



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI ECONOMIA "GIORGIO FUÀ"

Corso di Laurea Magistrale o Specialistica in Data Science per l'Economia e le imprese

**Instabilità nella correlazione fra azioni e
obbligazioni. Un'analisi statistica del modello
Molenaar-Sénéchal-Swinkels-Wang**

**Instability in the Correlation Between Stocks
and Bonds: A Statistical Analysis of the
Molenaar-Sénéchal-Swinkels-Wang Model**

Relatore: Chiar.mo
Prof. Valerio Sullo

Tesi di Laurea di:
Santiago Cingolani

Anno Accademico 2025– 2026

Indice

ELENCO DELLE FIGURE	3
ELENCO DELLE TABELLE	4
INTRODUZIONE.....	5
1. REVIEW DELLA LETTERATURA.....	9
2. DATASET.....	12
2.1 raccolta dati.....	12
2.2 analisi esplorativa variabili empiriche.....	17
2.3 analisi esplorativa variabili esplicative.....	24
3. IL MODELLO MULTIFATTORIALE MOLENAAR- SÉNÉCHAL-SWINKELS-WANG.....	29
4. IMPLEMENTAZIONE E STIMA DEL MODELLO GARCH-DCC.....	35
5. RISULTATI.....	40
5.1 Correlazione dinamica: Confronto fra modelli.....	50
CONCLUSIONI	60
BIBLIOGRAFIA e RIFERIMENTI	65

Elenco figure

Figura 1_2.2 Andamento dell'indice S&P 500.....	17
Figura 2_2.2 Andamento dell'indice obbligazionario Treasury10Y.....	18
Figura 3_2.2 Rendimenti mensili (log-return) S&P 500 e Bond Index.....	19
Figura 4_2.2 Distribuzione rendimenti mensili Bond Index e S&P 500....	20
Figura 5_2.2 Confronto rolling tra CAGR a 10 anni dell'S&P 500 e yield del Treasury 10Y.....	21
Figura 6_2.2 Distribuzione del CAGR rolling a 10 anni dell'S&P 500 e dello yield del Treasury 10Y.....	22
Figura 1_2.3 Serie storiche delle variabili esplicative.....	24
Figura 2_2.3 Serie storiche delle variabili esplicative differenziate.....	27
Figura 1_5 Volatilità condizionale delle variabili esplicative.....	44
Figura 2_5 Correlazione dinamica tra rendimenti azionari e obbligazionari: confronto tra modello benchmark e modello Molenaar.....	50

Elenco tabelle

Tabella 1_2.3 Risultati del test ADF sulle serie differenziate	27
Tabella 1_5 Test di Jarque-Bera sui residui Bond ed Equity	40
Tabella 2_5 Stime dei parametri GARCH(1,1) QML gaussiano per ciascuna variabile	41
Tabella 3_5 Stima dei beta del modello Bond (OLS)	46
Tabella 4_5 Stima dei beta del modello Stock (OLS)	47
Tabella 5_5 Parametri stimati del modello DCC(1,1) QML Molenaar.....	48

Introduzione

Negli ultimi anni il rapporto tra il mercato azionario e il mercato obbligazionario è stato oggetto di crescente attenzione, sia da parte della comunità accademica sia da parte degli operatori di mercato. Per lungo tempo, infatti, la relazione tra i rendimenti di azioni e obbligazioni è stata caratterizzata da una correlazione prevalentemente negativa, elemento che ha costituito il fondamento teorico ed empirico delle principali strategie di diversificazione di portafoglio. A partire dal 2022, tuttavia, un contesto macroeconomico caratterizzato da un'inflazione elevata e da un ciclo di rialzo dei tassi di interesse senza precedenti ha determinato una significativa inversione di tale relazione, con azioni e obbligazioni che hanno registrato perdite simultanee, mettendo in discussione l'efficacia delle logiche di diversificazione, utilizzate fino a quel momento con discreto successo.

Questo cambiamento di regime ha riportato al centro del dibattito finanziario il tema della correlazione tra le due asset class, evidenziando come essa non sia costante nel tempo, risentendo in maniera significativa del contesto macroeconomico, delle politiche monetarie delle banche centrali e delle aspettative degli investitori. Comprendere le determinanti di tale relazione risulta pertanto fondamentale sia per la costruzione di portafogli efficienti, sia per la gestione del rischio, in particolare nelle fasi di mercato caratterizzate da maggiore incertezza.

Un aspetto che merita di essere sottolineato fin da subito è la cautela con cui deve essere trattata la misurazione stessa della correlazione dinamica. Un approccio spesso

adottato in letteratura e nella pratica operativa consiste nel calcolare una correlazione naive impiegando una finestra mobile a 36 mesi dei rendimenti. Tale metodo, tuttavia, è meno prudente di quanto possa apparire: restituendo di fatto un valore medio relativo al campione di dati utilizzati, esso appiattisce e ritarda sistematicamente la rilevazione dei cambi di regime, fornendo un'informazione tardiva proprio nei momenti in cui la relazione tra le due asset class si sta modificando più rapidamente e, dunque un segnale tempestivo sarebbe più necessario. Ancora meno conservativa, nonostante le apparenze, è l'assunzione di una correlazione costantemente negativa tra azioni e obbligazioni: un'ipotesi comoda per la teoria classica della diversificazione, ma che rischia di sottostimare il rischio di portafoglio proprio nelle fasi di stress in cui le due asset class si muovono in maniera sincronica, come accaduto nel 2022, ovvero esattamente nei momenti in cui la diversificazione dovrebbe offrire la protezione maggiore.

Il presente elaborato si propone di analizzare la correlazione dinamica tra il mercato azionario e il mercato obbligazionario statunitense, con l'obiettivo di individuare le determinanti che ne guidano l'andamento nel tempo. A tal fine, si adotta un modello multifattoriale che scompone le variazioni del rendimento atteso di azioni e obbligazioni in cinque componenti, riconducibili alla logica secondo cui il rendimento di un'attività finanziaria riflette il premio al rischio per il tempo, per

l'inflazione attesa e per il rischio assunto dall'investitore. Le variabili esplicative considerate sono:

- il tasso reale privo di rischio, comune alle due asset class e rappresentativo del costo opportunità del capitale al netto dell'inflazione;
- l'inflazione attesa, anch'essa comune a entrambe le asset class, quale componente compensativa della perdita di potere d'acquisto;
- il premio per il rischio obbligazionario (Bond Risk Premium, BRP), specifico della componente obbligazionaria e riconducibile ai rischi di duration, di credito e di liquidità;
- il premio per il rischio azionario (Equity Risk Premium, ERP), specifico della componente azionaria;
- la crescita attesa dei dividendi (expected dividend growth), anch'essa propria della componente azionaria e coerente con l'approccio dei modelli di attualizzazione dei dividendi.

Questa scomposizione consente di individuare, per ciascuna delle due asset class, il contributo delle diverse componenti di rischio e di valutare in che misura le dinamiche comuni (tasso reale e inflazione attesa) e quelle specifiche (BRP, ERP e crescita dei dividendi) concorrano a spiegare la relazione tra i rendimenti azionari e obbligazionari nel tempo.

L'elaborato si sviluppa a partire da un'introduzione del database utilizzato nella tesi, analizzando in maniera critica le serie storiche utilizzate. Si prosegue quindi con la

descrizione delle cinque variabili esplicative selezionate, evidenziandone la rilevanza teorica rispetto al fenomeno oggetto di studio, sia per la componente azionaria sia per quella obbligazionaria. Nel capitolo successivo si introduce il modello multifattoriale adottato, illustrandone gli aspetti metodologici e le ipotesi alla base della procedura di stima. Infine, vengono presentati i risultati ottenuti, valutandone la coerenza con la letteratura esistente. In questa parte conclusiva trova spazio anche una discussione delle principali criticità da superare per un utilizzo affidabile del modello come strumento predittivo della correlazione, tra cui l'instabilità dei coefficienti stimati nel tempo, il rischio di multicollinearità tra variabili esplicative, la difficoltà di una validazione robusta fuori campione (out-of-sample) e il fatto che alcune delle variabili impiegate, in particolare quelle relative alle aspettative di inflazione, sono a loro volta stime soggette a errore di misura, che il modello dunque eredita “a monte”.

1. Review della letteratura

La relazione tra i rendimenti azionari e obbligazionari occupa da tempo un posto centrale nella letteratura di finanza applicata, poiché costituisce l'ingrediente chiave su cui si fonda la costruzione di portafogli multi-asset bilanciati. Prima di addentrarci nella descrizione del modello adottato in questo lavoro, è utile ripercorrere brevemente come il fenomeno sia stato studiato nel tempo e quali regimi di correlazione siano stati osservati storicamente, seguendo in particolare i contributi di Molenaar et al. (2024), Brixton et al. (2023), Portelli e Roncalli (2024) e Shen e Weisberger (2021).

Un primo elemento che emerge chiaramente da questi studi è che la correlazione stock-bond non è affatto una costante di natura, ma una variabile che cambia regime nel tempo, spesso in modo piuttosto brusco dopo periodi anche lunghi di relativa stabilità. Molenaar et al. (2024) offrono in questo senso il contributo più ampio dal punto di vista storico, ricostruendo la correlazione tra azioni e obbligazioni statunitensi a partire dal 1875 fino ai giorni nostri. Il quadro che ne emerge è quello di un'alternanza di fasi lunghe: guardando all'intero campione, gli episodi di correlazione positiva risultano storicamente più frequenti di quelli di correlazione negativa, sebbene quest'ultima non sia affatto un'eccezione recente, come si tende talvolta a credere osservando solo gli ultimi vent'anni.

Un secondo filone di studi si concentra più specificamente sul periodo che va dal secondo dopoguerra a oggi, individuando tre grandi fasi. Una prima fase, tra gli anni

'50 e la metà degli anni '60, mostra una correlazione negativa. Segue poi un lungo periodo, dalla fine degli anni '60 fino alla fine degli anni '90 (che comprende quindi gli shock petroliferi degli anni '70, la stretta monetaria dell'era Volcker e la disinflazione degli anni '80-'90), in cui la correlazione si mantiene stabilmente positiva. Shen e Weisberger (2021) descrivono con chiarezza questo passaggio, sottolineando come proprio l'elevata ed erratica inflazione di quegli anni abbia reso le obbligazioni un'attività rischiosa al pari delle azioni, invece di rappresentare, come da tradizione, una asset class di copertura del rischio azionario. Con l'inizio degli anni 2000, e in particolare dopo lo scoppio della bolla dot-com, la correlazione si inverte nuovamente, tornando negativa e restando tale per circa due decenni: è il periodo, ben noto anche agli operatori di mercato, in cui le obbligazioni governative hanno svolto, insieme all'oro, la funzione di "bene rifugio" nelle fasi di ribasso azionario, consentendo ai gestori multi-asset di aumentare l'esposizione azionaria pur mantenendo sotto controllo il rischio complessivo di portafoglio.

Proprio su questo lungo periodo di correlazione negativa si è costruita gran parte dei programmi di asset allocation degli ultimi vent'anni, al punto che Brixton et al. (2023) parlano esplicitamente di un "parametro d'oro" (*golden parameter*) dato ormai per acquisito da molti investitori. Gli autori evidenziano tuttavia come questa fosse una caratteristica tipica del ventunesimo secolo e non una regolarità empirica osservata nel lungo periodo: nel secolo precedente, ricordano, la correlazione positiva era stata la norma piuttosto che l'eccezione, e un mutamento del contesto macroeconomico — in particolare un ritorno di incertezza sull'inflazione — avrebbe potuto riportare in auge il regime positivo tipico degli anni '70-'90. Previsione che si è puntualmente realizzata a partire dal 2022, quando il forte rialzo dell'inflazione e

la conseguente stretta monetaria delle banche centrali hanno determinato, come accennato nell'introduzione, perdite simultanee su azioni e obbligazioni.

Dal punto di vista più teorico, Portelli e Roncalli (2024) sistematizzano i diversi modelli macroeconomici proposti in letteratura per spiegare il segno della correlazione, distinguendoli in tre grandi famiglie: modelli incentrati sull'inflazione, modelli incentrati sul tasso reale, e modelli che combinano inflazione e crescita economica. Gli autori mostrano come, storicamente, il fattore inflazione risulti quello con il potere esplicativo più robusto, mentre il ruolo della crescita economica appaia più incerto e meno stabile nei diversi sotto-periodi analizzati. Sottolineano inoltre come, anche negli Stati Uniti, non si possa parlare di un'unica correlazione stock-bond valida in assoluto, poiché il segno e l'intensità della relazione dipendono in modo significativo dalla composizione del portafoglio azionario considerato e dal regime di mercato (normale vs. estremo) in cui ci si trova.

Nel complesso, la letteratura recente converge su alcuni punti fermi che orientano anche l'impostazione di questo lavoro: la correlazione stock-bond è storicamente instabile e soggetta a cambi di regime, tali cambi sono strettamente legati al contesto di inflazione e tassi reali più che a un singolo fattore isolato, e i periodi di correlazione positiva — lungi dall'essere un'anomalia recente — hanno caratterizzato buona parte della storia finanziaria moderna. È proprio a partire da questa constatazione che, nel capitolo seguente, si introducono le variabili esplicative del modello multifattoriale adottato in questa tesi.

2. Dataset

Il presente capitolo descrive il database costruito per l'analisi empirica, illustrando in un primo momento le fonti utilizzate e la metodologia di costruzione delle serie storiche, e presentando successivamente un'analisi esplorativa delle variabili impiegate. L'obiettivo è duplice: da un lato rendere trasparente e replicabile il processo di costruzione dei dati, dall'altro fornire una prima lettura delle proprietà statistiche delle serie prima della stima del modello multifattoriale.

2.1 Raccolta dati

Il campione utilizzato copre il periodo Aprile 1990 – Settembre 2025, con frequenza mensile, per un totale di 425 osservazioni. Le fonti principali sono la Federal Reserve Bank of St. Louis (FRED) e il database online curato da Robert Shiller (Yale University).

La variabile dipendente relativa alla componente obbligazionaria è costruita a partire dal rendimento (yield) annualizzato del Treasury statunitense a 10 anni, reperito da FRED. Poiché il modello richiede un rendimento totale (total return) e non un semplice livello di yield, ogni valore mensile dello yield viene dapprima convertito in un prezzo, assumendo un titolo che rimborsa 100 a scadenza, secondo la relazione

$$P_t = \frac{100}{(1 + y_t)^{10}}$$

dove y_t è lo yield decennale osservato al mese t . Una volta ottenuta la serie dei prezzi, si calcola il rendimento mensile del bond come variazione logaritmica (log-return) tra un mese e l'altro. Questa è la serie utilizzata come variabile dipendente per la componente obbligazionaria nel modello multifattoriale.

Per la componente azionaria si utilizza direttamente la serie di prezzo dell'indice S&P 500, tratta dal database di Shiller, da cui si calcola in modo analogo il rendimento mensile in log-return.

Per quanto riguarda le variabili esplicative, il tasso reale privo di rischio (**RR**) è ottenuto come differenza tra il tasso sui Treasury Bill a 3 mesi (serie TB3MS, FRED) e l'inflazione attesa a 1 anno rilevata dal Michigan Survey of Consumers (serie MICH, FRED). È importante notare che questa misura di inflazione attesa a 1 anno viene impiegata esclusivamente per il calcolo del tasso reale, ed è concettualmente distinta dalla variabile "inflazione attesa" utilizzata come regressore autonomo nel modello (**CPI**), per la quale si impiega invece la serie a 10 anni EXPINF10YR, sempre da FRED. Questa scelta è motivata dal tentativo di allineare l'orizzonte dell'aspettativa di inflazione a quello, di più lungo periodo, rilevante per la determinazione dei rendimenti obbligazionari e azionari.

Per il Bond Risk Premium (**BRP**) e l'Equity Risk Premium (**ERP**), la cui fonte è Bloomberg; in particolare la serie Equity Risk Premium (ERP). è costruita seguendo la prassi di mercato (market practice), come differenza tra l'earning yield dell'indice S&P 500 e il tasso governativo decennale:

$$ERP_t = EY_t - y10_t$$

dove l'earning yield è definito come $EY_t = \frac{E_t}{P_t}$ con E_t pari agli utili dell'S&P 500 calcolati come media degli ultimi 12 mesi (trailing) e P_t il prezzo dell'indice al tempo t (Shiller database), mentre $y10_t$ è lo yield del Treasury a 10 anni (FRED).

L'ERP così definito rappresenta quindi il compenso, in termini di rendimento, richiesto dagli investitori per detenere azioni anziché titoli di Stato a lungo termine, misurato attraverso il confronto tra due grandezze correnti (earning yield e bond yield) piuttosto che tramite modelli di attualizzazione dei flussi di cassa attesi.

Infine, la variabile di crescita attesa dei dividendi (**EXP_DIV_GROWTH**) è costruita combinando elementi tratti dal database di Shiller con la serie degli utili per azione dell'S&P 500 su base trailing a 12 mesi, reperita da LSEG Datastream e da Yardeni Research. Si tratta della variabile costruita con il maggior numero di passaggi, poiché non esiste una serie storica direttamente osservabile. La costruzione combina il Forward P/E ratio a 12 mesi dell'S&P 500 (fonte: LSEG Datastream e Yardeni Research) con i dati storici di Prezzo, Dividendo e Utili del database di Shiller, secondo la seguente procedura in quattro passaggi:

1. *Forward EPS implicito*. Il Forward P/E al tempo t viene invertito per ricavare l'utile per azione atteso nei successivi 12 mesi, dividendo il prezzo corrente dell'indice (da Shiller) per il Forward P/E osservato allo stesso istante:

$$FwdEPS_t = \frac{P_t}{FwdPE_t}$$

2. *Payout ratio*. Per ogni mese t si calcola il rapporto tra dividendo e utili correnti, entrambi tratti dal database di Shiller:

$$Payout_t = \frac{D_t}{E_t}$$

3. *Dividendo atteso*. Il payout ratio corrente viene applicato al Forward EPS ottenuto al passaggio 1, sotto l'ipotesi — di semplificazione ma necessaria in assenza di informazioni migliori — che la politica di distribuzione dei dividendi in media resti costante nei 12 mesi successivi:

$$FwdDiv_t = Payout_t \times FwdEPS_t$$

4. *Expected Dividend Growth*. La variabile finale è calcolata come variazione percentuale, mese su mese, del dividendo atteso così ottenuto:

$$ExpDivGrowth_t = \frac{FwdDiv_t}{FwdDiv_{t-1}} - 1$$

È opportuno sottolineare, come nota metodologica, che tutte le componenti di input (Prezzo, Dividendo, Utili, e di conseguenza il Payout ratio) sono osservate al tempo t , cioè rappresentano informazione corrente e non attesa. L'unica componente propriamente forward-looking è il Forward P/E, che incorpora le aspettative di mercato sugli utili dei 12 mesi successivi. La variabile Expected Dividend Growth

così ottenuta rappresenta quindi la crescita attesa dei dividendi implicita nelle aspettative correnti di mercato sugli utili futuri, condizionata però alla politica di payout osservata oggi — un'ipotesi che, come per le altre variabili costruite, andrà tenuta presente in sede di discussione dei limiti del modello.

Va segnalato, a questo proposito, un limite di fondo che accompagna l'intera costruzione del dataset. Molenaar et al. (2024), da cui il modello multifattoriale è ripreso, individuano concettualmente queste cinque componenti come determinanti specifiche della correlazione stock-bond, ma non ne definiscono in modo univoco la costruzione operativa: gli autori non indicano, ad esempio, un unico metodo per il calcolo della crescita attesa dei dividendi, né fissano in modo esplicito l'orizzonte temporale da usare per il tasso reale privo di rischio o per l'inflazione attesa. Ne consegue che le scelte adottate in questo lavoro — l'inflazione attesa a 1 anno del Michigan Survey per il tasso reale, l'orizzonte decennale per l'inflazione attesa, il T-bill a 3 mesi come proxy del tasso privo di rischio — rappresentano solo una delle possibili attuazioni del modello concettuale, di certo non l'unica. Un'inflazione "di breve periodo" potrebbe altrettanto legittimamente essere intesa come l'aspettativa a un mese anziché a un anno; analogamente, un tasso reale privo di rischio "di breve durata" potrebbe essere costruita a partire da un tasso overnight anziché da un T-bill a 3 mesi. Scelte diverse su questi orizzonti possono condurre a stime non del tutto sovrapponibili delle stesse variabili concettuali, ed è un tema che sarà utile approfondire in sede di discussione dei risultati e dei relativi limiti.

A questo si aggiunge un secondo limite, di natura più tecnica, legato alla frequenza dei dati. L'intero dataset è costruito su base mensile, il che comporta inevitabilmente

una perdita di informazione rispetto a una frequenza più elevata (ad esempio giornaliera): shock di mercato anche rilevanti, se riassorbiti nell'arco dello stesso mese, tendono a diluire i propri effetti, finanche annullandosi del tutto, nel dato mensile aggregato, con un effetto di liscio (smoothing) che può attenuare l'intensità, e in alcuni casi mascherare la tempistica, dei cambi di regime che il modello si propone di catturare.

2.2 Analisi esplorativa variabili empiriche

Prima di procedere alla stima del modello multifattoriale, si riporta un'analisi esplorativa delle principali variabili impiegate nel presente lavoro, al fine di comprenderne le caratteristiche statistiche e le dinamiche storiche.

Si parte dall'osservazione delle due serie storiche principali. Il primo grafico riporta l'andamento dell'indice azionario S&P500 nel periodo 1990-2025.



Figura 1_2.2 Andamento dell'indice S&P 500

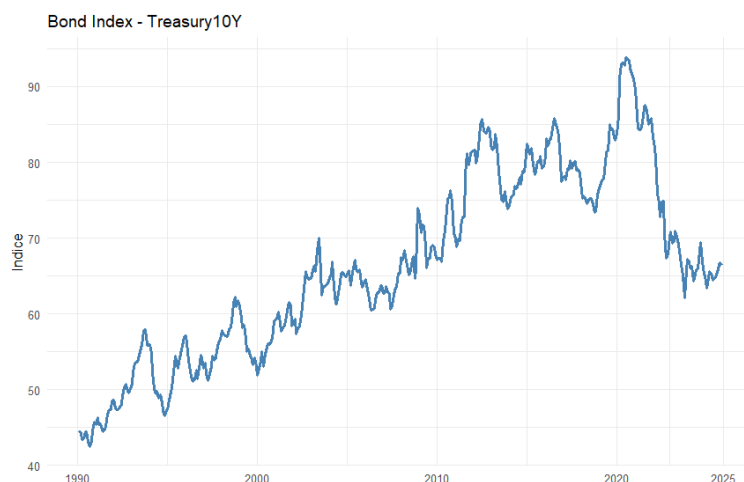


Figura 2_2.2 Andamento dell'indice obbligazionario Treasury10Y

Come si può osservare, la serie presenta un trend di crescita di lungo periodo, interrotto da fasi di correzione più o meno marcate, riconducibili ai principali episodi di crisi finanziaria attraversati nel periodo di riferimento: lo scoppio della bolla dot-com nei primi anni 2000, la crisi finanziaria globale del 2008-2009, il crollo legato alla pandemia di Covid-19 nel 2020 e, più di recente, la fase ribassista del 2022, connessa al rapido rialzo dei tassi di interesse operato dalla Federal Reserve.

In maniera analoga, il secondo grafico mostra l'evoluzione dell'indice obbligazionario, costruito a partire dal rendimento dei titoli di Stato decennali statunitensi (Treasury 10Y).

Anche in questo caso la serie mostra un andamento crescente nel lungo periodo, sebbene caratterizzato da una dinamica meno marcata rispetto a quella azionaria. Trattandosi di un indice di prezzo, e non di rendimento, l'andamento della serie va letto in relazione inversa alla dinamica dei tassi di interesse. La crescita pressoché

costante registrata dall'indice nell'arco di circa tre decenni riflette, infatti, il trend secolare di discesa dei tassi di interesse che ha caratterizzato il periodo 1990-2020. Fa eccezione la fase più recente, in cui l'indice mostra una flessione particolarmente accentuata a partire dal 2020: tale calo è riconducibile al ciclo di rialzo dei tassi avviato dalla Federal Reserve per contrastare l'impennata inflazionistica post-pandemica, che ha determinato, specularmente, un aumento dei rendimenti offerti dai titoli di Stato.

Passando dai livelli alle variazioni, il terzo grafico riporta i rendimenti mensili (log-return) delle due serie a confronto.

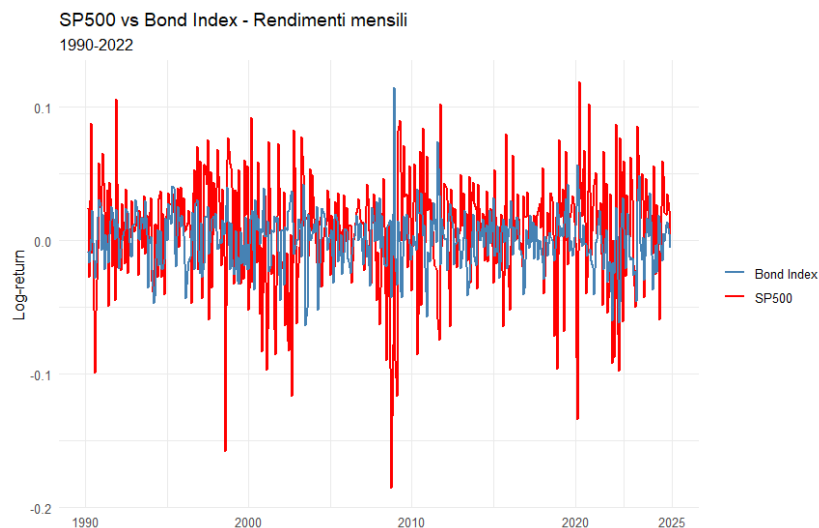


Figura 3_2.2 Rendimenti mensili (log-return standardizzati) S&P 500 e Bond Index

Il grafico consente di cogliere la stazionarietà delle variazioni mensili dei rendimenti, che oscillano attorno a un valore medio prossimo allo zero. Tale evidenza risulta coerente con quanto ampiamente documentato in letteratura,

secondo cui le variazioni mensili degli indici finanziari sono tipicamente stazionarie, a differenza delle rispettive serie in livello, generalmente integrate di ordine uno. Si tratta di un requisito fondamentale ai fini della successiva analisi DCC-GARCH, la quale richiede l'impiego di serie stazionarie; come si vedrà più avanti, anche le variabili esplicative del modello multifattoriale risulteranno stazionarie una volta opportunamente differenziate. Si nota inoltre come l'indice azionario presenti oscillazioni di ampiezza sistematicamente maggiore rispetto all'indice obbligazionario, a conferma di una variabilità decisamente più elevata.

Il quarto grafico, direttamente collegato al precedente, riporta la distribuzione empirica dei rendimenti mensili delle due serie.

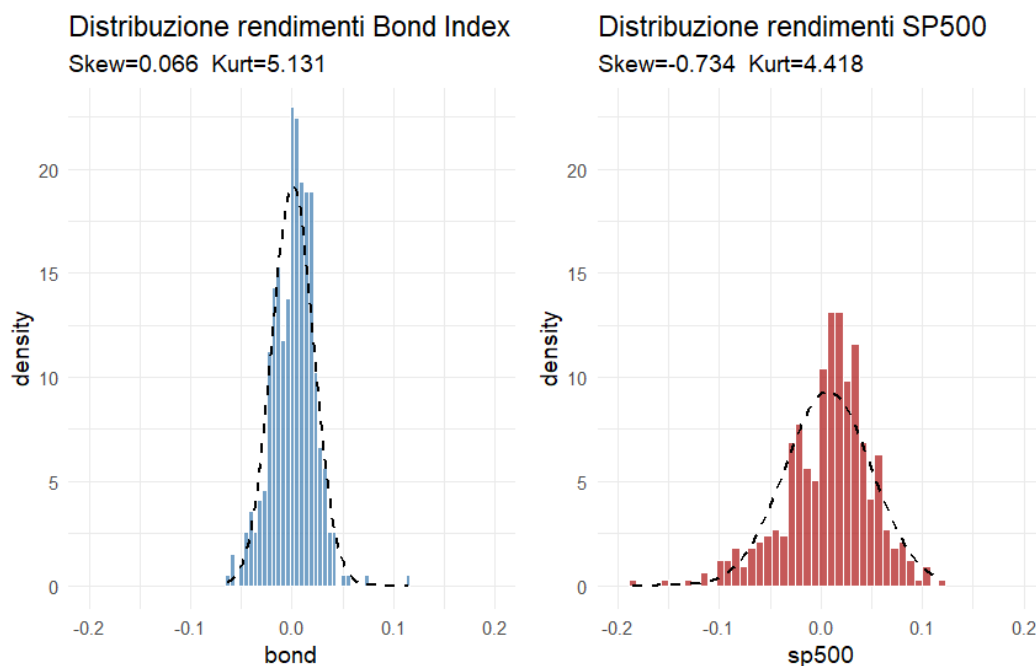


Figura 4_2.2 Distribuzione rendimenti mensili Bond Index e S&P 500

Anche in questo caso emerge con chiarezza la maggiore volatilità dell'S&P500 rispetto al Bond Index, coerentemente con quanto osservato nel grafico precedente.

Un elemento di particolare rilievo è rappresentato dalla curtosi elevata di entrambe le distribuzioni, ben superiore al valore di 3 tipico della distribuzione normale: tale evidenza segnala la presenza di code spesse (fat tails) e la conseguente inadeguatezza dell'ipotesi di normalità dei rendimenti, giustificando l'adozione, nel prosieguo dell'elaborato, di un modello del tipo DCC-GARCH, in grado di catturare tale caratteristica.

Il quinto grafico riporta il confronto, su base rolling, tra il rendimento annualizzato dell'S&P500 su orizzonte decennale (CAGR¹ a 10 anni) e lo yield del Treasury a 10 anni.

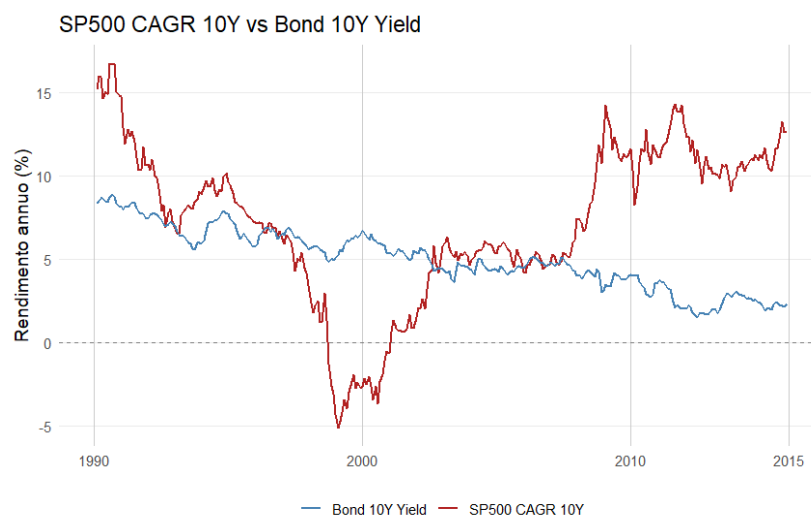


Figura 5_2.2 Confronto rolling tra CAGR a 10 anni dell'S&P 500 e yield del Treasury 10Y

¹ Il CAGR (Compound Annual Growth Rate) rappresenta il tasso di rendimento annualizzato costante che, applicato per l'intero orizzonte temporale, produce lo stesso valore finale dell'investimento a partire dal valore iniziale, tenendo conto della capitalizzazione composta: $CAGR = \left(\frac{V_n}{V_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$

dove V_0 e V_n sono rispettivamente il valore iniziale e finale dell'investimento su un orizzonte di n anni

È opportuno chiarire la corretta chiave di lettura del grafico: entrambe le serie sono espresse in termini *rolling*, ossia, per ogni istante temporale t , il valore riportato non rappresenta un dato puntuale, bensì una misura calcolata sulla finestra mobile dei dieci anni successivi. Nel caso dell'S&P500 si tratta del già citato tasso di crescita annuo composto (CAGR) realizzato nei dieci anni che seguono ciascuna data; nel caso del Treasury, del relativo yield medio nello stesso arco temporale. Questa impostazione consente di confrontare, anno per anno, il rendimento effettivamente conseguito da un investimento azionario con orizzonte decennale rispetto al rendimento "privo di rischio" offerto dal titolo di Stato nello stesso periodo, piuttosto che confrontare semplicemente i valori istantanei delle due serie.

Infine, il sesto ed ultimo grafico riprende la medesima logica rolling del grafico precedente, presentando il confronto tra le distribuzioni delle due serie così costruite.

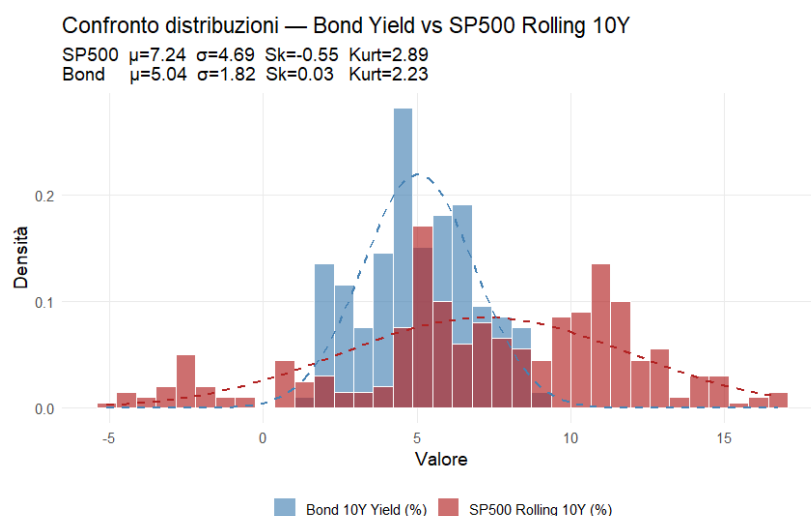


Figura 6_2.2 Distribuzione del CAGR rolling a 10 anni dell'S&P 500 e dello yield del Treasury 10Y

Il confronto conferma quanto già osservato: il CAGR rolling a 10 anni dell'S&P500 presenta una media più elevata ma anche una dispersione (deviazione standard) nettamente maggiore rispetto allo yield del Treasury, oltre a una asimmetria negativa (skewness), segno della maggiore incidenza di scenari di rendimento particolarmente sfavorevoli, mentre la distribuzione dello yield del Treasury risulta più concentrata attorno al proprio valore medio.

2.3 analisi esplorativa variabili esplicative

Nei diagrammi seguenti, vengono rappresentati gli andamenti delle serie storiche relative alle variabili esplicative impiegate nel modello multifattoriale:



Figura 1_2.3 Serie storiche delle variabili esplicative

Come si può osservare dai grafici, le variabili RR, CPI, BRP ed ERP mostrano tutte un andamento persistente e ciclico, privo di un ritorno rapido attorno a un valore medio costante, il che lascia presagire, ancor prima della verifica formale, una non stazionarietà delle rispettive serie in livello. Nello specifico:

- Il tasso reale privo di rischio (RR) oscilla tra circa -5% e +4% attraverso cicli pluriennali di ampiezza consistente, con fasi prolungate di permanenza in territorio negativo (inizio anni 2000, metà anni 2010, 2020) alternate a fasi di risalita.
- L'inflazione attesa a 10 anni (CPI) mostra invece un trend discendente piuttosto marcato, passando da valori prossimi al 4% nei primi anni Novanta a circa il 2% nel periodo più recente, con oscillazioni cicliche sovrapposte a tale trend di fondo.
- Il Bond Risk Premium (BRP) presenta anch'esso una dinamica non stazionaria, con un andamento tendenzialmente decrescente nel lungo periodo, intervallato da picchi ciclici, tra cui quello particolarmente marcato in corrispondenza del 2020.
- L'Equity Risk Premium (ERP) mostra un comportamento analogo, oscillando in un intervallo più ampio (circa 2%-9%) con picchi pronunciati in corrispondenza delle principali crisi finanziarie (inizio anni 2000, 2008) e una tendenza di fondo alla riduzione nella parte più recente del campione.

Diversamente dalle altre variabili, la serie Expected Dividend Growth mostra un comportamento visivamente già stazionario, oscillando attorno a un valore medio prossimo allo zero, con l'eccezione di due picchi estremi ed opposti in

corrispondenza del 2011-2012, verosimilmente riconducibili alla brusca correzione e successivo recupero delle aspettative di crescita dei dividendi nel periodo post-crisi finanziaria. Ciò è coerente con quanto atteso, trattandosi di una variabile già espressa in forma di tasso di crescita e dunque, per costruzione, già differenziata rispetto al livello dei dividendi attesi. Ciononostante, anche a tale serie verrà applicata un'ulteriore differenziazione: ai fini del modello, infatti, non rileva tanto il livello della crescita attesa dei dividendi in un dato mese, quanto piuttosto la sua variazione mensile — ossia se le aspettative di crescita stiano accelerando o decelerando (eventualmente anche diventando negative) rispetto al mese precedente.

Basandosi sull'evidenza inferenziale fornita dai *p-value*, si può asserire che, con buona probabilità, le serie RR, CPI, BRP ed ERP non siano stazionarie in media, diversamente da Exp Div Growth, la quale, come atteso, risulta già stazionaria in virtù del fatto di essere differenziata per costruzione.

Verificata la non stazionarietà in media delle serie RR, CPI, BRP ed ERP, è possibile applicare, anche in questo caso, la trasformazione di differenziazione:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

Se infatti la serie originaria è non stazionaria del prim'ordine, quest'operazione induce stazionarietà in media. Il grafico delle serie differenziate è riportato di seguito:

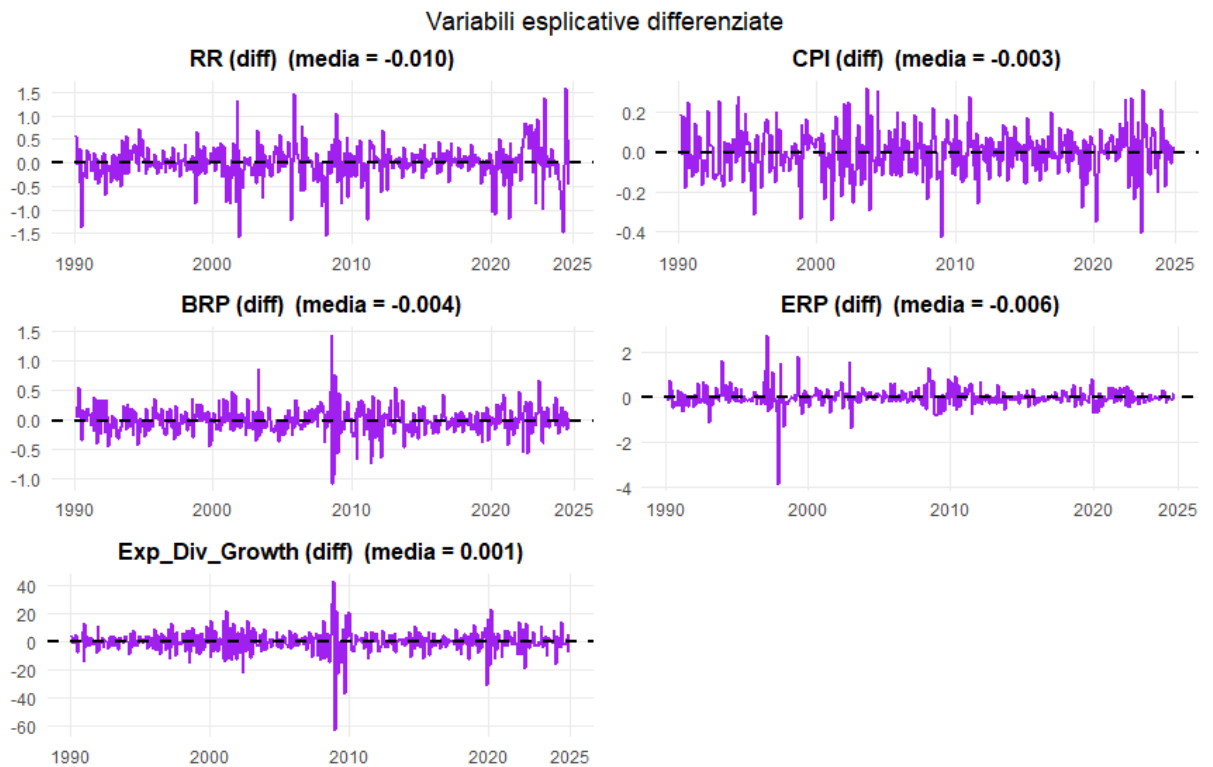


Figura 2_2.3 Serie storiche delle variabili esplicative differenziate

Per confermare la stazionarietà ottenuta tramite differenziazione, è stato applicato il test ADF² alle serie differenziate per verificarne la stazionarietà in media:

Statistiche descrittive e test ADF delle variabili esplicative

	Serie	Skewness	Kurtosis	ADF	P-value	ADF (diff.)	P-value (diff.)
Dickey-Fuller	RR	-0.3567	6.4578	-3.091	0.1166	-6.045	0.0100
Dickey-Fuller1	CPI	-0.2321	3.9786	-2.196	0.4949	-8.630	0.0100
Dickey-Fuller2	BRP	0.3127	7.4457	-2.882	0.2048	-6.796	0.0100
Dickey-Fuller3	ERP	-0.5397	23.1311	-4.079	0.0100	-6.839	0.0100
Dickey-Fuller4	Exp_Div_Growth	-1.0543	14.9415	-6.399	0.0100	-10.587	0.0100

Tabella 1_2.3 Risultati del test ADF sulle serie

² Il test verifica, sotto ipotesi nulla (H_0), la non stazionarietà della serie storica analizzata: di conseguenza, se il valore del p-value supera la soglia critica di probabilità del 5%, il test non viene rifiutato e non vi sono evidenze statisticamente significative per affermare che la serie sia stazionaria. Se, invece, il p-value è al di sotto della soglia critica, si rifiuta l'ipotesi nulla di non stazionarietà, e la serie può essere considerata, con ragionevole grado di confidenza, stazionaria.

Dal momento che i p-value risultano molto vicini allo zero, quindi al di sotto della soglia critica di 0.05, si può affermare, con buona probabilità, che le serie differenziate di RR, CPI, BRP ed ERP sono stazionarie. Stante quanto precedentemente affermato in relazione alla serie Exp Div Growth, si dispone di un dataset interamente composto da variabili espresse in forma stazionaria, condizione necessaria per la successiva stima del modello multifattoriale.

3. Il Modello Multifattoriale

Molenaar Sénéchal

Swinkels Wang

Al fine di individuare le determinanti della correlazione dinamica tra rendimenti azionari e obbligazionari, si adotta il modello teorico proposto da Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang, il quale scompone i rendimenti di azioni e obbligazioni in un insieme comune di fattori macro-finanziari. L'idea di fondo è che, se entrambe le asset class sono esposte, seppur con segno e intensità diversi, agli stessi fattori di rischio sottostanti, la loro correlazione può essere spiegata, almeno in parte, endogenamente attraverso la dinamica di tali fattori, piuttosto che essere trattata come un parametro esogeno e costante nel tempo.

Il modello assume che il rendimento a scadenza (yield) di un titolo obbligazionario governativo sia scomponibile in tre componenti: il tasso reale privo di rischio atteso (rr), il tasso di inflazione atteso (π) fino a scadenza del titolo, e il premio al rischio obbligazionario (brp), quest'ultimo richiesto dall'investitore per detenere titoli a più lunga scadenza in luogo di Treasury Bill a breve termine. Poiché il livello corrente dello yield obbligazionario è noto, la componente inattesa del rendimento obbligazionario deriva esclusivamente dalle variazioni non anticipate di queste tre componenti:

$$r_{t+1}^b \approx \alpha^b - \beta_{rr}^b \Delta_{(t+1)rr} - \beta_{\pi}^b \Delta_{(t+1)\pi} - \beta_{brp}^b \Delta_{(t+1)brp}$$

dove i coefficienti β sono attesi essere tutti positivi: un aumento inatteso del tasso reale, dell'inflazione attesa o del premio al rischio obbligazionario si traduce, a parità di altre, in una riduzione del prezzo (e quindi in un aumento del rendimento) del titolo.

In maniera analoga, il modello assume che il rendimento azionario sia scomponibile in quattro componenti: il tasso reale privo di rischio atteso (rr) e l'inflazione attesa (π) — le medesime componenti rilevanti per le obbligazioni — a cui si aggiungono il tasso di crescita atteso dei dividendi (g) e il premio al rischio azionario (erp). Anche in questo caso, essendo noto il dividend (o earnings) yield corrente, la componente inattesa del rendimento azionario deriva dalle variazioni delle quattro componenti:

$$r_{t+1}^e \approx \alpha^e - \beta_{rr}^e \Delta_{(t+1)rr} - \beta_{\pi}^e \Delta_{(t+1)\pi} - \beta_{erp}^e \Delta_{(t+1)erp} + \beta_g^e \Delta_{(t+1)g}$$

Anche in questo caso tutti i coefficienti β sono attesi positivi, ma con l'importante differenza che la crescita attesa dei dividendi entra con segno positivo nell'equazione del rendimento azionario: sul piano logico e finanziario, infatti, un miglioramento delle aspettative di crescita dei flussi di cassa futuri si traduce, a parità di altre condizioni, in un rendimento azionario più elevato.

Combinando le equazioni (1) e (2), è possibile esprimere la covarianza tra i rendimenti azionari e obbligazionari come funzione delle varianze e covarianze delle variazioni inattese dei quattro fattori “comuni” (rr , π , erp , brp) e del fattore specifico azionario(g):

$$\begin{aligned} cov(r_{t+1}^b, r_{t+1}^e) &= \beta_{rr}^b \cdot \beta_{rr}^e \cdot \sigma_{rr}^2 + \beta_{\pi}^b \cdot \beta_{\pi}^e \cdot \sigma_{\pi}^2 + (\beta_{rr}^b \cdot \beta_{\pi}^e + \beta_{\pi}^b \cdot \beta_{rr}^e) \cdot \sigma_{rr,\pi} + \dots \\ &+ \beta_{rr}^b \cdot \beta_{erp}^e \cdot \sigma_{rr,erp} - \beta_{rr}^b \cdot \beta_g^e \cdot \sigma_{rr,g} + \beta_{\pi}^b \cdot \beta_{erp}^e \cdot \sigma_{\pi,erp} - \beta_{\pi}^b \cdot \beta_g^e \cdot \sigma_{\pi,g} + \dots \\ &+ \beta_{brp}^b \cdot \beta_{rr}^e \cdot \sigma_{brp,rr} + \beta_{brp}^b \cdot \beta_{\pi}^e \cdot \sigma_{brp,\pi} + \beta_{brp}^b \cdot \beta_{erp}^e \cdot \sigma_{brp,erp} - \beta_{brp}^b \cdot \beta_g^e \cdot \sigma_{brp,g} \end{aligned}$$

Questa scomposizione consente di trarre alcune rilevanti implicazioni teoriche, che verranno successivamente interpretate alla luce dei risultati empirici ottenuti nel presente lavoro.

In primo luogo, una maggiore varianza del tasso reale ha un effetto univocamente positivo sulla correlazione stock-bond: variazioni più ampie del tasso reale spingono nella stessa direzione sia il valore attuale dei flussi di cassa attesi delle obbligazioni sia quello delle azioni, a parità di altre condizioni, generando co-movimenti positivi tra le due asset class.

In secondo luogo, anche una maggiore varianza delle variazioni dell'inflazione attesa dovrebbe generare co-movimenti più ampi tra i prezzi di azioni e obbligazioni. Tale relazione è tuttavia complicata dal fatto che il livello dell'inflazione, la sua varianza storica e l'incertezza prospettica circa la sua evoluzione futura risultano tra loro positivamente correlati.³

In terzo luogo, il modello individua una serie di termini incrociati (*cross terms*) il cui segno, e non solo la loro entità, concorre a determinare l'andamento della correlazione stock-bond. In particolare, poiché la crescita economica non è modellata come fattore comune esplicito a entrambe le asset class — entrando in modo diretto ed esplicito unicamente attraverso l'Expected Dividend Growth sul lato azionario, mentre sul lato obbligazionario il suo effetto resta implicito e non isolabile, potendo transitare sia attraverso il tasso reale (nella misura in cui la politica monetaria reagisce anche alle prospettive di crescita) sia attraverso il Bond Risk Premium (nella misura in cui il

³ una relazione nota in letteratura come ipotesi di Friedman-Ball, secondo cui un'inflazione più elevata è tipicamente accompagnata da maggiore incertezza di politica monetaria, poiché diventa più difficile prevedere l'intensità e la tempistica della risposta della banca centrale.

premio richiesto sui titoli di Stato riflette anche il rischio legato al ciclo economico) —, il suo effetto complessivo sulla correlazione dipende dal segno della covarianza tra crescita e le altre variabili (tasso reale e inflazione), la cui relazione teorica non è univocamente determinata. Analogamente, divergenze tra il premio al rischio obbligazionario e quello azionario tendono a ridurre la correlazione tra le due asset class: nelle fasi di maggiore avversione al rischio (ad esempio 2000, 2008, 2020), il premio al rischio obbligazionario si comprime mentre quello azionario si espande, coerentemente con il ruolo delle obbligazioni governative come "bene rifugio".

Tale comportamento non è tuttavia costante nel tempo: come mostrato da Campbell, Pflueger e Viceira (2020), le obbligazioni possono trasformarsi da attività sicure in attività rischiose a seconda del segno della correlazione tra inflazione e output gap. Se tale correlazione è negativa, le obbligazioni si comportano da attivo rischioso, positivamente correlato con le azioni; se invece è positiva, le obbligazioni mantengono il ruolo tradizionale di classe di attivo con funzione di *hedging* del rischio delle azioni, risultando negativamente correlate con queste. David e Veronesi (2016) sottolineano come tale relazione dipenda in modo determinante dal regime macroeconomico: in contesti di bassa inflazione, un suo aumento ha un impatto negativo modesto sui prezzi obbligazionari, mentre viene percepito come positivo dal mercato azionario, in quanto segnale di crescita più sostenuta e di premi al rischio azionario più contenuti. Al contrario, in contesti di inflazione elevata, la correlazione tra azioni e obbligazioni risulta sistematicamente positiva.

Nel presente lavoro si adotta la medesima struttura teorica proposta dal modello, mantenendo la stessa denominazione delle variabili esplicative (RR, CPI, BRP, ERP, e la crescita attesa dei dividendi). Le fonti e le metodologie di costruzione di tali serie

risultano tuttavia in parte differenti rispetto a quelle impiegate dagli autori originali, e sono state già descritte nel dettaglio nel capitolo relativo ai dati.

Operativamente, la correlazione dinamica tra i rendimenti azionari e obbligazionari viene ottenuta a partire dalla matrice di varianza-covarianza condizionale $\Sigma_{t+1}^{e,b}$, costruita scomponendo il rischio dei due rendimenti nelle rispettive componenti fattoriali più una componente idiosincratICA. Riprendendo le equazioni dei rendimenti attesi:

$$R_{t+1}^b = \alpha_b - \beta_{rr}^b \Delta_{(t+1)rr} - \beta_{\pi}^b \Delta_{(t+1)\pi} - \beta_{BRP}^b \Delta_{(t+1)BRP} + u_{t+1}$$

$$R_{t+1}^e = \alpha_e - \beta_{rr}^e \Delta_{(t+1)rr} - \beta_{\pi}^e \Delta_{(t+1)\pi} - \beta_{ERP}^e \Delta_{(t+1)ERP} + \beta_g^e \Delta_{(t+1)g} + \epsilon_{t+1}$$

Dove $u_{t+1} \sim NID(0, \sigma_b^2)$ e $\epsilon_{t+1} \sim NID(0, \sigma_e^2)$.

La matrice $\Sigma_{t+1}^{e,b}$ viene calcolata come:

$$\Sigma_{t+1}^{e,b} = B \Omega'_{(t+1)} B' + \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

dove B è la matrice (2×5) dei coefficienti β stimati per le due equazioni⁴, Ω_{t+1} è la matrice di varianza-covarianza condizionale (5×5) dei cinque fattori esplicativi (g, ERP, BRP, π , rr) al tempo $t + 1$, e l'ultimo termine rappresenta la componente idiosincratICA, non spiegata dai fattori comuni, dei rendimenti azionario e obbligazionario.

⁴ In forma matriciale estesa si ha $B = \begin{bmatrix} \text{beta}_g^e & \text{beta}_{ERP}^e & 0 & \text{beta}_{\pi}^e & \text{beta}_{rr}^e \\ 0 & 0 & \text{beta}_{BRP}^b & \text{beta}_{\pi}^b & \text{beta}_{rr}^b \end{bmatrix}$

Una volta ottenuta $\Sigma_{t+1}^{e,b}$, la correlazione dinamica tra i due rendimenti si ricava semplicemente normalizzando la covarianza per il prodotto delle rispettive deviazioni standard condizionali:

$$\text{corr}(R_{t+1}^e, R_{t+1}^b) = \frac{\text{cov}(R_{t+1}^e, R_{t+1}^b)}{\sqrt{\text{var}(R_{t+1}^e)} \cdot \sqrt{\text{var}(R_{t+1}^b)}}$$

Nella pratica, poiché $\Sigma_{t+1}^{e,b}$ è una matrice 2×2 (con R_{t+1}^e e R_{t+1}^b nelle prime due posizioni), la covarianza $\text{cov}(R_{t+1}^e, R_{t+1}^b)$ corrisponde all'elemento di posizione (1,0) della matrice, mentre le varianze $\text{var}(R_{t+1}^e)$ e $\text{var}(R_{t+1}^b)$ si trovano rispettivamente sulla diagonale principale in posizione (0,0) e (1,1). La correlazione dinamica tra azioni e obbligazioni, oggetto centrale del presente lavoro, viene dunque calcolata utilizzando la stima dei beta “statici” e ricorsivamente a ogni istante temporale $t + 1$ a partire dalla stima di Ω_{t+1} , ossia dalla matrice di varianza-covarianza condizionale dei fattori esplicativi ottenuta tramite il modello DCC-GARCH descritto nel capitolo precedente.

4. Implementazione e stima del modello GARCH-DCC

Nel Capitolo 1 è stata evidenziata, attraverso l'analisi della letteratura esistente, l'instabilità della correlazione tra rendimenti azionari e obbligazionari nel tempo, cercando di individuare alcune possibili cause. Si è dunque visto come tale relazione non può essere considerata un parametro costante, ma risulta soggetta a cambiamenti in funzione delle condizioni macro-finanziarie prevalenti nei vari periodi di osservazione. A partire da questa evidenza, l'obiettivo del presente lavoro è verificare se il modello multifattoriale di Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang, sia in grado di spiegare, almeno in parte, l'andamento nel tempo di tale correlazione, individuandone le determinanti sottostanti tra i fattori macro-finanziari considerati (rr , π , ERP , BRP , g).

A tal fine, la strategia empirica adottata richiede due passaggi distinti e sequenziali:

1. la stima dei coefficienti β delle Equazioni (1) e (2) del Capitolo 3, che legano i rendimenti azionari e obbligazionari alle variazioni inattese dei fattori esplicativi, ottenuta tramite una regressione lineare;
2. la stima della matrice di varianza-covarianza condizionale dei fattori esplicativi, Ω_{t+1} , ottenuta tramite un modello GARCH multivariato della famiglia Dynamic Conditional Correlation (DCC), a partire dal quale si ricava, secondo quanto illustrato nel Capitolo 3, la correlazione dinamica condizionale tra i rendimenti azionari e obbligazionari.

I risultati derivanti dalla regressione lineare e dalla stima del modello GARCH-DCC — incluse le varianze, le covarianze e la correlazione dinamica stimata tra azionario e obbligazionario — sono presentati e discussi nel Capitolo 5.

Per quanto riguarda i modelli della famiglia GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), introdotti da Engle (1982) e generalizzati da Bollerslev (1986), questi nascono per cogliere un fenomeno ampiamente documentato nelle serie storiche finanziarie: la clusterizzazione della volatilità (*volatility clustering*), ossia la tendenza di periodi di alta (bassa) volatilità a essere seguiti da periodi di volatilità altrettanto elevata (contenuta). Tale evidenza è incompatibile con l'ipotesi di varianza costante nel tempo (omoschedasticità), e richiede pertanto una modellazione esplicita della varianza condizionale in tal senso.

Nella sua formulazione più semplice, il modello sGARCH(1,1) (standard GARCH) assume che il rendimento di una serie al tempo t sia esprimibile come:

$$r_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$z_t \sim IID(0,1)$$

dove la varianza condizionale σ_t^2 evolve secondo la seguente equazione ricorsiva:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Con $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta < 1$ per garantire, rispettivamente, positività della varianza e stazionarietà del processo. Il coefficiente α cattura la reattività della volatilità agli shock recenti (ARCH effect), mentre β ne misura la persistenza nel tempo. Nel presente lavoro, un modello sGARCH(1,1) viene stimato separatamente per ciascuna delle cinque serie dei fattori esplicativi (rr, π , ERP, BRP, g), al fine di ottenerne la

varianza condizionale univariata, propedeutica alla successiva stima della componente di correlazione.

Successivamente per stimare la struttura di dipendenza congiunta tra i cinque fattori esplicativi, e quindi la matrice $\Omega_{(t+1)}$ richiamata nel Capitolo 3, non è sufficiente un insieme di modelli GARCH univariati: è necessario un modello GARCH multivariato in grado di catturare anche la correlazione condizionale time-varying tra le serie. A tal fine si adotta il modello Dynamic Conditional Correlation (DCC) proposto da Engle (2002), nella sua formulazione DCC(1,1).

Il modello DCC si basa su una stima in due stadi. Nel primo stadio, per ciascuna serie viene stimato un modello GARCH(1,1) univariato, come descritto nel paragrafo precedente, da cui si ricavano i residui standardizzati:

$$z_t = \frac{\epsilon_t}{\sigma_t}$$

Nel secondo stadio, tali residui standardizzati vengono utilizzati per stimare la matrice di correlazione condizionale dinamica R_t , attraverso la seguente equazione ricorsiva sulla matrice ausiliaria Q_t :

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + b Q_{t-1}$$

dove Q_t è la matrice di covarianza incondizionata (di lungo periodo) dei residui standardizzati, e a, b sono i coefficienti del modello DCC con

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ e } a + b < 1$$

che regolano rispettivamente la reattività e la persistenza della correlazione condizionale. La matrice di correlazione condizionale R_t si ottiene infine per normalizzazione di Q_t :

$$R_t = \{diag(Q_t)\}^{-\frac{1}{2}} Q_t \{diag(Q_t)\}^{-\frac{1}{2}}$$

Dalla matrice R_t , unitamente alle varianze condizionali univariate stimate al primo stadio, si ricostruisce la matrice di varianza-covarianza condizionale Q_{t+1} dei cinque fattori esplicativi, da cui, secondo la scomposizione matriciale illustrata nel Capitolo 3, si deriva la correlazione dinamica condizionale tra i rendimenti azionari e obbligazionari, oggetto centrale della presente tesi.

I modelli GARCH e DCC vengono tipicamente stimati per massima verosimiglianza, assumendo che gli errori standardizzati z_t seguano una distribuzione nota, nella formulazione più comune quella normale. Tuttavia, come già evidenziato in sede di analisi esplorativa, le distribuzioni empiriche dei rendimenti delle serie considerate presentano indici di asimmetria (*skewness*) e di curtosi significativamente diversi da quelli attesi sotto normalità, con code più spesse (*fat tails*) rispetto alla distribuzione gaussiana.

Per verificare formalmente tale evidenza, è stato condotto il test di Jarque-Bera, il quale verifica, sotto ipotesi nulla (H_0), la normalità della distribuzione analizzata, utilizzando congiuntamente le misure di asimmetria e curtosi del campione:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

dove n è il numero di osservazioni, S l'indice di skewness e K l'indice di curtosi della serie dei residui. Se il p -value associato alla statistica test risulta inferiore alla soglia critica del 5%, si rifiuta l'ipotesi nulla di normalità al livello di confidenza del 95%. L'applicazione del test di Jarque-Bera sulle serie dei residui ottenute dalle regressioni sia

per la componente *bond* sia per la componente *equity* ha confermato, per tutte le variabili considerate, il rifiuto dell'ipotesi di normalità.⁵

Data tale evidenza, l'approccio di stima richiede un'opportuna cautela: la differenza fondamentale tra la massima verosimiglianza (ML) standard e la quasi-massima verosimiglianza (QML) risiede nel calcolo della matrice di varianza-covarianza dei parametri strutturali. Mentre le stime puntuali dei parametri restano consistenti sotto entrambe le specificazioni, la stima ML tradizionale condurrebbe a una valutazione distorta degli errori standard in presenza di non-normalità. Di conseguenza, si è adottato lo stimatore QML, il quale mantiene la funzione di log-verosimiglianza gaussiana nella fase di ottimizzazione ma corregge la matrice di varianza-covarianza tramite una componente che rende la stima di quest'ultima asintoticamente *robusta*, anche nel caso in cui la vera distribuzione dei residui sia non gaussiana (il cosiddetto stimatore “sandwich” di white). Il beneficio che se ne trae è un'inferenza statistica valida (errori standard e *p*-value dei test di significatività precisi) anche a fronte della mancata normalità della distribuzione condizionale.

⁵ i risultati puntuali del test sono illustrati nel Capitolo 5.

5. Risultati

Prima di procedere con la stima del modello di correlazione condizionale, si è condotta l'analisi diagnostica sulle serie dei residui standardizzati derivanti dalla stima dei modelli GARCH univariati per le componenti bond ed equity.

Al fine di verificare l'assunzione di normalità distributiva, è stato applicato il test di Jarque-Bera (JB). I parametri di skewness (S) e curtosi (K) calcolati sulle serie dei residui standardizzati mostrano scostamenti significativi rispetto ai valori teorici della distribuzione normale gaussiana ($S=0$, $K=3$).

Serie	Skewness(S)	Curtosi(K)	Statistica JB	p-value
Residui Bond	0,0658	5,1248	81,013	< 0.001
Residui Equity	-0,7775	4,0675	63,589	< 0.001

Tabella 1_5 Test di Jarque-Bera sui residui Bond ed Equity

Come evidenziato dai p-value nettamente inferiori alla soglia critica del 5%, si rifiuta l'ipotesi nulla di normalità al livello di confidenza del 95%. In particolare, la serie Equity mostra un'asimmetria negativa marcata anche dopo la normalizzazione per la varianza condizionale, coerente con la tipica asimmetria delle code di perdita osservata nei rendimenti azionari, mentre la serie Bond presenta la curtosi più elevata tra le due serie, indice di code residue particolarmente spesse non catturate dalla sola modellizzazione della varianza condizionale. Tali risultati giustificano l'adozione dell'approccio Quasi-Maximum Likelihood (QML) nella fase di stima della

correlazione condizionale (DCC), con correzione robusta à la White per l'inferenza statistica dei parametri.

Nel primo stadio della procedura DCC, è stato stimato un modello GARCH(1,1) univariato con QML gaussiana per ciascuna delle 5 variabili considerate nello studio. La media condizionale è stata specificata come costante, $r_{i,t} = \mu_i + \epsilon_{i,t}$, mentre

l'equazione della varianza condizionale $\sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2$ ha fornito le

stime dei parametri riportate nella tabella seguente, con standard error robusti calcolati secondo la correzione sandwich di White.

Parametri stimati GARCH(1,1) QML gaussiano per ciascuna variabile

	μ	ω	α (ARCH)	β (GARCH)	$\alpha + \beta$
Real Rate	0.00 (t = 0.44; p = 0.66)	0.00** (t = 2.62; p = 0.01)	0.25** (t = 3.07; p = 0.00)	0.65*** (t = 8.23; p = 0.00)	0.90
CPI	-0.00 (t = -0.70; p = 0.49)	0.00 (t = 1.18; p = 0.24)	0.04 (t = 1.34; p = 0.18)	0.86*** (t = 9.02; p = 0.00)	0.90
ERP	-0.00 (t = -0.16; p = 0.88)	0.00 (t = 1.31; p = 0.19)	0.18*** (t = 3.38; p = 0.00)	0.82*** (t = 21.16; p = 0.00)	1.00
BRP	-0.01 (t = -0.74; p = 0.46)	0.02*** (t = 4.79; p = 0.00)	0.31* (t = 2.36; p = 0.02)	0.24 (t = 1.93; p = 0.05)	0.56
Exp Div Growth	-0.14 (t = -0.57; p = 0.57)	5.06* (t = 2.16; p = 0.03)	0.30** (t = 3.14; p = 0.00)	0.63*** (t = 6.16; p = 0.00)	0.93

*** p<0.001 ** p<0.01 * p<0.05 · Std. Error robusti QML (sandwich di White)

Tabella 2_5 Stime dei parametri GARCH(1,1) QML gaussiano per ciascuna variabile

Dall'analisi dei coefficienti emergono i seguenti aspetti:

- **Media condizionale:** il parametro non risulta mai statisticamente significativo (p-value sempre >0,05, con valori compresi tra 0,46 e 0,88 a seconda della serie), risultato atteso trattandosi di serie di variazioni/differenze prime, la cui media condizionale è correttamente prossima a zero.

- Sul parametro ω .** Il parametro rappresenta la componente costante (o "strutturale") della varianza condizionale — cioè il livello base di varianza che la serie manterrebbe in assenza di shock passati (α) e di volatilità pregressa (β). È l'intercetta dell'equazione GARCH e, insieme ai parametri α e β , determina la varianza incondizionata di lungo periodo del processo, calcolabile come: $\sigma^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta)$. Questa relazione è valida solo se il processo è covarianza-stazionario, cioè se $\alpha + \beta < 1$. Per ERP, la persistenza stimata è pari a 1,00 nella tabella arrotondata, ma il valore esatto risulta leggermente inferiore all'unità, per cui la condizione di stazionarietà risulta formalmente rispettata, seppur con un margine molto ridotto. Da un punto di vista di ammissibilità del modello, ω deve essere strettamente positivo — un valore nullo o negativo implicherebbe una varianza condizionata potenzialmente nulla o negativa in alcuni istanti, violando la definizione stessa di processo di varianza. Questa condizione risulta rispettata per tutte e cinque le variabili considerate, sebbene con livelli di significatività statistica differenti: ω risulta significativo per Real Rate ($p=0,01$), BRP ($p=0,00$) ed Exp Div Growth ($p=0,03$), mentre non raggiunge la significatività per CPI ($p=0,24$) ed ERP ($p=0,19$).
- Significatività statistica di α e β :** i parametri risultano significativi per la maggior parte delle serie, ma non uniformemente per tutte. In particolare, per CPI il parametro α non è statisticamente significativo ($p\text{-value} = 0,18$), suggerendo una componente ARCH debole per questa variabile; per BRP il parametro β non raggiunge la significatività al 5% ($p = 0,05$), indicando una persistenza della varianza al limite della soglia di significatività statistica rispetto

alle altre serie. In tutti gli altri casi, α e β sono significativi almeno al livello del 5%, confermando l'esistenza di dinamiche di volatility clustering.

- **Condizioni di stazionarietà:** per ciascuna variabile risultano rispettate le condizioni di ammissibilità ($\alpha + \beta < 1$). La somma di α e β risulta inferiore a 1 per quattro delle cinque equazioni (Real Rate: 0,90; CPI: 0,90; BRP: 0,56; Exp Div Growth: 0,93), garantendo la convergenza verso la varianza incondizionata di lungo periodo. Per ERP, tuttavia, la stessa quantità risulta pari a 1,00 nella tabella arrotondata a due decimali; il valore esatto non arrotondato si attesta leggermente al di sotto dell'unità⁶, per cui la condizione di stazionarietà in covarianza risulta formalmente rispettata, seppur di un margine molto ridotto. Il valore così prossimo a 1 configura comunque una situazione al limite della stazionarietà, cosa che implica una memoria della volatilità estremamente lunga e una convergenza molto lenta verso la varianza di lungo periodo.
- **Persistenza della volatilità:** con l'eccezione di BRP ($\beta=0,56$, persistenza contenuta), le altre quattro serie mostrano valori di β compresi tra 0,63 e 0,86, indice di una forte memoria della volatilità condizionale: gli shock sui mercati tendono a riassorbirsi molto lentamente nel tempo.

⁶ 0,998

Le stime della varianza per le 5 serie sono illustrate nel grafico sottostante.

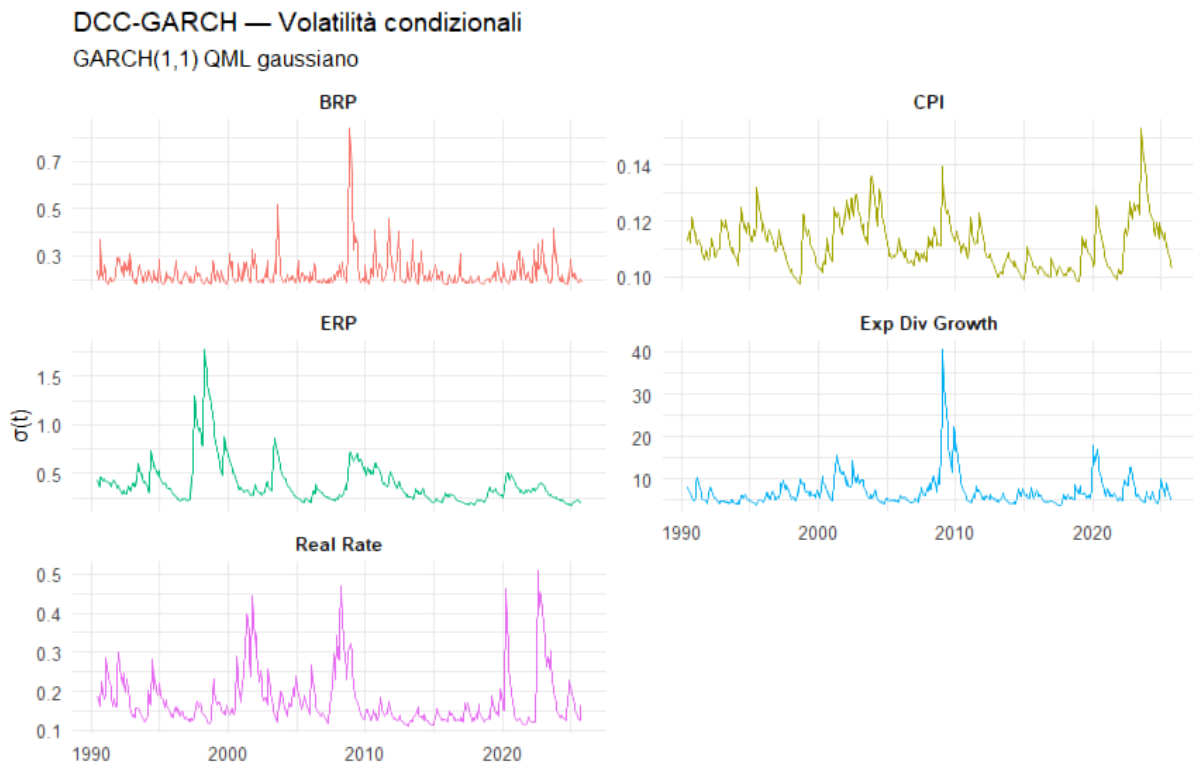


Figura 1_5 Volatilità condizionale delle variabili esplicative

Come si può notare in figura, la varianza condizionale presenta evidenti picchi di volatilità concentrati in corrispondenza di specifiche fasi di stress finanziario, alternati a periodi prolungati di relativa calma in cui la volatilità si mantiene su livelli contenuti e stabili. Questo comportamento è pienamente coerente con il fenomeno del *volatility clustering*, già anticipato dall'elevata persistenza $\alpha + \beta$ stimata nella fase di calibrazione dei modelli GARCH univariati: shock di ampiezza significativa tendono a essere seguiti da ulteriori shock di ampiezza simile, generando cluster di volatilità elevata ben visibili graficamente.

Un aspetto rilevante riguarda l'eterogeneità nell'intensità e nella tempistica dei picchi tra le diverse serie. Il picco più marcato e sincronizzato tra le variabili si osserva in

corrispondenza della crisi finanziaria globale del 2008, dove ERP ($\sigma \approx 1,6$), BRP ($\sigma \approx 0,7$) ed Exp Div Growth ($\sigma \approx 35$) raggiungono simultaneamente i massimi storici dell'intero campione, a testimonianza di un episodio di stress sistemico che ha investito contestualmente il premio per il rischio azionario, il rischio obbligazionario e le aspettative di crescita dei dividendi. Il Real Rate, diversamente, mostra una dinamica più erratica e ricorrente nel tempo, con picchi di intensità comparabile distribuiti su più fasi (anni '90, primi anni 2000, 2008, e nuovamente negli anni più recenti), a indicare una maggiore sensibilità di questa variabile a shock di natura anche non strettamente finanziaria (es. politica monetaria, inflazione attesa). Il CPI, infine, presenta un profilo di volatilità condizionale più contenuto in termini assoluti rispetto alle altre serie, ma con un incremento visibile e prolungato nella fase più recente del campione (successiva al 2020), verosimilmente riconducibile allo shock inflazionistico post-pandemico.⁷

Va infine sottolineato come questi picchi risultino evidenti nonostante la frequenza mensile dei dati. Il passaggio a dati mensili tende ad attenuare (*smoothing*) la volatilità di breve periodo osservabile a frequenza giornaliera, mediando shock che a livello giornaliero potrebbero risultare più estremi e concentrati in poche sedute. Il fatto che, anche a questa frequenza più aggregata, la varianza condizionale mostri picchi così marcati e distinguibili rafforza la robustezza del segnale di stress rilevato dal modello: con dati a frequenza giornaliera, infatti, l'ampiezza relativa di tali picchi sarebbe presumibilmente ancora più accentuata e meno soggetta all'effetto di smussamento indotto dall'aggregazione mensile.

⁷ La minore volatilità relativa della serie è coerente con la natura stessa della variabile: trattandosi di un'aspettativa di inflazione a 10 anni, e non di un'aspettativa a breve termine, la serie tende per costruzione ad assorbire e smussare l'impatto degli shock inflazionistici di breve periodo, poiché gli operatori di mercato incorporano l'ipotesi che le pressioni correnti si riassorbano nel tempo senza alterare in modo permanente il sentiero di lungo periodo. Un'aspettativa di inflazione a orizzonte più breve (ad esempio l'indice Michigan a 1 anno) risulterebbe invece molto più reattiva agli shock contingenti, riflettendo un orizzonte temporale in cui lo shock corrente pesa proporzionalmente di più.

Prima di passare all'analisi delle correlazioni, vengono presentati i risultati relativi alla stima dei coefficienti β ottenuti tramite regressione OLS sulle serie del Bond e dell'Equity analizzate.⁸

Stima dei Beta — Modello Bond (OLS)

Variable	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	Significance
(Intercept)	0.02	0.06	0.31	0.76	
RR	-2.61	0.37	-7.15	<1e-04	***
CPI	-11.79	0.59	-20.08	<1e-04	***
BRP	-4.34	0.27	-15.92	<1e-04	***

*** p<0.001 ** p<0.01 * p<0.05

Tabella 3_5 Stima dei beta del modello Bond (OLS)

Le stime relative all'equazione Bond risultano coerenti con le attese teoriche: tutti e tre i coefficienti presentano il segno negativo atteso, così come previsto dal modello (in cui i β teorici, positivi, entrano nell'equazione del rendimento con un'intensità meno marcata). Tutti i coefficienti risultano inoltre fortemente significativi, con p-value inferiori a 0,0001: il coefficiente di CPI è quello di maggiore intensità ($\beta = -11,79$), seguito da BRP ($\beta = -4,34$) e da RR ($\beta = -2,61$). Nel complesso, il modello Bond conferma con piena robustezza statistica l'impianto teorico di riferimento, con l'intercetta ($\alpha = 0,02$) non significativamente diversa da zero, coerentemente con le attese.

⁸ I valori di R^2 adjusted sono rispettivamente 0.24 e 0.32.

Stima dei Beta — Modello Stock (OLS)

Variable	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	Significance
(Intercept)	0.68	0.17	4.00	<1e-04	***
RR	1.69	0.95	1.78	0.076	
CPI	1.73	1.58	1.10	0.274	
ERP	-4.53	0.40	-11.25	<1e-04	***
G	0.15	0.02	6.71	<1e-04	***

*** p<0.001 ** p<0.01 * p<0.05

Tabella 4_5 Stima dei beta del modello Stock (OLS)

Per l'equazione relativa alla variabile Equity, la teoria prevede coefficienti negativi per rr, CPI ed ERP e un coefficiente positivo per g, che entra invece direttamente con segno positivo nell'equazione del rendimento. Le stime confermano questo quadro per le due variabili statisticamente significative: ERP presenta il segno negativo atteso ed è fortemente significativo ($\beta = -4,53$, $p < 0,0001$), mentre g presenta il segno positivo atteso ed è anch'esso altamente significativo ($\beta = 0,15$, $p < 0,0001$). L'unica variabile che si discosta dalla piena coerenza teorica è RR (segno positivo anziché negativo, $\beta = 1,69$), sebbene tale coefficiente si collochi solo marginalmente al di sopra della soglia di significatività convenzionale al 5% ($p = 0,076$). Anche CPI presenta un segno positivo anziché negativo ($\beta = 1,73$), ma risulta statisticamente non significativo ($p = 0,274$), per cui il suo segno non è interpretabile in modo affidabile e ad ogni modo non sembra inficiare la validità complessiva del modello, il cui potere esplicativo è trainato dalle componenti ERP e G.

Nel complesso, entrambi i modelli tendono a confermare l'impianto teorico di riferimento: le variabili di premio al rischio (BRP per il Bond, ERP per l'Equity) risultano negative e fortemente significative in linea con le attese, e la componente di

crescita attesa dei dividendi (g) conferma il proprio ruolo esplicativo positivo nel rendimento azionario.

Nel secondo stadio della procedura, i residui standardizzati $\epsilon_{i,t}$ ricavati dai modelli GARCH univariati sono stati utilizzati per stimare i parametri del modello Dynamic Conditional Correlation (DCC).

Parametri stimati DCC(1,1) – QML gaussiano congiunto

Parametro DCC	Stima (t-stat; p-value)
a (dcca1)	0.02 (t = 1.76; p = 0.08)
b (dccb1)	0.86*** (t = 12.20; p = 0.00)
a + b	0.88

*** p<0.001 ** p<0.01 * p<0.05 · Std. Error robusti QML (sandwich di White)

Tabella 5_5 Parametri stimati del modello DCC(1,1) QML Molenaar

Dall'ispezione della tabella emergono alcuni aspetti interessanti.

I vincoli del modello DCC risultano pienamente soddisfatti: $a \geq 0$, $b \geq 0$ e la loro somma $a + b = 0,88 < 1$. Questo garantisce che il processo di correlazione condizionale sia stazionario e che la matrice R_t rimanga definita positiva a ogni istante t .

Il parametro b , che cattura la persistenza della struttura di correlazione passata (Q_{t-1}), risulta pari a 0,86 ed è altamente significativo ($p < 0,001$), confermando che la dipendenza condizionale tra i cinque fattori è fortemente guidata dalla storia recente della correlazione stessa, con un'inerzia elevata. Il parametro a , che misura la reattività delle correlazioni a shock di breve periodo ($\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}$), risulta invece pari a 0,02 e statisticamente non significativo; non vi è quindi evidenza che un singolo shock congiunto nel periodo immediatamente precedente sia in grado di alterare in modo

autonomo la struttura di correlazione, la cui dinamica risulta interamente spiegata dalla componente di persistenza b . Questo risultato, tuttavia, trova una spiegazione coerente. Il parametro a è concettualmente costruito per cogliere una reattività "shock-driven" di brevissimo periodo, cioè la capacità della correlazione di reagire a un evento isolato nel periodo immediatamente precedente. A frequenza mensile, tuttavia, ogni osservazione è già il risultato di un processo di aggregazione temporale che media al proprio interno gli shock giornalieri, attenuando proprio quella componente di reattività istantanea che il parametro dovrebbe catturare. A ciò si aggiunge la natura di lungo periodo delle variabili sottostanti: coerentemente con quanto osservato per la volatilità condizionale del CPI, le variabili impiegate (in particolare le aspettative di inflazione a 10 anni) sono grandezze che per costruzione si muovono in modo graduale piuttosto che per "scatti" improvvisi legati a un singolo shock mensile, per cui il co-movimento tra i fattori risulta guidato da dinamiche strutturali persistenti (catturate da b) piuttosto che da reazioni impulsive a shock isolati (catturate da a).

5.1 Correlazione dinamica: confronto tra modello benchmark e modello Molenaar

Dopo aver esaminato nei paragrafi precedenti i risultati preliminari relativi alla stima dei modelli GARCH univariati sui singoli fattori, ai coefficienti stimati tramite regressione lineare e ai parametri del modello DCC, si procede ora all'analisi della correlazione dinamica condizionale tra i rendimenti azionari e obbligazionari, ottenuta secondo due approcci alternativi: un modello DCC bivariato applicato direttamente alle variazioni mensili dei rendimenti Stock e Bond (di seguito, *modello benchmark*), e il modello DCC a cinque fattori riconducibile all'impostazione teorica di Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang (di seguito, *modello Molenaar*), illustrata nel Capitolo 3.

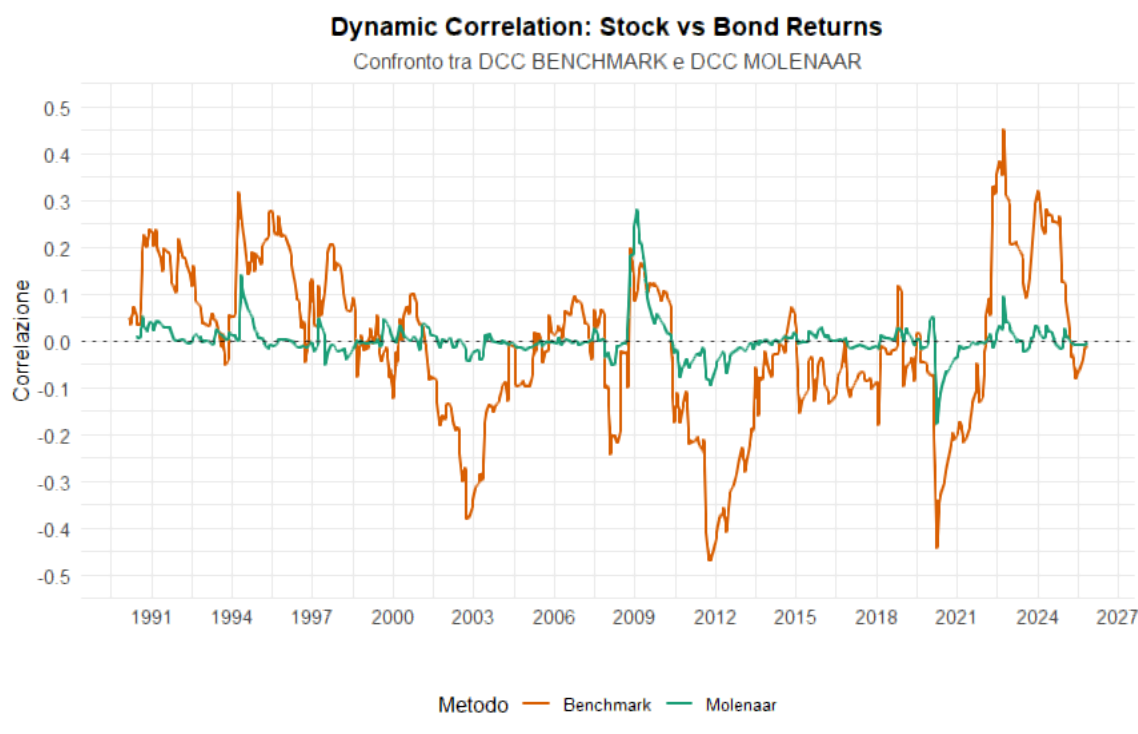


Figura 2_5 Correlazione dinamica tra rendimenti azionari e obbligazionari: confronto tra modello

benchmark e modello Molenaar

La correlazione dinamica stimata dal modello benchmark presenta un'elevata variabilità nel tempo, oscillando in un intervallo compreso approssimativamente tra -0,45 e +0,45, ed alternando fasi prolungate di segno positivo a fasi altrettanto marcate di segno negativo. La correlazione, infatti, risulta prevalentemente positiva nella prima parte del campione, tra la fine degli anni Ottanta e la metà degli anni Novanta, per poi attraversare una fase di progressiva discesa che la porta stabilmente in territorio negativo a partire dai primi anni 2000, con un minimo particolarmente accentuato in corrispondenza del biennio 2002-2003. Un comportamento analogo, con un brusco ritorno in territorio negativo, si osserva nel periodo 2008-2012, coerentemente con la crisi finanziaria globale prima e la crisi del debito sovrano europeo poi. La correlazione benchmark torna successivamente su valori vicini allo zero o lievemente positivi nella seconda metà degli anni 2010, per poi mostrare un nuovo, marcato affondo in territorio negativo nel 2020-2021, seguito da un'inversione altrettanto repentina che la porta, nel biennio 2022-2023, sui valori positivi più elevati dell'intero campione (oltre 0,45). Nel complesso, la serie benchmark è caratterizzata da cambiamenti di regime relativamente frequenti e da transizioni spesso brusche tra fasi di correlazione positiva e negativa. Tale andamento risulta coerente con quanto riportato in letteratura (cfr. Capitolo 1), dove la correlazione stock-bond viene tipicamente stimata attraverso semplici medie mobili a 36 mesi: anche in tali studi la correlazione risulta prevalentemente positiva fino ai primi anni 2000, per poi transitare stabilmente in territorio negativo nei due decenni successivi, e tornare su valori positivi solo nella fase più recente del campione, in corrispondenza del ciclo di rialzo dei tassi avviato nel 2022.

La correlazione dinamica stimata dal modello Molenaar mostra, al contrario, un andamento decisamente più contenuto in termini di magnitudine, variando in un intervallo molto più ristretto, approssimativamente compreso tra -0,10 e +0,10 per la quasi totalità del campione, con la sola eccezione di un picco isolato positivo, prossimo a 0,30, in corrispondenza della crisi Lehman Brothers (2008-2009). Per la maggior parte del periodo analizzato, la serie si mantiene su valori estremamente vicini allo zero, mostrando una tendenza sistematica a "gravitare" attorno alla linea dello zero piuttosto che a sostenere fasi prolungate di correlazione marcatamente positiva o negativa come invece osservato nel modello benchmark. Anche nelle fasi in cui la correlazione benchmark raggiunge i suoi valori estremi — ad esempio nel 2002-2003, nel 2008-2012 o nel 2020-2023 — il modello Molenaar mostra sì delle oscillazioni riconoscibili in corrispondenza degli stessi periodi, ma di ampiezza sistematicamente più contenuta.

L'analisi si concentra ora sul confronto diretto tra le due serie storiche di correlazione dinamica, con particolare attenzione ai periodi in cui le stime dei due modelli convergono maggiormente, per direzionalità e/o magnitudine, ed ai periodi in cui, al contrario, le stime risultano più discordanti.

A questo proposito, sono stati individuati tre sottoperiodi rappresentativi in cui i due modelli mostrano una concordanza di segno, dunque in termini di direzionalità, offrendo un primo spunto di validazione qualitativa del modello Molenaar rispetto al benchmark.

In particolare:

- **Dal 1990 all'inizio del 1994.** In questa prima fase del campione, entrambi i modelli stimano una correlazione di segno positivo, coerentemente con quanto atteso dalla letteratura per il periodo pre-2000. Il modello benchmark mostra un

incremento deciso, portandosi rapidamente su valori compresi tra 0,15 e 0,30; il modello Molenaar conferma la stessa direzionalità positiva per l'intero arco temporale considerato, sebbene su un'intensità nettamente più contenuta, oscillando attorno a valori prossimi a 0,05-0,08. Si tratta quindi di un caso di piena concordanza di segno e direzionalità lungo tutto il periodo, pur in presenza di una discrepanza di ampiezza tra i due approcci. È inoltre interessante notare come lo spike positivo di fine 1994 risulti evidente in entrambi i modelli: anche il modello Molenaar, pur nella sua minore intensità complessiva, riesce a cogliere tale impennata della correlazione, a conferma di una sensibilità del modello multifattoriale ai medesimi episodi intercettati dal benchmark.

- **Dalla metà del 2007 al 2015.** Questo sottoperiodo, che comprende la crisi finanziaria globale e la successiva crisi del debito sovrano europeo, mostra la concordanza più interessante tra i due modelli, sia in termini di segno sia, in alcuni tratti, di grandezza. In corrispondenza della fase più acuta della crisi 2008-2009, entrambi i modelli registrano un incremento marcato della correlazione, con il modello Molenaar che raggiunge in questa finestra temporale il proprio massimo assoluto dell'intero campione (circa 0,28-0,30), un valore che, in questo specifico frangente, si avvicina sensibilmente all'ordine di grandezza del benchmark. Successivamente, tra il 2011 e il 2012, in coincidenza con l'acuirsi della crisi del debito sovrano europeo, entrambi i modelli virano nuovamente verso il segno negativo: il benchmark tocca in questa fase il proprio minimo storico (circa -0,45), mentre il modello Molenaar, pur confermando la medesima direzionalità negativa, si attesta su valori molto più contenuti (circa -

0,10/-0,15). Il periodo si chiude, tra il 2013 e il 2015, con entrambe le serie che convergono su valori prossimi allo zero.

- **Dal 2020 al 2025.** Anche nell'ultima porzione del campione si osserva una concordanza di segno tra i due modelli, articolata in due fasi distinte. Nel biennio 2020-2021, in corrispondenza dello shock pandemico, entrambe le serie flettono in territorio negativo, con il benchmark che raggiunge un nuovo minimo locale (circa -0,45) e il modello Molenaar che, pur mostrando la medesima direzione, si mantiene su valori più moderati (circa -0,10). Nella fase successiva, tra il 2022 e il 2024, in concomitanza con il ciclo di rialzo dei tassi avviato dalle banche centrali, entrambi i modelli tornano in territorio positivo: il benchmark in maniera particolarmente marcata, toccando il massimo assoluto dell'intero campione (oltre 0,45), mentre il modello Molenaar conferma la stessa direzionalità positiva, per quanto con un'intensità decisamente più contenuta (circa 0,05-0,08).

È interessante notare come, pur nella minore ampiezza complessiva delle proprie oscillazioni, il modello Molenaar mostri comunque picchi ben distinguibili in corrispondenza del modello benchmark. Ad esempio, proprio perché la serie si muove per la maggior parte del tempo entro un intervallo molto ristretto attorno allo zero, i picchi registrati nel 1994, 2009, 2020 e 2022 risultano nettamente riconoscibili in termini relativi, a conferma della capacità del modello di cogliere gli stessi eventi individuati dal benchmark, seppur su una scala di intensità differente.

Accanto ai periodi di concordanza appena illustrati, è possibile individuare altrettante fasi in cui le stime dei due modelli risultano divergenti, sia in termini di segno e direzionalità sia, in alcuni casi, di ampiezza:

- **Dall'inizio del 1995 a metà 1996.** Subito dopo lo spike positivo di fine 1994 colto da entrambi i modelli, le due serie intraprendono percorsi opposti: mentre una delle due correlazioni prosegue la propria fase ascendente, l'altra imbocca una traiettoria discendente. Si tratta del primo caso di vera e propria discordanza direzionale tra i due approcci, in cui i modelli non solo divergono in intensità, ma restituiscono un segnale di segno opposto circa la dinamica in atto della correlazione stock-bond.
- **Da fine 1999 a inizio 2002.** Anche in questa finestra temporale — corrispondente alla fase di transizione dai valori positivi osservati a fine anni Novanta verso il territorio negativo che caratterizzerà il benchmark nel successivo 2002-2003 — le due serie mostrano un comportamento marcatamente divergente. Il modello benchmark segnala un movimento discendente piuttosto netto, mentre il modello Molenaar non replica con la stessa intensità tale dinamica, restando sostanzialmente ancorato su valori prossimi allo zero. Ne risulta una divaricazione significativa non solo di magnitudine ma, per buona parte di questo sottoperiodo, anche di direzionalità.
- **I periodi 2004-2007 e 2015-2018.** Questi due intervalli meritano una considerazione a parte, poiché la discordanza che li caratterizza è di natura differente rispetto ai casi precedenti. In entrambe le finestre temporali, la correlazione stimata dal modello Molenaar si mantiene pressoché costantemente in un intorno molto ristretto dello zero, con oscillazioni di ampiezza talmente

contenuta da risultare quasi impercettibili. Questo rende l'interpretazione particolarmente problematica: pur sembrando individuabile, a un'analisi più attenta, una certa concordanza di segno con il benchmark, tale corrispondenza appare più il risultato di micro-oscillazioni attorno allo zero che un segnale direzionale solido e distinguibile. In questi due periodi, più che di una vera discordanza di segno, sembra corretto parlare di un'assenza di segnale informativo da parte del modello Molenaar, la cui correlazione stimata risulta troppo debole per essere confrontata in maniera affidabile con le oscillazioni, ben più ampie, del modello benchmark.

Prima di attribuire tali discrepanze a una caratteristica strutturale del modello Molenaar, è opportuno interrogarsi su alcune possibili concause di natura più contingente, legate al comportamento specifico delle variabili esplicative in questi particolari sottoperiodi.

In primo luogo, l'analisi della volatilità dei singoli fattori nei periodi di maggiore discordanza (1995-inizio 2000 e 2015-2018) mostra un elemento comune particolarmente rilevante: sia il Real Rate sia l'Exp Div Growth presentano, in entrambe le finestre temporali, una varianza contenuta, priva di spike significativi, e stabilmente collocata nella parte bassa dell'intera serie storica. Poiché il tasso reale è una componente che entra simultaneamente nelle equazioni sia del rendimento azionario sia di quello obbligazionario, una sua varianza compressa si traduce meccanicamente in un contributo modesto alla covarianza tra le due asset class, e quindi in una correlazione stock-bond stimata dal modello Molenaar necessariamente attenuata, indipendentemente dalla direzionalità osservata nel benchmark.

Un'eccezione interessante a questo quadro di bassa variabilità è rappresentata dall'ERP, il cui spike più pronunciato nell'intero campione si verifica proprio nel 1998, con un'intensità superiore a quella registrata negli episodi successivi del 2001, 2008 e 2020. Tale spike, tuttavia, non si traduce in un analogo movimento della correlazione stock-bond stimata dal modello Molenaar: essendo l'ERP una componente teoricamente specifica del rendimento azionario, priva di un ruolo diretto nell'equazione obbligazionaria, la sua volatilità incide principalmente sulla varianza della componente azionaria, senza generare un corrispondente aumento della covarianza tra le due asset class.

Questo evidenzia come, nell'impianto teorico del modello, non sia la volatilità di un singolo fattore a determinare in modo univoco la correlazione stock-bond, quanto piuttosto la dinamica congiunta dei diversi fattori.

In secondo luogo, occorre considerare se in tali finestre temporali fossero in atto dinamiche esogene al modello, non catturate dai cinque fattori teorici considerati. Il riferimento più immediato è agli shock sui mercati petroliferi e alle materie prime — ad esempio la crisi petrolifera del 1999-2000, che ha preceduto lo scoppio della bolla dot-com — i quali possono aver generato movimenti di breve termine nei rendimenti azionari e obbligazionari non riconducibili a variazioni specifiche dei fattori, ma piuttosto a shock settoriali o geopolitici che il modello benchmark, non vincolato ad alcuna struttura teorica, è comunque in grado di "assorbire" nella propria stima, a differenza del modello Molenaar.

Infine, un terzo elemento da considerare riguarda gli specifici regimi di politica monetaria e macroeconomica attraversati in questi sottoperiodi. Il periodo 2015-2018, in particolare, è stato caratterizzato da una politica monetaria ancora fortemente

accomodante (tassi vicini allo zero, prosecuzione del *quantitative easing*), un contesto coerente con la bassa variabilità del tasso reale riscontrata empiricamente in questa finestra temporale, e che contribuisce a spiegare la limitata capacità del modello Molenaar di generare oscillazioni significative nella correlazione stimata in questi anni. Queste concause di natura contingente non sono tuttavia sufficienti, da sole, a spiegare la sistematicità con cui il modello Molenaar tende a produrre oscillazioni di grandezza più contenuta rispetto al benchmark, restando ancorato intorno allo zero proprio in corrispondenza dei periodi di minore variabilità dei fattori. Tale comportamento è infatti riconducibile, più in profondità, a una caratteristica strutturale del modello stesso.

A differenza del modello benchmark, un DCC bivariato stimato direttamente sui rendimenti Stock e Bond e privo di qualsivoglia vincolo teorico sulla trasmissione dei fattori di rischio, il modello Molenaar è per costruzione fortemente vincolato: la correlazione stock-bond non viene stimata liberamente, ma deriva interamente dalla combinazione dei coefficienti β , stimati separatamente tramite regressione lineare, e della matrice di varianza-covarianza condizionale, stimata tramite il modello GARCH-DCC multifattoriale. Ne consegue che la correlazione stimata dal modello Molenaar può muoversi solo entro i limiti imposti da questa struttura: se i fattori esplicativi mostrano bassa volatilità o covarianze contenute in un dato periodo — come osservato per Real Rate ed Exp Div Growth nei due sottoperiodi analizzati — la correlazione stock-bond risultante sarà necessariamente compressa verso lo zero, indipendentemente da eventuali dinamiche di mercato più perturbate che il benchmark, non essendo legato ad alcuna struttura fattoriale, è invece libero di catturare. Questa maggiore rigidità strutturale spiega, dunque, sia la sistematica minore ampiezza delle oscillazioni del

modello Molenaar rispetto al benchmark, sia la tendenza della correlazione stimata a appiattirsi verso lo zero proprio nei periodi in cui i fattori sottostanti — in particolare quelli condivisi da entrambe le equazioni — mostrano una dinamica meno erratica.

Conclusioni

Il presente lavoro ha analizzato la capacità del modello multifattoriale di Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang di spiegare l'andamento nel tempo della correlazione dinamica tra rendimenti azionari e obbligazionari nel mercato statunitense, un fenomeno la cui instabilit      stata ampiamente documentata in letteratura e verificata empiricamente anche nel presente elaborato. Il quesito di fondo che ha guidato l'intero lavoro pu   essere riformulato in questi termini: un modello teorico relativamente semplice, fondato su un numero contenuto di fattori macro-finanziari e su una struttura parsimoniosa,    in grado di catturare in maniera soddisfacente un fenomeno complesso e multiforme come la correlazione time-varying fra azioni ed obbligazioni?

I risultati ottenuti offrono una risposta prevalentemente positiva a questo interrogativo. Per la maggior parte del campione analizzato, la correlazione dinamica stimata dal modello Molenaar mostra una direzionalit   coerente con quella del modello benchmark, pur con un'ampiezza di oscillazione sistematicamente inferiore: si tratta del risultato principale dell'analisi, e rappresenta un primo, interessante elemento di validazione del modello teorico di riferimento. Il fatto che un impianto vincolato, fondato su soli cinque fattori esplicativi, riesca a replicare la direzione dei movimenti di un modello statisticamente libero come il DCC bivariato benchmark suggerisce che tali fattori — tasso reale, inflazione attesa, premio al rischio obbligazionario, premio al rischio azionario e crescita attesa dei dividendi — colgono effettivamente le determinanti economiche fondamentali della relazione stock-bond.

A questo elemento di validazione si affianca un ulteriore punto di forza, di natura più operativa: essendo costruito su variabili con orizzonte predittivo a un mese, il modello Molenaar si presta, in linea di principio, a un utilizzo anticipatorio, potenzialmente in grado di segnalare cambi di regime nella correlazione stock-bond prima che questi si manifestino pienamente nei dati realizzati, a differenza del modello benchmark le cui previsioni sono generate sulla base di due soli parametri (α e β del modello DCC bivariato). Va inoltre sottolineata la scelta metodologica di costruire l'inflazione attesa a partire da dati di sondaggio (survey-based) anziché sulla base della più diffusa prassi di mercato che utilizza l'inflazione realizzata passata come proxy di quella futura: tale scelta consente di ottenere non solo una stima del livello atteso di inflazione, ma anche una misura della dispersione delle aspettative tra i rispondenti, offrendo un'informazione più ricca e potenzialmente più solida rispetto all'approccio tradizionale.

Accanto a questi elementi di validazione, l'analisi condotta ha fatto emergere una serie di criticità, alcune riconducibili a scelte metodologiche specifiche, altre più intrinseche alla struttura stessa del modello, che meritano di essere esplicitamente discusse e che si offrono come spunti per la ricerca futura.

In primo luogo, il modello di Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang, specie nella componente di stima del rendimento azionario, mantiene una struttura relativamente semplice rispetto alla complessità del fenomeno che intende spiegare, e tale semplicità si riflette direttamente nel vincolo, forse il più rilevante tra quelli menzionati, rappresentato dalla costanza dei coefficienti β nel tempo. Tali coefficienti, stimati *una tantum* tramite regressione lineare sull'intero campione, impongono al modello un'esposizione ai fattori di rischio fissa nel tempo, mentre nella realtà tale sensibilità

può ragionevolmente variare in funzione dei regimi macroeconomici e delle decisioni di politica monetaria attraversati. Un'estensione naturale del presente lavoro potrebbe quindi consistere nella stima di coefficienti variabili nel tempo (time-varying), ad esempio tramite regressioni su finestre temporali rolling o tecniche di stima ricorsiva, potenzialmente in grado di cogliere con maggiore precisione le dinamiche osservate e di ridurre la differenza nella dinamica stimata delle due correlazioni.

In secondo luogo, va segnalata una criticità legata alla profondità storica del campione: se la copertura per il periodo successivo al 2000 appare adeguata, la disponibilità di dati per gli anni Novanta risulta più limitata, e l'assenza di un campione esteso ad esempio fino agli anni Settanta — periodo storicamente rilevante per la relazione stock-bond, basti pensare agli shock petroliferi e alle conseguenti fasi di stagflazione — impedisce di verificare la tenuta del modello in un regime macroeconomico strutturalmente diverso da quello coperto dal presente lavoro, caratterizzato da dinamiche di inflazione e crescita ben distinte da quelle osservate nel periodo campionario disponibile. Tale limitazione temporale potrebbe tradursi in una minore robustezza delle stime, sia dei coefficienti β sia dei parametri del modello GARCH-DCC, proprio nella porzione più risalente del campione, e resta un vincolo di natura essenzialmente esogena, legato alla disponibilità stessa dei dati piuttosto che a una scelta metodologica del presente lavoro.

Diversa è invece la natura del terzo ordine di criticità, riconducibile non alla profondità del campione, bensì alla specificità delle scelte applicate nella costruzione del modello, in particolare per quanto riguarda la coerenza degli orizzonti temporali adottati per le singole variabili esplicative. Resta infatti da verificare se l'orizzonte decennale scelto per la crescita attesa dei dividendi sia effettivamente il più adeguato, o se meriterebbe di essere ampliato, così come se l'orizzonte a tre mesi utilizzato per il tasso reale (Treasury

Bill) non risulti, al contrario, eccessivamente breve rispetto alla dinamica di più lungo periodo che il modello intende catturare. A differenza del limite precedente, si tratta in questo caso di un aspetto pienamente nelle possibilità di controllo del ricercatore, e non di un vincolo imposto dalla disponibilità dei dati: la scelta dell'orizzonte più opportuno per ciascuna variabile rappresenta un grado di libertà del modello che meriterebbe un'analisi di sensitività dedicata. Si tratta pertanto di un punto aperto, da trattare più specificamente nell'ambito di una possibile analisi di robustezza in un lavoro futuro, piuttosto che come conclusione definitiva del presente elaborato.

Un ulteriore limite, di natura più tecnica, è rappresentato dalla frequenza mensile dei dati impiegati, che potrebbe introdurre di per sé un effetto di lisciamento (*smoothing*) delle dinamiche di correlazione, contribuendo — indipendentemente dalle caratteristiche strutturali propri del modello Molenaar — a comprimere la volatilità osservata rispetto a quanto si otterrebbe con dati a frequenza più elevata, ad esempio settimanale.

Alla luce di quanto emerso, è possibile trarre una conclusione complessiva. Il modello di Molenaar, Sénéchal, Swinkels e Wang, pur scontando i vincoli strutturali appena discussi (in primis la costanza dei beta nel tempo) e pur mostrando margini di miglioramento sia sul piano della specificazione degli orizzonti temporali sia su quello della copertura campionaria, si dimostra nel complesso un modello solido, capace di cogliere in maniera coerente, seppur attenuata in termini di ampiezza delle relative oscillazioni, la direzionalità della correlazione dinamica tra rendimenti azionari e obbligazionari osservata empiricamente nel mercato statunitense. I risultati ottenuti possono pertanto ritenersi soddisfacenti: un impianto teorico parsimonioso, fondato su

un numero contenuto di fattori economicamente interpretabili, riesce a spiegare una parte rilevante delle dinamiche di un fenomeno complesso come la correlazione stock-bond, confermando la validità dell'approccio multifattoriale come chiave di lettura delle determinanti macro-finanziarie di tale relazione, e ponendo al contempo solide basi per i futuri sviluppi metodologici sopra delineati.

Bibliografia e Riferimenti

BALL L., *Why Does High Inflation Raise Inflation Uncertainty?*, “Journal of Monetary Economics”, 1992.

BOLLERSLEV T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, “Journal of Econometrics”, 1986.

BRIXTON A., BROOKS J., HECHT P., ILMANEN A., MALONEY T., MCQUINN N., *A Changing Stock–Bond Correlation: Drivers and Implications*, “The Journal of Portfolio Management”, 2023.

CAMPBELL J. Y., PFLUEGER C., VICEIRA L. M., *Macroeconomic Drivers of Bond and Equity Risks*, “Journal of Political Economy”, 2020.

DAMODARAN A., *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*, Wiley, New York, 1996.

DAVID A., VERONESI P., *The Economics of the Comovement of Stocks and Bonds*, in P. Veronesi (a cura di), *Handbook of Fixed-Income Securities*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2016.

ENGLE R. F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, “Econometrica”, 1982.

ENGLE R. F., *Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Heteroskedasticity Models*, “Journal of Business & Economic Statistics”, 2002.

FRIEDMAN M., *Nobel Lecture: Inflation and Unemployment*, “Journal of Political Economy”, 1977.

JARQUE C. M., BERA A. K., *Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals*, “Economics Letters”, 1980.

MOLENAAR R., SÉNÉCHAL E., SWINKELS L., WANG Z., *Empirical Evidence on the Stock–Bond Correlation*, “Financial Analysts Journal”, 2024.

PORTELLI L., RONCALLI T., *Stock-Bond Correlation: Theory & Empirical Results*, Amundi Investment Institute, 2024.

SHEN J., WEISBERGER N., *US Stock-Bond Correlation: What are the Macroeconomic Drivers?*, PGIM IAS, Newark, 2021.

FEDERAL RESERVE BANK OF ST. LOUIS, *FRED Economic Data*, Federal Reserve Bank of St. Louis, St. Louis

SHILLER R. J., *Shiller Data*, Yale University, New Haven,