UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di laurea triennale in ingegneria meccanica

EFFETTO DELLE CONDIZIONI DI VINCOLO SULLA RESISTENZA AD IMPATTO DI MATERIALI MICROPOLARI

EFFECT OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE IMPACT RESISTANCE OF MICROPOLAR MATERIALS

Tesi di laurea di:

Nico Moretti

Relatore:

Prof. Mattia Utzeri

A.A. 2025/2026

Abstract

Il presente lavoro di tesi analizza i meccanismi di risposta dinamica e concentrazione dell'energia all'interno di materiali cellulari porosi realizzati sulla base di superfici minime triplicemente periodiche (TPMS) con struttura a giroide. In particolare lo studio si concentra sul fenomeno dell'energy trapping modulato dall'andamento della densità relativa $\bar{\rho}(z)$ e del twist rate $\tau(z)$, al fine di ottimizzare il profilo di impedenza e attenuare la propagazione dell'impulso lungo la struttura.

Attraverso una formulazione analitica basata sulla legge di Gibson-Ashby è stata descritta la distribuzione della densità di energia di deformazione $e(z)$ all'interno del componente. L'analisi del caso anomalo a torsione costante ($\tau = 0°$) ha dimostrato come la sola variazione di densità con una costante $n = 0{,}7276 < 1$ non sia sufficiente a confinare l'energia nella sezione protetta. L'introduzione del fattore $k(\tau)$ è essenziale per superare tale limite.

Un altro aspetto fondamentale è la dimostrazione dell'indipendenza del meccanismo di intrappolamento dal materiale di base: l'energy trapping si conferma una proprietà esclusivamente geometrico-topologica, consentendo di adottare strategie di progettazione comuni per qualsiasi materiale.

Indice

1. Introduzione e obiettivi del Lavoro 8

2. Stato dell'arte e comportamento meccanico delle strutture cellulari 11

2.1 I materiali e le strutture cellullari 11

2.2 Strutture TPMS: la geometria del giroide 15

2.3 Modelli analitici per strutture cellulari: la legge di Gibson-Ashby 16

2.4 Il concetto di valle di impedenza nell'attenuazione degli urti 17

3. Modellazione e simulazione numerica in nTopology 20

3.1 Generazione geometrica del giroide a spessore variabile 20

3.2 Definizione del setup di simulazione e applicazione del carico distribuito lungo $\boldsymbol{Z}$ 23

4. Analisi dei dati ed estensione della legge di Gibson-Ashby 25

4.1 Estrazione dei dati di displacement e calcolo del modulo equivalente in Excel .. 25

4.2 Formulazione estesa della legge di Gibson-Ashby 28

4.3 Analisi tridimensionale della superficie di $\boldsymbol{Eeq\rho,\tau}$ 32

5. Meccanica delle onde, risposta energetica e ottimizzazione del profilo di impedenza 35

5.1 Formulazione dell'impedenza e della densità di energia di deformazione 35

5.2 Trasmissione e riflessione della tensione all'interfaccia 37

5.3 Spostamento del picco per ragioni progettuali 38

5.4 Mappatura spaziale e visualizzazione grafica dei profici dinamici ed energetici. 39

5.5 Considerazioni critiche sul ruolo del Twist Rate e inversione della risposta energetica 43

6. Conclusioni e possibili sviluppi futuri 44

6.1 Analisi del ruolo del twist rate 44

6.2 Sviluppi futuri 48

7. Bibliografia 50

Indice delle figure

Figura 1: Foto del guscio di un riccio di mare 11

Figura 2: Diagramma di Ashby 13

Figura 3: Reticolo esagonale 14

Figura 4: Reticolo triangolare 14

Figura 5: Rappresentazione di una superficie a giroide 15

Figura 6: Profilo di impedenza continuo a valle con andamento parabolico 19

Figura 7: Struttura a giroide con dimensioni 20

Figura 8: Struttura a giroide 20

Figura 9: Variabili del codice di nTopology 21

Figura 10: Codice di un campo scalare 22

Figura 11: Giroide con parametri variabili 23

Figura 12: Forze agenti sulla struttura 24

Figura 13: Grafico sull'andamento di Eeq al variare del Twist rate e della densità relativa 27

Figura 14: Grafico sull'influenza della densità relativa sul modulo di Young equivalente 27

Figura 15: Grafico $A\rho$ 31

Figura 16: Grafico $B\rho$ 31

Figura 17: Andamento di $Eeq\rho, \tau$ al variare dei due parametri 34

Figura 18: Propagazione di un'onda tra due materiali 37

Figura 19: Rappresentazione di ρz, $Eeqz$, $Z(z)$, σz e e(z) con densità variabile 40

Figura 20: Rappresentazione di ρz, $Eeqz$, $Z(z)$, σz e e(z) con twist rate variabile..... 42

Figura 21: Rappresentazione di ρz, $Eeqz$, $Z(z)$, σz e e(z) con densità variabile e $\tau = 0°$ 43

Figura 22: Profilo variabile della densità di energia di deformazione..... 44

Indice delle tabelle

Tabella 1: Formule del modello Gibson-Ashby 16

Tabella 2: Risultati delle simulazioni statiche eseguite su nTopology per le varie configurazioni 25

Tabella 3: Valori di A e B ai diversi valori di densità, dopo le operazioni di linearizzazione 30

1. Introduzione e obiettivi del Lavoro

Negli ultimi anni, lo studio dei materiali per applicazioni ingegneristiche si è concentrato molto sui materiali porosi, favorito soprattutto dalle innovazioni nel campo della manifattura additiva. Queste hanno permesso una maggiore facilità nella realizzazione di strutture complesse, abbassandone i costi e quindi favorendone una maggiore diffusione. Tra le soluzioni più adottate si trovano le strutture basate su Superfici Minime Triplamente Periodiche (TPMS), come il giroide. Queste presentano caratteristiche molto interessanti, in particolare offrono elevate proprietà meccaniche a fronte di un vantaggioso rapporto tra rigidezza e peso. Per questo motivo trovano ampio utilizzo nell'assorbimento degli urti, dove è fondamentale avere un peso contenuto ma contemporaneamente la riduzione della tensione trasmessa e la dissipazione controllata dell'energia derivante dall'impatto al fine di salvaguardare soggetti e componenti vulnerabili.

L'idea di utilizzare strutture complesse nasce dalla necessità di risolvere le problematiche presentate da materiali pieni e dalle schiume classiche. L'utilizzo dei primi è scoraggiato dall'elevato peso che spesso eccede i vincoli progettuali, mentre le seconde presentano un comportamento cinematico fortemente non lineare e di difficile modellazione analitica. A fronte di queste difficoltà, in questo contesto, la possibilità di progettare la struttura cellulare con un determinato ordine permette di definirne e ottimizzarne le proprietà a seconda dell'utilizzo.

Questo legame tra leggerezza e assorbimento energetico è centrale in numerosi settori industriali. Un esempio significativo è rappresentato dall'ambito dell'ingegneria

dell'autoveicolo dove la sicurezza del guidatore e dei passeggeri è continuo oggetto di migliorie e innovazioni; l'impiego delle strutture oggetto di questo lavoro permette di modulare l'assorbimento dell'energia cinetica conseguente a un impatto stradale. Altrettanto rilevante è l'impiego in ambito aerospaziale e nella protezione della persona come i Dispositivi di Protezione Individuale (DPI).

Il lavoro presentato in questa tesi, descrive l'attività di tirocinio e si concentra sull'ottimizzazione del profilo di impedenza caratteristico della struttura in modo da creare una "valle di impedenza". La finalità è quella, a fronte dei vincoli progettuali, di minimizzare la tensione trasmessa e concentrare la deformazione del materiale in una posizione tale per cui non si hanno fratture alle due estremità (lato dell'urto e lato protetto).

L'attività di tirocinio si è articolata in diverse fasi sequenziali. Inizialmente è stata condotta un'analisi dello stato dell'arte per comprendere il funzionamento dei materiali porosi e come questi possono essere modellati. Successivamente, tramite il software di modellazione e simulazione nTopology sono stati generati i campioni con architettura giroidale (TPMS) introducendo come variabili di progetto la densità (ρ) e il twist rate (τ). Al variare del valore di queste due grandezze è stato valutato il comportamento del componente all'applicazione di una forza su una delle due estremità. Una volta eseguita la simulazione, sono stati riportati su Excel i dati ricavati relativi allo spostamento lungo l'asse z del componente. In seguito, è stata rielaborata la legge di Gibson-Ashby tenendo conto della variazione dei due parametri. Per fare questo sono state sfruttate le funzioni messe a disposizione del foglio di calcolo, attraverso le quali sono stati trovati gli andamenti e le relazioni matematiche della densità, del twist rate e del modulo di resistenza. Il risultato di questa fase è stato l'ottenimento della "Formulazione estesa di

Gibson-Ashby", un'equazione che arricchisce il modello base integrando l'effetto di ρ e τ.

A partire dalla nuova legge sono state adeguate tutte le altre grandezze: impedenza acustica, densità di energia e tensioni.

Tutti i risultati ottenuti sono stati riportati su grafici bidimensionali e tridimensionali mediante MATLAB. L'andamento ottenuto nelle varie casistiche ha messo in luce un comportamento apparentemente anomalo del modello: la sola variazione di densità risulta infatti insufficiente ad accumulare energia nella regione centrale a causa del valore dell'esponente n. L'introduzione del gradiente del twist rate permette di affrontare questo limite, ottimizzando la concentrazione della deformazione e fornendo una base di partenza per la progettazione e per futuri sviluppi.

Oltre alla presente introduzione, l'elaborato è suddiviso in cinque capitoli che descrivono in ordine le fasi sequenziali dell'attività di tirocinio svolta:

- Capitolo 2 – Stato dell'arte: tratta gli studi e i modelli teorici di riferimento, la natura dei materiali porosi e la legge di Gibson-Ashby
- Capitolo 3 – Modellazione numerica: approfondisce la realizzazione del profilo a giroide e l'impostazione della simulazione sul software nTopology
- Capitolo 4 – Analisi dei dati e discussione: spiega la fase analitica del tirocinio con riferimento all'utilizzo di Excel e MATLAB per la formulazione e la verifica della legge estesa
- Capitolo 5 – Studio dell'aspetto dinamico ed energetico: analizza l'andamento delle varie grandezze con particolare attenzione per i grafici
- Capitolo 6 – Conclusione: indica gli esiti riscontrati e fornisce una linea per possibili sviluppi futuri.

2. Stato dell'arte e comportamento meccanico delle strutture cellulari

2.1 I materiali e le strutture cellullari

Nel mondo animale e vegetale, quando le esigenze lo hanno richiesto, l'evoluzione ha portato alla formazione di strutture porose. Tra queste troviamo le ossa, i gusci dei ricci di mare, i nidi delle api, il sughero e anche il legno, le cui particolari geometrie garantiscono bassa densità, elevata resistenza e rigidezza. I gusci dei ricci di mare, ad esempio, sono formati da piccole piastre di calcite unite da una microstruttura porosa. Questa struttura si comporta come un solido cellulare: quando un predatore morde il guscio, i punti di contatto ruotano fra loro e questo permette di dissipare l'energia dell'impatto e di localizzare la forza in un punto minuscolo salvaguardando il resto del guscio.



Figura 1: Foto del guscio di un riccio di mare

Immagine rilasciata sotto licenza Creative Commons (Fonte: Wikimedia Commons / Autore: Albarubescens).

Nel corso della storia l'uomo ha imparato a produrre materiali con proprietà meccaniche superiori, tuttavia l'utilizzo di strutture porose complesse è sempre stato limitato dalle tecniche di produzione. Con l'ascesa delle lavorazioni additive molte delle difficoltà sono state superate rendendo possibile la realizzazione di strutture complesse come quella del giroide.

La principale differenza tra una generica schiuma e le innovative architetture è rappresentata dal fatto che mentre le prime sono spesso deformate con sollecitazione di flessione con conseguente minore resistenza, le seconde sono sollecitate a trazione e quindi hanno un comportamento migliore.

Queste strutture permettono di ampliare il Diagramma di Ashby, ovvero avere più materiali con diverse caratteristiche. Il grafico, infatti, mette in relazione due o più proprietà geometriche o fisiche dei materiali, generalmente resistenza e densità, creando delle "bolle" che racchiudono diverse famiglie di materiali (metalli, polimeri, ceramiche, schiume). In riferimento ai materiali porosi questi si collocano prevalentemente nella parte bassa a sinistra corrispondente a basse densità e bassi moduli di Young.

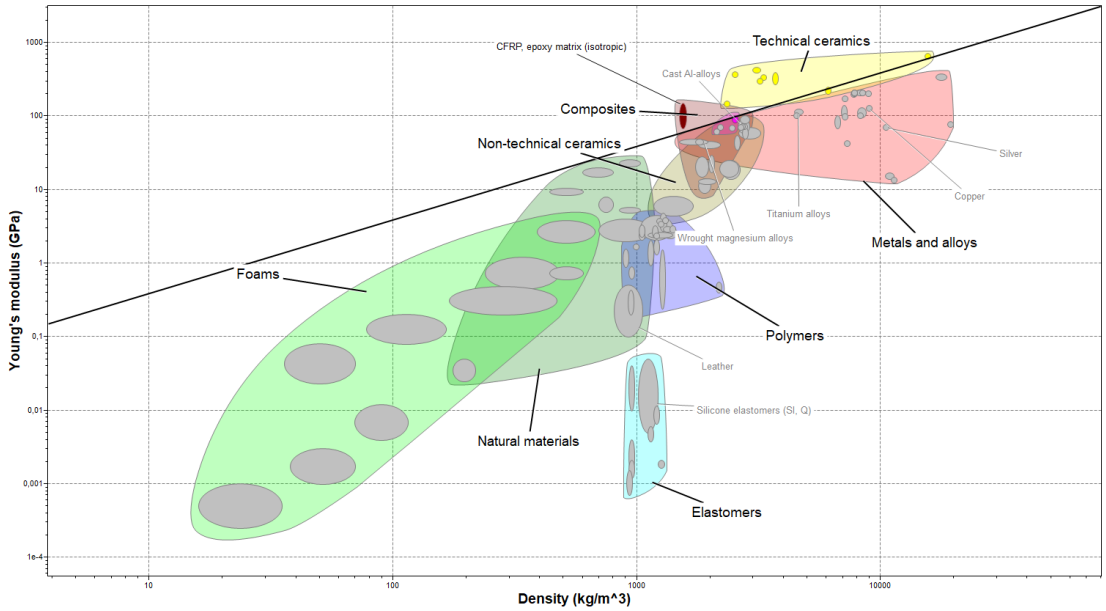


Figura 2: Diagramma di Ashby

Densità nelle ascisse e modulo di Young nelle ordinate. È mostrata la classificazione delle diverse famiglie di materiali. Immagine rilasciata sotto licenza Creative Commons (Fonte: Wikimedia Commons / Autore: Enzoaubery).

Prima di trattare il giroide serve una breve panoramica sui materiali reticolari (o strutture lattice) di cui questo rappresenta un'evoluzione moderna. Le strutture reticolari sono dei sistemi costruttivi formati da elementi (aste, travi) lineari connessi tra loro che formano una geometria spaziale dotata di nodi. I principali vantaggi, come già sottolineato, sono la leggerezza e la resitenza; oltre al risparmio di materiale. Senza entrare troppo nei dettagli si può affermare che i reticoli planari, affinchè possano riempire l'intero piano, sono realizzati con pochi poligoni regolari: il triangolo, il quadrato e l'esagono. I reticoli spaziali, invece, sono generati da poliedri regolari come il cubo e il dodecaedro rombico.

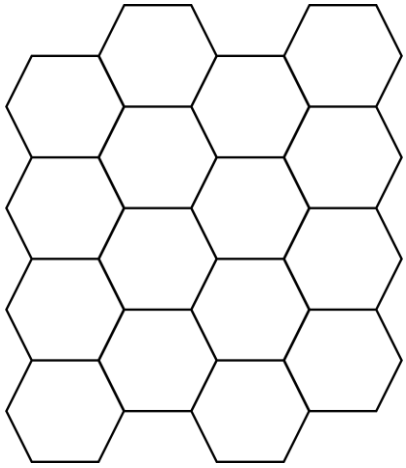


Figura 3: Reticolo esagonale

Immagine realizzata dall'autore tramite PowerPoint

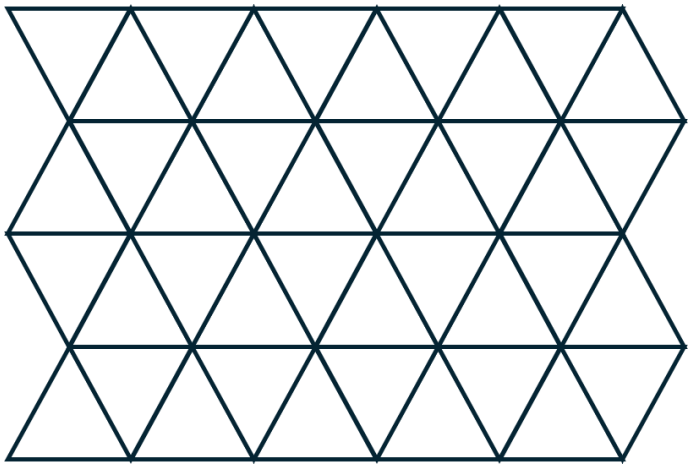


Figura 4: Reticolo triangolare

Immagine realizzata dall'autore tramite PowerPoint

Uno dei parametri essenziali nella progettazione è la densità relativa $\bar{\rho}$, definita come il rapporto tra la densità del materiale reticolare (ρ) e la densità del solido pieno (ρ_s).

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_s} \tag{1}$$

2.2 Strutture TPMS: la geometria del giroide

Le superfici di minimo sono superfici la cui caratteristica è quella di minimizzare la propria area rispettando il vincolo di periodicità spaziale nelle tre dimensioni. Superficie minima, infatti, sta ad indicare che ha la minore area possible rispetto al contorno che la delimita. È dotata di curvatura media nulla, ovvero per ogni curva concava ce n'è una identica convessa e si ripete all'infinito nelle tre direzioni dello spazio.

L'equazione implicita della superficie del giroide è la seguente:

$$\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(z) + \sin(z)\cos(x) = 0 \qquad (2)$$

Sostituendo nell'equazione (2) lo zero con una costante C è possibile variare la densità relativa in modo lineare con essa.

Nelle applicazioni di assorbimento degli urti, la continuità della struttura e l'assenza di spigoli vivi, elimina i punti di concentrazione delle tensioni, permettendo una distribuzione omogenea del carico e quindi una deformazione graduale e controllata a compressione.

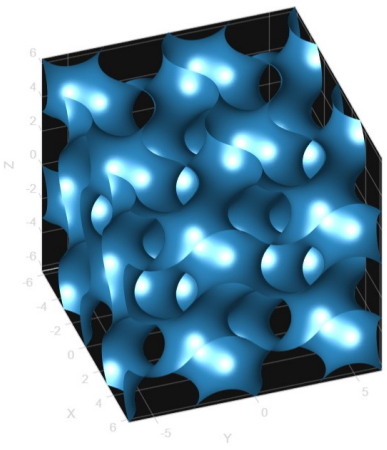


Figura 5: Rappresentazione di una superficie a giroide

Immagine generata dell'autore tramite MATLAB

2.3 Modelli analitici per strutture cellulari: la legge di Gibson-Ashby

La legge di Gibson-Ashby permette di conoscere le proprietà delle strutture cellulari e reticolari. I due parametri più importanti sono la densità relativa ρ e il modulo di Young E.

Le formule tipiche del modello sono indicate di seguito:

Tabella 1: Formule del modello Gibson-Ashby

Tipo di risposta	Proprietà meccanica	Formula	Numero dell'equazione
A flessione dominata	Modulo (E)	$\frac{E_{eq}}{E_s} = C(\frac{\rho}{\rho_s})^2$	(3)
	Forza (σ)	$\frac{\sigma^*}{\sigma_{y,s}} = C(\frac{\rho}{\rho_s})^{\frac{3}{2}}$	(4)
A trazione /compressione dominata	Modulo (E)	$\frac{E_{eq}}{E_s} = C\left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)$	(5)
	Forza (σ)	$\frac{\sigma^*}{\sigma_{y,s}} = C(\frac{\rho}{\rho_s})$	(6)

- E_{eq}: il modulo della struttura cellulare
- E_s: il modulo del materiale che costituisce la struttura cellulare
- C: costante di Gibson-Ashby, dipende dalla topologia e dalla geometria della cella unitaria
- σ^*: tensione sul materiale cellulare
- $\sigma_{y,s}$: tensione di snervamento del materiale che costituisce la struttura cellulare

Numerosi studi hanno dimostrato che i risultati sperimentali rispettano le previsione del modello. Sono, però, emerse alcune discrepanze dovute a fattori come: tensioni residue dovute alla stampaggio e densità sovrastimata a causa di residui di materiale che rimangono attaccati alla struttura senza però contribuire alle proprietà meccaniche.

Quindi, il modello di Gibson-Ashby mette in relazione il modulo E di una struttura cellulare con la densità relativa attraverso una relazione del tipo:

$$y = C \cdot x^n \tag{7}$$

Dove n è un numero positivo ($n > 0$, generalmente compreso tra 1 e 2). La formula completa e generalizzata è:

$$\frac{E_{eq}}{E_s} = C(\frac{\rho}{\rho_s})^n \tag{8}$$

Si può affermare che all'aumentare della densità della struttura, il modulo aumenta e viceversa. Il modo in cui la rigidezza crolla dipende dal valore di n. Il coefficiente C è un valore adimensionale e solitamente assume valore compreso tra 0.1 e 1.0. I due termini n e C possono essere ricavati da risultati sperimentali e questo è quello che è stato fatto in questo studio.

2.4 Il concetto di valle di impedenza nell'attenuazione degli urti

L'obiettivo di questo studio è ottimizzare i sistemi di protezione contro carichi impulsivi, in particolare minimizzando la tensione trasmessa al soggetto o componente da proteggere. Da una analisi analitica emerge che la tensione trasmessa σ_T è legata all'impedenza Z del materiale:

$$\sigma_T = \sigma_I \cdot \prod T \ . \tag{9}$$

Dove il termine T è espresso come:

$$T_{k\to k+1} = \frac{2Z_{k+1}}{Z_k + Z_{k+1}} \tag{10}$$

con k lo strato di materiale considerato (nel caso in cui si ipotizzi un caso discretizzato). Di conseguenza, si può dedurre che, progettando la distribuzione dell'impedenza è possibile modulare la tensione σ_T. Esistono numerose tecniche per gestire la variazione dell'impedenza sfruttando il concetto di gradiente. Si individuano strutture a gradiente discrete e continue. Le prime sono formate da più strati caratterizzati da diverse impedenze che vengono disposti uno vicino all'altro. Solitamente per limitare la σ_T vengono disposti in ordine decrescente. Infatti, valgono le seguenti formule:

$$T = \frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{11}$$

$$R = \frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\ . \tag{12}$$

Dove T è il coefficiente di trasmissione mentre R è il coefficiente di riflessione. Osservando (11), poichè $Z_2 < Z_1$, il numeratore è minore del denominatore e di conseguenza $\sigma_T < \sigma_I$. Ad ogni strato che l'onda attraversa, σ_T diminuisce. Per quanto riguarda l'onda riflessa (12), il termine al numeratore è negativo e quindi l'onda di compressione diventa di trazione. Questa disposizione a strati, però, non permette di ottenere la distribuzione di energia desiderata.

Oltre alle strutture a gradiente discreto – caratterizzate dalla sovrapposizione di distinti strati adiacenti, ciascuno con un valore di impedenza costante e stabilito – sono utilizzate anche le strutture a gradiente continuo. In questa seconda tipologia, la variazione dell'impedenza non segue dei gradini, bensì varia con continuità nella direzione lungo la quale si propaga l'onda. Questa differenza, però, non è sufficiente a risolvere il problema

individuato. Per evitare che il massimo valore di densità di energia di deformazione *e* sia prossimo al lato da proteggere, viene creata una valle di impedenza che permette di concentrare il picco di *e* in un punto strategico sulla base dell'andamento di Z. Per fare questo viene posizionato il punto ad impedenza più bassa al centro in quanto questo permette di intrappolare una maggiore quantità di *e* all'interno del materiale, diminuendo gli effetti sulla zona protetta.

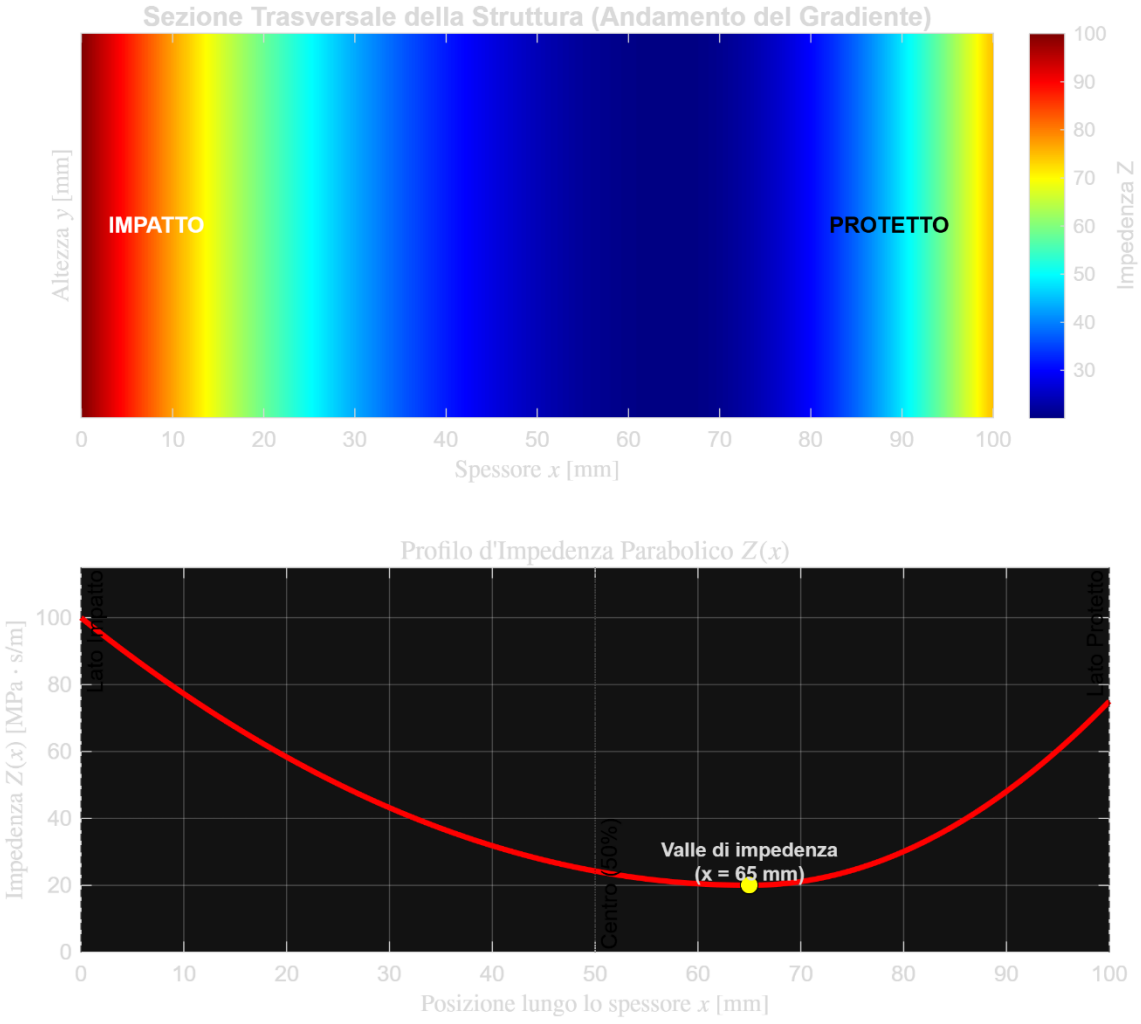


Figura 6: Profilo di impedenza continuo a valle con andamento parabolico

In alto: rappresentazione 2D del gradiente all'interno del materiale con mappa dei colori. In basso: andamento della funzione che descrive il profilo di impedenza Z(x). Immagine generata dall'autore tramite MATLAB

3. Modellazione e simulazione numerica in nTopology

3.1 Generazione geometrica del giroide a spessore variabile

L'attività di tirocinio è iniziata con la realizzazione del componente con forma di giroide nel programma nTopology. Le dimensioni utilizzate sono un'altezza di $12mm$ e raggio, del cilindro da cui è stata sviluppata la geometria, pari a $6mm$.

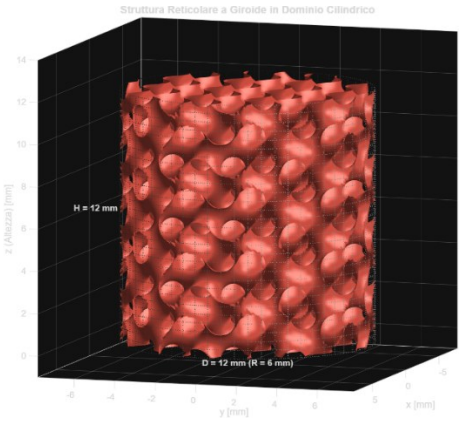


Figura 7: Struttura a giroide con dimensioni

Immagine generata dall'autore tramite MATLAB

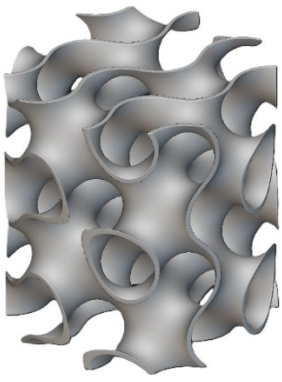


Figura 8: Struttura a giroide

Immagine realizzata dall'autore tramite nTopology

Per l'applicazione del carico e il bloccaggio della struttura sono stati inseriti due profili ad ottogano poi estrusi. Nella prima modellazione necessaria per l'estrapolazione dei dati, sono state inserite due variabili di input: lo spessore e il twist rate, la cui modifica permette di ottenere strutture con comportamento differente.

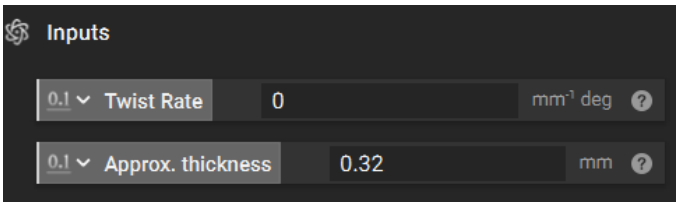


Figura 9: Variabili del codice di nTopology

Estratto del codice di nTopology che rappresenta le due variabili di progetto. Immagine realizzata dall'autore tramite nTopology.

Sono stati successivamente definiti gli intervalli entro cui far variare i due parametri: il twist rate $\tau \in [0°; 20°]$ e la densità relativa $\bar{\rho} \in [0{,}05; 0{,}20]$. In questa prima fase i valori variano solo tra diverse simulazioni, nella stessa sono costanti.

Questo è in contrasto con il concetto di valle di impedenza ma è un passaggio necessario per ottenere una legge in grado di descrivere il fenomeno fisico-meccanico della deformazione.

In un secondo momento sono stati realizzati anche dei modelli che tengono conto di un profilo variabile di densità e twist rate. Per la realizzazione di quest'ultimi è stata usata la struttura rappresentata nell'immagine successiva.

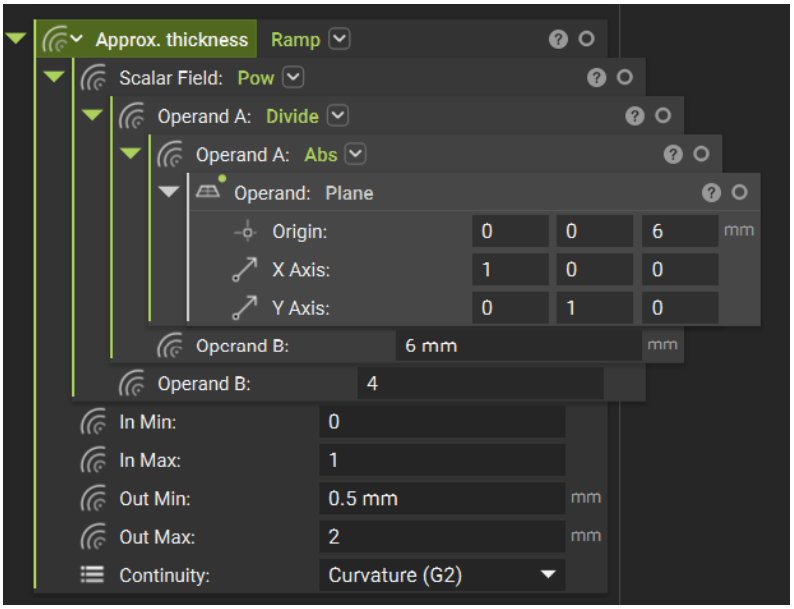


Figura 10: Codice di un campo scalare

Estratto di codice che permette la realizzazione di un campo scalare in modo da avere una variazione con andamento parabolico dei valori. In questo caso è riferito alla densità. Immagine realizzata dall'autore tramite nTopology.

Il singolo valore scalare è stato sostituito da un campo scalare per permettere un gradiente continuo dei valori. Considerando il caso in figura che fa riferimento ad un profilo variabile dell'impedenza si può osservare che per la regolazione dello spessore del materiale è stato inserito un campo scalare basato sulla distanza assoluta da un piano posizionato alla quota $Z = 6mm$. La distanza è stata adimensionalizzata ed è stata elevata ad una potenza per conferire l'andamento parabolico (in foto, di quarto grado). Attraverso il blocco $Ramp$ con continuità di curvatura $G2$, il campo scalare restituisce uno spessore che va da un valore minimo di $0.5mm$ nella posizione del piano di riferimento fino a un massimo di $2mm$ a distanza $\pm 6mm$ da questo. La stessa procedura è stata utilizzata per il twist rate. Combinando gli effetti e le rappresentazioni dei due casi si ottiene una struttura che varia lungo Z entrambi i parametri.

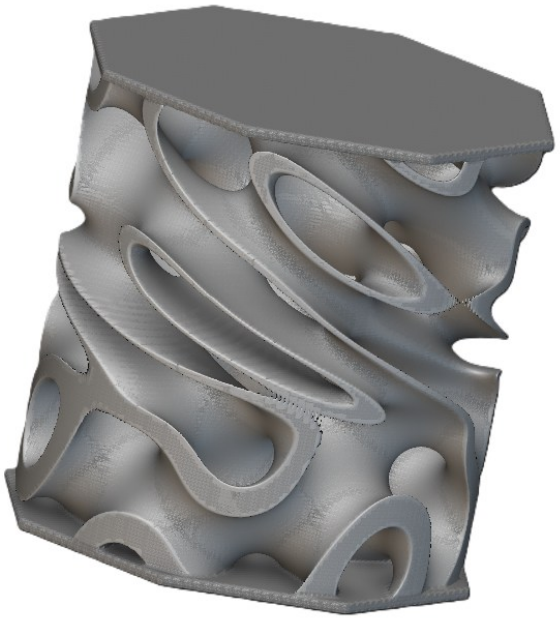


Figura 11: Giroide con parametri variabili

Immagine che mostra come in prossimità dei due estremi il materiale presenta uno spessore e quindi una densità maggiore. Si nota come la parte centrale risulta molto più deformata rispetto alla restante, questo è l'effetto prodotto dalla variazione del twist rate. Immagine generata dall'autore tramite nTopology.

3.2 Definizione del setup di simulazione e applicazione del carico distribuito lungo Z

Per ottenere i valori del modulo di Young equivalente nelle varie casistiche è stata impostata una simulazione statica su nTopology. I parametri che sono stati scelti sono da considerarsi come esempio. È stato attribuito alla struttura un Modulo di Young pari a $7e + 10\ Pa$, un coefficiente di Poisson pari a 0.33 e una forza distribuita pari a $1000N$. Quest'ultima è stata applicata al blocco superiore mentre quello inferiore è stato bloccato.

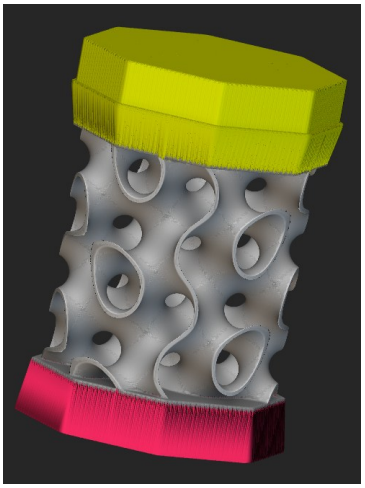


Figura 12: Forze agenti sulla struttura

Rappresentazione delle condizioni della simulazione statica. Immagine generata dall'autore mediante nTopology.

4. Analisi dei dati ed estensione della legge di Gibson-Ashby

4.1 Estrazione dei dati di displacement e calcolo del modulo equivalente in Excel

Una volta impostata la simulazione statica e scelti i valori delle variabili $\bar{\rho}$ e τ è possibile ricavare i dati necessari, in particolare nel blocco laterale $Static\ Analysis$, impostando $Displacement \rightarrow Directional \rightarrow Z$ si ottengono i valori degli spostamenti delle parti della struttura. Dopo aver spuntato la casella Min/Max compaiono nella struttura i due valori. Per il seguente studio si riportano i Min in un foglio Excel.

Tabella 2: Risultati delle simulazioni statiche eseguite su nTopology per le varie configurazioni

Twist rate	**Approx thickness**	**Divide**	**Densità**	**Spostamento ottenuto (mm)**	$\boldsymbol{E_{eq}(Mpa)}$
0	0,16	0,05	5%	0,236774	448,12
0	0,32	0,1	10%	0,138924	763,75
0	0,64	0,2	20%	0,0863485	1228,78
5	0,16	0,05	5%	0,308161	344,31
5	0,32	0,1	10%	0,151912	698,45
5	0,64	0,2	20%	0,0871466	1217,53
10	0,16	0,05	5%	0,51594	205,65

Twist rate	Approx thickness	Divide	Densità	Spostamento ottenuto (mm)	$E_{eq}(Mpa)$
10	0,32	0,1	10%	0,231599	458,13
10	0,64	0,2	20%	0,119073	891,08
15	0,16	0,05	5%	0,839723	126,36
15	0,32	0,1	10%	0,298284	355,71
15	0,64	0,2	20%	0,12522	847,34
20	0,16	0,05	5%	1,55058	68,43
20	0,32	0,1	10%	0,398463	266,28
20	0,64	0,2	20%	0,154695	685,89

A partire da questi valori, si calcola il modulo di Young equivalente della struttura riferito ad un determinato valore di $\bar{\rho}$ e τ, attraverso la seguente formula:

$$E_{eq} = \frac{F \cdot L_0}{A_0 \cdot \Delta L} \tag{13}$$

dove:

- F (Carico applicato): è la forza totale di compressione applicata sulla faccia superiore del reticolo;
- L_0 (Lunghezza iniziale): è l'altezza nominale, non deformata, del componente lungo l'asse Z;
- A_0 (Area trasversale nominale): è l'area della sezione di base;
- ΔL (Spostamento verticale): è il valore del cedimento lungo l'asse Z.

Il valore in questa trattazione è di $1000N$ per la F, $12mm$ per L_0, $\approx 113{,}0973mm^2$ per A_0. Dalla $Tabella\ 2$ si possono ricavare due grafici importanti per comprendere il legame tra le grandezze.

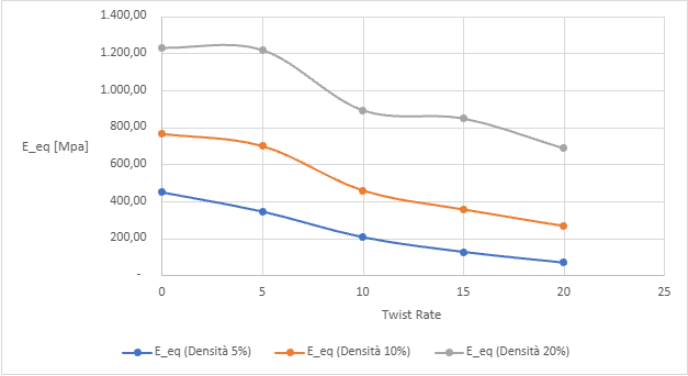


Figura 13: Grafico sull'andamento di E_{eq} al variare del Twist rate e della densità relativa

Osservando questo primo grafico si può notare come, all'aumentare del Twist rate, il modulo di Young equivalente tende a diminuire (quindi la struttura diventa più flessibile e meno rigida). Si può anche vedere che la curva a densità 20% si trova molto più in alto di quella a 5% e 10%, questo indica l'importanza dello spessore della struttura.

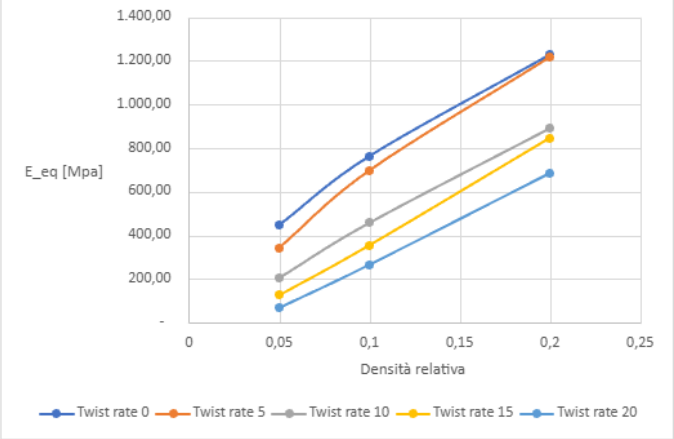


Figura 14: Grafico sull'influenza della densità relativa sul modulo di Young equivalente

In questo secondo grafico emerge che all'aumentare della densità relativa il modulo E_{eq} cresce per qualsiasi Twist rate.

4.2 Formulazione estesa della legge di Gibson-Ashby

Per descrivere la risposta meccanica equivalente del metamateriale giroide al variare sia della densità relativa $\bar{\rho}$, sia del twist rate τ, è stata sviluppata una legge fenomenologica basata sull'estensione di Gibson-Ashby. Il processo si basa su quattro fasi e parte dalla generica equazione:

$$E_{eq} = E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}^n \tag{14}$$

Fase 1: Isolamento del comportamento base ($\boldsymbol{\tau = 0°}$)

In questa prima fase si considera il caso in cui $\tau = 0°$, il modulo di Young può essere espresso, ponendo $E_s \cdot C = C_0$, come:

$$E_{eq}(\bar{\rho}, 0) = C_0 \cdot \bar{\rho}^n \,. \tag{15}$$

Passando ai logaritrmi naturali, la relazione diventa un'equazione lineare:

$$ln\left(E_{eq}(\bar{\rho}, 0)\right) = ln(C_0) + n \cdot l\, n(\bar{\rho}) \tag{16}$$

Con Excel, usando le funzioni di una retta applicate ai dati ottenuti con le simulazioni di nTop, si ricava $n = 0{,}7276$ e la costante $C_0 = 4001{,}62\ Mpa$.

Fase 2: Definizione del fattore di attenuazione $\boldsymbol{k(\tau)}$

Alla formula classica viene aggiunto un termine $k(\tau)$ e di conseguenza si ottiene:

$$E_{eq} = E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}^n \cdot k(\tau) \tag{17}$$

dove $k(\tau)$ è una percentuale di rigidezza residua, ovvero un numero adimensionale compreso tra 0 e 1. Quando il giroide è indeformato ($\tau = 0°$), ha la sua rigidezza massima $E_{eq}(\bar{\rho}, 0)$. Quando viene ruotato di un angolo τ, la rigidezza scende a $E_{eq}(\bar{\rho}, \tau)$. Quindi, $k(\tau)$ è il rapporto diretto tra i due valori messi a confronto:

$$k(\bar{\rho}, \tau) = \frac{E_{eq}(\bar{\rho}, \tau)}{E_{eq}(\bar{\rho}, 0)} \tag{18}$$

- se $\tau = 0° \rightarrow k = 1$ (struttura integra al 100%);
- se $\tau > 0° \rightarrow k < 1$ (la rigidezza cala all'aumentare della torsione, ciò è in accordo con i grafici realizzati su Excel).

Quindi, per introdurre l'effetto del twist rate, è stato introdotto un termine correttivo del tipo

$$k(\tau) = e^{-A(\bar{\rho})\tau^{B(\bar{\rho})}} \tag{19}$$

Questa forma è stata scelta poiché:

1. garantisce che se $\tau = 0$ si riottiene la legge di Gibson-Ashby ($k(0) = 1$) e che il modulo di Young rimanga sempre positivo;
2. A serve per rappresentare l'importanza dello spessore delle pareti. Più le pareti sono sottili, più A è grande e quindi la rigidezza aumenta;
3. B serve ad accrescere o diminuire l'effetto del twist rate quando questo varia.

Fase 3: doppia linearizzazione logaritmica per l'estrazione dei parametri *A* e *B*

La determinazione dei due parametri A e B ha richiesto numerose prove affinché il modello finale fosse in grado di approssimare in maniera accettabile i risultati. In pratica

si è considerato efficace al raggiungimento di un errore medio pari al $6 \div 8\%$. Per arrivare a ciò si applica una doppia trasformazione logaritmica alla funzione

$$k(\bar{\rho}, \tau) = exp\left(-A(\bar{\rho}) \cdot \tau^{B(\bar{\rho})}\right) . \quad (20)$$

Si ottiene prima:

$$ln(k) = -A(\bar{\rho}) \cdot \tau^{B(\bar{\rho})} \quad (21)$$

e poi:

$$ln(-ln(k)) = ln\left(A(\bar{\rho}) \cdot \tau^{B(\bar{\rho})}\right) . \quad (22)$$

Riordinando i termini:

$$ln(-ln(k)) = B(\bar{\rho}) \cdot ln(\tau) + ln\left(A(\bar{\rho})\right) . \quad (23)$$

Da questa equazione si ricavano X, Y, m e q.

Plottando i punti (X, Y) ricavati dai dati di simulazione per ogni valore di densità ($\bar{\rho} \in \{0{,}05;\ 0{,}10; 0{,}20\}$), la regressione lineare permette di estrarre i valori per $A(\bar{\rho})$ e $B(\bar{\rho})$. Di seguito una piccola tabella con i valori dei due parametri alle diverse densità.

Tabella 3: Valori di A e B ai diversi valori di densità, dopo le operazioni di linearizzazione

Parametro / Densità	A	B
0,05	0,04188316	1,265923008
0,10	0,046298378	1,040419511
0,20	0,045304501	0,82667069

Riguardo l'ottenimento di questi valori va fatta una precisazione in quanto $A(\bar{\rho})$ e $B(\bar{\rho})$ sono stati ricavati sull'intervallo di torsione $\tau \epsilon [10,20]\ deg/mm$. Il punto a $\tau = 5°$ è stato escluso per garantire il miglior modello di approssimazione e quindi ridurre l'errore medio.

Dall'analisi della $Tabella$ 3 sono stati ricavati due grafici dai quali si ottiene l'equazione che ne descrive la variazione.

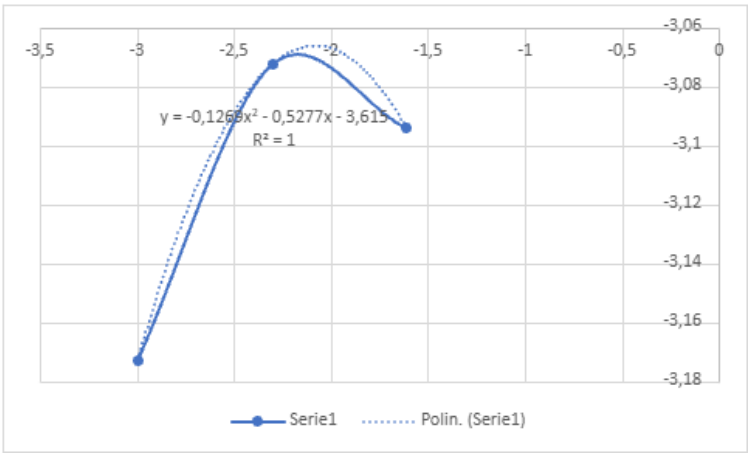


Figura 15: Grafico $A(\bar{\rho})$

Rappresentazione sul piano cartesiano. Nell'asse delle ascisse $\ln(\bar{\rho})$, mentre nell'asse delle ordinate ln(A). Immagine realizzata dall'autore mediante Excel.

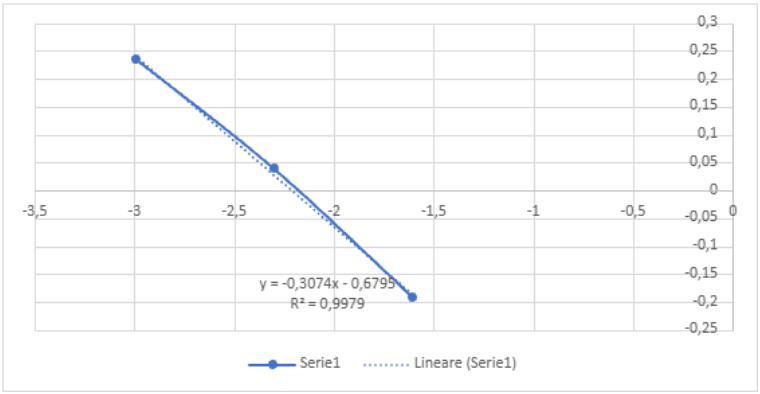


Figura 16: Grafico $B(\bar{\rho})$

Rappresentazione sul piano cartesiano. Nell'asse delle ascisse $\ln(\bar{\rho})$, mentre nell'asse delle ordinate ln(B). Immagine realizzata dall'autore mediante Excel.

Visto l'andamento dei grafici si è stabilito che per quanto riguarda il parametro $A(\bar{\rho})$ i valori calcolati risultano quasi costanti al variare della densità. È stato, quindi, adottato un valore medio costante $A_{medio} = 0{,}044495$. $B(\bar{\rho})$, invece, dipende della densità secondo la relazione:

$$ln(B) = -0{,}3074 \cdot ln(\bar{\rho}) - 0{,}6795 \tag{24}$$

da cui si ricava:

$$B(\bar{\rho}) = e^{-0{,}6795} \cdot \bar{\rho}^{-0{,}3073} . \tag{25}$$

Unendo (19), (25) e $A(\bar{\rho}) = cost = 0{,}044495$ si ottiene:

$$k(\tau) = \exp\left(-0{,}044495\tau^{0{,}5068 \cdot \bar{\rho}^{-0{,}3073}}\right) . \tag{26}$$

Riportando nella formulazione estesa di Gibson-Ashby si ha:

$$E_{eq}(\bar{\rho}, \tau) = 4001{,}62 \cdot \bar{\rho}^{0{,}7276} \cdot exp\left(-0{,}0445 \cdot \tau^{0{,}5068 \cdot \bar{\rho}^{-0{,}3073}}\right) \tag{27}$$

dove sono stati sostituiti anche i valori per n e C_0.

Si sottolinea che a seconda delle approssimazioni considerate per i vari termini i valori dei coefficienti riportati nella formula (27) possono variare, cambiando anche l'errore medio.

4.3 Analisi tridimensionale della superficie di $E_{eq}(\bar{\rho}, \tau)$

Di seguito è riportata la rappresentazione 3D della funzione $E_{eq}(\bar{\rho}, \tau)$ al variare dei due parametri $\bar{\rho}$ e τ, dalla quale si possono effettuare importanti considerazioni.

- Ruolo della densità relativa $\bar{\rho}$: l'incremento della densità relativa produce un aumento monotonicamente crescente della rigidezza, rispettando il modello di Gibson-Ashby. In particolare la zona dove E_{eq} assume il massimo valore (colorata in rosso) è riferita a $\bar{\rho} = 0{,}20$ in assenza di torsione ($\tau = 0°$).
- Ruolo del twist rate τ: l'incremento del twist rate produce una riduzione della rigidezza.
- Legame tra $\bar{\rho}$ e τ: il grafico mostra come l'importanza della torsione varia con la densità, si possono riportare due diversi comportamenti. Quando il materiale ha pareti sottili ($\bar{\rho} = 0{,}05$) il modulo equivalente passa da circa $450\ MPa$ per $\tau = 0°$ a circa $70 MPa$ per $\tau = 20°$, con una riduzione percentuale di oltre l'84%. Se, invece, il componente ha pareti spesse ($\bar{\rho} = 0{,}20$) allora la struttura mantiene una maggiore resistenza anche in corrispondenza della massima torsione, passando da circa $1220\ MPa$ a $650\ MPa$ (riduzione percentuale del 47%).

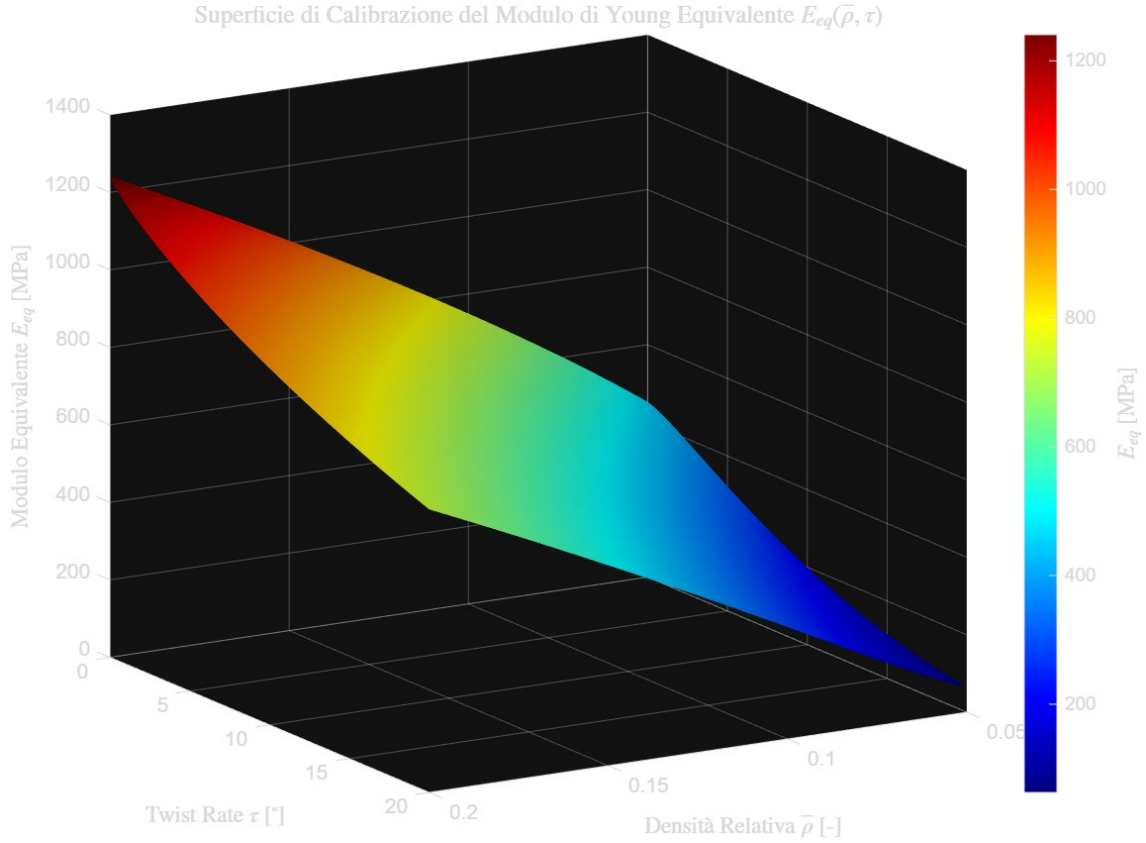


Figura 17: Andamento di $E_{eq}(\bar{\rho}, \tau)$ al variare dei due parametri

Immagine realizzata dall'autore tramite MATLAB

5. Meccanica delle onde, risposta energetica e ottimizzazione del profilo di impedenza

5.1 Formulazione dell'impedenza e della densità di energia di deformazione

Quando si parla di materiali cellulari, l'impedenza Z indica la capacità della struttura di trasmettere e riflettere le onde di sollecitazione. Nel caso trattato in questo studio si considera un mezzo continuo con gradiente di proprietà e perciò l'impedenza Z è espressa come:

$$Z(z) = \sqrt{\rho_{eq}(z) \cdot E_{eq}(z)} = \rho_{eq}(z) \cdot c_p(z) \tag{28}$$

dove z è l'asse lungo il quale si sviluppa il giroide, $\rho_{eq}(z)$ è la densità della struttura porosa e $c_p(z)$ è la velocità di propagazione dell'onda nella cella.

Per poter comprendere a pieno i concetti inerenti alla densità, occorre distinguere tre grandezze differenti:

1. Densità del materiale pieno (ρ_s): è la densità del materiale con cui è stato realizzato il componente poroso (ad esempio dell'alluminio).
2. Densità della struttura porosa (ρ_{eq}): è la densità globale della struttura porosa. Considerando lo stesso materiale ρ_s, l'utilizzo di pareti più sottili riduce la massa e quindi la densità ρ_{eq}.
3. Densità relativa ($\bar{\rho}$): è un parametro adimensionale che indica la frazione di volume occupata dal materiale solido.

Di seguito un breve esempio pratico per comprendere le definizioni.

Si consideri un materiale pieno di partenza con densità $\rho_s = 1200\ kg/m^3$:

- con $\bar{\rho} = 0{,}05$ (5% solido e 95% vuoto), la densità $\rho_{eq} = 0{,}05 \cdot 1200 = 60\ kg/m^3$.
- con $\bar{\rho} = 0{,}20$ (20% solido e 80% vuoto), la densità $\rho_{eq} = 0{,}20 \cdot 1200 = 240\ kg/m^3$.

La relazione che lega le tre grandezze è:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_{eq}}{\rho_s}\ . \tag{29}$$

In riferimento alla densità di energia di deformazione si può affermare che questa rappresenta l'energia immagazzinata dal materiale per unità di volume. Nel caso di questo studio, il carico applicato è monodirezionale e quindi si può scrivere:

$$e(z) = \frac{1}{2} E_{eq}(z,\tau) \cdot \varepsilon(z)^2 = \frac{\sigma(z)^2}{2E_{eq}(z,\tau)} \tag{30}$$

Dove $\sigma(z)$ è lo sforzo trasmesso e $\varepsilon(z)$ è la deformazione locale ($\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E_{eq}(z,\tau)}$).

In entrambe le formule (28) e (30) è presente il modulo equivalente, questo permette di affermare che le zone con E_{eq} ridotto, solitamente caratterizzate da bassi valori di densità ed elevati valori di twist rate, subiscono importanti deformazioni $\varepsilon(z)$ e quindi accumulano grandi quantità di $e(z)$. Questa è la prova analitica dell'utilità di progettare strutture con gradiente di proprietà: posso ottimizzare la distribuzione di $e(z)$ a seconda dei vincoli di progetto.

Per conoscere l'andamento effettivo di $Z(z)$ e $e(z)$ è sufficiente riportare in (28) e (30), l'espressione (27).

5.2 Trasmissione e riflessione della tensione all'interfaccia

Per comprendere meglio il fenomeno dell'attenuazione dell'onda trasmessa al soggetto/componente da proteggere si fa riferimento ai concetti base della trasmissione e riflessione delle onde in un materiale. Si consideri, quindi, un materiale lineare all'interno del quale l'impulso che si propaga incontra un'interfaccia. Come conseguenza al cambio di impedenza tra la sezione k e la sezione k+1 si ha la formazione di un'onda riflessa e una trasmessa nel rispetto di due condizioni fisiche. La prima è l'equilibrio delle forze, per cui:

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T \tag{31}$$

A questa si aggiunge la continuità delle velocità delle particelle:

$$v_I + v_R = v_T \, . \tag{32}$$

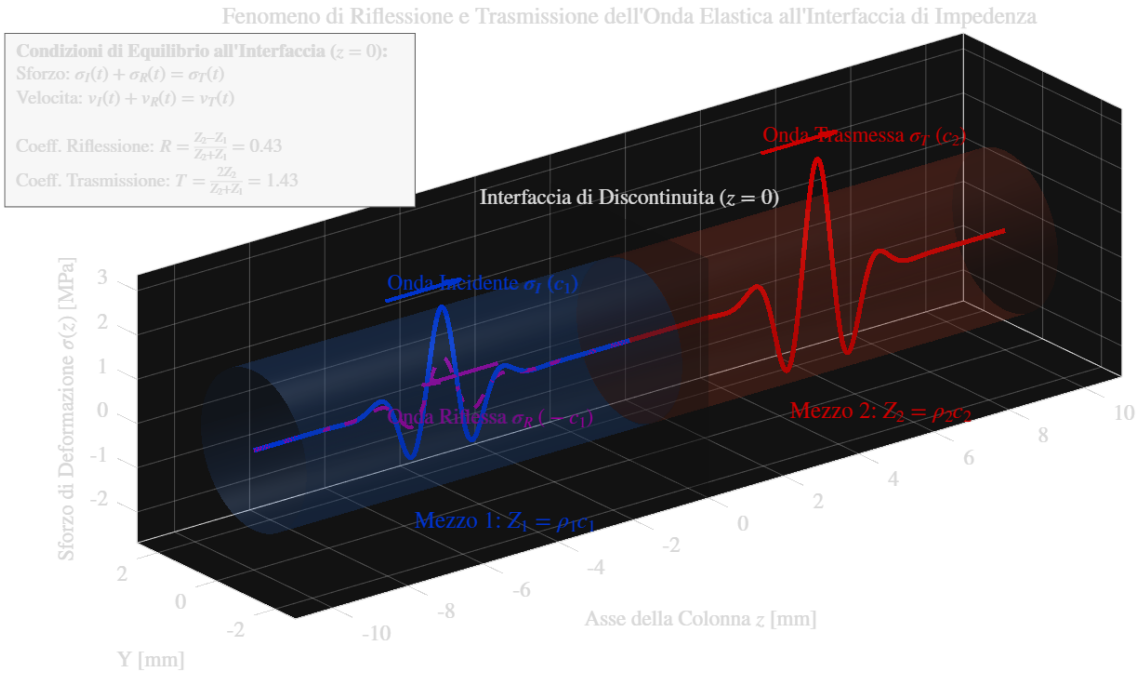


Figura 18: Propagazione di un'onda tra due materiali

Immagine realizzata dall'autore mediante MATLAB

Le velocità possono essere espresse come rapporto tra la tensione e il prodotto di densità e velocità di propagazione dell'onda nel materiale:

$$v_I = \frac{\sigma_I}{\rho_1 C_1} \qquad v_T = \frac{\sigma_T}{\rho_2 C_2} \qquad v_R = \frac{-\sigma_R}{\rho_1 C_1} \tag{33}$$

Combinando le precedenti equazioni si ottengono

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2\rho_2 C_2}{\rho_2 C_2 + \rho_1 C_1} \tag{34}$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{\rho_2 C_2 - \rho_1 C_1}{\rho_2 C_2 + \rho_1 C_1} \tag{35}$$

che mostrano come l'impedenza influenza direttamente il segno e il valore delle tensioni. Nella figura (18) è riportato un esempio numerico con $Z_1 = 100\ MPa \cdot s/m$ e $Z_2 = 250\ MPa \cdot s/m$.

5.3 Spostamento del picco per ragioni progettuali

Adesso che sono chiari i meccanismi delle grandezze presenti nello studio, si può capire come ottimizzare il progetto agendo sulla forma della valle di impedenza. Si mantiene costante la massa totale e si cercano i due parametri: profondità e pressione della valle. Da un importante studio (Zhang et al., 2026) emerge che, per tutti i livelli di carico, la pressione di picco sul lato da proteggere diminuisce all'aumentare della valle di impedenza. Questa riduzione, però, è tanto meno evidente tanto maggiore è il carico impulsivo. Per quanto riguarda la posizione, invece, mano a mano che la valle si sposta dal lato colpito a quello protetto la pressione prima diminuisce e poi aumenta. Questo significa che esiste una posizione ottimale. Nel nostro caso è stato analizzato un profilo a

valle sia per la densità sia per il twist rate. Per quanto riguarda quest'ultimo i dati a disposizione provenienti da altri lavori sono molto limitati.

Sono stati dapprima separati i due casi:

- Caso 1: densità variabile e twist rate costante ($\tau = 0°$);
- Caso 2: twist rate variabile e densità costante.

Per semplificare la trattazione, il profilo di densità e twist rate è stato descritto da una parabola, rimandando una sua ottimizzazione ad uno studio più accurato.

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_{min} + (\bar{\rho}_{max} - \bar{\rho}_{min}) \cdot (\frac{z - z_0}{z_0})^2 \tag{36}$$

$$\tau(z) = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_{min}) \cdot (\frac{z - z_0}{z_0})^2 \tag{37}$$

5.4 Mappatura spaziale e visualizzazione grafica dei profici dinamici ed energetici

Per fornire una sintesi visiva e quantitativa delle equazioni ricavate e adattate nei pragrafi precedenti, questa sezione illustra l'andamento spaziale della densità $\bar{\rho}(z)$, del twist rate $\tau(z)$, dell'impedenza $Z(z)$, della tensione trasmessa $\sigma(z)$ e la densità di energia di deformazione $e(z)$ lungo l'asse della struttura giroidale ($z \in [0, L]$). L'implementazione della formulazione estesa di Gibson-Ashby $E_{eq}(z, \tau)$ all'interno di uno script di MATLAB ha permesso di tradurre la legge di variazione dei due parametri di controllo – la densità relativa $\bar{\rho}(z)$ e il twist rate $\tau(z)$ – nei rispettivi profili continui delle varie grandezze considerate. Questa tecnica permette di valutare visivamente l'operato e l'efficacia delle soluzioni adottate.

Di seguito vengono riportati e confrontati i diagrammi ottenuti per le diverse configurazioni. Questi evidenziano l'effetto della variazione graduale delle proprietà e la risposta della struttura in presenza di una valle di impedenza.

Per analizzare il comportamento della struttura considerando solo il gradiente di densità, si pone, inizialmente, un twist rate costante $\tau = 20°$. Nel caso riportato la densità $\bar{\rho}(z)$ varia seguendo una parabola, partendo da 0,20 (in $z = 0$), raggiungendo il minimo di 0,08 in $z = 8mm$, per poi risalire fino a 0,11. Si ribadisce che il seguente andamento non rappresenta un caso ottimizzato, ma è un esempio puramente didattico.

Come si può osservare nei diagrammi in $Figura\ 18$, le grandezze sono direttamente influenzate da questa distribuzione di massa.

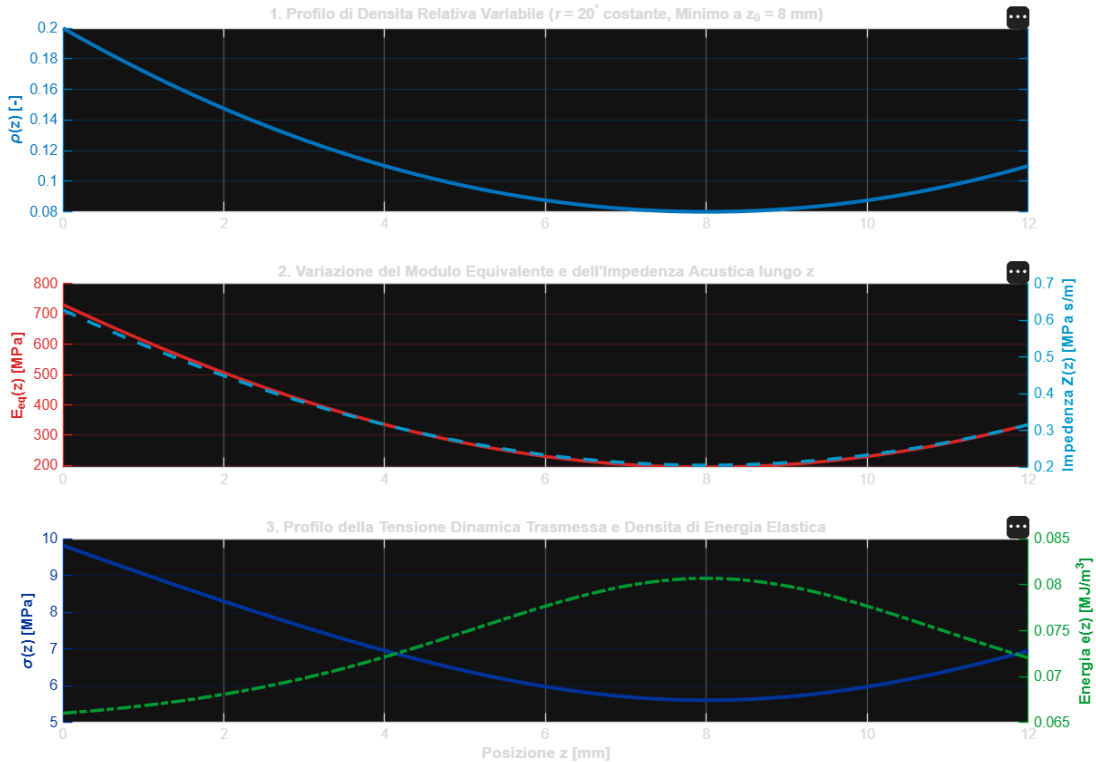


Figura 19: Rappresentazione di $\bar{\rho}(z)$, $E_{eq}(z)$, $Z(z)$, $\sigma(z)$ e e(z) con densità variabile

In alto 19(a) profilo della densità relativa $\bar{\rho}(z)$; al centro 19(b) andamento di $E_{eq}(z)$ e $Z(z)$; in basso 19(c) comportamento di $\sigma(z)$ e e(z).

Il modulo di Young equivalente $E_{eq}(z)$ rispecchia il profilo di densità. Parte da un valore di circa 730 Mpa all'ingresso e decresce fino a $z = 8mm$ assumendo un valore di 200 Mpa. Anche l'impedenza $Z(z) = \sqrt{\rho_{eq}(z) \cdot E_{eq}(z)}$ segue lo stesso andamento passando da 0,62 $MPa \cdot s/m$ a 0,22 $MPa \cdot s/m$. Per quanto riguarda la tensione tramessa $\sigma(z)$, la diminuzione dell'impedenza provoca una attenuazione della sollecitazione che varia da 9,8 MPa a 5,5 MPa (in $z = 8mm$) e risale leggermente nel tratto finale. La deformazione è tanto maggiore quanto lo è la cedevolezza della struttura, perciò $e(z)$ assume il valore massimo proprio in $z = 8mm$.

Per isolare il contributo del twist rate, si analizza il caso in cui la densità è costante ($\bar{\rho} = 0{,}12$, il valore è stato scelto in modo da mantenere la massa uguale al caso precedente) e il parametro $\tau(z)$ varia in modo parabolico partendo da 0° a $z = 0mm$ e arrivando a 20° in corrispondenza di $z = 8mm$. Nel tratto finale decresce fino a 15°.

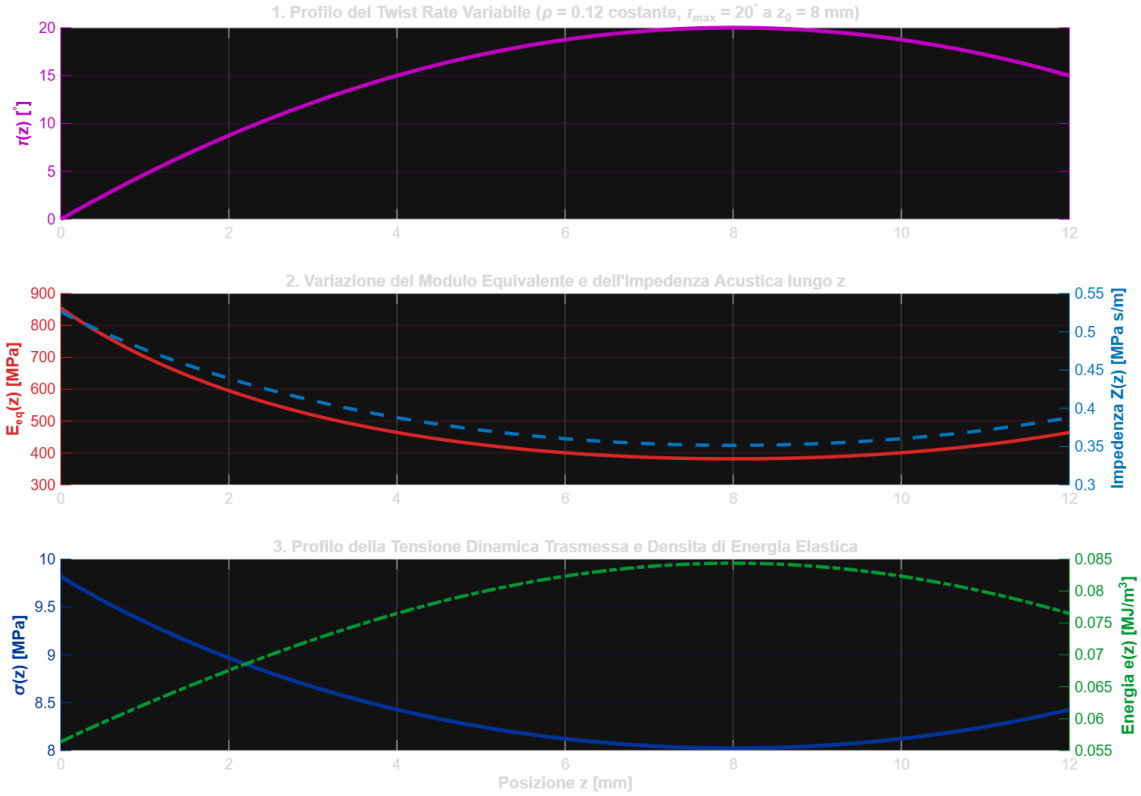


Figura 20: Rappresentazione di $\bar{\rho}(z)$, $E_{eq}(z)$, $Z(z)$, $\sigma(z)$ e e(z) con twist rate variabile

In alto 20(a) profilo del twist rate $\tau(z)$; al centro 20(b) andamento di $E_{eq}(z)$ e $Z(z)$; in basso 20(c) comportamento di $\sigma(z)$ e e(z)

Come evidenziato dai diagrammi, dato che un incremento del twist rate provoca un aumento della cedevolezza della cella che costituisce la struttura, in corrispondenza del massimo valore di torsione si ha il minimo valore di $E_{eq}(z)$. Allo stesso modo, l'impedenza parte da $0{,}53\ MPa$ per arrivare a $0{,}36\ MPa$ in $z = 8mm$. Questo dimostra che è possibile creare una "valle di impedenza" andando ad agire solamente su $\tau(z)$ e mantenendo fissa la densità. In aggiunta a ciò, questa impostazione permette anche l'abbassamento della tensione trasmessa anche se in misura minore rispetto al caso precedente. In $z = 8mm$, dove la struttura e meno resistente si ha la massima concentrazione di densità di energia di deformazione.

5.5 Considerazioni critiche sul ruolo del Twist Rate e inversione della risposta energetica

Quando, in precedenza, è stato trattato il caso a densità variabile e $\tau(z) = cost$, per quest'ultimo è stato considerato un valore pari a 20°. Tuttavia, così facendo, si sta considerando l'effetto del twist rate. Per evitare l'influenza di questo parametro si considera il caso in cui $\tau(z) = cost = 0°$.

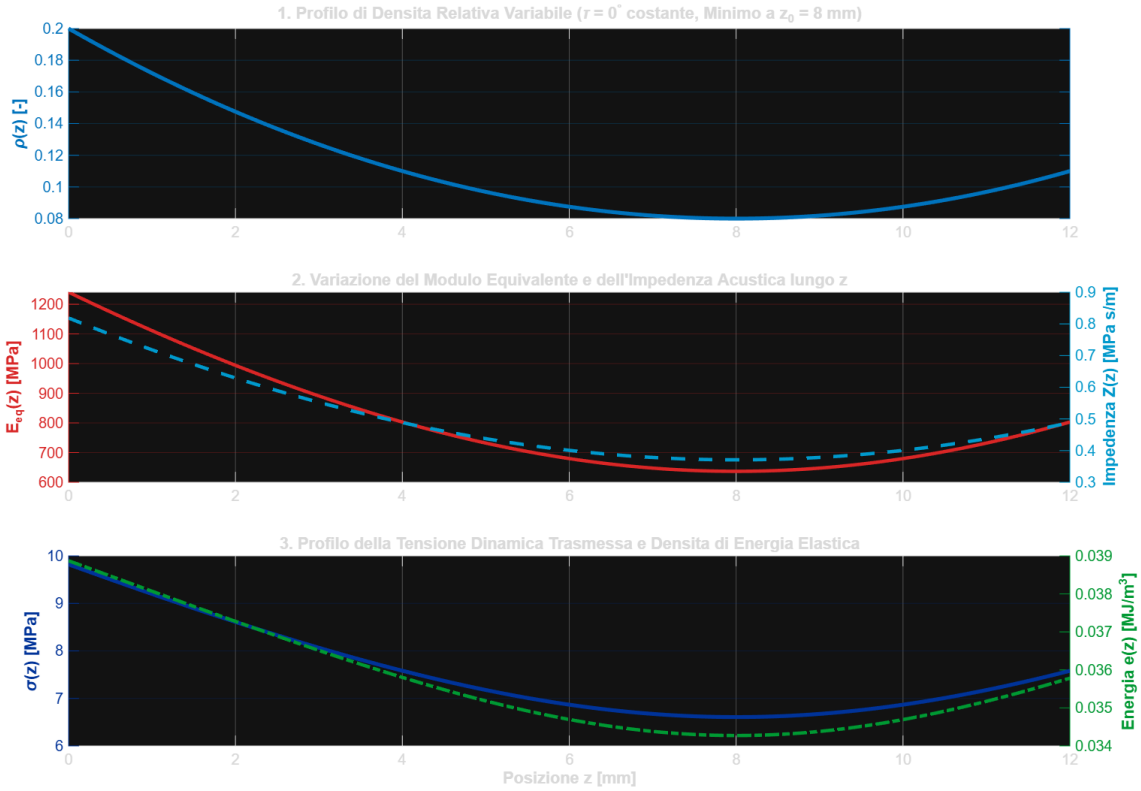


Figura 21: Rappresentazione di $\bar{\rho}(z)$, $E_{eq}(z)$, $Z(z)$, $\sigma(z)$ e e(z) con densità variabile e $\tau = 0°$

In alto 21(a) profilo della densità relativa $\bar{\rho}(z)$; al centro 21(b) andamento di $E_{eq}(z)$ e $Z(z)$; in basso 21(c) comportamento di $\sigma(z)$ e e(z).

Osservando attentamente il grafico 21(c) si può notare che non c'è più il picco di $e(z)$ e ciò non è desiderato in quanto compromette il meccanismo di assorbimento dell'energia. Questo comportamento è studiato nel dettaglio al prossimo capitolo.

6. Conclusioni e possibili sviluppi futuri

6.1 Analisi del ruolo del twist rate

In questa sezione si cerca di dare una spiegazione al fenomeno introdotto al paragrafo 5.4 Mappatura spaziale e visualizzazione grafica dei profili dinamici ed energetici.

Si consideri l'equazione $e(z) = \frac{1}{2} E_{eq}(z,\tau) \cdot \varepsilon(z)^2 = \frac{\sigma(z)^2}{2E_{eq}(z,\tau)}$ e due sezioni all'interno di un materiale che presenta un determinato andamento di $e(z)$.

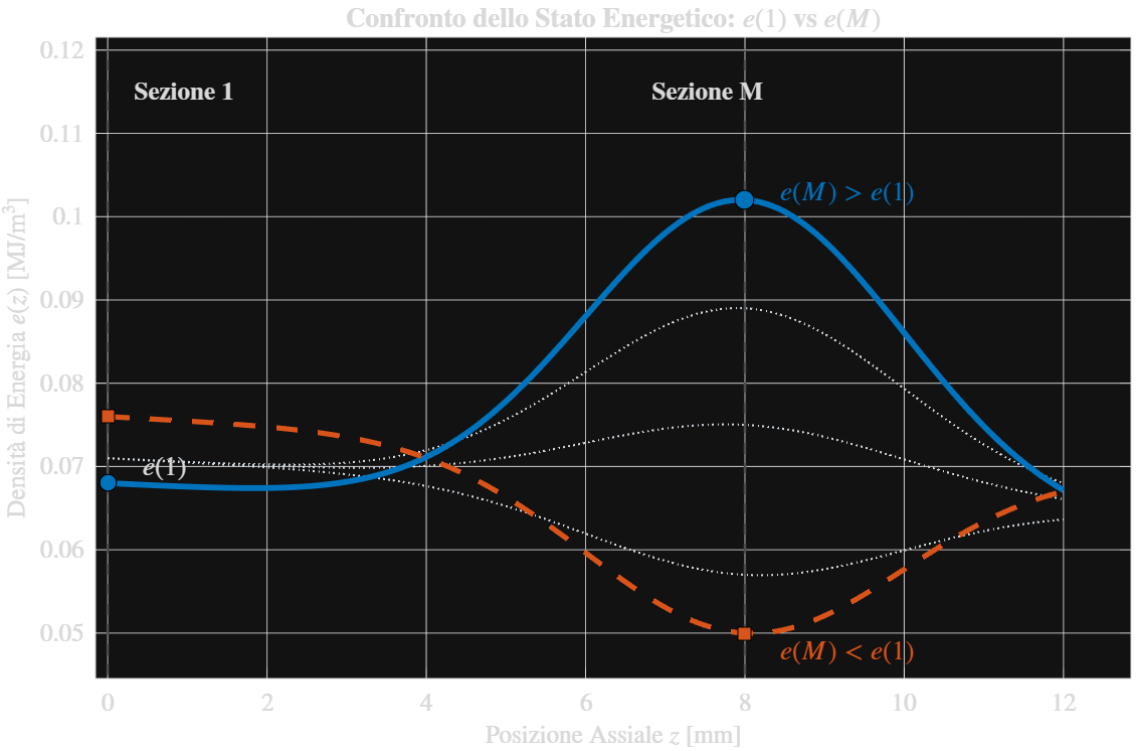


Figura 22: Profilo variabile della densità di energia di deformazione

Nelle sezioni (1) e (m) valgono le seguenti equazioni:

$$e_{(1)} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_I^2}{E_{(1)}} \qquad e_{(m)} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{T(m)}^2}{E_{(m)}} \tag{38}$$

Volendo conoscere l'andamento della densità di energia di deformazione si procede facendo il rapporto tra i due termini

$$\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_I^2}{E_{(1)}} 2 \frac{E_{(m)}}{\sigma_{T(m)}^2} = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{T(m)}^2}\frac{E_{(m)}}{E_{(1)}}$$

Sostituendo la legge estesa $E = E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}(z)^n \cdot k(\tau)$ si ricava:

$$\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{T(m)}^2}\frac{E_{(m)}}{E_{(1)}} = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{T(m)}^2}\frac{E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}_{(m)}^n \cdot k(\tau_m)}{E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}_{(1)}^n \cdot k(\tau_1)} \tag{39}$$

Nel caso considerato $\tau = cost = 0°$ quindi $\frac{k(\tau_m)}{k(\tau_1)} = 1$ e la formula si riduce a:

$$\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} = (\frac{\sigma_I}{\sigma_{T(m)}})^2 \cdot (\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}})^n \tag{40}$$

Il termine $(\frac{\sigma_I}{\sigma_{T(m)}})$ deve essere > 1 in quanto occorre attenuare la tensione che arriva al lato protetto e quindi tende a sbilanciare l'equazione verso $e_{(1)} > e_{(m)}$; $(\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}})$ dipende dall'andamento della densità. Supponendo di utilizzare il profilo a valle di impedenza, allora $\bar{\rho}_{(1)} > \bar{\rho}_{(m)}$ e il rapporto tra i due è < 1. Di conseguenza, il termine $(\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}})^n$ è strettamente legato al coefficiente n. Con $\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}} < 1$ allora:

- se $n > 1$, $(\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}})^n < \frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}}$ con la conseguente compensazione della crescita del termine delle tensioni e quindi una maggiore possibilità che $e_{(m)} > e_{(1)}$;
- se $n < 1$, $(\frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}})^n > \frac{\bar{\rho}_{(m)}}{\bar{\rho}_{(1)}}$; questo è il caso del nostro studio in quanto $n = 0{,}7276 < 1$. L'esponente non permette di contrastare la crescita del rapporto tra le tensioni e contribuisce a rendere $\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} > 1$, sancendo l'incapacità della sola densità di concentrare l'energia nella valle.

Aggiungendo la variazione del twist rate $\tau(z)$ l'ìmpedenza subisce un'ulteriore diminuzione e di conseguenza, la tensione trasmessa si riduce ulteriormente. Se si considera l'espressione (40), il rapporto $\frac{\sigma_I}{\sigma_{T(m)}}$ aumenterebbe provocando la crescita di $\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}}$. Quanto appena descritto rappresenterebbe un'anomalia rispetto a quello che si può osservare nei grafici per $\tau = 20°$ dove la densità di energia presenta un picco in corrispondenza della sezione $z = 8mm$.

Il paradosso trova soluzione nell'equazione completa che tiene conto anche del fattore torsionale $k(\tau)$:

$$\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} = \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{T(m)}^2} \frac{\bar{\rho}_{(m)}^n \cdot k(\tau_m)}{\bar{\rho}_{(1)}^n \cdot k(\tau_1)} \ . \tag{41}$$

Dal punto di vista analitico e fisico, per comprendere come l'incongruenza è risolta, occore considerare la diversa velocità di variazione tra il modulo E_{eq} e la tensione trasmessa $\sigma(z)$. Il fattore $k(\tau_m)$ comporta una riduzione diretta del modulo in m ($E_{eq,m} \propto k(\tau_m)$). D'altra parte, la tensione trasmessa $\sigma_{T(m)}$ dipende da $Z(z) = \sqrt{\rho_{eq}(z) \cdot E_{eq}(z)}$ e quindi $Z \propto \sqrt{E_{eq}}$. Questo legame determina una risposta differente delle due grandezze al variare di τ:

1. Calo notevole di E_{eq}, dato che $E_{eq} \propto k(\tau)$ allora l'aumento del twist rate produce una riduzione importante del rapporto $k(\tau_m)/k(\tau_1)$.
2. Contenuta contrazione della tensione trasmessa. Infatti, l'impedenza $Z \propto \sqrt{E_{eq}}$ e quindi $\sigma_{T(m)}$ si riduce più lentamente rispetto alla rigidezza.

In conclusione, nel bilancio del rapporto $e_1/e_{(m)}$, l'aumento del termine $(\frac{\sigma_I}{\sigma_{T(m)}})^2$ è minore rispetto alla diminuzione del rapporto $\frac{k(\tau_m)}{k(\tau_1)}$. Tutto ciò contribuisce a rendere $\frac{e_{(1)}}{e_{(m)}} < 1$.

Tale risultato è di fondamentale importanza dal punto di vista teorico e applicativo: la semplificazione delle costanti E_s e C nell'equazione (39) dimostra che questo comportamento non dipende dalle proprietà del materiale, ma è legato esclusivamente alle caratteristiche geometrico-strutturali.

Quanto appena affermato può essere confermato con una semplice analisi. Si consideri la formula di Gibson-Ashby:

$$E_{eq} = E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}^n$$

dove E_s racchiude la dipendenza dalle proprietà del materiale mentre C e n sono i parametri strutturali. Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri:

$$\ln(E_{eq}) = \ln(E_s \cdot C \cdot \bar{\rho}^n)$$

Sfruttando le proprietà dei logaritmi, il termine di destra diventa:

$$\ln(E_{eq}) = \ln(E_s) + \ln(C) + n \cdot \ln(\bar{\rho})$$

Stabilendo:

- $y = \ln(E_{eq})$ (dipende dal materiale e dalla densità)
- $x = \ln(\bar{\rho})$ (variabile geometrica)
- $q = \ln(E_s) + \ln(C)$ (dipende dal materiale)

L'equazione diventa $y(x) = q + n \cdot x$.

A partire da ciò, si suppone di mantenere la stessa geometria ($\bar{\rho}$ e architettura giroidale) ma di cambiare materiale, passando da E_{s1} a E_{s2}. Il nuovo modulo equivalente diventa $E_{eq2} = \frac{E_{s2}}{E_{s1}} \cdot E_{eq1}$.

La nuova generica coordinata y_2 sarà:

$$y_2 = \ln(E_{eq2}) = \ln\left(\frac{E_{s2}}{E_{s1}} \cdot E_{eq1}\right) = \ln(E_{eq1}) + \ln\left(\frac{E_{s2}}{E_{s1}}\right) = y_1 + \Delta q$$

Di conseguenza, tutti i valori y vengono aumentati della stessa quantità, sul grafico la retta trasla senza ruotare. Per verificare quest'ultima affermazione si considera n come la derivate di y rispetto a x.

$$n = \frac{d\ln(E_{eq})}{d\ln(\bar{\rho})} \tag{41}$$

Sostituendo l'espressione di $\ln(E_{eq})$:

$$n = \frac{d}{d\ln(\bar{\rho})}[\ln(E_s) + \ln(C) + n \cdot \ln(\bar{\rho})]$$

Separando i termini:

$$n = \frac{d\ \ln(E_s)}{d\ln(\bar{\rho})} + \frac{d\ \ln(C)}{d\ln(\bar{\rho})} + \frac{d\ (n \cdot \ln(\bar{\rho}))}{d\ln(\bar{\rho})}$$

I primi due addendi sono nulli in quanto E_s e C_0 sono entrambe delle costanti. L'ultimo, invece:

$$\frac{d\ (n \cdot \ln(\bar{\rho}))}{d\ln(\bar{\rho})} = n \cdot \frac{d\ \ln(\bar{\rho})}{d\ln(\bar{\rho})} = n \cdot 1 = n$$

Anche in questo caso, se E_s varia, n rimane lo stesso.

L'ipotesi per cui l'andamento dell'energia non dipende dal materiale è confermata.

6.2 Sviluppi futuri

L'obiettivo principale dello studio di materiali cellulari porosi è la creazione di un modello che permette di ottenere una struttura ottimale per ogni applicazione. Sfruttare appieno questa tecnologia implica saper progettare elementi di cui si possono descrivere con precisione tutte le caratteristiche (Farber et al.,2025).

In quest'ottica, la validazione sperimentale delle evidenze teoriche ottenute sarà il conseguente proseguimento del lavoro svolto. L'applicazione pratica prevederà la fabbricazione di provini giroidali a densità e twist rate variabile utilizzando tecniche di stampa 3D per effettuare prove di caratterizzazione meccanica e valutare le conseguenze di un impatto dinamico. Nello specifico, attraverso tali test, sarà possibile osservare l'effettivo contenimento dell'onda di pressione nella sezione protetta al fine di validare il modello teorico formulato sull'indipendenza del meccanismo dal materiale solido impiegato.

7. Bibliografia

Ashby, M. F. (2006), "The properties of foams and lattices", *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 364, pp. 15–30. https://doi.org/10.1098/rsta.2005.1678

Farber, E. M., Seraphim, N. M., Tamakuwala, K., Stein, A., Rücker, M., e Eisenberg, D. (2025), "Porous materials: The next frontier in energy technologies", *Science*, vol. 390, art. eadn9391. https://doi.org/10.1126/science.adn9391

Fleck, N. A., Deshpande, V. S., e Ashby, M. F. (2010), "Micro-architectured materials: past, present and future", *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 466, pp. 2495–2516. https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0215

Gibson, L. J., e Ashby, M. F. (1997), *Cellular solids: structure and properties* (2ª ed.), Cambridge University Press.

Kadic, M., Milton, G. W., van Hecke, M., e Wegener, M. (2019), "3D metamaterials", *Nature Reviews Physics*, vol. 1, n. 3, pp. 198–210. https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y

Lu, G., e Yu, T. (2003), *Energy absorption of structures and materials*, Woodhead Publishing / CRC Press.

Schaedler, T. A., e Carter, W. B. (2016), "Architected Cellular Materials", *Annual Review of Materials Research*, vol. 46, pp. 383–410. https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-070115-031624