLA CONVERGENZA

Per la sincronizzazione del network, riscriviamo prima di tutto l'equazione matematica degli oscillatori  $\sigma$ -Hopf accoppiati:

$$\dot{v}_i = \mathbf{f}(v_i, \mu_i, \sigma_i(\rho_i)) - k(t) \cdot \sum_{j \in \mathcal{R}_i}^{n_i} \left( v_i - \frac{\mu_i}{\mu_j} \mathbf{R}(\Delta\Phi_{ij}) v_j \right) \quad (5.1)$$

È ormai chiaro che la sommatoria della (5.1) risulta essere il fattore sincronizzante, cioè quel fattore che permette agli oscillatori di sincronizzarsi tra di loro e, quindi, di ottenere i quattro tipi di movimenti descritti dai motion patterns (per una verifica di ciò si rimanda alla prossima sezione).

Se  $\sigma$  è uguale ad una costante o  $\rho = 0.5$ , gli andamenti oscillatori ascendente e discendente saranno uguali tra di loro; siamo, dunque, in presenza dell'oscillatore Hopf standard. Invece, quando  $\rho \neq 0.5$ , la forma d'onda dell'oscillazione  $\sigma$ -Hopf è asimmetrica. Sebbene il tempo totale in un periodo sia ancora invariato, si hanno diverse frequenze,  $(\pi / (\rho \cdot (e^{-\lambda y} + 1)) \cdot \varphi)$  per la parte ascendente e  $(\pi / ((1 - \rho) \cdot (e^{-\lambda y} + 1)) \cdot \varphi)$  per quella discendente, e ciò porta ad oscillazioni asimmetriche. Dunque, per andare a dimostrare la sincronizzazione dell'oscillatore modificato, per prima cosa indichiamo il **segnale degli oscillatori simmetrici** (con  $\rho = 0.5$ ) come  $\{\tilde{v}\}$ . In accordo con la teoria della sincronizzazione di fase, la (5.1) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\dot{\{\tilde{v}\}} = \mathbf{f}(\{\tilde{v}\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) - k(t) \mathbf{G}\{\tilde{v}\} \quad (5.2)$$

nella quale  $\rho \in \mathbb{R}^n$ , il quale, assumendo diversi valori, rende possibile la sincronizzazione di oscillatori con forma d'onda diversa. Specialmente, se  $\rho = 0.5$ , l'andamento della forma d'onda sarà uguale a quella originale. La matrice  $\mathbf{G}$  è, invece, una **matrice laplaciana con sfasamento pari a  $\mathbf{R}(\Delta\Phi_{ij})$** .

Considerando una deformazione istantanea, indichiamo il **segnale degli oscillatori originali già sincronizzati** con  $\{\bar{v}_0\}$ , mentre  $\{\bar{v}\}$  denota il **segnale degli oscillatori originali con sincronizzazione in corso** e  $\{\Delta\bar{v}_s\}$  è il **cambiamento tra di essi**. Quindi,

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \Delta\bar{v}_s(\mathbf{G}(\bar{v}_0)) \quad (5.3)$$

Per semplicità, abbreviando  $\Delta \bar{v}_s (G(\bar{v}_0))$  con  $\Delta \bar{v}_s$ , si ha:

$$\begin{aligned}
\{\dot{\bar{v}}\} &= \mathbf{f}(\{\bar{v}\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) - k(t)\mathbf{G}(\bar{v}) = \mathbf{f}(\{\bar{v}_0\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) \\
&\quad + \mathbf{f}(\{\Delta \bar{v}_s\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) - k(t)\mathbf{G}\{\bar{v}_0\} - k(t)\mathbf{G}\{\Delta \bar{v}_s\} \\
&= \mathbf{f}(\{\bar{v}_0\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) + \mathcal{G}\{\mathbf{G}(\bar{v}_0), k(t)\} \\
\mathcal{G}\{\mathbf{G}(\bar{v}_0), k(t)\} &= \mathbf{f}(\{\Delta \bar{v}_s\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) - k(t)\mathbf{G}\{\bar{v}_0\} \\
&\quad - k(t)\mathbf{G}\{\Delta \bar{v}_s\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Quando alla fine diviene stabile,  $\{\bar{v}\} \rightarrow \{\bar{v}_0\}$ . Dunque,

$$\{\bar{v}\} = \mathbf{f}(\{\bar{v}_0\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) + \mathcal{G}\{\bar{v}_0, k(t)\} \tag{5.5}$$

e

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_s = 0 \\ \mathbf{f}(\{\Delta \bar{v}_s\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) = 0 \\ \mathcal{G}\{\mathbf{G}(\bar{v}_0), k(t)\} = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

In conclusione,

$$\mathcal{G}\{\mathbf{G}(\bar{v}_0), k(t)\} \begin{cases} \neq 0, \text{ stato di transizione} \\ = 0, \text{ stato stazionario} \end{cases} \tag{5.7}$$

Quest'ultima relazione mostra che i segnali degli oscillatori che vanno a sincronizzarsi sono diversi da quelli degli oscillatori originali nello stato di transizione, ma dopo la convergenza torneranno alla loro forma originale.

Analoghi ragionamenti e passaggi matematici possono essere fatti prendendo i **segnali degli oscillatori non simmetrici**, cioè con  $\rho \neq 0.5$ , e considerando che i segnali "modificati" degli oscillatori già sincronizzati, che rappresentiamo con  $\{\hat{v}_0\}$ , differiscono da quelli originali  $\{\bar{v}_0\}$  tramite un fattore che indichiamo con  $\{\Delta v_0\}$ .

## 5.2 VERIFICA DEL PROCESSO DI SINCRONIZZAZIONE

Come detto all'inizio della sezione precedente, è evidente che la sommatoria dell'equazione (5.1) risulta essere il fattore sincronizzante, ma bisogna verificare che effettivamente ciò accada, cioè che grazie a quel termine i sei oscillatori si sincronizzino tra di loro.

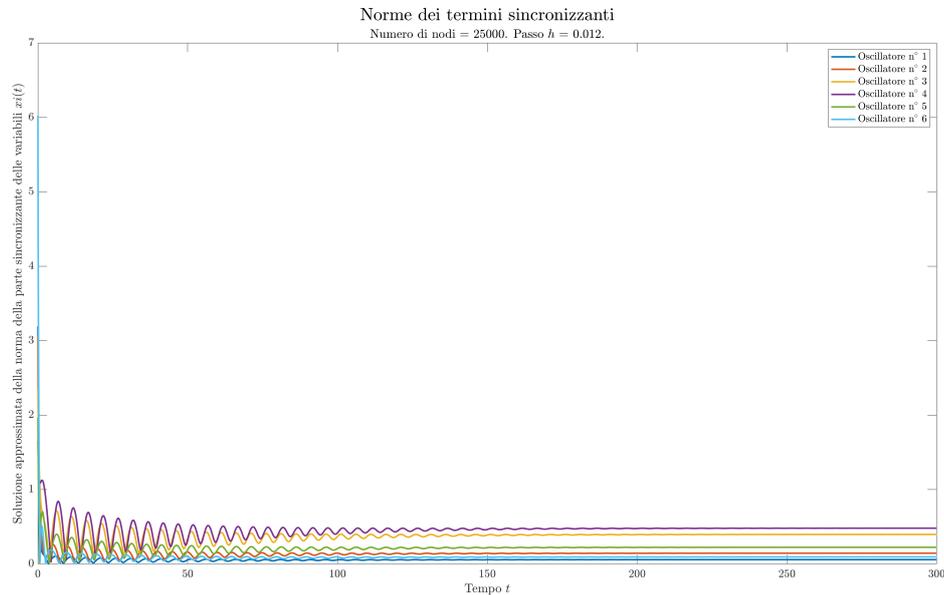
Dunque, avvalendosi dei valori delle variabili di stato già ottenuti in precedenza tramite simulazione numerica, una prima analisi dell'effettiva riuscita del processo di sincronizzazione può essere effettuata andando a calcolare la norma del suddetto termine sommatorio per ognuno dei sei oscillatori e per ogni pattern, andando poi a graficare il tutto. Prendendo, ad esempio, il primo oscillatore, la norma della sommatoria può essere ottenuta in *MATLAB* utilizzando il comando "**vecnorm**", come qui riportato:

```

1 Normal = vecnorm((xi1(1:2, :)-(mu1/mu2)*R12*xi2(1:2, :))+(xi1(1:2, :)-(mu1/mu6)*R16*xi6
(1:2, :)));

```

Ripetendo questo procedimento anche per i restanti oscillatori e graficando, otteniamo, ad esempio per il **motion pattern C**, il seguente grafico:



**Figura 5.1:** Rappresentazione grafica della norma della parte sincronizzante per il motion pattern C

Osservando la figura, si può vedere come, all'inizio, gli andamenti degli oscillatori siano ondulatori, ma, andando avanti nel tempo, le ampiezze dei segnali si assottigliano sempre di più fino ad annullarsi intorno a  $t=200$ , ottenendo così andamenti costanti nel tempo. In altre parole, ciò vuol dire che inizialmente gli oscillatori non sono sincronizzati, ma poi, con lo scorrere del tempo, il termine sincronizzante, presente nell'equazione di ognuno dei sei oscillatori, inizia a sortire il suo effetto, portando gli oscillatori stessi alla completa sincronizzazione.

Abbiamo, dunque, dimostrato ciò che avevamo affermato all'inizio della sezione e in quella precedente, cioè che la sincronizzazione avviene anche effettivamente. Ovviamente, si possono effettuare analoghe considerazioni, che dimostrano risultati simili anche per gli altri tre motion patterns.

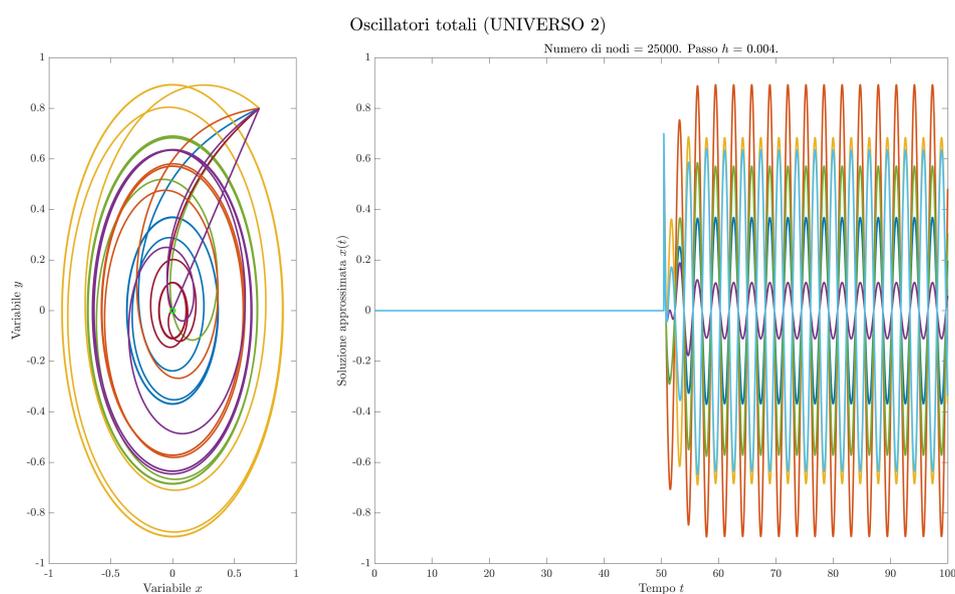


## Capitolo 6

# Analisi della sincronizzazione

### 6.1 PROCESSO DI CONVERGENZA DI $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$

Nella sezione (4.4) abbiamo effettuato la simulazione dei quattro motion patterns e ne abbiamo analizzato le caratteristiche, andando a visionare l'andamento dei sei oscillatori in funzione del tempo. Come si può notare dal titolo delle figure (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), abbiamo considerato quegli andamenti come appartenenti ad un "universo", che chiamiamo, appunto, "UNIVERSO 1", nel quale gli oscillatori partono dall'istante  $t = 0$ . Ora, per proseguire la trattazione sulla convergenza, simuliamo sempre l'andamento degli stessi oscillatori nel tempo, ma questa volta ritardando la loro partenza intorno all'istante  $t = 50$ . Otteniamo, così, il secondo set di oscillatori, cioè quello che chiamiamo "UNIVERSO 2". Ad esempio, considerando la simulazione per il **motion pattern B** si ha:



**Figura 6.1:** Rappresentazione grafica dell'andamento degli oscillatori appartenenti all'UNIVERSO 2 per il motion pattern B

In questo modo, parallelamente a quanto detto per la teoria nella sezione (5.1), andiamo a definire i due vettori  $\{\bar{v}_0\}$  e  $\{\bar{v}\}$ , che contengono rispettivamente tutte le variabili degli oscillatori appartenenti al primo e al secondo universo. Il codice in *MATLAB* corrispondente è il seguente:

```

1 v0=[xi1(1,:);xi1(2,:);xi2(1,:);xi2(2,:);xi3(1,:);xi3(2,:);xi4(1,:);xi4(2,:);xi5(1,:);xi5
    (2,:);xi6(1,:);xi6(2,:)];
2 v=[ti1(1,:);ti1(2,:);ti2(1,:);ti2(2,:);ti3(1,:);ti3(2,:);ti4(1,:);ti4(2,:);ti5(1,:);ti5
    (2,:);ti6(1,:);ti6(2,:)];

```

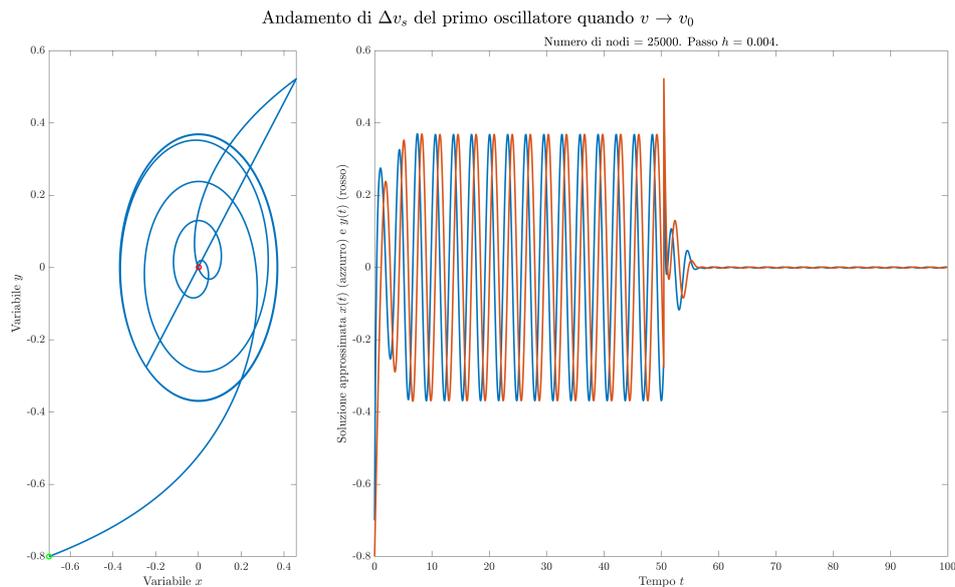
A questo punto, possiamo introdurre la  $\{\Delta \bar{v}_s\}$ , definita come differenza tra  $\{\bar{v}_0\}$  e  $\{\bar{v}\}$ :

```

1 dVs(:,1:N) = v(:,1:N) - v0(:,1:N);

```

e ne effettuiamo la rappresentazione grafica per il primo oscillatore, qui riportata:



**Figura 6.2:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\{\Delta \bar{v}_s\}$  per il primo oscillatore (motion pattern B)

Come si può vedere dalla figura, all'inizio l'andamento è quello dell'UNIVERSO 1; poi, intorno all'istante  $t = 50$ , entra in gioco anche il transitorio dell'UNIVERSO 2, andamento che, quando diviene permanente, combinato con quello sempre permanente del primo universo, tende ad annullarsi intorno all'istante  $t = 55$ . Questa situazione rispecchia ciò che è stato già discusso in teoria; infatti, al tendere di  $\{\bar{v}\}$  a  $\{\bar{v}_0\}$ ,  $\{\Delta \bar{v}_s\} \rightarrow 0$ .

Ricordiamo che per andare ad analizzare il processo di convergenza, l'equazione che bisogna graficare è la seguente (di cui abbiamo già parlato nella trattazione teorica):

$$\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\} = \mathbf{f}(\{\Delta \bar{v}_s\}, \mu, \sigma^{\rho=0.5}) - k(t)\mathbf{G}\{\bar{v}_0\} - k(t)\mathbf{G}\{\Delta \bar{v}_s\} \quad (6.1)$$

Dunque, è necessario determinare i tre termini che compongono la (6.1), in particolare:

- $\mathbf{f}\{\Delta \bar{v}_s\}$
- $\mathbf{G}\{\bar{v}_0\}$
- $\mathbf{G}\{\Delta \bar{v}_s\}$

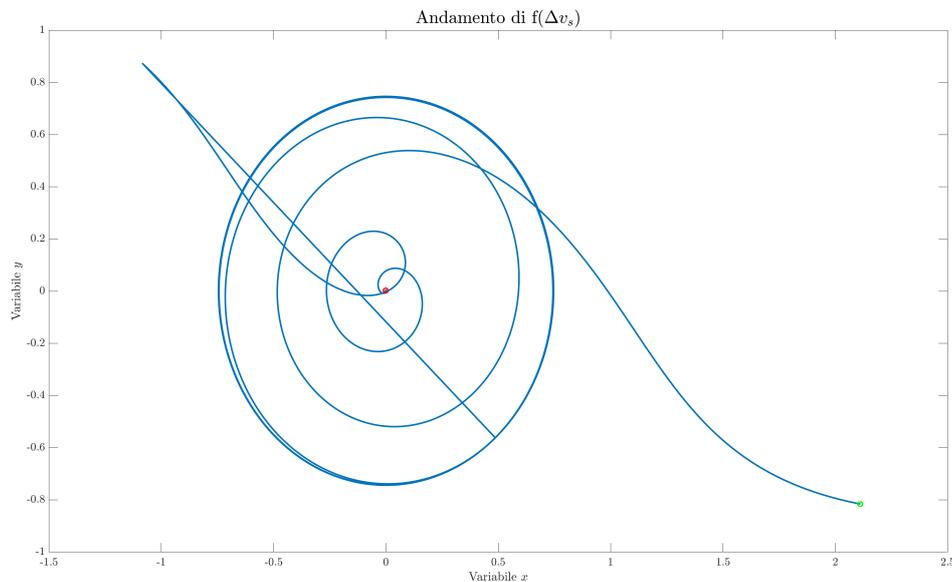
Avendo già calcolato la  $\{\Delta \bar{v}_s\}$ , per ottenere la  $\mathbf{f}\{\Delta \bar{v}_s\}$  basterà solamente calcolare  $\mathbf{f}$  utilizzando  $\{\Delta \bar{v}_s\}$  come variabile di stato. Prendendo, da qui in avanti, in considerazione sempre il primo oscillatore e traducendo quanto detto in codice si ha:

```

1 f_dVs =
2 [ (-alpha*((dVs(1,:)-a).^2+(dVs(2,:)-b).^2-mu1)).*(dVs(1,:)-a)-(pi./(rho*(exp(-lambda*
3   dVs(2,:))+1)*phi) + pi./((1-rho)*(exp(lambda*dVs(2,:))+1)*phi)).*(dVs(2,:)-b)
4 (-alpha*((dVs(1,:)-a).^2+(dVs(2,:)-b).^2-mu1)).*(dVs(2,:)-b)+(pi./(rho*(exp(-lambda*dVs
   (2,:))+1)*phi) + pi./((1-rho)*(exp(lambda*dVs(2,:))+1)*phi)).*(dVs(1,:)-a)
5 ];

```

Andando ad effettuare la rappresentazione grafica della variabile di stato  $y$  rispetto a  $x$  si ottiene:



**Figura 6.3:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $f\{\Delta \bar{v}_s\}$  per il primo oscillatore (motion pattern B)

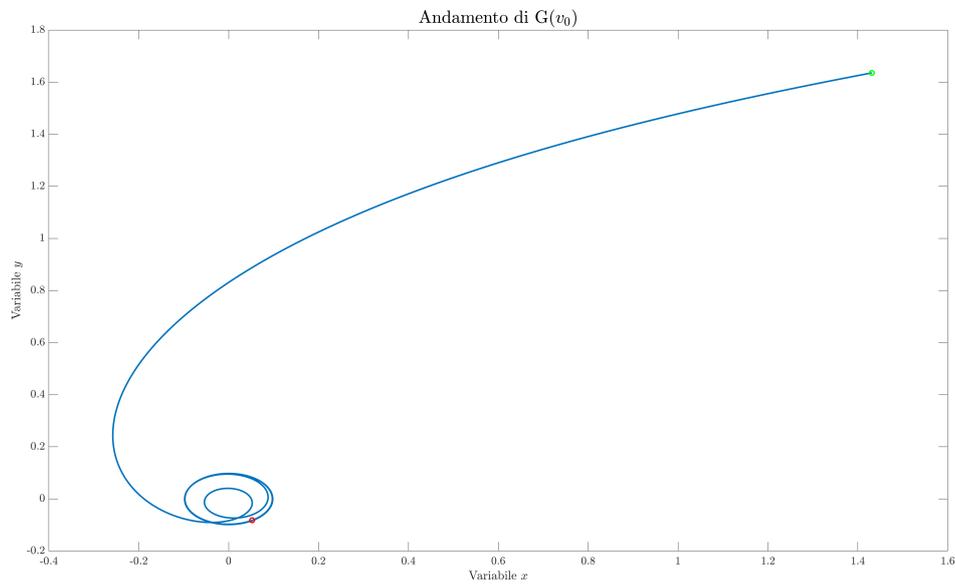
Riguardo, invece, la  $\mathbf{G}\{\bar{v}_0\}$ , bisogna notare, per prima cosa, che la funzione  $\mathbf{G}$  denota la sommatoria della (5.1), cioè dell'equazione differenziale costitutiva dell'oscillatore, termine fondamentale per il processo di sincronizzazione. Quindi,  $\mathbf{G}\{\bar{v}_0\}$  non è altro che la funzione  $\mathbf{G}$  calcolata utilizzando  $\{\bar{v}_0\}$  come variabile di stato. In *MATLAB*:

```

1 G_v0 = (v0(1:2,:)-(mu1/mu2)*R12*v0(3:4,:))+(v0(1:2,:)-(mu1/mu6)*R16*v0(11:12,:));

```

Graficamente:

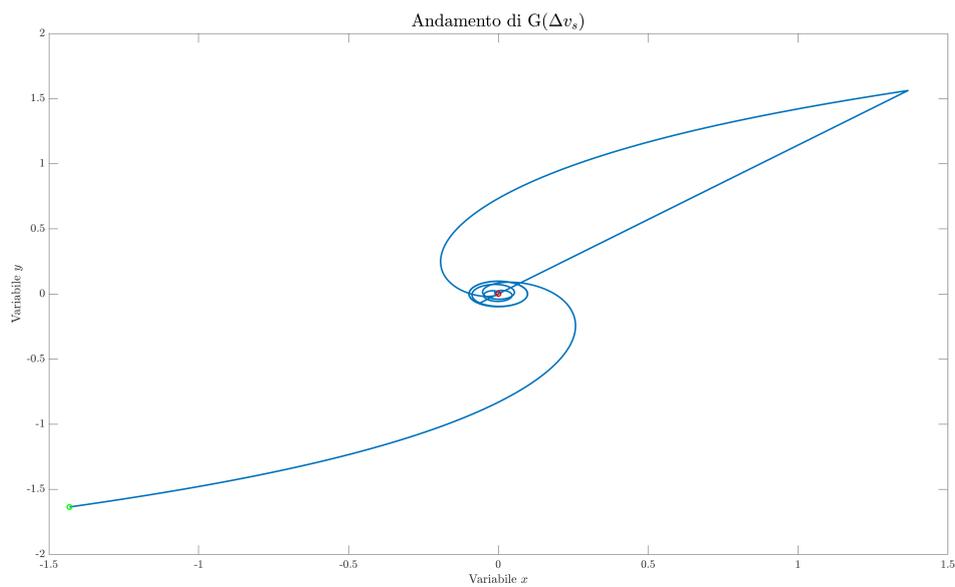


**Figura 6.4:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $G(\bar{v}_0)$  per il primo oscillatore (motion pattern B)

Infine, per il calcolo della  $\mathbf{G}\{\Delta\bar{v}_s\}$ , il ragionamento è analogo a quello appena fatto, con l'unica e ovvia differenza che come variabile di stato in  $\mathbf{G}$  utilizziamo  $\{\Delta\bar{v}_s\}$  al posto di  $\{\bar{v}_0\}$ , come di seguito riportato:

$$1 \quad \mathbf{G\_dVs} = (\mathbf{dVs}(1:2, :)) - (\mu_1/\mu_2) * \mathbf{R12} * \mathbf{dVs}(3:4, :) + (\mathbf{dVs}(1:2, :)) - (\mu_1/\mu_6) * \mathbf{R16} * \mathbf{dVs}(11:12, :);$$

Rappresentando graficamente si ottiene:

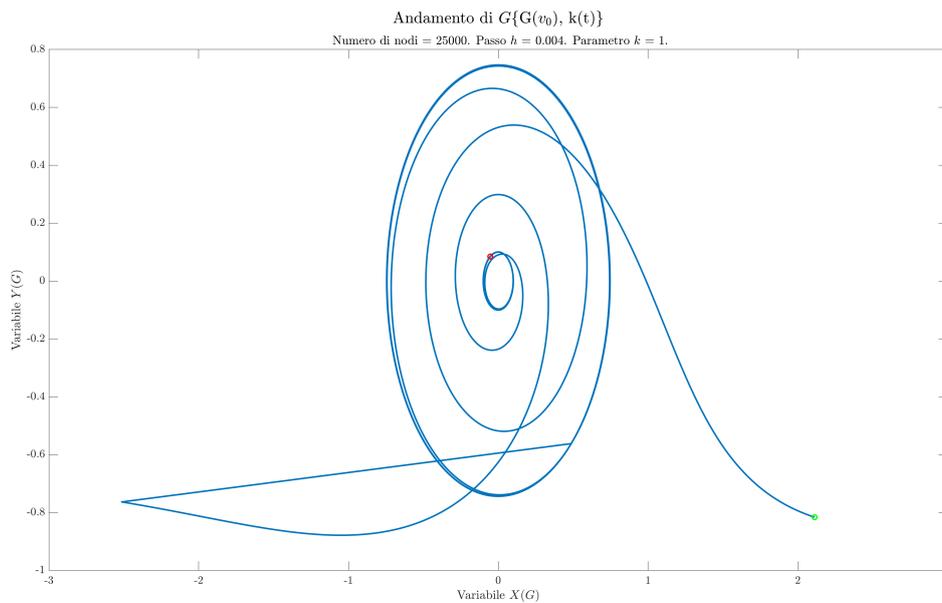


**Figura 6.5:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $G\{\Delta\bar{v}_s\}$  per il primo oscillatore (motion pattern B)

Dunque, ora che abbiamo ottenuto tutti e tre i termini che compongono la funzione (6.1), possiamo finalmente calcolare  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  e andarne a rappresentare l'andamento. Per semplicità di notazione, in codice *MATLAB*, scriviamo la funzione  $\mathcal{G}$  sotto il nome di "H", come qui riportato:

```
1 H = f_dVs-k*G_v0-k*G_dVs;
```

Ecco, dunque, il grafico che volevamo ottenere fin dall'inizio:



**Figura 6.6:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  per il primo oscillatore (motion pattern B)

Analizzando l'andamento di  $\mathcal{G}$ , è possibile notare come la funzione, partendo da un punto nel grafico diverso da 0 (*pallino verde*), assume un andamento a spirale fino a convergere all'istante finale verso un punto molto vicino all'origine (*pallino rosso*). Questa funzione è, infatti, costruita come una somma di tre termini, i quali, a loro volta, sono caratterizzati da rappresentazioni grafiche i cui andamenti convergono verso l'origine (vedi figure (6.3), (6.4), (6.5)).

Abbiamo, dunque, confermato nella pratica ciò che avevamo affermato teoricamente nella sezione (5.1), cioè che **il processo di convergenza di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  avviene realmente.**

### 6.1.1 Influenza dei diversi parametri con $\rho = 0.5$

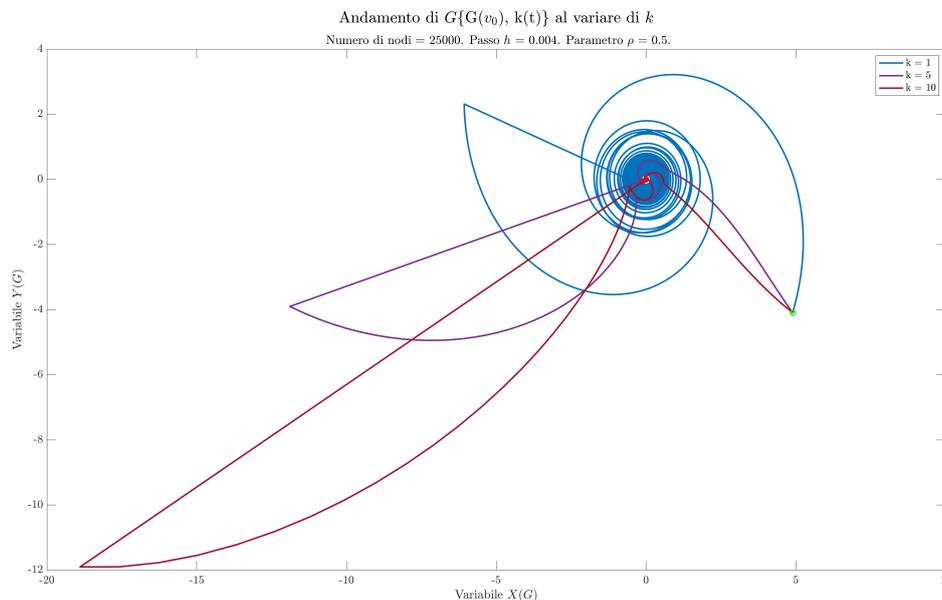
Dopo aver ottenuto l'andamento della  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$ , è possibile ora studiare come questa funzione si comporta al variare di alcuni parametri fondamentali che compongono l'equazione differenziale degli oscillatori  $\sigma$ -Hopf.

Partiamo dal caso in cui il **duty factor**  $\rho = 0.5$ . Come già analizzato nelle precedenti sezioni, ciò vuol dire che l'andamento ascendente e quello discendente delle oscillazioni si equivalgono, quindi la forma d'onda delle oscillazioni è simmetrica.

I componenti che siamo andati a modificare per studiare l'andamento di  $\mathcal{G}$  sono:

- il guadagno di accoppiamento  $\mathbf{k}(t)$
- i punti iniziali  $(x_0, y_0)$
- i fattori di fase  $\psi$

Per quanto riguarda  $\mathbf{k}(t)$ , esso può essere definito come la "**forza di convergenza**", cioè quel fattore che, a seconda dei valori che assume, provoca un diverso tasso di convergenza. Infatti, dai grafici precedenti si è visto come la funzione  $\mathcal{G}$  tenda a 0 e quindi si può affermare che più  $k(t)$  è grande più esso porta a un tasso di convergenza più veloce. Ciò si può dimostrare andando ad assegnare tre diversi valori a  $k(t)$  (ad esempio noi abbiamo preso  $k(t) = [1, 5, 10]$ ) per poi ricavare le equazioni degli oscillatori per ogni valore del guadagno di accoppiamento. Infine, rappresentando la  $\mathcal{G}$ , si ottiene il seguente grafico, il quale conferma quanto appena detto:



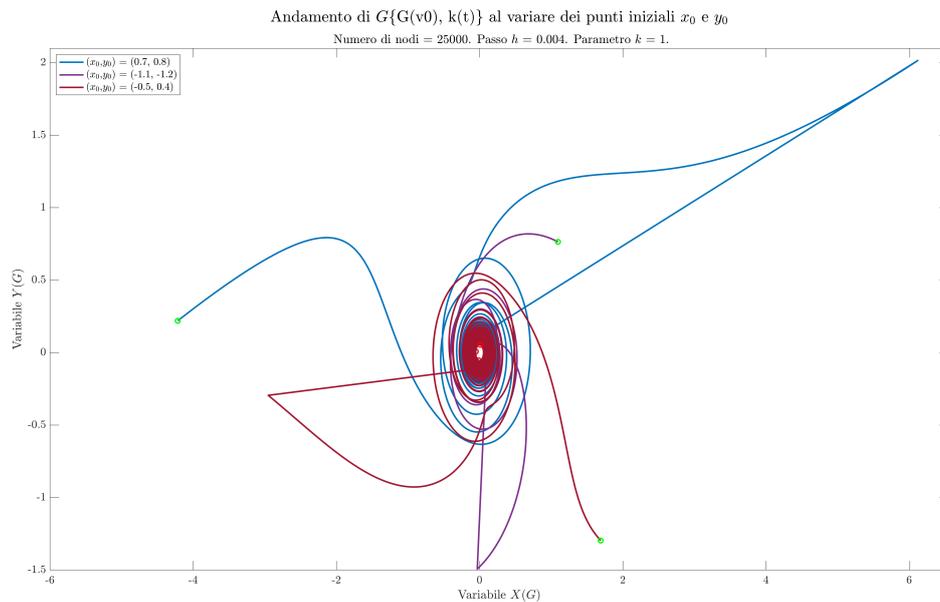
**Figura 6.7:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  con  $\rho=0.5$  al variare del parametro  $k$

Riguardo, invece, i **punti iniziali**  $(x_0, y_0)$ , per studiare l'andamento di  $\mathcal{G}$  al variare di questi ultimi, è necessario andare ad effettuare diverse simulazioni numeriche con il *metodo di Runge-Kutta del IV ordine*, inizializzando di volta in volta le variabili di stato  $x$  e  $y$  ai valori desiderati. Nel nostro caso, abbiamo preso in considerazione tre diverse coppie di valori  $(x_0, y_0)$  e, quindi, bisogna effettuare tre differenti simulazioni numeriche. I valori dei punti iniziali scelti sono:

- $(x_0, y_0) = (0.7, 0.8)$
- $(x_0, y_0) = (-1.1, -1.2)$
- $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.4)$

Il variare dei punti iniziali influisce in maniera limitata sul tasso di convergenza, ma riveste un ruolo molto importante sul processo di sincronizzazione. Tuttavia, se il punto iniziale è posto vicino al ciclo limite in modo da facilitare la sincronizzazione, esso contribuisce anche ad un rapido tasso di convergenza.

Rappresentando  $\mathcal{G}$  al variare dei punti iniziali, si ottiene, dunque, la seguente rappresentazione grafica:



**Figura 6.8:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  con  $\rho=0.5$  al variare dei *punti iniziali*

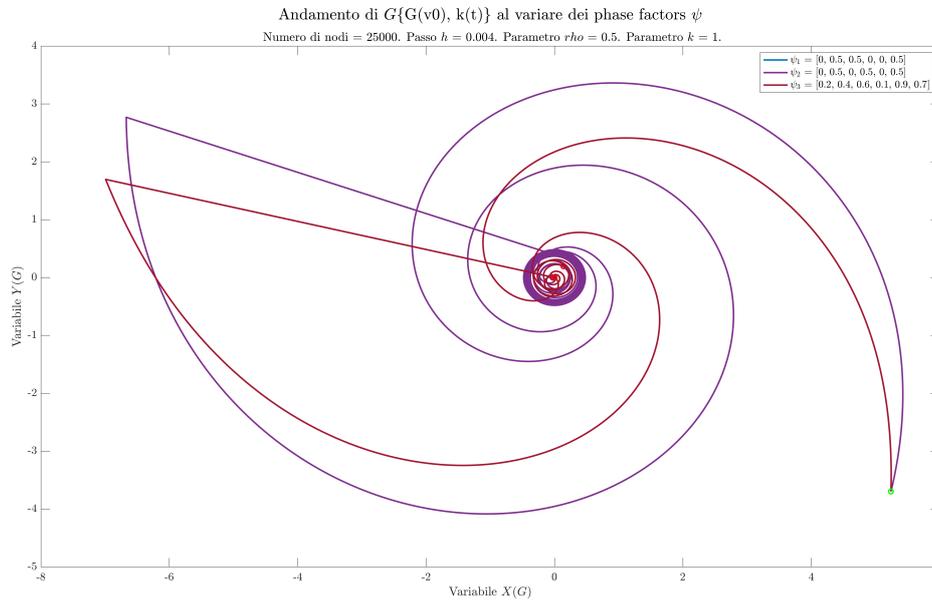
Infine, per quanto riguarda, invece, i **fattori di fase  $\psi$**  (*phase factors*), si può notare come questi non appaiano come parametro all'interno delle equazioni differenziali degli oscillatori; tuttavia, tramite la relazione  $\psi_i = \Phi_i/2\pi$ , essi sono legati allo sfasamento  $\phi$  dell'oscillatore i-esimo. Dunque, facendo variare  $\psi$  andranno a modificarsi i valori di  $\phi$  e, di conseguenza, i valori delle differenze di fase  $\Delta\Phi$  tra l'oscillatore i-esimo e quello j-esimo. In questo modo, risulterà modificata la matrice  $\mathbf{R}(\Delta\Phi)$ , cioè la matrice di trasformazione rotazionale 2-D, componente fondamentale dell'equazione per il processo di sincronizzazione.

I tre diversi vettori dei phase factors presi in considerazione sono i seguenti (ogni componente del vettore è associato all'oscillatore corrispondente):

- $\psi = [0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0.5]$
- $\psi = [0, 0.5, 0, 0.5, 0, 0.5]$
- $\psi = [0.2, 0.4, 0.6, 0.1, 0.9, 0.7]$

Diversi valori dei fattori di fase portano ad un processo di sincronizzazione differente. Infatti, essi influiscono sulla relazione di sincronizzazione degli oscillatori e, inoltre, determinano la differenza di fase a regime.

Rappresentando la  $\mathcal{G}$ , si ottiene il seguente grafico, il quale conferma quanto appena affermato:



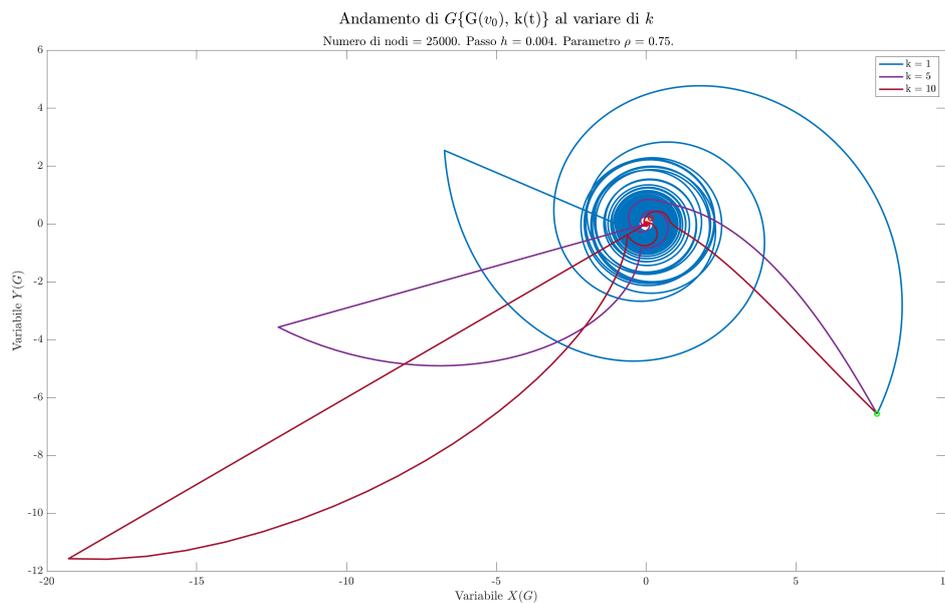
**Figura 6.9:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\vec{v}_0), k(t)\}$  con  $\rho=0.5$  e  $k=1$  al variare dei *phase factors*  $\psi$

### 6.1.2 Influenza dei diversi parametri con $\rho \neq 0.5$

Consideriamo ora il caso in cui il **duty factor**  $\rho \neq 0.5$ . Come già sappiamo, ciò significa che l'andamento ascendente e quello discendente delle oscillazioni non si equivalgono, quindi la forma d'onda delle oscillazioni non è simmetrica, ma asimmetrica.

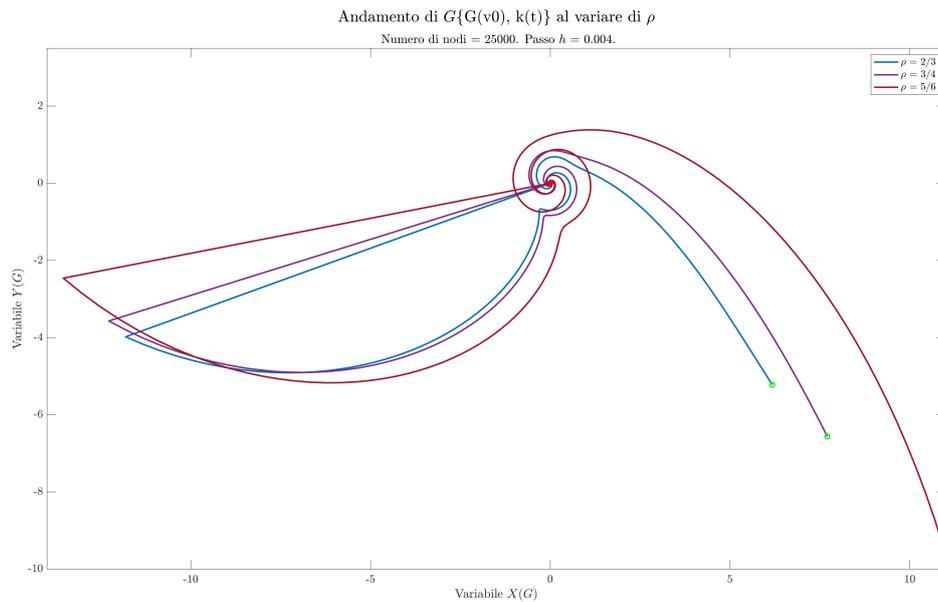
Analogamente alla sezione precedente, andiamo ad eseguire nuovamente tutti gli studi fatti sulla  $\mathcal{G}$ , con l'unica differenza che non effettuiamo l'analisi al variare dei punti iniziali, ma al suo posto studiamo  $\mathcal{G}$  al variare dei duty factors  $\rho$ .

In primo luogo, fissiamo  $\rho=0.75$  e analizziamo ciò che accade al variare del **guadagno di accoppiamento**  $\mathbf{k}(t)$  (i tre valori considerati sono gli stessi presi in precedenza). Andando ad effettuare la rappresentazione grafica, si può vedere come questa è molto simile a quella ottenuta precedentemente; l'unica differenza è data dalla presenza di più spirali, fattore che testimonia come la funzione  $\mathcal{G}$  assume un andamento che impiega più tempo per convergere a zero e ciò è dovuto, appunto, dalla modifica fatta su  $\rho$ , il quale non vale più 0.5, ma 0.75:



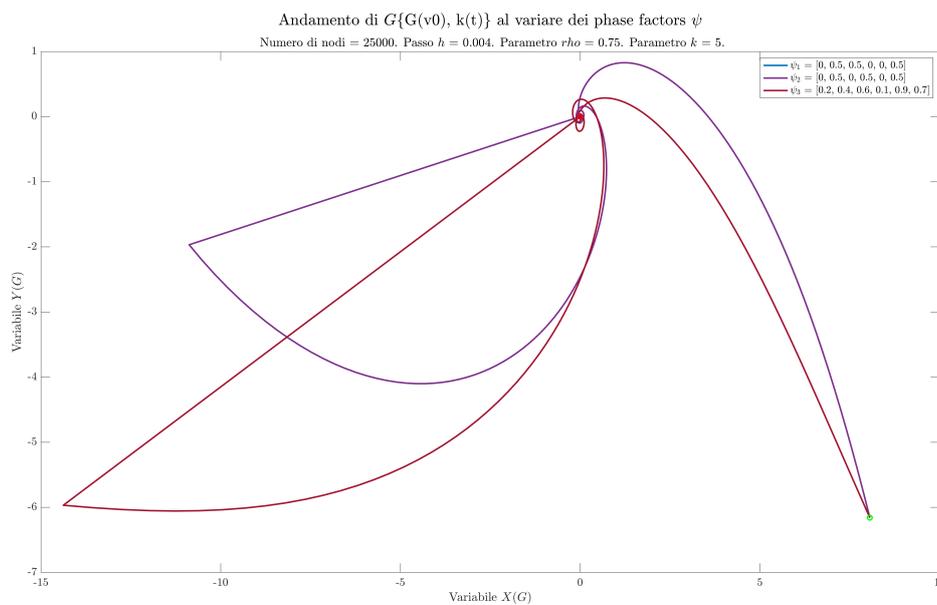
**Figura 6.10:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  con  $\rho=0.75$  al variare del parametro  $k$

Ora, invece, fissiamo  $k(t)=5$  e facciamo variare il **duty factor**  $\rho$ . Analizziamo l'andamento di  $\mathcal{G}$  per tre diversi valori di  $\rho$ , cioè  $\rho=[2/3, 3/4, 5/6]$ . Come è possibile notare dal grafico a pagina seguente, più  $\rho$  è grande più la deformazione è maggiore:



**Figura 6.11:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  al variare del parametro  $\rho$

L'ultima analisi della  $\mathcal{G}$  con  $\rho=0.75$  che andiamo ad effettuare è quella al variare dei **fattori di fase  $\psi$** . Come nella sezione precedente, prendiamo tre diversi vettori di phase factors (aventi le stesse componenti del caso con  $\rho=0.5$ ), con l'unica differenza di porre  $k(t)=5$ . Modificare i vettori  $\psi$  vuol dire ottenere diversi valori delle differenze di fase  $\Delta\Phi$  e, quindi, passare ad un differente motion pattern. Questo fatto porta  $G\{\bar{v}_0\}$  ad avere un cerchio limite differente in base allo schema di movimento considerato, come rappresentato qui di seguito:



**Figura 6.12:** Rappresentazione grafica dell'andamento di  $\mathcal{G}\{G(\bar{v}_0), k(t)\}$  con  $\rho=0.75$  e  $k=5$  al variare dei *phase factors*  $\psi$

## 6.2 CONVERGENZA E DEFORMAZIONE DELLA FORMA D'ONDA

Per analizzare la convergenza e la deformazione della forma d'onda degli oscillatori  $\sigma$ -Hopf, andiamo a studiare l'andamento di quattro fattori caratteristici in funzione dei parametri  $\mathbf{k}(\mathbf{t})$  e  $\rho$ . Essi sono i seguenti:

- **Convergence rate** (*tasso di convergenza*):

indica quanto tempo impiega la forma d'onda dell'oscillatore a convergere, appunto, ad uno stato stazionario. Come già osservato nelle sezioni precedenti, esso è determinato principalmente dal valore di  $k(\mathbf{t})$ . La convergenza è, infatti, molto lenta per  $k < 1$  (la distorsione è quasi nulla), veloce per  $k$  che va da 1 a 5 (con piccola distorsione) e estremamente veloce per  $k > 5$  (con elevata distorsione e cambiamento del periodo). Per valori successivi a  $k=10$ , il tasso di convergenza dovrebbe essere addirittura minore di un secondo.

- **Asymmetry rate** (*tasso di asimmetria*):

è una misura della differenza tra le aree positive e negative, cioè quelle parti comprese tra il grafico degli oscillatori e l'asse delle ascisse. Se questo parametro assume un valore pari a 0, ciò significa che la differenza è nulla, cioè che le aree positive eguagliano quelle negative. Più il parametro  $\rho$  tende a 1, più il tasso di asimmetria aumenta, mentre all'aumentare di  $k$ , le forme d'onda tendono a diventare simmetriche, cioè il tasso di asimmetria tende a 0.

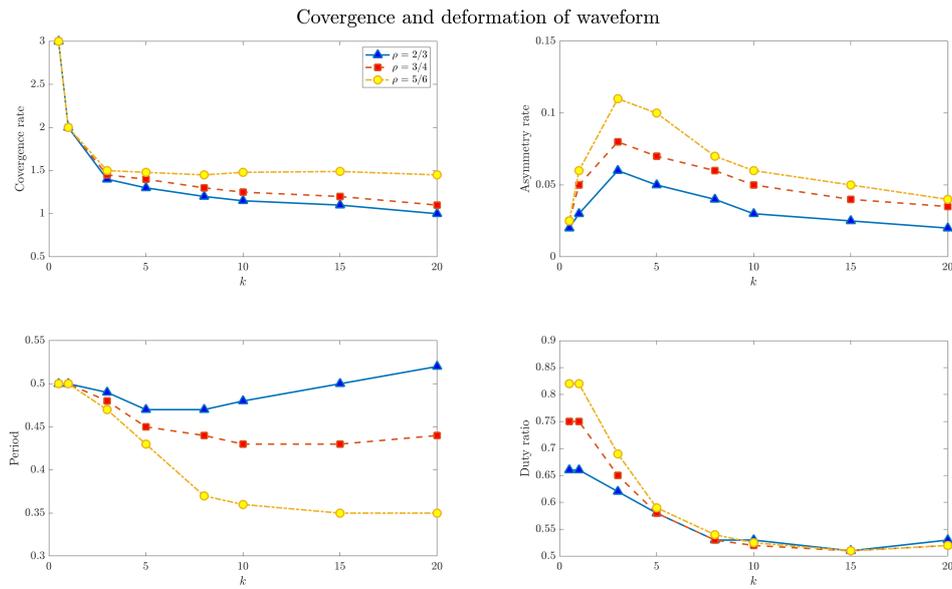
- **Period change** (*cambio di periodo*):

come si può evincere dal nome stesso, esso indica il cambiamento del periodo al variare dei valori dei parametri  $k(\mathbf{t})$  e  $\rho$ . Più i valori di questi parametri aumentano, più il periodo subisce un cambiamento.

- **Duty ratio** (*rapporto di lavoro*):

il suo range è compreso tra 0 e 1 e determina la velocità di trasformazione tra la fase ascendente (la fase di oscillazione) e la fase discendente (la fase di riposo). Quando  $\rho=0,5$ , siamo in presenza di un oscillatore Hopf standard e il tempo occupato dalla fase di oscillazione e dalla fase di supporto è uguale. All'aumentare del valore di  $k$ , le forme d'onda tendono a divenire simmetriche e il duty ratio tende a 0.5, con un conseguente restringimento del periodo. Ciò vuol dire che l'intera forma d'onda si modifica diventando sempre più "bassa" e "liscia". Inoltre, per motivi di stabilità, il rapporto di lavoro di un robot con gambe è raramente inferiore a 0.5; infatti, avere un valore di  $\rho < 0.5$  significa che tutte le gambe possono essere sollevate da terra contemporaneamente, il che è fisicamente irrealizzabile.

Nella figura sottostante sono rappresentati graficamente gli andamenti di tutti e quattro i parametri caratteristici, sopra descritti, al variare dei valori di  $k(t)$  e  $\rho$ . Il periodo di oscillazione  $T$  è fissato a 0.5 secondi, mentre  $k(t)=[0.5, 1, 3, 5, 8, 10, 15, 20]$  e  $\rho=[2/3, 3/4, 5/6]$ .



**Figura 6.13:** Convergenza e deformazione della forma d'onda

### 6.3 SOSTITUZIONE DI $k(t)$ CON $k_e(t)$ ED EFFETTO SULLA SINCRONIZZAZIONE

Dal momento che il valore del parametro  $k(t)$  determina il tasso di convergenza e l'entità della distorsione, viene qui introdotta una nuova funzione  $k_e(t)$ , definita come segue:

$$k_e(t) = \kappa e^{-\eta \cdot (t-t_0)} \quad (6.2)$$

nella quale si ha che:

- $\eta$  è il **fattore discendente**, relazionato al tempo.
- $\kappa$  è la **forza iniziale**.
- $t_0$  è il **tempo iniziale**.

Come già sappiamo, per un elevato valore della forza di convergenza, quest'ultima avverrà in poco tempo, mentre per un valore piccolo servirà un tempo maggiore. Quindi, il processo di convergenza è determinato principalmente dal valore di  $k_e(t) \geq 1$ . Dunque, il **tempo effettivo di convergenza**, denotato come  $T_{\text{effective}}$ , può essere ricavato da:

$$\begin{aligned} e^{-\eta \cdot (t-t_0)} &\geq 1/\kappa \\ T_{\text{effective}} = (t - t_0) &\geq \ln(\kappa)/\eta \end{aligned} \quad (6.3)$$

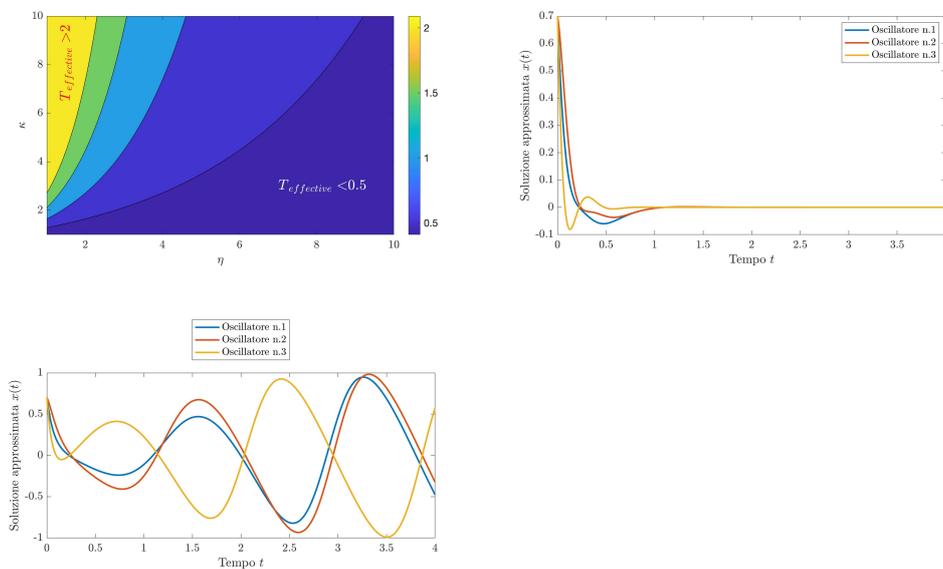
Pertanto, nello stato stazionario, quando  $k(t)=0$ , la distorsione svanisce ed il periodo torna ad essere quello originario. Viene risolto, quindi, il problema della deformazione dell'oscillazione causata dal fattore di asimmetria. Tuttavia, se la differenza di fase è imprecisa e  $k(t)$  non risulta essere uguale a 0, il processo di sincronizzazione non può più essere regolato. Dunque, è estremamente importante scegliere i parametri giusti per garantire una convergenza rapida e stabile. Dal primo grafico nella figura a pagina seguente, emerge come i parametri  $\kappa$  e  $\eta$  sono approssimativamente correlati in maniera lineare. Secondo i risultati ottenuti in precedenza, quando  $\kappa$  è troppo grande la deformazione non deve essere ignorata, quindi  $\kappa$  e  $\eta$  sono parametri i cui valori devono essere compresi nell'intervallo [1, 10].

Nel nostro studio, fissiamo  $\kappa=\eta=5$  e il tempo di convergenza a 0.32 secondi. Perciò, gli oscillatori  $\sigma$ -Hopf con sincronizzazione, utilizzati nel sistema, assumono la seguente equazione:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i, \mu_i, \boldsymbol{\sigma}_i(\rho_i, \lambda, t)) - \kappa e^{-\eta \cdot (t-t_0)} \cdot \sum_{j \in \mathcal{R}_i}^{n_i} \left( \mathbf{v}_i - \frac{\mu_i}{\mu_j} \mathbf{R}(\Delta\Phi_{ij}) \mathbf{v}_j \right) + \mathbf{u}(t) \quad (6.4)$$

in cui, lo scalare positivo  $\kappa$  denota il **guadagno di accoppiamento** e può variare nel tempo a seconda del tipo di locomozione, mentre  $\eta$ , come già detto, indica il **fattore di discesa** e  $t_0$  è il **tempo di partenza**.

Nella figura sottostante, il primo grafico rappresenta quello che viene chiamato l'"**Effective time surface**" di  $k_e(t)$ . Esso è stato realizzato in *MATLAB* avvalendosi del comando "**contour**" e rappresenta, in parole povere, l'andamento del parametro  $\kappa$  in funzione di  $\eta$ . Come si può vedere, sono esplicitamente indicate le aree per cui si ha che  $T_{\text{effective}} > 2s$  e  $T_{\text{effective}} < 0.5s$ . Il grafico a destra contiene, invece, l'andamento originale degli oscillatori (qui sono stati presi i primi tre) ottenuto con  $\mathbf{k}(t)$ , mentre il grafico restante rappresenta l'eliminazione della deformazione, cioè le forme d'onda dei primi tre oscillatori calcolati con  $k_e(t)$ . I valori dei vari parametri utilizzati per la simulazione grafica sono:  $k(t)=5$ ,  $\rho=5/6$ ,  $t_0=2s$ ,  $\kappa=\eta=5$ ,  $\psi=[0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0.5]$ .



**Figura 6.14:** Effetto di  $k_e(t)$  sul processo di sincronizzazione

## Capitolo 7

# Conclusione

In questa tesi è stata proposta una **strategia di sincronizzazione e controllo per un girovita bionico parallelo basata sull'utilizzo di oscillatori  $\sigma$ -Hopf**.

In particolare, è stato analizzato lo stato di transizione, con il fine di identificare e valutare la distorsione della forma d'onda dovuta all'asimmetria dell'oscillazione nella sincronizzazione. Inoltre, è stata aumentata la forza di accoppiamento (*coupling strength*) variabile, con l'obiettivo di eliminare la distorsione e garantire contemporaneamente una sincronizzazione efficace e stabile. Su questa base, si è arrivati, poi, a costruire la rete di controllo bionico per il girovita parallelo, così da realizzare il comportamento desiderato.

Un risultato importante ottenuto è che l'oscillatore  $\sigma$ -Hopf ha un ciclo limite circolare e simmetrico con una forma d'onda regolare e stabile. Inoltre, le caratteristiche di quest'ultima rendono il processo di sincronizzazione più complicato rispetto a quello dell'oscillatore simmetrico. Le analisi e i metodi che sono stati sviluppati mostrano un processo per eliminare la deformazione e garantire una convergenza rapida. Pertanto, senza andare a modificare le caratteristiche dell'oscillatore  $\sigma$ -Hopf, si può, comunque, realizzare il processo di sincronizzazione, il quale può essere utilizzato per ottenere un comportamento coordinato e una locomozione accoppiata del robot bionico multi-giunto.



# Ringraziamenti

Prima di tutto, vorrei ringraziare il mio relatore, il Prof. Simone Fiori, per avermi fatto appassionare ai contenuti dei suoi corsi e per aver accettato la mia richiesta di svolgere il tirocinio sotto la sua guida, fornendomi l'opportunità di approfondire una delle discipline più stimolanti tra quelle inerenti il campo dell'automazione: la neuro-robotica. La ringrazio, Professore, per l'estrema disponibilità, cordialità ed attenzione con cui ha risposto ad ogni mia richiesta, fugando ogni mio dubbio.

Grazie infinite ai miei genitori per essere stati sempre accanto a me e per aver condiviso ogni mia scelta, difficoltà e successo. Vi ringrazio per aver voluto solo e comunque il mio bene, per l'amore con cui mi avete cresciuto e per la cura con cui mi avete preparato ad affrontare una vita piena di gioie, ma anche di insidie.

Grazie a mio fratello, con il quale ho condiviso e condivido tutt'ora esperienze e momenti splendidi di vita. Sei sempre stato un modello da seguire, un amico sincero ed un ottimo confidente.

Grazie ai miei carissimi nonni, zii e cugini, che hanno sempre tifato per me e che mi hanno in ogni modo dimostrato la loro vicinanza e il loro affetto.

Grazie agli amici di una vita e a quelli più stretti, con i quali ho vissuto avventure indimenticabili, periodi felici, ma anche complicati. Grazie per tutte le volte che ci siete stati e per la vicinanza che mi fate sentire ogni giorno: vi considero come fratelli.

Grazie ai miei fantastici compagni di corso, che hanno reso più piacevoli questi tre anni di università. Con voi al mio fianco, i giorni di lezione e gli esami si sono rivelati molto più leggeri.

Grazie ai miei carissimi compagni di squadra, che mi hanno accolto calorosamente sin dal primo giorno e che mi hanno fatto capire come conciliare studio, sport e divertimento sia un qualcosa di fattibile e, soprattutto, fondamentale.

Grazie ancora a tutti quelli che in questi tre anni ci sono sempre stati, alle persone che ho conosciuto durante il percorso, a chi è rimasto, ma anche a chi ha deciso di andarsene, lasciando, comunque, ricordi indelebili. Siete stati tutti estremamente importanti per la mia crescita personale ed ognuno di voi ha contribuito a farmi raggiungere questo splendido traguardo.

Vi porterò per sempre nel cuore.



# Bibliografia

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

De Marco, A. (2017). *Scrivere la tesi di laurea in Latex*.

Fiori, S. (2021). Metodo esplicito di Runge-Kutta del IV ordine (eRK4). In *Dispense del corso di Analisi Numerica 2020-2021 - Università Politecnica delle Marche*.

Pantieri, L., & Gordini, T. (2008). *L'arte di scrivere con Latex*. Aracne.

Zhu, Y., Chen, L., Liu, Q., Qin, R., & Jin, B. (2018). Omnidirectional jump of a legged robot based on the behavior mechanism of a jumping spider. *Applied Sciences*, 8(1). Retrieved from <https://www.mdpi.com/2076-3417/8/1/51> doi: 10.3390/app8010051

Zhu, Y., & Guo, T. (2016). Galloping Trajectory Generation of a Legged Transport Robot Based on Energy Consumption Optimization. *Journal of Robotics*. Retrieved from <https://doi.org/10.1155/2016/9645730>

Zhu, Y., Guo, T., Liu, Q., Zhu, Q., Jin, B., & Zhao, X. (2017). Turning and radius deviation correction for a hexapod walking robot based on an ant-inspired sensory strategy. *Sensors*, 17(12). Retrieved from <https://www.mdpi.com/1424-8220/17/12/2710> doi: 10.3390/s17122710

Zhu, Y., & Jin, B. (2016). Compliance control of a legged robot based on improved adaptive control: method and experiments. *International Journal of Robotics and Automation*. Retrieved from <https://doi.org/10.2316/Journal.206.2016.5.206-4536>

Zhu, Y., Jin, B., & Li, W. (2015). Leg compliance control of a hexapod robot based on improved adaptive control in different environments. *Journal of Central South University*. Retrieved from <https://doi.org/10.1007/s11771-015-2600-0>

Zhu, Y., Jin, B., Wu, Y., Guo, T., & Zhao, X. (2016). Trajectory correction and locomotion analysis of a hexapod walking robot with semi-round rigid feet. *Sensors*, 16(9). Retrieved from <https://www.mdpi.com/1424-8220/16/9/1392> doi: 10.3390/s16091392

Zhu, Y., Wu, Y., Liu, Q., Guo, T., Qin, R., & Hui, J. (2018). A backward control based on  $\sigma$ -hopf oscillator with decoupled parameters for smooth locomotion of bio-inspired legged robot. *Robotics and Autonomous Systems*, 106, 165-178. Retrieved from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889018300241> doi: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.05.009>

Zhu, Y., Zhou, S., Gao, D., & Liu, Q. (2019). Synchronization of non-linear oscillators for neurobiologically inspired control on a bionic parallel waist of legged robot. *Frontiers in Neurorobotics*, 13, 59. Retrieved from <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fnbot.2019.00059> doi: 10.3389/fnbot.2019.00059

Zhu, Y.-g., Jin, B., Li, W., & Li, S.-t. (2014). Optimal design of hexapod walking robot leg structure based on energy consumption and workspace. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 38(3), 305-317. Retrieved from <https://doi.org/10.1139/tcsme-2014-0022> doi: 10.1139/tcsme-2014-0022