



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE

TESI DI LAUREA

**Controllo sliding mode adattivo basato su
reti neurali per un manipolatore industriale**

**Neural Network-Based Adaptive Sliding Mode
Control for an Industrial Manipulator**

Relatore:

Prof. Gianluca Ippoliti

Candidato:

Riccardo Comodo

Correlatore:

Prof. Giuseppe Orlando

ANNO ACCADEMICO 2025/2026

*È come un'illogica allegria
Di cui non so il motivo
Non so che cosa sia
È come se improvvisamente
Mi fossi preso il diritto
Di vivere il presente.*

— GIORGIO GABER

Sommario

I manipolatori robotici sono intrinsecamente affetti da complesse dinamiche non lineari, incertezze parametriche e disturbi esterni, elementi che rendono inevitabile l'impiego di architetture di controllo robusto per garantire un accurato inseguimento di traiettoria. Per affrontare tale problematica, questo elaborato presenta la sintesi, l'implementazione in *Simulink* e la validazione comparativa di due differenti algoritmi di controllo applicati a un modello planare del manipolatore antropomorfo ERICC. Inizialmente è stato progettato un controllore *model-based* fondato sullo *sliding mode control*, adottando la tecnica *quasi-sliding mode* per mitigare il dannoso fenomeno del *chattering* sugli attuatori. Successivamente, l'attività si è focalizzata sullo sviluppo di un controllore adattivo *model-free* che integra una rete neurale a base radiale per stimare e compensare online la dinamica incognita del processo. Per garantire una stima sempre precisa e affidabile del sistema, ottimizzando simultaneamente l'onere computazionale, la topologia della rete è stata definita tramite un addestramento offline basato su algoritmi k-means e orthogonal least squares. Infine, le due strategie sono state testate e confrontate simulando l'inseguimento di traiettorie sia in condizioni nominali che in condizioni perturbate, come cicli operativi industriali *pick-and-place* soggetti a repentine variazioni di carico utile. L'analisi degli indici di prestazione ha permesso di quantificare oggettivamente il compromesso tra la precisione garantita dallo *sliding mode control* e la fluidità dell'approccio adattivo neurale.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Contesto e motivazioni del lavoro	1
1.2	I manipolatori	1
1.3	Il problema del controllo	2
1.4	Sliding mode control	2
1.5	Reti neurali e controllo adattivo	3
1.6	Obiettivi e struttura dell'elaborato	4
2	Il manipolatore ERICC	5
2.1	Descrizione generale	5
2.2	Architettura hardware e unità di governo	7
2.2.1	Attuatori	7
2.2.2	Trasduttori	8
2.2.3	Unità di controllo e riconfigurazione hardware	8
2.3	Ipotesi di lavoro	9
2.4	Parametri fisici	11
3	Modellazione cinematica e dinamica del manipolatore	13
3.1	Introduzione alla cinematica dei Robot	13
3.2	Convenzione di Denavit-Hartenberg	14
3.2.1	Assegnazione delle terne di riferimento	14
3.2.2	Definizione dei parametri caratteristici	14
3.2.3	Matrice di trasformazione omogenea	15
3.3	Cinematica differenziale e matrice jacobiana	17
3.4	Modello cinematico del manipolatore ERICC	17
3.4.1	Convenzione di Denavit-Hartenberg applicata al robot ERICC	18
3.4.2	Matrice jacobiana e singolarità del manipolatore ERICC	19
3.5	Introduzione alla dinamica dei robot	20
3.6	Formulazione di Eulero-Lagrange	21
3.6.1	Proprietà strutturali del modello dinamico	22
3.7	Modello dinamico del manipolatore ERICC	23
4	Controllo sliding mode	25
4.1	Fondamenti teorici dello sliding mode control	25
4.1.1	La superficie di scorrimento e la sliding phase	25
4.1.2	Attrattività e sintesi della reaching phase	26
4.1.3	Struttura del controllore e controllo equivalente	27
4.2	Sintesi del controllore per il manipolatore ERICC	28

4.2.1	Definizione della superficie di scorrimento	28
4.2.2	Sintesi della legge di controllo	29
4.2.3	Analisi di stabilità di Lyapunov	32
4.2.4	Quasi-sliding mode	33
5	Controllo adattivo basato su reti neurali	35
5.1	Introduzione alle reti neurali artificiali	35
5.1.1	Addestramento e capacità adattiva	36
5.1.2	Reti neurali a funzioni a base radiale	36
5.1.3	Teorema di approssimazione universale	38
5.2	Sintesi del controllore adattivo per il robot ERICC	39
5.2.1	Funzione della dinamica incognita del sistema	39
5.2.2	Legge di controllo	40
5.2.3	Analisi di stabilità secondo Lyapunov	41
5.2.4	Considerazioni implementative	42
5.3	Addestramento offline della rete RBF	43
5.3.1	Acquisizione del dataset	44
5.3.2	Allocazione dei centri tramite k-means	45
5.3.3	Potatura dei nodi tramite algoritmo orthogonal least squares	46
6	Implementazione in ambiente Simulink	48
6.1	Introduzione e struttura del modello	48
6.2	Generatore di traiettorie	48
6.2.1	Traiettoria lineare con raccordi parabolici	49
6.2.2	Traiettoria operativa industriale	49
6.3	Processo fisico	50
6.4	Controllore sliding mode	51
6.5	Controllore neuro-sliding mode	53
6.5.1	Modulo adattivo RBF	54
6.5.2	Modulo di sintesi SMC	56
7	Risultati delle Simulazioni	57
7.1	Introduzione	57
7.1.1	Indici di Prestazione	57
7.1.2	Parametri della simulazione	59
7.2	Validazione su traiettoria lineare con raccordi parabolici	59
7.2.1	Analisi Comparativa in Condizione Nominale	59
7.2.2	Analisi Comparativa in Condizione Perturbata	64
7.3	Validazione su traiettoria operativa industriale	69
7.4	Considerazioni finali	74
8	Conclusioni e Sviluppi Futuri	76
8.1	Conclusioni	76
8.2	Sviluppi futuri	77
	Bibliografia	78

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Contesto e motivazioni del lavoro

L'automazione industriale ha reso i sistemi robotici sempre più centrali nei moderni processi produttivi. In questo contesto, i manipolatori antropomorfi si distinguono per la loro destrezza cinematica, poiché consentono di posizionare e orientare con precisione un *end-effector* nello spazio operativo. Tuttavia, la presenza di disturbi esterni e di dinamiche accoppiate e non lineari richiede leggi di controllo avanzate, capaci di garantire l'inseguimento delle traiettorie di riferimento. Il presente elaborato analizza e valida numericamente architetture di controllo robusto e adattivo, con l'obiettivo di compensare incertezze parametriche e dinamiche non modellate. Le sezioni seguenti introducono il quadro teorico di riferimento: dai concetti di base della robotica si passa alle criticità del problema del controllo, fino ad arrivare ai paradigmi a struttura variabile e adattivi, che costituiscono il nucleo metodologico della tesi.

1.2 I manipolatori

Un manipolatore è un dispositivo meccanico programmabile concepito come un sistema formato da due apparati principali: una struttura meccanica ed un'unità di governo. La struttura meccanica del manipolatore risulta essere costituita come una catena di corpi rigidi, definiti *link*, collegati tra loro da giunti attuati. Tali articolazioni impongono i vincoli geometrici che determinano i gradi di libertà (*Degrees of Freedom*, DOF) dell'architettura complessiva, governando la mobilità del sistema tramite spostamenti angolari, nel caso di giunti rotoidali, o lineari, nel caso di giunti prismatici. All'estremità della catena cinematica è vincolato l'organo terminale (*end-effector*), ovvero un utensile con lo scopo di interagire con l'ambiente esterno e/o manipolare oggetti di vario tipo. L'unità di governo di un robot è composta sia da parti hardware che software. Gli scopi di quest'ultima sono molteplici, tra cui: dotare il sistema di un'interfaccia utente con l'operatore, programmare le traiettorie da eseguire e il controllo in tempo reale dei giunti.

1.3 Il problema del controllo

L'architettura meccanica di un manipolatore deve essere necessariamente affiancata da un'adeguata strategia di elaborazione per garantire l'ottenimento delle prestazioni operative desiderate. Il problema del controllo consiste nella formulazione di leggi matematiche in grado di determinare le azioni di comando necessarie a governare la dinamica del sistema. L'obiettivo primario in ambito robotico è tipicamente l'inseguimento di traiettoria, che impone al manipolatore di seguire fedelmente un riferimento dinamico nel tempo, minimizzando costantemente lo scostamento tra lo stato desiderato e quello reale.

Tale problematica viene affrontata mediante un'architettura in retroazione ad anello chiuso, schematizzata nella Figura 1.1, in cui il controllore elabora l'errore di inseguimento per generare prontamente l'azione correttiva da imporre agli attuatori.

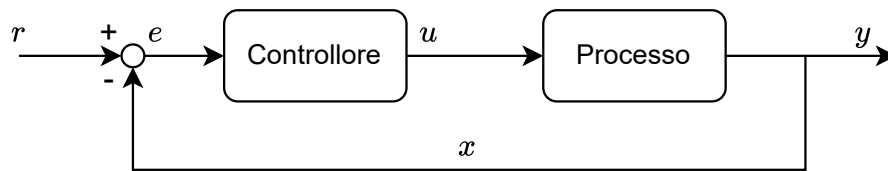


Figura 1.1: Schema a blocchi di un'architettura di controllo ad anello chiuso

Tuttavia, la criticità intrinseca di questa operazione risiede nelle ineliminabili discrepanze tra il sistema fisico reale e il modello matematico nominale impiegato per la sintesi della legge di controllo. Queste approssimazioni, che compromettono la stabilità e le prestazioni del sistema, si manifestano comunemente sotto forma di:

- incertezze parametriche (ad esempio il carico applicato);
- dinamiche non modellate in fase di progetto;
- fenomeni complessi di attrito non lineare o flessibilità ai giunti;
- disturbi provenienti dall'ambiente operativo.

L'interazione di questi fattori sfavorevoli, unita alla natura fortemente accoppiata della dinamica dei manipolatori, inficia pesantemente l'efficacia delle tecniche di controllo lineari classiche. Risulta pertanto ineludibile il ricorso a metodologie di controllo robusto, capaci di preservare la stabilità e garantire l'inseguimento di traiettoria anche in presenza di perturbazioni severe.

1.4 Sliding mode control

Tra le varie tipologie proposte in letteratura, lo *Sliding Mode Control* (SMC) rappresenta un principio cardine del controllo robusto per sistemi dinamici non lineari affetti da incertezze. Appartenente alla più ampia classe dei controlli a struttura variabile (*Variable Structure Control*, VSC), questo approccio si distingue per l'elevatissima capacità di reiezione ai disturbi.

Il principio cardine dello SMC si basa sull'impiego di una legge di controllo discontinua, progettata al fine di forzare la dinamica del sistema verso una varietà geometrica ideale definita dal progettista nello spazio degli stati, nota come superficie di scorrimento (*sliding surface*). Una volta intercettata la varietà, il sistema è costretto a evolvere e scivolare strettamente all'interno di essa. In tale fase, la dinamica dell'errore risulta asintoticamente stabile e di ordine ridotto.

L'implementazione pratica dello SMC è però fortemente penalizzata dal fenomeno del *chattering*. A causa della natura discontinua dell'azione di controllo e dei ritardi fisici degli attuatori, la traiettoria reale non scorre in modo idealmente continuo sulla superficie, ma oscilla attorno ad essa ad alta frequenza. Tali commutazioni generano sollecitazioni che possono usurare precocemente gli azionamenti meccanici ed eccitare dinamiche non modellate ad alta frequenza, rendendo necessarie strategie di mitigazione avanzate.

1.5 Reti neurali e controllo adattivo

La garantita robustezza teorica dello SMC classico, unita alla sua capacità di mantenere un errore di inseguimento pressoché nullo anche a fronte di perturbazioni severe, solleva tuttavia alcune limitazioni applicative. In primo luogo, richiede la disponibilità e l'impiego del modello dinamico nominale del processo, il quale si rivela spesso oneroso da identificare con adeguata precisione. In secondo luogo, al fine di dominare istantaneamente le incertezze di cui non si conosca l'entità massima a priori, lo SMC impone l'impiego di elevati guadagni di commutazione discontinua. Se da un lato questo approccio assicura una reiezione immediata del disturbo, dall'altro lato amplifica il *chattering*, causando un notevole stress meccanico agli attuatori.

Per ovviare a ciò, il presente elaborato valuta l'utilizzo di un controllore basato su reti neurali a Funzioni a Base Radiale (*Radial Basis Function*, RBF). Le reti RBF sono particolari reti neurali artificiali utilizzate principalmente per l'approssimazione, l'interpolazione e la classificazione di funzioni. Si distinguono per la loro elevata velocità di apprendimento e per l'architettura composta da soli tre livelli: input, strato nascosto e output.

In particolare, viene considerato un controllore neurale i cui pesi sinaptici sono aggiornati online mediante una legge di adattamento. Tale approccio consente di demandare alla rete l'approssimazione della dinamica incognita del sistema, riducendo la dipendenza da un modello matematico accurato del processo. L'aggiornamento continuo dei pesi permette inoltre di adattarsi alle variazioni della dinamica e alle perturbazioni esterne, migliorando la capacità di compensazione in tempo reale. Infine, poiché parte delle non linearità viene assorbita dal compensatore neurale, il contributo del termine discontinuo di controllo può essere ridotto, con un conseguente contenimento del fenomeno del *chattering* e una diminuzione delle sollecitazioni trasmesse agli attuatori.

L'introduzione di tale architettura adattiva comporta tuttavia una latenza fisiologica associata al processo di apprendimento della rete neurale. Sarà pertanto oggetto dell'analisi comparativa valutare l'impatto di questo ritardo sulle prestazioni complessive del sistema di controllo.

1.6 Obiettivi e struttura dell'elaborato

Il presente lavoro di tesi ha come obiettivo principale la sintesi, l'implementazione e la validazione numerica comparativa di due differenti architetture di controllo applicate a un modello planare ridotto a due gradi di libertà del manipolatore antropomorfo ERICC. Nello specifico, si confrontano una strategia di controllo robusto *model-based*, fondata sulla teoria classica dello *sliding mode control*, e un'architettura *model-free* di natura adattiva, che integra lo SMC con reti neurali a base radiale (RBF).

L'obiettivo del confronto è valutare oggettivamente il compromesso ingegneristico tra le due filosofie di controllo, quantificando il divario tra la precisione istantanea garantita dall'approccio classico e i benefici in termini di fluidità e risparmio energetico offerti dall'approccio neurale.

L'elaborato è strutturato come segue:

- **Capitolo 2 - Il manipolatore ERICC:** presenta le caratteristiche hardware, l'architettura elettromeccanica e le ipotesi di riduzione cinematica adottate per il sistema fisico di riferimento.
- **Capitolo 3 - Modellazione cinematica e dinamica del manipolatore:** illustra la derivazione del modello cinematico diretto mediante la convenzione di Denavit-Hartenberg e la formulazione del modello dinamico non lineare del manipolatore tramite l'approccio di Eulero-Lagrange.
- **Capitolo 4 - Controllo sliding mode:** presenta i fondamenti teorici e la sintesi della legge di controllo SMC *model-based*, affrontando il problema dell'inseguimento di traiettoria e la mitigazione del fenomeno del *chattering* mediante la tecnica *quasi-sliding mode*.
- **Capitolo 5 - Controllo adattivo basato su reti neurali:** formalizza la sintesi dell'architettura di controllo *model-free* SMC-RBF, includendo la definizione delle leggi di adattamento dei pesi sinaptici e la dimostrazione della stabilità a ciclo chiuso basata sulla teoria di Lyapunov.
- **Capitolo 6 - Implementazione in ambiente Simulink:** descrive l'implementazione dei modelli di simulazione sviluppati in ambiente *MATLAB/Simulink*, illustrando l'architettura del sistema, la realizzazione dei controllori *model-based* e *model-free*, nonché le modalità di integrazione della rete neurale RBF e la configurazione degli scenari di prova adottati per la validazione numerica.
- **Capitolo 7 - Risultati delle simulazioni:** presenta e analizza criticamente i risultati ottenuti in ambiente *MATLAB/Simulink*, offrendo una valutazione comparativa delle prestazioni dei controllori proposti in termini di inseguimento, reiezione ai disturbi esogeni e robustezza alle incertezze parametriche.
- **Capitolo 8 - Conclusioni e sviluppi futuri:** sintetizza i risultati conseguiti e delinea i possibili sviluppi della ricerca.

Capitolo 2

Il manipolatore ERICC

2.1 Descrizione generale

Il sistema fisico oggetto del presente elaborato, attualmente in dotazione presso il Laboratorio di Sistemi Meccatronici e Robotici del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII), è il manipolatore antropomorfo ERICC a cinque gradi di libertà (5-DOF), sviluppato da ABB Barras Provence. La sua architettura meccanica si ispira all'arto umano; per tale ragione, i corpi rigidi (*link*) che compongono la catena cinematica aperta sono convenzionalmente denominati tronco, braccio, avambraccio e polso.

Il manipolatore, ritratto in Figura 2.1, è progettato con il primo *link* rigidamente vincolato a terra, mentre l'estremità opposta evolve nello spazio operativo per posizionare e orientare l'organo terminale (*end-effector*).

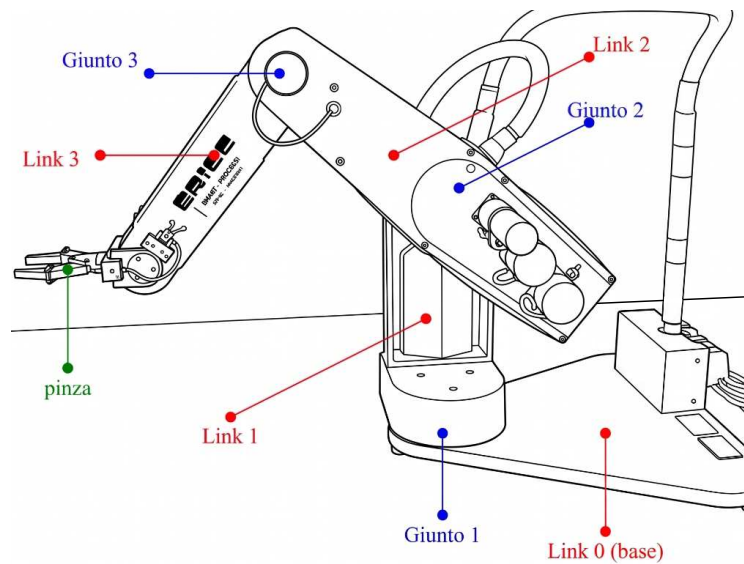


Figura 2.1: Configurazione reale del manipolatore ERICC

L'intera struttura portante del sistema è scomponibile nei seguenti elementi meccanici principali [1]:

- **Base:** realizzata in acciaio, presenta una massa considerevole per conferire stabilità all'intero assieme e ospita il perno centrale per il movimento di rotazione del robot attorno all'asse verticale.
- **Tronco:** realizzato in lega di alluminio, si innesta sulla base e genera l'articolazione della spalla. Ospita al suo interno i motoriduttori responsabili delle rotazioni del tronco e della spalla, trasmettendo il moto tramite un sistema di pulegge e cinghie dentate.
- **Braccio:** connette la spalla al gomito. Oltre alla sua funzione strutturale, presenta una peculiare distribuzione delle masse: alloggia al proprio interno sia il motoriduttore per l'attuazione del gomito, sia i due attuatori dedicati alla movimentazione del polso.
- **Avambraccio:** collega passivamente il gomito e il polso. Risulta privo di motori a bordo, limitandosi a trasportare il sistema differenziale di trasmissione per l'orientamento dell'organo terminale.
- **Polso e Organo Terminale:** garantisce l'orientamento spaziale grazie ad un meccanismo differenziale governato dagli attuatori situati nel braccio, in grado di generare combinazioni complesse di rotazione e inclinazione. Una caratteristica costruttiva fondamentale di questo sistema di trasmissione è la conservazione dell'inclinazione relativa del polso rispetto all'avambraccio, in modo del tutto indipendente dalla rotazione del gomito. L'estremità è infine equipaggiata con una pinza bidigitale, azionata da un attuatore lineare interno e impiegata per le operazioni di manipolazione fisica.

Per consentire il moto relativo tra i corpi rigidi appena descritti, l'architettura meccanica si avvale di specifiche articolazioni, denominate in robotica *giunti*. Il manipolatore ERICC impiega esclusivamente giunti di tipo rotoidale, ovvero snodi che permettono unicamente un moto di pura rotazione tra due *link* adiacenti. Di conseguenza, la variabile di giunto associata al giunto i -esimo coincide sempre con uno spostamento angolare θ_i . Nello specifico, i cinque gradi di libertà del sistema sono governati dalle seguenti variabili articolari:

- rotazione del tronco: θ_1 ;
- rotazione della spalla: θ_2 ;
- rotazione del gomito: θ_3 ;
- rotazione del polso: θ_4 ;
- inclinazione del polso: θ_5 .

Al fine di procedere con la modellazione matematica e l'analisi del moto, la struttura fisica del manipolatore viene astratta nel corrispondente schema cinematico. Tale rappresentazione grafica, illustrata in Figura 2.2, spoglia il robot dei suoi ingombri costruttivi per schematizzare i corpi rigidi come segmenti lineari ideali (i *link*) e gli snodi meccanici come cerniere.

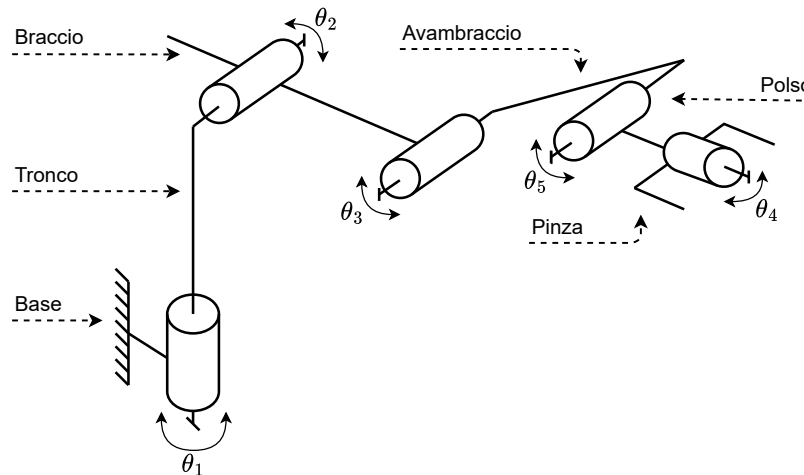


Figura 2.2: Schema cinematico 5-DOF del manipolatore ERICC

Lo schema cinematico permette di visualizzare la sequenza topologica della catena aperta e la disposizione degli assi di attuazione. Partendo dalla base fissa, la concatenazione dei cinque giunti rotoidali definisce l'intera evoluzione spaziale della struttura: il primo giunto (θ_1) ruota attorno a un asse verticale, mentre le articolazioni della spalla (θ_2), del gomito (θ_3) e dell'inclinazione del polso (θ_5) presentano assi di rotazione orizzontali e paralleli tra loro. Il quarto giunto (θ_4) introduce infine la rotazione assiale dell'organo terminale.

Dal punto di vista funzionale, le prime tre variabili articolari ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) governano il posizionamento spaziale dell'origine dell'organo terminale all'interno del volume di lavoro, mentre le restanti due (θ_4, θ_5) ne determinano l'orientamento locale per le operazioni di presa.

Il sistema nel suo complesso si compone, oltre che della struttura meccanica precedentemente descritta, di un'architettura hardware di bordo, comprensiva di attuatori e trasduttori, e di un'unità di governo dedicata. Nella sezione seguente verranno analizzati nel dettaglio i singoli componenti di tale architettura.

2.2 Architettura hardware e unità di governo

2.2.1 Attuatori

Per la generazione del moto articolare, il sistema si avvale di una configurazione ibrida di attuatori elettrici. I primi tre giunti, responsabili delle rotazioni di tronco, spalla e gomito, sono azionati da motori in corrente continua (CC) a collettore prodotti dall'azienda Portescap. I motori di questa tipologia impiegano un sistema meccanico a spazzole per la commutazione della corrente negli avvolgimenti rotori; questa caratteristica assicura un'erogazione di coppia regolare e una spiccata linearità di risposta, semplificando la gestione dell'azionamento. I restanti giunti del polso sono invece movimentati mediante motori passo-passo.

Come tipico degli azionamenti elettrici diretti, i motori in CC erogano elevate velocità rotazionali a fronte di coppie motrici modeste, incompatibili con i carichi

inerziali e gravitazionali imposti dai *link* del robot. Risulta pertanto necessario l'utilizzo di riduttori meccanici. Questi dispositivi hanno il compito di abbattere la velocità angolare all'albero di uscita, moltiplicando al contempo la coppia trasmessa al giunto.

Ai fini della modellazione dinamica del sistema, è emersa una criticità legata alla documentazione tecnica fornita dalla casa costruttrice, la quale riporta unicamente i rapporti di riduzione dei singoli motoriduttori. Per sopperire a tale mancanza e parametrizzare correttamente le costanti elettromeccaniche, si è reso necessario fare riferimento ai dati di targa di un componente affine. Nello specifico, è stato adottato il modello 28DT12 [2], prodotto dalla medesima azienda e del tutto analogo per dimensioni e caratteristiche di potenza agli attuatori installati sul manipolatore.

2.2.2 Trasduttori

Al fine di implementare le architetture di controllo in retroazione presentate in questo elaborato, risulta indispensabile monitorare in tempo reale lo stato cinematico interno del manipolatore. L'anello di controllo viene chiuso elaborando i segnali provenienti dalla sensoristica proprietaria installata a bordo macchina. La trasduzione delle grandezze meccaniche di interesse è affidata a due specifiche tipologie di sensori analogici:

- **Potenzimetri (misura di posizione):** montati direttamente sull'asse di ciascun giunto, fungono da trasduttori di posizione assoluta. Il loro principio di funzionamento si basa su un partitore di tensione resistivo: la rotazione del giunto sposta un cursore mobile lungo una pista conduttiva, generando un segnale in tensione in uscita che risulta strettamente proporzionale allo spostamento angolare assunto dal *link* (θ_i). Tale retroazione permette al controllore di conoscere l'errore di posizione istantaneo.
- **Dinamo tachimetriche (misura di velocità):** accoppiate meccanicamente all'albero dei motori in corrente continua, operano a tutti gli effetti come generatori elettrici elementari. Sfruttando la legge dell'induzione elettromagnetica, la rotazione del rotore all'interno di un campo magnetico fisso induce una forza elettromotrice ai morsetti. Il segnale in tensione così generato è direttamente proporzionale alla velocità angolare dell'albero motore ($\dot{\theta}_i$). Questa informazione permette di stimare la derivata dell'errore e di introdurre un adeguato smorzamento per stabilizzare la dinamica a ciclo chiuso.

2.2.3 Unità di controllo e riconfigurazione hardware

In ambito robotico, l'unità di controllo (o di governo) rappresenta il nucleo computazionale del sistema, preposto all'acquisizione dei riferimenti di traiettoria, all'elaborazione degli algoritmi di regolazione e alla conseguente generazione dei segnali di comando per gli attuatori. L'unità originale in dotazione al manipolatore ERICC si configura come un sistema integrato che racchiude sia la logica di calcolo a microprocessore, sia gli stadi di alimentazione e di potenza. Nella sua configurazione nativa, tale centralina prevede l'interfacciamento con l'operatore tramite un terminale grafico dedicato (*Minitel*), un'unità di comando manuale (telecomando) o un calcolatore esterno connesso via interfaccia seriale RS232.

Tuttavia, al fine di consentire l'implementazione e la validazione in tempo reale delle leggi di controllo avanzate discusse nel presente elaborato, si è reso necessario intervenire per attuare una riconfigurazione dell'architettura di controllo [3]. La strategia adottata prevede l'interfacciamento del manipolatore con un Personal Computer esterno mediante una scheda di acquisizione dati.

In questa nuova configurazione operativa, illustrata in Figura 2.3, la centralina proprietaria del robot viene aggirata dal punto di vista logico: cessa di operare come unità di controllo di posizione autonoma e agisce esclusivamente come stadio di amplificazione e interfacciamento. Nello specifico, dell'unità originale rimangono operativi solamente:

- **I moduli di potenza:** ricevono i segnali di controllo a bassa tensione generati dal PC (ovvero le azioni di controllo calcolate dall'algoritmo) e li amplificano, erogando le correnti necessarie al pilotaggio dei motori.
- **Le catene di acquisizione:** i segnali analogici provenienti dai trasduttori (potenziometri e dinamo tachimetriche) vengono instradati fisicamente verso la scheda di acquisizione del PC, permettendo al software di chiudere l'anello di retroazione e ricostruire istantaneamente lo stato cinematico del sistema.

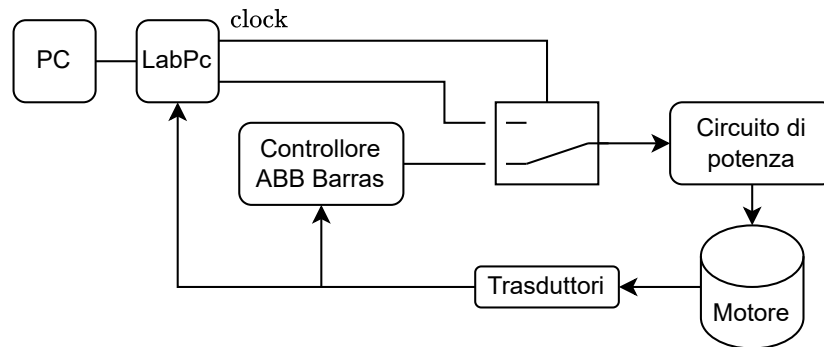


Figura 2.3: Schema del Collegamento

2.3 Ipotesi di lavoro

Come detto precedentemente, il manipolatore ERICC presenta nativamente una struttura spaziale a cinque gradi di libertà. Tuttavia, poiché l'obiettivo primario del presente lavoro risiede nella sintesi, nell'implementazione e nella validazione comparativa delle leggi di controllo, l'architettura cinematica originale è stata sottoposta a una mirata riduzione dimensionale, limitando lo studio a una configurazione a due gradi di libertà ($n = 2$).

Questa ipotesi semplificativa viene introdotta al fine di alleggerire l'onere computazionale e agevolare l'implementazione algoritmica in ambiente di simulazione, ma viene assunta senza alcuna perdita di generalità. Il sottosistema costituito dai due giunti principali, infatti, preserva integralmente la complessa dinamica del

manipolatore completo: esso esibisce una natura fortemente non lineare e accoppiata, includendo variazioni della matrice di inerzia, forze centrifughe e di Coriolis, gradienti gravitazionali e attriti.

Di conseguenza, il modello ridotto a 2 DOF costituisce un banco di prova teorico e pratico del tutto esaustivo per dimostrare la stabilità, la robustezza e l'efficacia delle architetture di controllo proposte, rendendo di fatto ridondante, ai soli fini della validazione metodologica, l'inclusione dei gradi di libertà residui.

Le ipotesi di riduzione geometrica adottate sono le seguenti:

- **Riduzione a sistema planare:** i giunti relativi alla rotazione del tronco alla base (θ_1), alla rotazione del polso (θ_4) e all'inclinazione del polso (θ_5) vengono considerati cinematicamente bloccati e mantenuti costanti nella loro configurazione di zero.

Attraverso tale assunzione, il manipolatore viene privato dei suoi moti tridimensionali, confinando l'evoluzione dell'organo terminale esclusivamente sul piano verticale. Il sistema reale viene così ricondotto a un manipolatore planare a due gradi di libertà (2-DOF), i cui unici giunti attivi e controllati risultano essere la spalla (θ_2) e il gomito (θ_3).

- **Link equivalente:** nella struttura meccanica reale del robot, l'avambraccio (*link* 3) e il corpo del polso (*link* 4) sono vincolati a mantenere un allineamento relativo costante in virtù del sistema di trasmissione meccanica interno precedentemente descritto. Sfruttando questa peculiare caratteristica costruttiva, e in stretta coerenza con il bloccaggio cinematico del polso, i due segmenti sono stati accorpati dal punto di vista modellistico, venendo fusi analiticamente in un unico *link* rigido equivalente.

La configurazione geometrica risultante dalle ipotesi di riduzione cinematica è illustrata nello schema planare a due gradi di libertà rappresentato in Figura 2.4.

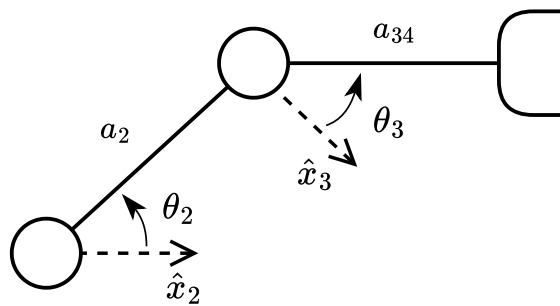


Figura 2.4: Struttura di manipolatore planare 2-DOF

2.4 Parametri fisici

A seguito della riduzione cinematica appena discussa, l'identificazione dei parametri fisici necessari alla derivazione del modello matematico fa riferimento esclusivamente all'architettura planare a due gradi di libertà, costituita dal *link* del braccio e dal *link* equivalente avambraccio-polso.

I valori numerici fondamentali, quali le lunghezze, le masse, la posizione dei rispettivi baricentri e i rapporti di trasmissione dei riduttori, sono stati estrapolati dalla documentazione tecnica ufficiale fornita dal costruttore [1]. I restanti parametri inerziali e dinamici, indispensabili per un'accurata modellazione, sono stati invece tratti da un precedente studio [4], nel quale l'architettura meccanica è stata analizzata mediante l'impiego del software di simulazione *Working Model 3D*.

Per chiarezza espositiva, le grandezze fisiche adottate nel presente elaborato sono organizzate nelle tabelle riportate di seguito. Nello specifico, le Tabelle 2.1 e 2.3 raccolgono le grandezze geometriche e inerziali dei *link*, mentre le Tabelle 2.2 e 2.4 sintetizzano le costanti elettromeccaniche relative agli attuatori della spalla e del gomito.

Come anticipato nella definizione delle ipotesi di riduzione cinematica, l'avambraccio (*link* 3) e il polso (*link* 4) sono stati accorpati dal punto di vista modellistico in un unico corpo rigido equivalente, denotato con il pedice 34. Di conseguenza, le grandezze fisiche riportate nella Tabella 2.3 derivano dalla combinazione dei due elementi strutturali originari. Nello specifico:

- la massa totale m_{34} e la lunghezza equivalente a_{34} corrispondono alla somma algebrica delle rispettive grandezze dei due segmenti ($m_{34} = m_3 + m_4$ e $a_{34} = a_3 + a_4$);
- la coordinata del baricentro c_{34} è stata calcolata come media pesata delle posizioni dei centri di massa originari rispetto al giunto del gomito;
- il momento di inerzia baricentrale I_{34} è stato ricavato applicando il teorema di Huygens-Steiner (teorema degli assi paralleli), al fine di traslare i momenti d'inerzia originari rispetto alla nuova posizione del centro di massa del sistema accorpato.

Tabella 2.1: Parametri geometrici e inerziali del Link 2 (Spalla)

Parametro	Descrizione	Valore	Unità
a_2	Lunghezza del link	0.2800	m
m_2	Massa del link	10.4995	kg
c_2	Coordinata baricentro	-0.0145	m
I_2	Inerzia baricentrale*	0.3159	kg · m ²
$\Delta\theta_2$	Range operativo	$[-45^\circ, +90^\circ]$	–

*Parametro stimato tramite *Working Model 3D*

Tabella 2.2: Parametri elettromeccanici e di attrito del Motore 2

Parametro	Descrizione	Valore	Unità
J_{m2}	Inerzia del rotore*	33×10^{-7}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
K_{r2}	Rapporto di riduzione	1233.3300	–
F_{v2}	Coeff. attrito viscoso*	0.817×10^{-3}	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
F_{sp2}	Attrito statico positivo*	0.1260	$\text{N} \cdot \text{m}$
F_{sn2}	Attrito statico negativo*	-0.0710	$\text{N} \cdot \text{m}$

*Parametro stimato tramite *Working Model 3D***Tabella 2.3:** Parametri geometrici e inerziali del Link 3 equivalente

Parametro	Descrizione	Valore	Unità
a_{34}	Lunghezza del link	0.4675	m
m_{34}	Massa del link	2.2426	kg
c_{34}	Coordinata baricentro	0.1970	m
I_{34}	Inerzia baricentrale*	0.0585	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$\Delta\theta_3$	Range operativo	$[-45^\circ, +90^\circ]$	–

*Parametro stimato tramite *Working Model 3D***Tabella 2.4:** Parametri elettromeccanici e di attrito del Motore 3

Parametro	Descrizione	Valore	Unità
J_{m3}	Inerzia del rotore	33×10^{-7}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
K_{r3}	Rapporto di riduzione	552.0800	–
F_{v3}	Coeff. attrito viscoso*	1.38×10^{-3}	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
F_{sp3}	Attrito statico positivo*	0.1320	$\text{N} \cdot \text{m}$
F_{sn3}	Attrito statico negativo*	-0.1050	$\text{N} \cdot \text{m}$

*Parametro stimato tramite *Working Model 3D*

Capitolo 3

Modellazione cinematica e dinamica del manipolatore

3.1 Introduzione alla cinematica dei Robot

La cinematica di un manipolatore descrive il moto del sistema in termini puramente geometrici, prescindendo dalle sollecitazioni (forze e coppie) che lo generano. L'obiettivo fondamentale dello studio cinematico consiste nel derivare un modello matematico che definisca una mappatura tra lo spazio dei giunti e lo spazio operativo:

- **Spazio dei giunti:** è lo spazio matematico di dimensione n (pari al numero di gradi di libertà del manipolatore) definito dal vettore:

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

La componente q_i identifica la coordinata generalizzata dell' i -esimo giunto, rappresentando uno spostamento angolare per i giunti rotoidali o una traslazione per i giunti prismatici.

- **Spazio operativo:** rappresenta l'insieme delle pose raggiungibili dall'organo terminale, ovvero la combinazione di posizione e di orientamento dell'*end-effector* rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Lo studio della mappatura tra tali domini si formalizza attraverso la risoluzione di due problemi fondamentali:

- **Cinematica diretta:** consiste nel calcolare la posa dell'organo terminale in funzione del vettore delle coordinate generalizzate $\mathbf{q}(t)$. Dal punto di vista matematico, si tratta di un problema di valutazione diretta che ammette sempre una soluzione analitica unica.
- **Cinematica inversa:** consiste nella determinazione del vettore $\mathbf{q}(t)$ necessario affinché l'organo terminale raggiunga una posa assegnata nello spazio operativo. Essendo la mappatura cinematica intrinsecamente non lineare, tale problema risulta complesso e può ammettere soluzioni multiple, infinite (in corrispondenza di singolarità cinematiche) o nessuna soluzione qualora la posa desiderata risieda al di fuori dello spazio di lavoro del robot.

Per derivare sistematicamente il modello cinematico di posizione in forma analitica, si adatterà la convenzione di Denavit-Hartenberg (D-H). Tale formalismo permette di descrivere univocamente la geometria di un manipolatore seriale mediante l'assegnazione di opportuni sistemi di riferimento ortonormali solidali a ciascun *link*, riducendo il problema cinematico globale a una sequenza di trasformazioni omogenee tra terne relative a *link* adiacenti. Sulla base di tali equazioni spaziali, la successiva derivazione differenziale consentirà di mappare le velocità articolari e di valutare analiticamente le restrizioni dello spazio di lavoro.

3.2 Convenzione di Denavit-Hartenberg

Dal punto di vista topologico, il formalismo introdotto da Denavit e Hartenberg nel 1955 [5] modella un manipolatore seriale (formato da catene cinematiche aperte) a n gradi di libertà come una sequenza di $n + 1$ corpi rigidi, denominati *link*, interconnessi sequenzialmente da n giunti di natura rotoidale o prismatica.

Secondo tale convenzione, i *link* presentano una numerazione progressiva da 0 a n : il *link* 0 identifica la base del manipolatore, assunta fisicamente vincolata e coincidente con il sistema di riferimento inerziale, mentre il *link* n costituisce l'organo terminale. In modo analogo, i giunti sono numerati da 1 a n , applicando la regola topologica per cui il giunto i -esimo interconnette il *link* $i - 1$ al *link* i .

Il principio cardine del metodo risiede nell'assegnazione sistematica di una terna di riferimento ortonormale solidale a ciascun *link*, vincolando le scelte geometriche per minimizzare il numero di parametri necessari a descriverne la trasformazione relativa.

3.2.1 Assegnazione delle terne di riferimento

Considerando l'asse del giunto i -esimo (che connette il *link* $i - 1$ al *link* i), la terna di riferimento i , solidale al *link* i , viene definita in base alla seguente convenzione:

1. l'asse z_{i-1} viene scelto in modo da essere allineato all'asse del giunto i (la scelta del verso positivo è arbitraria);
2. l'origine O_i del sistema di riferimento viene posizionata all'intersezione tra l'asse z_i e la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i ;
3. l'asse x_i viene scelto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i , con verso positivo diretto dal giunto i al giunto $i + 1$;
4. l'asse y_i è determinato in modo da completare una terna destrorsa.

3.2.2 Definizione dei parametri caratteristici

Una volta fissati i sistemi di riferimento secondo le regole suddette, la posizione e l'orientamento della terna i -esima rispetto alla terna $(i - 1)$ -esima risultano completamente specificati da quattro soli parametri cinematici, illustrati graficamente in Figura 3.1:

- a_i (lunghezza del *link*): è la distanza tra gli assi z_{i-1} e z_i , misurata lungo la normale comune x_i ;

- α_i (angolo di torsione del *link*): è l'angolo misurato attorno all'asse x_i tra la direzione di z_{i-1} e la direzione di z_i , valutato positivamente in senso antiorario;
- d_i (offset del giunto): è la distanza misurata lungo l'asse z_{i-1} dall'origine O_{i-1} all'intersezione dell'asse x_i con z_{i-1} ;
- θ_i (angolo di giunto): è l'angolo misurato attorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i , valutato positivamente in senso antiorario.

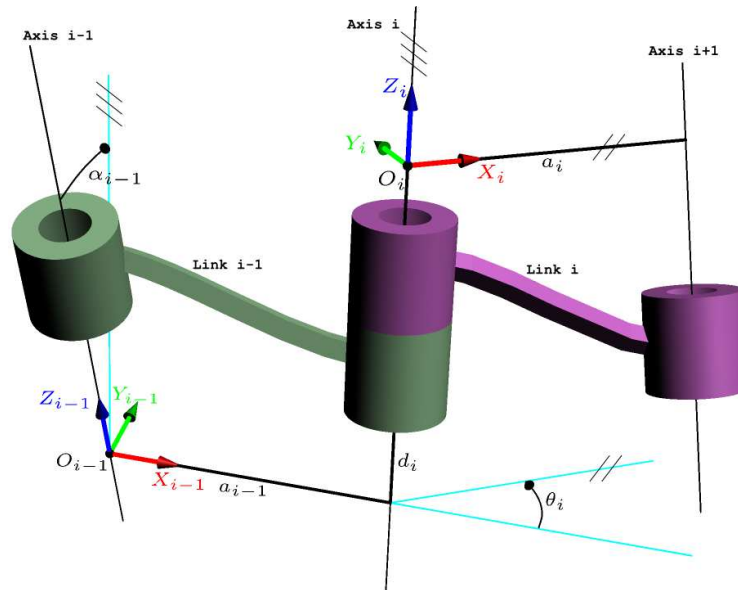


Figura 3.1: Parametri caratteristici di Denavit-Hartenberg

Di questi parametri, a_i e α_i dipendono esclusivamente dalla geometria costruttiva del braccio meccanico e risultano pertanto costanti. Degli altri due, uno solo sarà variabile in funzione della natura del giunto i -esimo, andando a definire la coordinata generalizzata q_i . In particolare, se il giunto è rotoidale, la coordinata generalizzata coinciderà con l'angolo di giunto ($q_i = \theta_i$), mentre l'offset d_i resterà costante; viceversa, se il giunto è prismatico, la variabile q_i sarà lo spostamento lineare d_i , mentre θ_i rimarrà costante.

3.2.3 Matrice di trasformazione omogenea

Attraverso l'impiego dei quattro parametri di Denavit-Hartenberg, si definisce la matrice di trasformazione omogenea in grado di esprimere le coordinate di un punto, note nel sistema di riferimento solidale al *link* i , rispetto al sistema di riferimento precedente. Tale trasformazione rappresenta la composizione di quattro trasformazioni rigide elementari, applicate in stretta sequenza:

1. una rotazione di un angolo θ_i attorno all'asse z_{i-1} ;
2. una traslazione di una quantità d_i lungo l'asse z_{i-1} ;
3. una traslazione di una quantità a_i lungo il nuovo asse x_i ;

4. una rotazione di un angolo α_i attorno al nuovo asse x_i .

Post-moltiplicando in sequenza le matrici associate a queste operazioni elementari, si ricava la matrice di trasformazione omogenea $A_i^{i-1}(q_i)$, la quale definisce univocamente la posa della terna i rispetto alla terna $i - 1$:

$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A_i^{i-1} dipende, oltre che dai parametri geometrici strutturali costanti (a_i, α_i), esclusivamente dall' i -esima variabile articolare q_i .

A questo punto, la convenzione di Denavit-Hartenberg, consente di formulare il modello cinematico diretto attraverso un'unica matrice di trasformazione globale $T_n^0(q)$. Tale operatore descrive in modo univoco la posa dell'organo terminale rispetto al sistema di riferimento inerziale, solidale alla base del manipolatore. Esso è definito come:

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdots A_n^{n-1}(q_n) = \prod_{i=1}^n A_i^{i-1}(q_i)$$

La matrice $T_n^0(q)$ presenta la classica struttura a blocchi delle trasformazioni roto-traslazionali, dalla quale è possibile estrarre in modo diretto le componenti spaziali dell'*end-effector*:

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & p_n^0(q) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

dove $R_n^0(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ è la matrice di rotazione che definisce l'orientamento della terna n -esima rispetto alla terna fissa, mentre $p_n^0(q) \in \mathbb{R}^3$ è il vettore di traslazione che identifica le coordinate cartesiane dell'origine della terna dell'organo terminale nello spazio operativo. Il vettore $\mathbf{0}^T$ rappresenta un vettore riga nullo di dimensione 1×3 .

Le equazioni ricavate finora esauriscono lo studio della cinematica diretta di posizione, definendo in modo univoco la mappatura non lineare dallo spazio dei giunti allo spazio operativo. Tuttavia, per la pianificazione e l'esecuzione di compiti robotici nello spazio cartesiano, risulta di primaria importanza affrontare il problema duale: la cinematica inversa.

Sebbene l'inversione della posa possa essere risolta, per manipolatori dalla struttura cinematica semplice, attraverso approcci geometrici o algebrici in forma chiusa, lo studio dei profili di moto richiede un'analisi a livello differenziale. Per mappare le velocità operative dell'organo terminale nelle corrispondenti velocità articolari, nonché per analizzare le configurazioni di singolarità e trasformare le forze di contatto, è necessario derivare una relazione lineare tra le variabili di giunto e quelle cartesiane. A tale scopo, la sezione seguente introduce e formalizza il calcolo della matrice jacobiana del manipolatore.

3.3 Cinematica differenziale e matrice jacobiana

Mentre la cinematica diretta stabilisce una relazione non lineare tra le posizioni articolari e la posa dell'organo terminale, la cinematica differenziale si occupa di mappare le velocità dello spazio dei giunti nelle corrispondenti velocità lineari e angolari dello spazio operativo.

Tale mappatura è governata da una trasformazione lineare descritta dalla matrice jacobiana $J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\dot{p} = J(q)\dot{q}$$

dove $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle velocità articolari e $\dot{p} \in \mathbb{R}^m$ rappresenta il vettore delle velocità generalizzate dell'*end-effector* (comprendente sia le componenti lineari che quelle angolari). In un generico spazio operativo tridimensionale, la posa completa dell'organo terminale è descritta da 6 gradi di libertà (tre di traslazione e tre di rotazione); di conseguenza, la dimensione dello spazio operativo è $m = 6$ e la matrice jacobiana assume dimensioni $6 \times n$.

Nel caso specifico dello jacobiano analitico, gli elementi della matrice si ottengono partendo dalle equazioni della cinematica diretta, ovvero calcolando le derivate parziali delle coordinate spaziali e degli angoli di orientamento rispetto alle singole variabili di giunto.

L'analisi della matrice jacobiana riveste un'importanza cruciale nello studio della robotica, poiché consente di individuare le singularità cinematiche, ovvero specifiche configurazioni meccaniche in cui $J(q)$ perde rango. Fisicamente, in una configurazione singolare il manipolatore perde uno o più gradi di libertà nello spazio operativo, rendendo impossibile il moto in determinate direzioni, indipendentemente dalle velocità impresse agli attuatori.

Nella sezione seguente, la metodologia sistematica di Denavit-Hartenberg e la cinematica differenziale, finora esposte in chiave puramente teorica, verranno applicate al manipolatore ERICC, al fine di derivare analiticamente le equazioni esatte della cinematica diretta e i punti di singolarità.

3.4 Modello cinematico del manipolatore ERICC

Coerentemente con le ipotesi di riduzione cinematica introdotte nella Sezione 2.3, la convenzione di Denavit-Hartenberg viene qui applicata all'architettura planare equivalente a due gradi di libertà. Lo stato cinematico del sistema viene pertanto descritto dal vettore delle coordinate generalizzate $q(t) = [q_2, q_3]^T$, legato alle articolazioni di spalla e gomito, le quali sono definite secondo i criteri geometrici del formalismo D-H.

È fondamentale sottolineare che tale vettore non coincide in modo diretto con quello formato dagli angoli di giunto θ_i rilevati dai trasduttori a bordo macchina. Come indicato nelle specifiche tecniche riportate nella Sezione 2.4, i finecorsa meccanici impongono per entrambi i giunti un *range* operativo nominale pari a $\theta_i \in [-45^\circ, +90^\circ]$. Tuttavia, il sistema di riferimento geometrico adottato dal costruttore definisce la configurazione di zero in modo differente rispetto all'approccio D-H: il costruttore pone l'asse di riferimento in direzione ortogonale allo sviluppo longitudinale del *link*, mentre la convenzione D-H impone per definizio-

ne che l'asse x_i giaccia esattamente lungo il corpo del segmento, orientato verso il giunto successivo.

Per compensare tale discrepanza e garantire un'esatta mappatura tra le misure fisiche acquisite e il modello matematico, si rende necessaria una trasformazione lineare di coordinate. Nello specifico, il giunto della spalla mantiene l'allineamento originario, mentre per il gomito si introduce un offset angolare costante pari a un angolo retto. Assumendo che le variabili di giunto siano state preventivamente convertite in radianti, si ha:

$$q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \theta_3 - \frac{\pi}{2}$$

Alla luce di tale trasformazione geometrica, i domini operativi effettivi delle coordinate generalizzate, che verranno impiegati per la simulazione e la validazione del sistema di controllo, risultano confinati nei seguenti intervalli espressi in radianti:

$$q_2 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \quad q_3 \in \left[-\frac{3}{4}\pi, 0\right]$$

3.4.1 Convenzione di Denavit-Hartenberg applicata al robot ERICC

Poiché gli assi di rotazione dei giunti attivi risultano paralleli tra loro e ortogonali al piano di moto, l'intera evoluzione del manipolatore è confinata su un piano verticale. Tuttavia, pur trattandosi di un sistema intrinsecamente planare, si è scelto di preservare il formalismo matriciale 4×4 tipico della convenzione di Denavit-Hartenberg. Questa scelta metodologica garantisce la piena compatibilità del modello con le formulazioni generali della robotica tridimensionale.

I parametri geometrici caratteristici risultanti per il manipolatore planare a due gradi di libertà sono sintetizzati nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1: Parametri di Denavit-Hartenberg per il modello ridotto del robot ERICC

Link i	a_i [m]	α_i [rad]	d_i [m]	θ_i [rad]
2	a_2	0	0	q_2
3	a_{34}	0	0	q_3

Sulla base dei parametri strutturali appena definiti, le matrici di trasformazione omogenea associate a ciascun *link* mobile della catena cinematica assumono la seguente forma analitica:

$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & a_{34} \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & a_{34} \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

post-moltiplicando in sequenza le matrici dei singoli *link* mobili, si ricava la matrice di trasformazione omogenea complessiva $T_3^1(\mathbf{q}) = A_2^1(q_2) \cdot A_3^2(q_3)$:

$$T_3^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_2 + q_3) & -\sin(q_2 + q_3) & 0 & a_2 \cos q_2 + a_{34} \cos(q_2 + q_3) \\ \sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & a_2 \sin q_2 + a_{34} \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

tale operatore descrive la posa complessiva dell'organo terminale rispetto alla terna fissa della spalla, assunta come origine del moto.

Questa scelta modellistica riduce la complessità del sistema, eliminando gli offset traslazionali costanti che sarebbero introdotti dalla presenza *link* 1 sia nella caratterizzazione cinematica, sia nel successivo calcolo delle energie potenziali in ambito dinamico.

Estraendo il vettore di traslazione $\mathbf{p}_3^1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ dalla matrice (3.1), in perfetta coerenza con la scomposizione strutturale formalizzata nella Sezione 3.2.3, si ricavano direttamente le equazioni esplicite della posizione dell'*end-effector*:

$$x_e(\mathbf{q}) = a_2 \cos q_2 + a_{34} \cos(q_2 + q_3) \quad (3.2a)$$

$$y_e(\mathbf{q}) = a_2 \sin q_2 + a_{34} \sin(q_2 + q_3) \quad (3.2b)$$

3.4.2 Matrice jacobiana e singularità del manipolatore ERICC

Come illustrato nella trattazione cinematica generale, la matrice jacobiana assume tipicamente dimensioni $6 \times n$ per mappare compiutamente le velocità lineari e angolari in uno spazio tridimensionale. Tuttavia, nel caso specifico del manipolatore ERICC, il modello differenziale subisce una riduzione, portando la matrice a dimensioni 2×2 . Tale semplificazione è giustificata dalle seguenti caratteristiche strutturali e operative del sistema:

- **Riduzione dello spazio dei giunti:** il manipolatore è attuato esclusivamente da due giunti rotoidali (spalla e gomito). Pertanto, il vettore delle velocità articolari possiede solo due componenti indipendenti, definendo il numero di colonne della matrice.
- **Riduzione dello spazio operativo:** poiché gli assi di rotazione sono paralleli, la velocità lineare lungo l'asse Z è strutturalmente nulla. Inoltre, l'assenza di un giunto di polso indipendente vincola l'orientamento della pinza alla configurazione dell'avambraccio, impedendo il controllo autonomo della velocità angolare dell'*end-effector*. Lo spazio operativo utile si riduce quindi alle sole componenti di velocità traslazionale nel piano di moto.

Una volta note le equazioni della cinematica diretta in termini di posizione, risulta dunque immediato estendere l'analisi al dominio delle velocità. La relazione lineare che lega le velocità nello spazio dei giunti $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$ alle velocità lineari dell'organo terminale $\dot{\mathbf{p}}_e = [\dot{x}_e, \dot{y}_e]^T$ è descritta dalla matrice jacobiana analitica $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Gli elementi dello jacobiano si ottengono calcolando le derivate parziali delle equazioni cinematiche di posizione rispetto alle variabili articolari q_2 e q_3 :

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_e}{\partial q_2} & \frac{\partial x_e}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y_e}{\partial q_2} & \frac{\partial y_e}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \sin q_2 - a_{34} \sin(q_2 + q_3) & -a_{34} \sin(q_2 + q_3) \\ a_2 \cos q_2 + a_{34} \cos(q_2 + q_3) & a_{34} \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

Come anticipato, la determinazione della matrice jacobiana permette di studiare le singularità cinematiche del manipolatore, ovvero quelle particolari configurazioni strutturali in cui la matrice perde rango.

Trattandosi, in questo caso specifico, di una matrice quadrata, la condizione di singularità coincide matematicamente con l'annullamento del suo determinante. Calcolando il determinante della matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ si ottiene:

$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = a_2 a_{34} \sin(q_3)$$

Essendo le lunghezze dei *link* a_2 e a_{34} grandezze costanti e strettamente positive, l'annullamento del determinante dipende esclusivamente dalla variabile articolare del gomito q_3 . Nello specifico, la condizione $\det(\mathbf{J}) = 0$ è verificata per:

$$\sin(q_3) = 0 \implies q_3 = 0, \quad q_3 = -\pi$$

Queste due soluzioni matematiche corrispondono a due precise condizioni fisiche del manipolatore:

- il braccio e l'avambraccio sono completamente allineati ed estesi;
- l'avambraccio è completamente ripiegato sul braccio.

Considerando che l'intervallo operativo effettivo del giunto 3 per il manipolatore ERICC è confinato a $q_3 \in [-\frac{3}{4}\pi, 0]$, l'unica configurazione singolare che l'algoritmo di controllo dovrà evitare durante l'inseguimento della traiettoria è quella corrispondente all'estensione massima del braccio ($q_3 = 0$).

3.5 Introduzione alla dinamica dei robot

L'analisi dinamica di un manipolatore definisce la relazione analitica tra le sollecitazioni generalizzate applicate al sistema e la conseguente evoluzione temporale del suo stato meccanico. La formulazione del modello dinamico risulta imprescindibile non solo per la validazione simulativa del progetto fisico, ma soprattutto per la sintesi di architetture di controllo avanzate in grado di garantire elevate prestazioni in termini di inseguimento di traiettoria.

Lo studio dell'interazione tra forze e movimento si articola nella risoluzione di problemi duali:

- **Dinamica diretta:** consiste nella determinazione del vettore delle accelerazioni articolari $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ (e, per successiva integrazione, dell'evoluzione cinematica globale) a partire dal vettore delle coppie motrici $\boldsymbol{\tau}(t)$ erogate dagli attuatori e dallo stato del sistema, definito in termini di posizioni $\mathbf{q}(t)$ e velocità $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

- **Dinamica inversa:** consiste nel calcolo analitico del vettore delle coppie motrici $\tau(t)$ strettamente necessarie affinché la struttura meccanica esegua una specifica traiettoria desiderata, definita istante per istante dalle grandezze cinematiche $(q, \dot{q}, \ddot{q})$.

Per la derivazione analitica delle equazioni del moto, la meccanica robotica adotta tipicamente due metodologie classiche: l'algoritmo di Newton-Eulero e la formulazione di Eulero-Lagrange. Il primo approccio si basa sull'equilibrio vettoriale di forze e momenti per ogni singolo *link*, procedendo in modo iterativo dalla base all'organo terminale e viceversa; tale natura ricorsiva lo rende computazionalmente molto efficiente per il calcolo numerico in tempo reale. Il metodo lagrangiano, al contrario, si fonda su un bilancio energetico globale dell'intero sistema, espresso unicamente in funzione delle coordinate generalizzate. L'applicazione di quest'ultimo approccio restituisce le equazioni del moto in una forma chiusa ed esplicita. Il principale vantaggio di questa formulazione risiede nella capacità di organizzare i vari contributi dinamici in una struttura matriciale, all'interno della quale risultano separati gli effetti inerziali, le coppie centrifughe e di Coriolis, e i termini gravitazionali.

Tale rappresentazione risulta particolarmente vantaggiosa sia per lo studio delle proprietà strutturali del sistema, sia per la successiva sintesi delle architetture di controllo avanzato. Alla luce di queste considerazioni, la presente trattazione si baserà sul formalismo di Eulero-Lagrange.

3.6 Formulazione di Eulero-Lagrange

La modellistica dinamica di un manipolatore robotico ha lo scopo fondamentale di stabilire la relazione matematica che lega il moto della struttura alle forze e coppie generalizzate che lo generano. In questo contesto, la derivazione del modello basata sulla formulazione di Lagrange costituisce un approccio analitico, sistematico e di validità generale.

Questo metodo, fondato su bilanci di natura puramente energetica, risulta particolarmente vantaggioso rispetto agli approcci vettoriali classici: esso permette infatti di superare le complessità legate alla determinazione delle forze di vincolo interno, operando direttamente nello spazio delle configurazioni mediante l'utilizzo di un set indipendente di coordinate generalizzate q_i .

Il punto di partenza per ricavare le equazioni del moto consiste nella definizione della funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, espressa come la differenza tra l'energia cinetica totale $K(q, \dot{q})$ e l'energia potenziale totale $U(q)$ dell'intero sistema meccanico:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q)$$

Una volta definita la Lagrangiana, il modello dinamico si ottiene calcolando le n equazioni differenziali di Eulero-Lagrange associate al sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

dove il termine Q_i rappresenta la forza generalizzata non conservativa associata all' i -esima coordinata q_i . Questo termine raggruppa tutti i contributi delle

sollecitazioni esterne e dissipative che compiono lavoro sul sistema. Nello specifico della robotica, Q_i ingloba le coppie o forze generate dagli attuatori ai giunti, gli attriti interni ai riduttori e le eventuali forze reattive scaturite dall'interazione dell'*end-effector* con l'ambiente circostante.

Si noti che, mentre per i giunti prismatici le forze generalizzate corrispondono a forze di traslazione f_i , nel caso di giunti rotoidali, esse coincidono con le coppie motrici τ_i impresse dai motori.

Sviluppando analiticamente le derivate previste dall'operatore (3.6) per un generico manipolatore a n gradi di libertà, il sistema di equazioni differenziali non lineari risultante viene riorganizzato. Separando i contributi inerziali e gravitazionali ed esplicitando le forze dissipative e di disturbo precedentemente inglobate nel termine non conservativo Q_i , il modello dinamico assume la seguente e compatta forma matriciale:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (3.3)$$

I termini che compongono la (3.3) descrivono dettagliatamente tutti gli effetti dinamici e perturbativi che agiscono sulla catena cinematica del manipolatore. Nello specifico:

- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ rappresentano rispettivamente i vettori delle posizioni, velocità e accelerazioni articolari, le cui componenti sono funzioni esplicite del tempo;
- $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice di inerzia del manipolatore, simmetrica e definita positiva per ogni configurazione q ;
- $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice che modella le forze centrifughe e di Coriolis;
- $G(q) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei termini gravitazionali;
- $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore che modella gli attriti dissipativi (statici e viscosi) agenti ai giunti;
- $\tau_d \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle perturbazioni di coppia incognite e dei disturbi esogeni tempo-varianti agenti sul sistema;
- $\tau \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle coppie motrici generalizzate erogate dagli attuatori.

3.6.1 Proprietà strutturali del modello dinamico

Le equazioni dinamiche ricavate mediante la formulazione di Eulero-Lagrange non costituiscono un semplice insieme di equazioni differenziali non lineari, ma godono di specifiche proprietà strutturali intrinseche. Tali caratteristiche risultano fondamentali per la dimostrazione della stabilità dei sistemi in anello chiuso e per la sintesi di architetture di controllo avanzate. Le due proprietà fondamentali di cui gode il modello dinamico di un manipolatore seriale sono le seguenti:

- **Emisimmetria:** La matrice definita dalla differenza $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ è emisimmetrica (*skew-symmetric*). Dal punto di vista analitico, ciò implica che per qualsiasi vettore non nullo $x \in \mathbb{R}^n$ vale la relazione:

$$x^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) x = 0$$

Questa proprietà è una diretta conseguenza del principio di conservazione dell'energia meccanica ed è di cruciale importanza: essa infatti verrà sfruttata esplicitamente nel Capitolo 5 per annullare termini complessi durante la derivazione della funzione candidata di Lyapunov, permettendo così di dimostrare la stabilità asintotica del controllore neurale.

- **Linearità nei parametri:** I parametri dinamici inerziali del manipolatore (masse, momenti di inerzia, distanze dei baricentri) compaiono linearmente all'interno delle equazioni del moto. È pertanto sempre possibile operare una fattorizzazione isolando un vettore di parametri fisici costanti π dalla cosiddetta matrice dei regressori cinematici $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$, riscrivendo la dinamica di corpo rigido nella forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi$$

3.7 Modello dinamico del manipolatore ERICC

Sulla base dell'architettura planare a due gradi di libertà definita nella Sezione 2.3, in cui il primo *link* risulta bloccato e il moto è interamente demandato ai giunti secondo e terzo, il modello dinamico del manipolatore ERICC viene esplicitato particolarizzando i termini della struttura matriciale generale (3.3).

Facendo riferimento alla parametrizzazione proposta in [6], le proprietà inerziali e le forze apparenti del sistema sono modellate rispettivamente dalla matrice di inerzia $M(q)$ e dalla matrice di Coriolis $C(q, \dot{q})$:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha + 2\varepsilon \cos q_3 + J_{m2}K_{r2}^2 + J_{m3} & \beta + \varepsilon \cos q_3 + J_{m3}K_{r3} \\ \beta + \varepsilon \cos q_3 + J_{m3}K_{r3} & \beta + J_{m3}K_{r3}^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\varepsilon \sin(q_3)\dot{q}_3 & -\varepsilon \sin(q_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \varepsilon \sin(q_3)\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto concerne invece le forze esterne e dissipative agenti sulla catena cinematica, l'effetto della gravità è descritto dal vettore $G(q)$:

$$G(q) = \begin{bmatrix} \varepsilon e_2 \cos(q_2 + q_3) + (\alpha - \beta + e_1)e_2 \cos q_2 \\ \varepsilon e_2 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

mentre il vettore di attrito $F(\dot{q})$ ingloba un contributo viscoso, strettamente proporzionale alla velocità, e un termine di Coulomb:

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} F_{s2} + F_{v2}\dot{q}_2 \\ F_{s3} + F_{v3}\dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

in cui i coefficienti di attrito di Coulomb asimmetrici F_{si} dipendono dal segno della velocità articolare:

$$F_{si} = \begin{cases} F_{spi} & \text{se } \dot{q}_i > 0 \\ F_{sni} & \text{se } \dot{q}_i < 0 \end{cases}, \quad \text{per } i = 2, 3.$$

I parametri dinamici aggregati introdotti nelle matrici precedenti sono ricavati in funzione delle grandezze fisiche fondamentali dei singoli *link*, quali le masse (m_i), i momenti d'inerzia baricentrici (I_i), le lunghezze (a_i) e le distanze dei

centri di massa dalle articolazioni (c_i). Nello specifico, essi assumono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\alpha &= I_2 + m_2 c_2^2 + I_{34} + m_{34} c_{34}^2 + m_{34} a_2^2 \\ \beta &= I_{34} + m_{34} c_{34}^2 \\ \varepsilon &= m_{34} a_2 c_{34} \\ e_1 &= m_2 a_2 c_2 - I_2 - m_2 c_2^2 \\ e_2 &= \frac{g}{a_2}\end{aligned}$$

L'eventuale manipolazione di un carico utile (*payload*) da parte dell'*end-effector* non altera la struttura matriciale del modello dinamico appena descritto, ma si riflette esclusivamente in una variazione dei parametri inerziali del sistema. Assumendo di schematizzare il carico come una massa puntiforme m_p posta in corrispondenza dell'organo terminale (ovvero a distanza a_{34} dal giunto 3), i nuovi parametri equivalenti risultano:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha + m_p (a_2^2 + a_{34}^2) \\ \beta^* &= \beta + m_p a_{34}^2 \\ \varepsilon^* &= \varepsilon + m_p a_2 a_{34}\end{aligned}$$

I termini e_1 ed e_2 rimangono invariati, poiché dipendono esclusivamente dalla geometria e dalla massa del *link* 2, il quale non subisce alterazioni durante la presa del carico. Per i valori numerici nominali associati ai parametri geometrici, inerziali e di attrito del manipolatore, si rimanda alla trattazione dettagliata presentata nella Sezione 2.4.

Alla luce delle proprietà strutturali del modello dinamico precedentemente discusse, è opportuno osservare la natura dei parametri appena definiti. I coefficienti α , β , ε ed e_1 raggruppano esclusivamente le grandezze inerziali del manipolatore. Essi costituiscono pertanto il vettore dei parametri dinamici $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^4$ rispetto al quale il modello del robot ERICC risulta lineare:

$$\boldsymbol{\pi} = [\alpha, \beta, \varepsilon, e_1]^T$$

Al contrario, il coefficiente e_2 non essendo legato alla distribuzione delle masse, è una costante puramente geometrica, e come tale non rientra nel vettore dei parametri inerziali $\boldsymbol{\pi}$ soggetti a potenziale stima o incertezza.

In conclusione, per gli scopi di simulazione prefissati nel presente elaborato, il modello dinamico viene impiegato nella sua forma diretta. Sfruttando la proprietà intrinseca della matrice di inerzia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ di essere simmetrica e strettamente definita positiva in ogni configurazione (risultando pertanto sempre non singolare e invertibile), è possibile esplicitare il vettore delle accelerazioni articolari $\ddot{\mathbf{q}}$ dall'equazione generale (3.3). Si ottiene così la relazione differenziale esplicita che governa l'evoluzione dello stato del sistema:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau}_d] \quad (3.4)$$

Questa equazione rappresenta il nucleo matematico che verrà implementato all'interno dell'ambiente di simulazione, permettendo di valutare l'efficacia delle architetture di controllo proposte. I dettagli di tale implementazione pratica in *Simulink* verranno trattati nel Capitolo 6.

Capitolo 4

Controllo sliding mode

4.1 Fondamenti teorici dello sliding mode control

Quando si affrontano problemi di controllo complessi, è fondamentale sviluppare un modello matematico che rappresenti in modo sufficientemente accurato le dinamiche rilevanti del sistema ai fini della progettazione del controllore. Tuttavia, esistono sempre discrepanze intrinseche tra il processo reale e il modello nominale impiegato per la sintesi del controllore. Tali differenze si traducono in incertezze, le quali impongono la progettazione di architetture di controllo capaci di operare efficacemente anche in presenza di esse. Questo approccio definisce l'ambito del controllo robusto.

Una delle principali metodologie per la sintesi di controllori robusti è rappresentata dal Controllo a Struttura Variabile (*Variable Structure Control*, VSC), introdotto in Unione Sovietica agli inizi degli anni '50. Il VSC si basa sull'impiego di leggi di controllo che modificano la propria struttura in funzione della regione dello spazio di stato in cui evolve il sistema.

Lo *Sliding Mode Control* (SMC) rappresenta una delle tecniche di controllo a struttura variabile più consolidate e utilizzate. Il principio cardine dello SMC si basa sull'impiego di una legge di controllo discontinua, progettata al fine di forzare la dinamica del sistema verso una varietà di scorrimento (*sliding surface*) nello spazio di stato.

L'evoluzione della dinamica del sistema controllato può essere infatti suddivisa in due fasi temporali distinte:

- **Fase di raggiungimento (*reaching phase*):** la traiettoria di stato converge verso la superficie di scorrimento a partire da una condizione iniziale arbitraria.
- **Fase di scorrimento (*sliding phase*):** una volta raggiunta la superficie, la traiettoria rimane confinata su di essa, o in un suo intorno, ed evolve secondo la dinamica desiderata.

Nelle sezioni seguenti verranno analizzate in dettaglio queste fasi e le relative procedure di sintesi del controllore.

4.1.1 La superficie di scorrimento e la sliding phase

Per l'analisi della fase di scorrimento, si rende necessario introdurre la definizione analitica della superficie di scorrimento. Al fine di preservare la chiarezza meto-

dologica e l'immediata comprensione dei vincoli geometrici, la trattazione teorica iniziale verrà sviluppata facendo riferimento a un generico sistema non lineare *Single input Single Output* (SISO) di ordine n . Tale scelta non inficia la validità dell'approccio, poiché i principi di attrattività e scorrimento si estendono in modo naturale al caso multivariabile tramite il formalismo vettoriale. Si consideri, dunque, il seguente sistema di ordine n :

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(n)} &= f(x, t) + b u(t) \\ \mathbf{x} &= [x \quad \dot{x} \quad \dots \quad x^{(n-1)}]^T \end{aligned}$$

Definendo l'errore di tracciamento rispetto alla traiettoria desiderata x_d come:

$$e(t) = x_d(t) - x(t)$$

la superficie di scorrimento viene formalizzata tramite una variabile scalare $s(t)$, costruita come combinazione lineare dell'errore e delle sue derivate fino all'ordine $n - 1$:

$$s(t) = \mathbf{C} \mathbf{e} = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(n-1)} \quad (4.1)$$

La variabile $s(t)$ rappresenta una misura cinematica dello scostamento del sistema dalla condizione nominale. Nello specifico, la superficie di scorrimento è identificata dal luogo geometrico dei punti dello spazio di stato per cui:

$$s(t) = 0$$

Geometricamente, tale vincolo definisce una varietà dello spazio di stato di dimensione $n - 1$. Una volta che la traiettoria intercetta la superficie $s(t) = 0$, il sistema perde un grado di libertà e viene costretto a evolvere esclusivamente all'interno di tale varietà geometrica. Questo fenomeno si traduce in una riduzione dell'ordine della dinamica del sistema complessivo.

I coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ della (4.1) vengono selezionati in fase di sintesi affinché il polinomio caratteristico associato risulti essere un polinomio di Hurwitz. Questa condizione garantisce la stabilità asintotica della dinamica nello *sliding mode* durante la fase di scorrimento. Di conseguenza, l'errore di tracciamento converge asintoticamente a zero secondo una dinamica di ordine ridotto stabile, il cui comportamento dipende unicamente dai parametri progettuali c_i e risulta intrinsecamente robusto rispetto a incertezze parametriche e disturbi esterni limitati.

4.1.2 Attrattività e sintesi della reaching phase

Affinché la fase di scorrimento possa instaurarsi, è strettamente necessario garantire che la traiettoria di stato intercetti la superficie di scorrimento partendo da una qualsiasi condizione iniziale. Questo requisito introduce il concetto fondamentale di attrattività della superficie.

Per assicurare matematicamente tale attrattività, si ricorre alla teoria della stabilità di Lyapunov. Considerando una funzione candidata definita positiva $V = \frac{1}{2} s^2$, la condizione per garantire la stabilità asintotica della superficie impone che la sua

derivata temporale sia strettamente negativa, ovvero $s\dot{s} < 0$. Tuttavia, per assicurare che il sistema raggiunga la superficie in un tempo strettamente finito e non asintotico, e per mantenere un'elevata robustezza anche in presenza del caso peggiore di incertezze, si impone la cosiddetta condizione di raggiungimento forte:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \eta > 0 \quad (4.2)$$

Per guidare lo stato verso la superficie soddisfacendo la (4.2), si definisce una legge di raggiungimento (*reaching law*) che specifica a priori la dinamica temporale desiderata per la variabile di *sliding* s . Le principali formulazioni classiche presenti in letteratura sono:

1. Constant Rate Reaching Law: vincola la variabile di commutazione a raggiungere la varietà di *sliding* a un tasso temporale costante K . È espressa analiticamente come:

$$\dot{s} = -K \operatorname{sgn}(s), \quad K > 0 \quad (4.3)$$

Il merito di questa formulazione risiede nella sua estrema semplicità; tuttavia, se il parametro K viene scelto troppo piccolo, il tempo di raggiungimento diventa eccessivo, mentre un valore troppo elevato innesca severe oscillazioni ad alta frequenza attorno alla superficie.

2. Exponential Reaching Law: introduce un termine proporzionale $-K_p s$ al fine di forzare lo stato ad avvicinarsi alla varietà di commutazione in modo significativamente più rapido quando la variabile s assume valori elevati. È formalizzata dalla relazione:

$$\dot{s} = -K \operatorname{sgn}(s) - K_p s, \quad K > 0, K_p > 0$$

3. Power Rate Reaching Law: incrementa la velocità di convergenza quando lo stato evolve lontano dalla superficie e riduce progressivamente il tasso di raggiungimento man mano che ci si avvicina alla varietà di commutazione. È definita dall'equazione:

$$\dot{s} = -K|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s), \quad K > 0, 0 < \alpha < 1$$

Ciascuna delle strategie analizzate è strutturata per soddisfare la condizione di esistenza dello sliding mode, garantendo il rispetto sistematico della disuguaglianza $s\dot{s} < 0$.

4.1.3 Struttura del controllore e controllo equivalente

Dal punto di vista architetturale, sebbene in linea puramente teorica sia possibile forzare il raggiungimento della superficie di scorrimento utilizzando esclusivamente un'azione discontinua ad altissimo guadagno in grado di sovrastare l'intera dinamica del sistema, questa scelta risulta impraticabile sui sistemi fisici a causa dei severi sforzi impulsivi imposti agli attuatori.

Per questo motivo, lo *sliding mode control* canonico adotta strutturalmente il metodo della dinamica equivalente. In questa configurazione, la legge di controllo

complessiva viene decomposta nella somma di due contributi distinti e complementari: una componente continua e una componente discontinua.

$$u = u_{eq} + u_{sw} \quad (4.4)$$

- **Il controllo equivalente** (u_{eq}) rappresenta la componente continua del segnale ed è responsabile della compensazione delle dinamiche nominali note del sistema. Esso viene determinato imponendo la condizione ideale di permanenza sulla superficie di scorrimento, ipotizzando il sistema operante sul modello ideale in assenza di incertezze o disturbi. Dal punto di vista concettuale, tale azione ha il compito di forzare il sistema lungo la traiettoria nominale una volta che si è raggiunta la fase di scorrimento, annullando la derivata temporale della variabile di sliding.
- **Il controllo a commutazione** (u_{sw}) interviene invece come termine correttivo discontinuo, tipicamente basato sulla funzione segno. Avendo già compensato la dinamica nominale nota tramite il controllo equivalente, il compito dell'azione di commutazione si riduce esclusivamente al contrasto delle incertezze residue, delle variazioni parametriche e dei disturbi esterni. Questo contributo assicura l'attrattività globale della superficie e la convergenza in tempo finito dello stato del sistema a partire da una condizione iniziale arbitraria, garantendo il soddisfacimento della condizione forte di raggiungimento attraverso la scelta di un guadagno opportunamente dimensionato rispetto ai disturbi nel caso peggiore.

L'inclusione del controllo equivalente, pur non essendo concettualmente obbligatoria per l'applicazione dello *sliding mode control*, risulta di fondamentale importanza applicativa: essa consente di farsi carico della dinamica nota del processo, limitando l'ampiezza dell'azione di controllo e prevenendo la saturazione degli attuatori.

4.2 Sintesi del controllore per il manipolatore ERICC

L'obiettivo di questa sezione è l'applicazione della teoria dello *sliding mode control* al caso di studio specifico del manipolatore robotico ERICC.

Il problema del controllo consiste nel determinare una legge per il vettore delle coppie τ tale da garantire l'inseguimento asintotico di una traiettoria di riferimento desiderata $q_d(t)$, mantenendo la stabilità e la robustezza del sistema pur in presenza di incertezze e di disturbi τ_d .

4.2.1 Definizione della superficie di scorrimento

Come delineato nella trattazione teorica generale, il primo passo per la sintesi del controllore consiste nella definizione di un'opportuna superficie di scorrimento. Il manipolatore ERICC, a seguito della riduzione cinematica definita nella Sezione 2.3, è dinamicamente descritto da 2 equazioni differenziali del secondo ordine ($n = 2$). Di conseguenza il grado relativo del sistema rispetto alla variabile di controllo τ è pari a 2.

Affinché l'ingresso di controllo τ compaia esplicitamente derivando una sola volta la superficie (garantendo così un grado relativo pari a 1 per la variabile di scorrimento), è necessario definire quest'ultima combinando proporzionalmente l'errore e la sua derivata. Si definiscano innanzitutto il vettore dell'errore di tracciamento nello spazio dei giunti e l'errore di velocità:

$$\begin{aligned} e(t) &= q_d(t) - q(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \end{aligned}$$

Sfruttando la formulazione della variabile di scorrimento per un sistema del secondo ordine, si definisce la *sliding surface* vettoriale, $s \in \mathbb{R}^2$ come:

$$s(t) = \dot{e}(t) + \Lambda e(t)$$

dove $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è una matrice diagonale definita positiva.

Imporre la condizione di scorrimento, ovvero vincolare la dinamica del sistema sulla superficie $s(t) = 0$, equivale a richiedere analiticamente che:

$$\dot{e}(t) + \Lambda e(t) = 0$$

la dinamica dell'errore si riduce a un sistema autonomo i cui autovalori coincidono con $-\lambda_i$. Poiché quest'ultimi sono stati scelti strettamente positivi, la condizione di Hurwitz risulta intrinsecamente soddisfatta, garantendo una dinamica asintoticamente stabile.

Questo assetto matematico assicura che, una volta intercettata la superficie di scorrimento, gli errori di posizione e velocità dei giunti del manipolatore ERICC convergano asintoticamente a zero con una legge di decadimento esponenziale. Tale transitorio risulta governato unicamente dai valori scelti per la matrice Λ , rendendo la dinamica a ciclo chiuso nominalmente insensibile alle variazioni dei parametri inerziali e agli sforzi centrifughi, di Coriolis e gravitazionali del robot stesso.

4.2.2 Sintesi della legge di controllo

In un'applicazione ingegneristica reale, la conoscenza esatta dei parametri dinamici del manipolatore è spesso inaccessibile, così come risulta complessa la stima a priori delle forze di attrito $F(\dot{q})$ e dei disturbi esogeni τ_d . Di conseguenza, la sintesi dell'algoritmo di controllo deve necessariamente basarsi su un modello dinamico nominale del processo, espresso in funzione delle matrici stimate $\hat{M}(q)$, $\hat{C}(q, \dot{q})$ e $\hat{G}(q)$:

$$\hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) = \tau$$

L'inevitabile discrepanza tra il comportamento fisico reale e questa approssimazione nominale genera errori di modellazione. Tali errori si traducono in incertezze, che possono essere formalizzate analiticamente come differenza tra le matrici esatte e quelle stimate:

$$\tilde{M} = M - \hat{M}, \quad \tilde{C} = C - \hat{C}, \quad \tilde{G} = G - \hat{G}$$

Sostituendo queste relazioni all'interno dell'equazione dinamica completa del manipolatore ERICC, è possibile isolare la parte di dinamica nota da quella incognita:

$$\hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) + \underbrace{\tilde{M}\ddot{q} + \tilde{C}\dot{q} + \tilde{G} + F(\dot{q}) + \tau_d}_{\Delta(q, \dot{q}, \ddot{q})} = \tau \quad (4.5)$$

dove il termine $\Delta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ raccoglie in un unico vettore tutte le incertezze parametriche, le dinamiche non modellate e i disturbi esterni agenti sul sistema.

La legge di controllo SMC viene progettata per governare questo sistema incerto attraverso la sovrapposizione di due azioni di controllo distinte, in particolare la (4.4) diventa:

$$\tau = \tau_{eq} + \tau_{sw} \quad (4.6)$$

dove τ_{eq} compensa la dinamica nominale nota, mentre τ_{sw} interviene per dominare il termine di incertezza globale Δ .

Il controllo equivalente

Il controllo equivalente rappresenta l'azione di ingresso che, in assenza di incertezze parametriche ($\tilde{M} = \tilde{C} = \tilde{G} = 0$) e disturbi ($F = \tau_d = 0$), vincola la traiettoria di stato a rimanere sulla superficie di scorrimento una volta raggiunta. Analiticamente, l'espressione di τ_{eq} si ricava imponendo che la derivata temporale della variabile di commutazione sia nulla ($\dot{s} = 0$). Derivando l'espressione della superficie rispetto al tempo, si ottiene:

$$\dot{s} = \ddot{e} + \Lambda \dot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} + \Lambda \dot{e}$$

Sostituendo la (3.2) all'interno dell'espressione di $\dot{s}$, e ponendo l'uguaglianza a zero, risulta:

$$\ddot{q}_d - \hat{M}^{-1}(q) \left(\tau - \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} - \hat{G}(q) \right) + \Lambda \dot{e} = 0$$

Pre-moltiplicando ambo i membri per $\hat{M}(q)$ e isolando il termine τ , si ottiene infine la legge di controllo equivalente in forma chiusa:

$$\tau_{eq} = \hat{M}(q) (\ddot{q}_d + \Lambda \dot{e}) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \quad (4.7)$$

Da un punto di vista fisico, è possibile associare a ciascun termine della legge di controllo equivalente un ruolo specifico:

- **Compensazione delle non linearità:** i termini $\hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$ generano le coppie motrici necessarie a compensare istante per istante l'effetto della gravità e delle forze centrifughe e di Coriolis, realizzando di fatto una linearizzazione in retroazione della dinamica intrinseca del manipolatore.
- **Azione di guida:** il termine $\hat{M}(q) (\ddot{q}_d + \Lambda \dot{e})$ impone la dinamica di tracciamento. Esso è composto da un'accelerazione in *feedforward* legata al riferimento ($\ddot{q}_d$) e da una retroazione legata alla derivata dell'errore ($\Lambda \dot{e}$). La pre-moltiplicazione per la matrice di inerzia $\hat{M}(q)$ converte infine queste accelerazioni nelle effettive coppie motrici necessarie a mantenere il sistema sulla traiettoria ideale.

Il controllo a commutazione

Come discusso nella sezione precedente, il controllo equivalente τ_{eq} è in grado di mantenere il sistema sulla superficie di scorrimento $s = 0$ solamente nel caso ideale. Per garantire la robustezza del sistema e assicurare che le traiettorie di stato convergano verso la varietà di *sliding* in tempo finito nonostante disturbi e incertezze, si rende necessario introdurre il termine di controllo discontinuo τ_{sw} .

Per comprendere come strutturare matematicamente tale termine, si derivi l'equazione dell'evoluzione dinamica della superficie di scorrimento. Ricordando la definizione di s , la sua derivata temporale è:

$$\dot{s} = \ddot{e} + \Lambda \dot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} + \Lambda \dot{e}$$

Sostituendo l'accelerazione $\ddot{q}$ ricavata dalla (4.5) all'interno dell'espressione di $\dot{s}$, si ottiene:

$$\dot{s} = \ddot{q}_d - \hat{M}^{-1}(q) \left(\tau - \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} - \hat{G}(q) - \Delta \right) + \Lambda \dot{e}$$

Introducendo la legge di controllo totale $\tau = \tau_{eq} + \tau_{sw}$ e sostituendo la (4.7), si arriva alla forma:

$$\dot{s} = \ddot{q}_d - \hat{M}^{-1}(q) \left[\hat{M}(q) (\ddot{q}_d + \Lambda \dot{e}) + \tau_{sw} - \Delta \right] + \Lambda \dot{e}$$

Distribuendo il prodotto per la matrice $\hat{M}^{-1}(q)$ e semplificando si ottiene:

$$\dot{s} = -\hat{M}^{-1}(q)\tau_{sw} + \hat{M}^{-1}(q)\Delta \quad (4.8)$$

L'obiettivo in questa fase è progettare τ_{sw} affinché la dinamica di raggiungimento forzi le traiettorie verso $s = 0$. Se, in prima approssimazione, si trascura il termine di incertezza Δ , si desidera imporre al sistema nominale una legge di raggiungimento a tasso costante (4.3), definita dalla relazione vettoriale:

$$\dot{s} = -K \operatorname{sgn}(s) \quad (4.9)$$

dove $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è una matrice diagonale definita positiva dei guadagni e $\operatorname{sgn}(s)$ è la funzione segno applicata ai singoli elementi del vettore s .

La preferenza verso questo specifico approccio cinematico è motivata da due ragioni teoriche fondamentali per il controllo robusto:

- **Convergenza in tempo finito:** a differenza delle dinamiche puramente asintotiche, questa legge impone al sistema di "scivolare" verso la superficie con una velocità direzionale fissa. Ciò garantisce matematicamente che lo stato raggiunga la condizione ideale $s = 0$ in un lasso di tempo limitato e calcolabile a priori a partire dalle condizioni iniziali.
- **Semplicità analitica:** la sua struttura matematica essenziale facilita notevolmente la sintesi della legge di controllo e la successiva dimostrazione di stabilità globale secondo il criterio di Lyapunov.

Uguagliando la (4.9) con la (4.8) e ponendo Δ dinamica residua nominale alla dinamica desiderata, si ottiene:

$$-\hat{M}^{-1}(q)\tau_{sw} = -K \operatorname{sgn}(s)$$

Pre-moltiplicando ambo i membri per la matrice di inerzia stimata $\hat{M}(q)$, si ricava infine l'espressione analitica e costruttiva del controllo a commutazione:

$$\tau_{sw} = \hat{M}(q)K \operatorname{sgn}(s) \quad (4.10)$$

Questa deduzione evidenzia l'efficacia della struttura proposta: la premoltiplicazione per $\hat{M}(q)$ consente di compensare l'effetto dell'inerzia inversa presente nella dinamica di $\dot{s}$. Dal punto di vista fisico, ciò si traduce in un disaccoppiamento dinamico delle azioni di raggiungimento dei singoli assi, permettendo al controllore di modulare in tempo reale l'entità dello sforzo di commutazione in base alla specifica configurazione geometrica assunta dal manipolatore.

Sebbene questa legge sia stata ricavata analizzando il caso nominale, la successiva analisi di stabilità dimostrerà come tale struttura sia in realtà intrinsecamente robusta, capace di dominare anche le incertezze reali Δ , purché i guadagni di K vengano scelti sufficientemente ampi.

4.2.3 Analisi di stabilità di Lyapunov

Al fine di validare l'efficacia della legge di controllo complessiva $\tau = \tau_{eq} + \tau_{sw}$ e determinare formalmente i guadagni K , è necessario dimostrare che la superficie di scorrimento $s = 0$ sia globalmente attrattiva. A tale scopo, si ricorre al secondo metodo di Lyapunov.

Si definisca una funzione candidata di Lyapunov $V(s)$ scalare e definita positiva:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^T s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2$$

Per garantire la stabilità asintotica globale, è sufficiente dimostrare che la derivata temporale della funzione, calcolata lungo le traiettorie del sistema a ciclo chiuso, sia strettamente negativa. Derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{V}(s) = s^T \dot{s} \quad (4.11)$$

Sostituendo all'interno della (4.11), la (4.8) e la (4.10), la derivata della funzione di Lyapunov diviene:

$$\dot{V}(s) = s^T \left(-K \operatorname{sgn}(s) + \hat{M}^{-1}(q)\Delta \right) = -s^T K \operatorname{sgn}(s) + s^T \hat{M}^{-1}(q)\Delta \quad (4.12)$$

Poiché K è diagonale con elementi $k_i > 0$, il primo termine può essere esplicitato ricordando la proprietà $s_i \operatorname{sgn}(s_i) = |s_i|$:

$$-s^T K \operatorname{sgn}(s) = -\sum_{i=1}^n k_i |s_i|$$

Per quanto riguarda il secondo termine, essendo all'interno del normale spazio di lavoro del manipolatore, i vettori di posizione, velocità e accelerazione si mantengono strettamente limitati e la matrice di inerzia stimata $\hat{M}(q)$ risulta sempre

definita positiva e non singolare. Perciò è matematicamente lecito affermare l'esistenza di un limite superiore noto positivo D_i tale per cui l'incertezza su ciascun asse risulti limitata, ovvero:

$$\left| \left(\hat{M}^{-1}(\mathbf{q}) \Delta \right)_i \right| \leq D_i.$$

La (4.12) pertanto diventa:

$$\dot{V}(\mathbf{s}) \leq \sum_{i=1}^n (-k_i |s_i| + D_i |s_i|) = - \sum_{i=1}^n (k_i - D_i) |s_i|.$$

Risulta evidente che l'innescio del moto di scorrimento è matematicamente garantito se e solo se i guadagni di controllo vengono selezionati in modo tale che:

$$k_i \geq D_i + \eta_i \quad \text{con } \eta_i > 0$$

Sostituendo tale condizione, si ottiene infine:

$$\dot{V}(\mathbf{s}) \leq - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i| < 0 \quad \forall \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$$

Questa relazione non solo dimostra la stabilità asintotica globale del sistema, ma coincide esattamente con il soddisfacimento della (4.2).

4.2.4 Quasi-sliding mode

L'analisi di stabilità di Lyapunov appena condotta dimostra la validità teorica del controllore proposto. Tuttavia, l'implementazione pratica della legge di controllo a commutazione su un sistema fisico come il manipolatore ERICC presenta delle sfide tecnologiche non trascurabili.

La presenza della funzione discontinua $\text{sgn}(s)$ richiede teoricamente che gli attuatori ai giunti commutino la coppia erogata a una frequenza infinita per mantenere lo stato esattamente sulla superficie $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Tuttavia, persino nell'ipotesi ideale di commutazione a frequenza infinita e in assenza di ritardi, la presenza di dinamiche parassite non modellate provocherebbe l'insorgere di oscillazioni di piccola ampiezza e alta frequenza nell'intorno della varietà di scorrimento.

Nei sistemi ingegneristici reali, a questa causa teorica intrinseca si sommano le non idealità legate ai ritardi fisici e ai limiti di commutazione dell'elettronica di potenza. L'effetto combinato di questi fattori si traduce nel fenomeno noto come *chattering*: la traiettoria di stato non scorre in modo perfettamente continuo sulla varietà ideale, ma vi oscilla attorno ad altissima frequenza. Sul manipolatore fisico, il segnale di controllo τ assumerebbe un andamento a dente di sega altamente discontinuo. Questo comportamento è inaccettabile poiché causa eccessiva usura meccanica, surriscaldamento dei motori ed eccitazione delle sopracitate dinamiche risonanti della struttura robotica, rendendo indispensabili strategie di mitigazione.

Per ovviare a questo problema ed eliminare il *chattering*, la tecnica più consolidata in letteratura è l'approccio *quasi-sliding mode* [7, 8]. L'idea fondamentale consiste nel mitigare la discontinuità dell'azione di controllo definendo uno strato limite (*boundary layer*) di spessore Φ_i attorno alla superficie di scorrimento di ciascun asse.

Dal punto di vista matematico, la funzione $\text{sgn}(\mathbf{s})$ viene sostituita da un'approssimazione continua, la funzione di saturazione $\text{sat}(s_i/\Phi_i)$, definita per ciascuno giunto i come:

$$\text{sat}\left(\frac{s_i}{\Phi_i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_i > \Phi_i \\ \frac{s_i}{\Phi_i} & \text{se } |s_i| \leq \Phi_i \\ -1 & \text{se } s_i < -\Phi_i \end{cases}$$

Di conseguenza, la legge di controllo a commutazione implementata sul manipolatore assume la forma:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{sw}} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{K} \text{sat}(\boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{s})$$

dove $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è la matrice diagonale degli spessori degli strati limite, e $\text{sat}(\cdot)$ indica il vettore colonna delle funzioni di saturazione applicate alle singole componenti. L'adozione del *quasi-sliding mode* modifica il comportamento del sistema in base alla sua distanza dalla condizione ideale:

- **All'esterno dello strato limite** ($|s_i| > \Phi_i$): la funzione satura a ± 1 , operando esattamente come la funzione $\text{sgn}(s_i)$. In questa regione, l'azione di controllo eroga il massimo sforzo consentito dai guadagni k_i , spingendo la traiettoria verso lo strato limite in tempo finito.
- **All'interno dello strato limite** ($|s_i| \leq \Phi_i$): l'azione discontinua $\boldsymbol{\tau}_{\text{sw}}$ si trasforma in un'azione di retroazione lineare ad alto guadagno.

Il compromesso teorico dell'introduzione del *boundary layer* è la perdita della stabilità asintotica esatta dell'origine: il sistema garantisce tuttavia la limitatezza ultima uniforme (*Uniform Ultimate Boundedness*, UUB) dell'errore di tracciamento.

Le equazioni ricavate in questa sezione completano la sintesi teorica del controllore *sliding mode*. La traduzione pratica di tale formulazione matematica, assieme alla costruzione dell'intera architettura di controllo ad anello chiuso in ambiente *Simulink*, verrà descritta nel dettaglio nel Capitolo 6.

Capitolo 5

Controllo adattivo basato su reti neurali

5.1 Introduzione alle reti neurali artificiali

Negli ultimi decenni, l'evoluzione dell'automazione industriale e della robotica ha spinto la ricerca ingegneristica verso lo sviluppo di architetture di controllo sempre più sofisticate. I sistemi fisici reali, quali i manipolatori robotici, sono intrinsecamente caratterizzati da dinamiche non lineari, accoppiamenti multivariabili e parametri tempo-varianti. Di fronte a tale livello di complessità, le metodologie di regolazione classiche mostrano severi limiti strutturali, specialmente qualora il processo risulti difficilmente modellabile o soggetto a forti incertezze e disturbi esogeni.

In questo scenario, le tecniche di controllo intelligente, con particolare riferimento alle Reti Neurali Artificiali (*Artificial Neural Networks*, ANN), hanno assunto un ruolo teorico e pratico di primaria importanza. Ispirate ai paradigmi di elaborazione del sistema nervoso biologico, le reti neurali costituiscono architetture di calcolo parallelo e distribuito. La loro proprietà ingegneristica fondamentale risiede nell'intrinseca capacità di approssimazione universale: esse sono in grado di mappare relazioni matematiche arbitrarie tra lo spazio degli ingressi e quello delle uscite, basandosi esclusivamente sui dati di processo e svincolando la sintesi del controllore dalla necessità di possedere un modello analitico esatto della fisica del processo.

Nella letteratura del controllo non lineare e adattivo, le reti neurali vengono tipicamente impiegate per stimare online le dinamiche incognite del processo, formalizzate matematicamente da una generica funzione vettoriale $f(x)$. Nello specifico settore della robotica, il significato fisico e la complessità di tale funzione dipendono dal grado di conoscenza a priori del sistema:

- **Incerteza parziale:** si assume che la struttura inerziale del manipolatore (matrici M , C e G) sia sufficientemente nota, affidando alla rete neurale il solo compito di approssimare le dinamiche non strutturate o difficilmente modellabili. In questo caso, $f(x)$ rappresenta tipicamente fenomeni complessi come gli attriti non lineari ai giunti o le perturbazioni esterne τ_d .
- **Incerteza totale:** (approccio *black-box*), il controllore non fa alcun affidamento sul modello matematico ricavato nel Capitolo 3. Di conseguenza, $f(x)$ ar-

riva a coincidere con l'intera dinamica del robot, costringendo la rete neurale ad apprendere e compensare simultaneamente le forze inerziali, centrifughe, gravitazionali e dissipative.

Indipendentemente dallo scenario operativo, la logica di controllo rimane la medesima: la stima vettoriale prodotta in uscita dalla rete, indicata con $\hat{f}(x)$, viene direttamente iniettata nella legge di controllo per pre-compensare le dinamiche incognite. Agendo come un termine di cancellazione attiva, la rete neurale permette di sostituire le funzioni fisiche reali (non note o incerte) con la loro approssimazione, garantendo il raggiungimento delle prestazioni di tracciamento desiderate.

5.1.1 Addestramento e capacità adattiva

Nell'ambito dell'ingegneria dei controlli, l'impiego delle architetture neurali impone una fondamentale distinzione metodologica riguardante la sintesi dei parametri sinaptici. Nelle applicazioni convenzionali, la rete viene sottoposta a una fase di addestramento offline: sfruttando algoritmi di ottimizzazione iterativa su un *dataset* pre-acquisito, i pesi vengono calcolati e mantenuti costanti. Sebbene tale approccio fornisca una mappa statica utile per l'identificazione di modelli invarianti, esso si rivela inefficace nel controllo di sistemi robotici soggetti a usura, variazioni repentine del carico o disturbi tempo-varianti.

Per superare tale limite e garantire le massime prestazioni dinamiche, la teoria del controllo non lineare ricorre alle architetture adattive. In questa configurazione, la rete neurale viene inserita direttamente all'interno dell'anello di retroazione e i suoi pesi sinaptici vengono costantemente aggiornati in tempo reale durante l'esercizio.

In questo paradigma di controllo, le regole di aggiornamento dei pesi (leggi di adattamento) non si basano sui classici algoritmi a discesa di gradiente valutati su dati storici, bensì vengono derivate analiticamente sfruttando la teoria della stabilità di Lyapunov. Questa sintesi matematica garantisce un duplice risultato: permette alla rete di adattarsi fluidamente alle mutate condizioni operative e, contestualmente, assicura la stabilità asintotica globale del sistema in anello chiuso, forzando l'errore di tracciamento a convergere a zero.

5.1.2 Reti neurali a funzioni a base radiale

Sebbene la letteratura sull'intelligenza artificiale proponga innumerevoli topologie di reti, per le applicazioni di controllo adattivo online è opportuno selezionare architetture che garantiscano la piena trattabilità analitica del sistema in anello chiuso. A differenza dei classici perceptron multistrato (MLP) o delle reti profonde, i quali introducono una forte non linearità rispetto a tutti i parametri sinaptici, nel controllo robotico si predilige l'impiego di architetture a singolo strato nascosto. Tale scelta progettuale è motivata dalla necessità di preservare la linearità del modello rispetto ai pesi di uscita, condizione essenziale per poter sintetizzare leggi di adattamento stabili basate sul teorema di Lyapunov.

L'architettura scelta per questo scopo è la rete neurale a Funzioni a Base Radiale (*Radial Basis Function*, RBF). Come illustrato nello schema di Figura 5.1, essa è caratterizzata da una topologia *feedforward*, in cui il flusso informativo si propaga in senso unidirezionale attraverso tre livelli funzionali distinti:

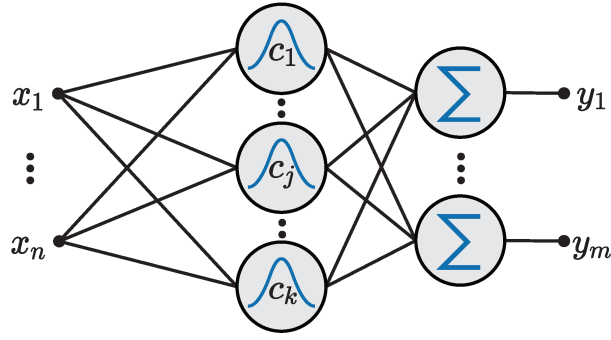


Figura 5.1: Schema topologico di una Rete RBF

- **Strato di ingresso (Input Layer):** costituisce l'interfaccia sensoriale della rete. Non esegue alcuna manipolazione algebrica, ma acquisisce e distribuisce ai nodi del livello successivo le componenti del vettore di stato del sistema $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **Strato nascosto (Hidden Layer):** rappresenta il nucleo computazionale non lineare dell'architettura. Ciascun nodo j -esimo (per $j = 1, \dots, m$) valuta la distanza euclidea $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|$ tra lo stato istantaneo del sistema, codificato nel vettore di ingresso $\mathbf{x}$, e un centroide caratteristico $\mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^n$. Fisicamente, il calcolo di questa distanza misura quanto la condizione attuale del robot sia prossima alla specifica zona di competenza assegnata al neurone. Tale metrica spaziale viene poi mappata attraverso una funzione di attivazione a simmetria radiale, tipicamente gaussiana, definita come:

$$h_j(\mathbf{x}) = \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma_j^2} \right)$$

dove il parametro scalare σ_j (deviazione standard) governa la sensibilità spaziale del neurone, determinandone il raggio di attivazione utile all'interno del dominio operativo.

- **Strato di uscita (Output Layer):** aggrega linearmente i segnali di attivazione provenienti dallo strato nascosto. Raggruppando le risposte radiali nel vettore colonna $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})]^T \in \mathbb{R}^m$, l'approssimazione prodotta dalla rete assume la seguente forma vettoriale:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

dove $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice dei pesi sinaptici, i cui elementi sono i parametri che determinano il contributo di ciascuna funzione radiale. Fisicamente, l'output finale della rete è una somma pesata delle attivazioni $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ provenienti dal livello nascosto, i coefficienti di questa combinazione lineare sono proprio i pesi sinaptici.

L'impiego delle architetture RBF nel controllo di sistemi complessi non è motivato unicamente dalla loro convenienza strutturale, ma poggia su rigorose basi analitiche. La capacità di queste reti di ricostruire dinamiche non lineari incognite è infatti garantita dal seguente teorema [9].

5.1.3 Teorema di approssimazione universale

Sulla base del teorema di approssimazione universale esteso alle reti a base radiale, è dimostrato che una rete dotata di un numero sufficiente di nodi nascosti m può approssimare la dinamica incognita non lineare del processo $f(x)$ con precisione arbitraria su un dominio compatto Ω_x .

Da un punto di vista analitico, ciò implica l'esistenza di una matrice dei pesi sinaptici ottimali $W^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definita formalmente come l'argomento che minimizza il massimo scarto in norma tra la funzione reale e la sua stima sul dominio di interesse:

$$W^* = \arg \min_{W \in \mathbb{R}^{m \times n}} \left[\sup_{x \in \Omega_x} \|f(x) - W^T h(x)\| \right]$$

Di conseguenza, la dinamica reale del sistema robotico può essere espressa in modo esatto come la somma della componente neurale idealmente approssimata e di un termine di errore residuo:

$$f(x) = W^{*T} h(x) + \epsilon \quad (5.2)$$

dove il vettore $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ rappresenta l'errore intrinseco di ricostruzione della rete. Si assume che, sul dominio compatto Ω_x , esista un maggiorante scalare noto $\epsilon_N > 0$ tale per cui $\|\epsilon\| \leq \epsilon_N$.

L'entità di tale limite superiore ϵ_N è intrinsecamente legata alla dimensionalità della rete: per il teorema di approssimazione, all'aumentare del numero di nodi m , l'errore residuo tende asintoticamente a zero. Nella realtà ingegneristica, tuttavia, m è un valore finito, scelto come compromesso ottimale tra l'accuratezza desiderata per la stima e l'onere computazionale sostenibile dall'hardware di controllo in tempo reale.

È inoltre fondamentale sottolineare che la matrice dei pesi ottimi W^* è un'entità puramente teorica e analiticamente incognita. Pertanto, al fine di ottenere una buona approssimazione della rete, è necessario ricavare una matrice dei pesi, indicata con W , che assomigli il più possibile alla matrice W^* . La sintesi di W può essere affrontata mediante tre paradigmi principali:

- **Approccio offline:** i pesi vengono addestrati preliminarmente su un ampio *dataset* registrato dal manipolatore e mantenuti costanti durante l'esercizio. Pur risultando computazionalmente leggero online, questo metodo manca di robustezza verso usura meccanica, variazioni del carico utile o dinamiche non catturate nei dati di training.
- **Approccio puramente adattivo:** la matrice W viene inizializzata tipicamente a zero o con valori casuali minimi. I pesi vengono poi fatti evolvere online tramite una legge di aggiornamento derivata da teoremi di stabilità. Tale strategia garantisce stabilità e reattività ai cambiamenti del sistema, ma può causare elevati errori di transitorio e un degrado temporaneo delle prestazioni nei primi istanti di attivazione, finché i pesi non raggiungono una stima adeguata.
- **Approccio ibrido:** La rete subisce un pre-addestramento offline per generare una matrice iniziale $W(0)$ già prossima all'ottimo teorico W^* . In questa maniera, l'algoritmo di aggiornamento online interverrà esclusivamente per

compensare in tempo reale le incertezze residue, le variazioni di carico e i disturbi esogeni, azzerando di fatto gli errori di transitorio e garantendo un tracciamento di traiettoria ottimale fin dal primo istante.

5.2 Sintesi del controllore adattivo per il robot ERICC

Come discusso nei capitoli precedenti, il controllo di posizione di manipolatori industriali richiede algoritmi capaci di garantire elevate prestazioni dinamiche anche in presenza di forti accoppiamenti non lineari. Il controllore *sliding mode* tradizionale offre eccellenti garanzie di robustezza; tuttavia, la sua implementazione pratica sconta una dipendenza fondamentale: la conoscenza analitica della dinamica nominale del processo. Quando tale dinamica è affetta da marcate incertezze, l'azione di commutazione discontinua deve essere incrementata significativamente, amplificando il fenomeno del *chattering*.

Per superare tale limitazione, in questa sezione si propone la sintesi di un controllore adattivo. L'idea alla base di questa legge di controllo consiste nell'affiancare allo *sliding mode control* una rete neurale RBF, alla quale viene demandato il compito di compensare la dinamica incognita del sistema attraverso la variazione dei pesi in tempo reale. In questo paradigma, l'azione discontinua dello SMC si limita a contrastare unicamente il residuo di approssimazione ϵ della (5.2) e i disturbi esterni, riducendo drasticamente il guadagno discontinuo, limitando le vibrazioni e di conseguenza l'usura meccanica degli attuatori.

L'ipotesi fondamentale alla base della presente trattazione è l'assunzione della non conoscenza del modello dinamico (approccio *model-free*). Ciò significa assumere che la matrice di inerzia, la matrice di Coriolis e i vettori delle forze gravitazionali e di attrito non siano analiticamente calcolabili a priori. Tuttavia, si mantengono valide le proprietà strutturali intrinseche dei sistemi Euleriano-Lagrangiani (quali l'emisimmetria).

Questa scelta progettuale è fortemente motivata dalle reali condizioni operative dei manipolatori robotici. Nella pratica industriale, infatti, disporre di un modello matematico esatto è irrealizzabile: i parametri di attrito sono altamente non lineari e variano nel tempo a causa di usura e fluttuazioni termiche; inoltre, la massa del carico movimentato all'estremità (*payload*) può essere ignota o cambiare da un ciclo all'altro. Affidarsi a un'architettura di controllo in grado di apprendere e compensare queste incertezze online svincola il progettista dalla necessità di eseguire complesse calibrazioni e procedure di identificazione parametrica preliminari, conferendo al sistema una flessibilità di gran lunga superiore.

5.2.1 Funzione della dinamica incognita del sistema

Richiamando le definizioni cinematiche introdotte per lo SMC classico, si definisce il vettore dell'errore di inseguimento articolare $e(t) = q_d(t) - q(t)$. Si introduce conseguentemente il vettore della variabile di scorrimento $s(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$s = \dot{e} + \Lambda e \quad (5.3)$$

dove $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è una matrice diagonale definita positiva che governa asintoticamente la dinamica dell'errore sulla superficie di *sliding*.

Esplicitando dalla (5.3) la velocità articolare, si ottiene:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \mathbf{e} - \mathbf{s}$$

Derivando la (5.3) rispetto al tempo, pre-moltiplicando per la matrice $M(\mathbf{q})$ e sostituendo la (3.4), si ottiene:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} &= M(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}} + \Lambda\dot{\mathbf{e}}) \\ &= M(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda\dot{\mathbf{e}}) - (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau}_d) \\ &= M(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda\dot{\mathbf{e}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda\mathbf{e} - \mathbf{s}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove la funzione incognita $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$, che raggruppa i termini dinamici accoppiati e non lineari del braccio meccanico, è definita come:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = M(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda\dot{\mathbf{e}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda\mathbf{e}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$$

sarà compito della rete neurale approssimare tale funzione online. L'uscita della RBF assume pertanto la forma matriciale:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

dove $\mathbf{x}$ è il vettore in ingresso alla rete definito come:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}^T \quad \dot{\mathbf{e}}^T \quad \mathbf{q}_d^T \quad \dot{\mathbf{q}}_d^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_d^T] \in \mathbb{R}^{10} \quad (5.6)$$

mentre $\hat{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ è la matrice dei pesi sinaptici stimati in tempo reale che varia secondo una legge di adattamento dinamica che assume la forma:

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{s}^T \quad (5.7)$$

nella quale $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ costituisce la matrice diagonale definita positiva dei tassi di apprendimento.

Questa legge viene scelta in modo tale che i pesi rimangano costanti ($\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \mathbf{0}$) solo quando $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Invece se $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ la legge modifica i pesi sinaptici in modo da indirizzare lo stato verso la superficie di scorrimento. Questa affermazione è garantita dalla analisi di stabilità di Lyapunov che verrà trattata più avanti nel corso del capitolo.

5.2.2 Legge di controllo

La legge di controllo di coppia complessiva da erogare ai motoriduttori viene costruita sostituendo dalla (4.6) il termine di controllo equivalente con la suddetta stima neurale. La legge di controllo risulta quindi essere:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}_{sw} \quad (5.8)$$

L'azione robusta discontinua $\boldsymbol{\tau}_{sw} \in \mathbb{R}^2$ compensa l'errore intrinseco di approssimazione della rete ϵ e i disturbi $\boldsymbol{\tau}_d$, ed è formulata analiticamente come:

$$\boldsymbol{\tau}_{sw} = \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{K}_p \mathbf{s} \quad (5.9)$$

dove $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ è la matrice diagonale definita positiva dei guadagni di commutazione, mentre il termine $\mathbf{K}_p \mathbf{s}$ (con $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ matrice diagonale, anch'essa definita positiva) costituisce una retroazione lineare di smorzamento. Invece l'operatore $\text{sgn}(\cdot)$ si intende applicato elemento per elemento alle componenti del vettore $\mathbf{s}$.

Tale legge di controllo non rappresenta una semplice sovrapposizione degli effetti, bensì il fulcro teorico dell'intero approccio adattivo. In questa formulazione, l'uscita della rete neurale RBF funge da approssimatore universale della dinamica non lineare del manipolatore, sostituendo integralmente il calcolo analitico del termine equivalente τ_{eq} tipico dei controllori *model-based*. L'onere dell'identificazione delle incertezze, inclusi gli attriti asimmetrici e le variazioni di carico, viene demandato interamente all'apprendimento sinaptico $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$.

Questo disaccoppiamento dei compiti comporta un vantaggio ingegneristico fondamentale: il termine robusto τ_{sw} non deve più farsi carico di compensazione l'intera dinamica ignota del sistema. Esso è chiamato a intervenire unicamente per reprimere l'errore di approssimazione residuo della rete neurale e i disturbi esogeni. Di conseguenza, l'architettura ibrida consente l'adozione di guadagni di commutazione significativamente ridotti rispetto all'architettura SMC canonica, mitigando drasticamente il fenomeno del *chattering*.

Tuttavia, affinché questa intuizione architetturale sia matematicamente fondata e il sistema ad anello chiuso risulti globalmente stabile, si ricorre alla sintesi basata sul metodo di Lyapunov.

5.2.3 Analisi di stabilità secondo Lyapunov

Per garantire la stabilità asintotica globale, si ricorre al secondo metodo di Lyapunov. L'analisi estende il costrutto energetico classico introducendo un termine quadratico per tenere conto dell'errore di stima dei pesi $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$. Essendo la matrice di inerzia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ simmetrica e definita positiva, si definisce la seguente funzione candidata di Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{W}} \right)$$

Derivando l'equazione rispetto al tempo e applicando la regola del prodotto per il primo termine, si ottiene l'espressione analitica grezza:

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \text{tr} \left(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right) \quad (5.10)$$

Sostituendo l'espressione (5.2) all'interno dell'equazione (5.4) e introducendo la legge di controllo (5.8), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \left(\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}_{\text{sw}} \right) \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau}_{\text{sw}} \end{aligned}$$

Sostituendo il risultato appena ottenuto nell'equazione (5.10), la derivata $\dot{V}$ assume la forma estesa:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \mathbf{s}^T \left(-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau}_{sw} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{s} + \text{tr} \left(\tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \left(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{s} \\ &\quad + \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \text{tr} \left(\tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right) + \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau}_{sw})\end{aligned}$$

Sfruttando la proprietà di emisimmetria descritta nella Sezione 3.6.1 e applicando la proprietà ciclica dell'operatore traccia al termine $\mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$, l'equazione si semplifica in:

$$\dot{V} = \text{tr} \left[\tilde{\mathbf{W}}^T \left(\mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{s}^T - \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right) \right] + \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\tau}_{sw})$$

L'inserimento della legge di adattamento (5.7) determina l'elisione esatta dell'intero termine racchiuso dall'operatore traccia. Sostituendo il termine robusto $\boldsymbol{\tau}_{sw}$ della (5.9) all'interno della derivata, si giunge al risultato:

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d - \mathbf{K} \text{sgn}(\mathbf{s})) - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_p \mathbf{s}$$

Analizzando il contributo del termine robusto per ogni singolo grado di libertà, si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\mathbf{s}^T (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau}_d) - \mathbf{s}^T \mathbf{K} \text{sgn}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n [s_i(\epsilon_i + \tau_{d,i}) - K_i |s_i|] \leq \sum_{i=1}^n |s_i| (|\epsilon_i + \tau_{d,i}| - K_i)$$

Progettando ogni singolo guadagno affinché domini superiormente i disturbi locali del rispettivo giunto ($K_i \geq |\epsilon_i| + |\tau_{d,i}|$), l'intera sommatoria risulta minore o uguale a zero. Essendo $\mathbf{K}_p$ definita positiva, ne consegue che:

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_p \mathbf{s} \leq 0$$

Tale condizione sancisce la stabilità globale secondo Lyapunov dell'intero sistema ad anello chiuso, garantendo la convergenza asintotica della traiettoria verso la superficie di scorrimento ($\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$) e, di conseguenza, l'annullamento degli errori di tracciamento nonostante l'assenza di un modello dinamico noto.

5.2.4 Considerazioni implementative

Al fine di trasporre l'architettura di controllo dall'ambito teorico della dimostrazione di Lyapunov all'implementazione pratica (e successivamente in ambiente di simulazione), si rendono necessarie due modifiche strutturali fondamentali.

La prima riguarda la mitigazione del fenomeno del *chattering*. La legge di controllo robusta (5.9) fa affidamento sulla funzione commutativa $\text{sgn}(\cdot)$ per dominare le incertezze del sistema. Tuttavia, l'applicazione di un ingresso di controllo discontinuo ad alta frequenza su un sistema fisico o in una simulazione a tempo discreto genera oscillazioni nocive che possono eccitare le dinamiche non modellate ad alta frequenza del manipolatore e causare l'usura prematura degli attuatori.

Per ovviare a questo problema, si adotta un approccio di tipo *Quasi-Sliding Mode* (QSM), in linea con la metodologia discussa nella Sezione 4.2.4, volta a garantire la regolarità del segnale di controllo.

La seconda considerazione riguarda l'architettura della rete neurale RBF. Nelle sezioni precedenti è stata derivata la legge di adattamento in tempo reale per i pesi sinaptici $\hat{W}$; tuttavia, l'applicabilità pratica di tale legge presuppone che i parametri spaziali della rete, centri c_j e ampiezze b_j dei campi recettivi, siano già stati stabiliti per garantire una copertura ottimale dello spazio operativo. Inizialmente, si era ipotizzato un vettore di ingresso globale definito nella (5.6); tuttavia, una sua implementazione euristica o basata su griglia uniforme esporrebbe il sistema alla maledizione della dimensionalità, con una conseguente esplosione combinatoria del numero di neuroni necessari, violando i vincoli computazionali del processore.

Per ottimizzare le prestazioni, si è optato per un approccio decentralizzato: la dinamica di ciascun giunto i viene approssimata da una rete neurale dedicata. Di conseguenza, il vettore di ingresso è stato ridotto e specificato localmente per ogni grado di libertà:

$$\mathbf{x}_i = [e_i \quad \dot{e}_i \quad q_{d,i} \quad \dot{q}_{d,i} \quad \ddot{q}_{d,i}]^T \in \mathbb{R}^5 \quad (5.11)$$

Questa strategia di disaccoppiamento permette alla rete di focalizzarsi sulle non linearità proprie del singolo giunto, riducendo drasticamente la complessità. Tuttavia, anche a seguito di tale semplificazione, la dimensione dello spazio degli stati continua a richiedere un elevato numero di neuroni per garantire una precisione di approssimazione accettabile. Per superare questo vincolo computazionale e garantire la stabilità del sistema sin dai primi istanti di funzionamento, si è deciso di procedere con una fase di addestramento offline dei parametri di rete. Tale approccio permette di determinare una configurazione ottimale dei centri e delle ampiezze basata su un *dataset* rappresentativo delle dinamiche del manipolatore, riducendo il carico computazionale online al solo aggiornamento dei pesi sinaptici lineari.

5.3 Addestramento offline della rete RBF

Prima di procedere con l'implementazione in ambiente *Simulink* per la validazione dinamica, si è resa necessaria una procedura di ottimizzazione strutturale offline finalizzata a prevenire il sovraccarico computazionale online. L'obiettivo di questa fase preliminare è popolare lo strato nascosto della rete unicamente con nodi posizionati in corrispondenza delle traiettorie operative fisicamente ammissibili, evitando una saturazione inutile dello spazio degli stati.

Tale sintesi è stata resa possibile attraverso un processo di addestramento articolato in tre fasi sequenziali:

1. Generazione del dataset informativo;
2. Allocazione non supervisionata dei centri;
3. Regolarizzazione strutturale;

Nelle sezioni seguenti verrà analizzata in maniera approfondita ogni fase del processo di addestramento offline.

5.3.1 Acquisizione del dataset

L'obiettivo primario della fase di pre-addestramento offline è istruire la topologia della rete affinché replichi fedelmente la dinamica del manipolatore. Tuttavia, in un processo fisico reale, la funzione incognita $f(x)$, che raggruppa inerzia, forze di Coriolis, attriti e gravità, non è una grandezza fisicamente misurabile dai sensori di giunto. Risulterebbe pertanto impossibile fornire all'algoritmo di ottimizzazione strutturale un *target* esatto con cui valutare le prestazioni dei singoli neuroni.

Per ovviare a tale ostacolo analitico. Sfruttando la conoscenza delle matrici dinamiche nominali all'interno di un ambiente di simulazione, è possibile generare e registrare il valore analiticamente esatto del *target* $f(x)$ in risposta a specifiche sollecitazioni. Solo dopo aver ottimizzato e stabilito i centri e le ampiezze della rete neurale su questo *dataset* nominale simulato, l'architettura fissa verrà trasferita sul controllore reale, demandando alla successiva legge di adattamento online dei pesi $\hat{W}$ l'esclusiva compensazione delle discrepanze tra simulazione e processo reale.

Al fine di generare un *dataset* pienamente rappresentativo per questa operazione, il setup simulato è stato articolato secondo le specifiche descritte di seguito.

Eccitazione persistente tramite traiettoria chirp

La corretta mappatura delle dinamiche accoppiate richiede che il segnale di riferimento soddisfi la condizione di eccitazione persistente. Si è optato per l'impiego di segnali di riferimento di tipo *chirp* a spazzata in frequenza lineare. Tale classe di segnali concentra l'energia dinamica forzando l'attraversamento di un ampio spettro di frequenze e sollecitando in modo omogeneo le non linearità del sistema, pur mantenendo un ridotto fattore di cresta che preserva i limiti di saturazione di coppia degli attuatori.

La condizione di eccitazione persistente assicura che il *dataset* raccolto contenga tutte le informazioni necessarie alla rete per funzionare anche durante l'inseguimento di una traiettoria diversa da quella *chirp*.

Al fine di garantire l'indipendenza lineare degli stimoli sui due assi e massimizzare il contenuto informativo sui termini incrociati della matrice di Coriolis, sono state assegnate bande spettrali asimmetriche e uno sfasamento relativo tra i giunti.

Anello di controllo provvisorio

Poiché la distribuzione spaziale dei dati acquisiti determinerà l'allocazione dei centri gaussiani nelle fasi successive, è opportuno che il manipolatore esplori lo spazio degli stati esattamente nelle regioni in cui il controllore *sliding mode* definitivo opererà a regime, ovvero in un intorno infinitesimo della varietà di scorrimento ($e_i \approx 0$). A tale scopo, la traiettoria *chirp* è stata inseguita chiudendo un anello di retroazione provvisorio offline basato su una legge proporzionale-derivativa parametrizzata direttamente sulla variabile di *sliding* s :

$$\tau_{prov} = K_p s = K_p(\dot{e} + \Lambda e)$$

La taratura ad alto guadagno di K_p assicura il confinamento dell'errore. L'acquisizione è stata inoltre condotta imponendo una condizione operativa a vuoto

(assenza di *payload*). In questo modo il *dataset* riflette in modo univoco la sola dinamica nominale non perturbata del braccio robotico, lasciando la compensazione del carico utile alla legge di adattamento dei pesi.

Estrazione e calcolo del Target

Terminata la simulazione, il flusso di dati grezzi è stato sottoposto a una procedura di condizionamento. In primo luogo, per mitigare l'elevato costo computazionale degli algoritmi di ottimizzazione spaziale ed evitare malcondizionamenti numerici legati a un'eccessiva densità di campionamento, i vettori di stato sono stati estratti applicando un fattore di decimazione temporale N_{step} .

Successivamente, si è proceduto alla costruzione dei vettori di stato estesi in ingresso alle due sotto-reti neurali indipendenti:

$$\mathbf{x}_i(k) = [e_i(k) \quad \dot{e}_i(k) \quad q_{d,i}(k) \quad \dot{q}_{d,i}(k) \quad \ddot{q}_{d,i}(k)]^T \in \mathbb{R}^5, \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Essendo le componenti di $\mathbf{x}_i$ caratterizzate da unità di misura e ordini di grandezza radicalmente eterogenei (da errori posizionali nell'ordine dei milliradiani ad accelerazioni nell'ordine dei radianti al secondo quadrato), l'impiego diretto di tali vettori avrebbe distorto irrimediabilmente le metriche di distanza euclidea necessarie per la successiva fase di addestramento. Si è pertanto resa obbligatoria una normalizzazione globale in cui ogni variabile è stata scalata rispetto al proprio valore massimo assoluto registrato durante l'esperimento:

$$\bar{\mathbf{x}}_i(k) = \gamma_{x,i}^{-1} \mathbf{x}_i(k)$$

dove $\gamma_{x,i} = \text{diag}(\max |\mathbf{x}_{i,1}|, \dots, \max |\mathbf{x}_{i,5}|)$ assicura che il dominio di ingresso normalizzato risulti compatto e confinato nell'ipercubo $[-1, 1]^5$.

Successivamente, la sequenza dei *target* ideali necessari per la sintesi supervisionata è stata calcolata esplicitando l'espressione analitica della dinamica aggregata ricavata nell'analisi di Lyapunov:

$$\mathbf{f}(k) = \mathbf{M}(\mathbf{q}_k)(\ddot{\mathbf{q}}_{d,k} + \mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}_k) + \mathbf{C}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k)(\dot{\mathbf{q}}_{d,k} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}_k) + \mathbf{G}(\mathbf{q}_k) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}_k)$$

Sostituendo istante per istante i campioni acquisiti all'interno dei tensori dinamici nominali $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ ed $\mathbf{F}$ valutati dal solutore, si è ottenuta la traiettoria esatta della funzione incognita per ciascun giunto $f_i(k)$.

Conclusa tale procedura, il *dataset* condizionato complessivo risulta idoneo a essere fornito in *input* all'algoritmo di *clustering* k-means, allo scopo di estrarre la partizione ottimale dello strato nascosto.

5.3.2 Allocazione dei centri tramite k-means

Ottenuti i *dataset* condizionati e normalizzati per ciascun giunto, il passo successivo consiste nell'allocare spazialmente i centri c_j delle funzioni gaussiane. L'obiettivo è posizionare i campi recettivi della rete neurale esclusivamente nelle regioni dello spazio di stato effettivamente attraversate dal manipolatore durante il suo moto.

Per risolvere questo problema in modo automatico, si fa ricorso all'algoritmo di raggruppamento non supervisionato *k-means*. Dal punto di vista concettuale, l'algoritmo analizza gli N vettori di ingresso e li suddivide in M gruppi (*cluster*), con

$M \ll N$. Il processo iterativo muove i centroidi di questi gruppi fino a minimizzare la distanza euclidea complessiva tra i campioni di addestramento e il centro del gruppo a cui appartengono.

Una volta individuate le coordinate ottimali dei centri, è necessario definire l'ampiezza σ_i delle funzioni gaussiane. Per garantire una transizione fluida tra i nodi ed evitare zone dello spazio non coperte da alcun neurone di approssimazione, si è adottato un criterio euristico di copertura spaziale. Tale approccio calcola un'unica ampiezza globale condivisa per l'intera sotto-rete, proporzionale alla massima distanza euclidea riscontrata tra i centri appena allocati:

$$\sigma_i = \frac{\max \|c_p - c_q\|}{\sqrt{2M}} \quad (5.12)$$

Questa formulazione assicura che le funzioni gaussiane si sovrappongano in modo ottimale: una larghezza troppo piccola renderebbe la rete incapace di generalizzare le dinamiche tra un centro e l'altro, mentre una troppo grande causerebbe un eccessivo appiattimento delle risposte. Con i centri e le ampiezze così fissati, la topologia di base della rete risulta completamente definita ed è pronta per la successiva fase di potatura dei nodi ridondanti.

5.3.3 Potatura dei nodi tramite algoritmo orthogonal least squares

Conclusa l'allocazione spaziale tramite l'algoritmo *k-means*, la rete RBF risulta popolata da M centri candidati. L'impiego diretto di tale topologia, pur garantendo un'ottima copertura spaziale, comporterebbe un inutile sovraccarico computazionale per il processore deputato al controllo in tempo reale. Inoltre, un numero eccessivo di nodi introduce inevitabili sovrapposizioni tra le funzioni gaussiane adiacenti, che rendono la determinazione dei pesi numericamente instabile e portano la rete a memorizzare il rumore (*overfitting*).

Si rende pertanto indispensabile estrarre un sotto-modello parsimonioso, ovvero selezionare solo i neuroni strettamente necessari a mappare la dinamica del sistema. Per conseguire tale obiettivo in modo algoritmico, si impiega il metodo di regressione *Orthogonal Least Squares* (OLS) abbinato a una tecnica di selezione in avanti (*Forward Selection*).

Il principio concettuale alla base dell'algoritmo OLS risiede nel superamento della dipendenza lineare tra le attivazioni dei diversi nodi nascosti. A tal fine, l'algoritmo applica una trasformazione geometrica (basata sull'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) che rende le uscite dei neuroni matematicamente indipendenti le une dalle altre.

In questo nuovo spazio trasformato, il contributo di ciascun nodo diventa isolato. È così possibile definire una metrica analitica esatta, denominata *Error Reduction Ratio* (ERR), che quantifica il contributo incrementale di ciascun neurone.

Guidata da questa metrica, la costruzione della rete definitiva procede per passi iterativi:

1. ad ogni passo, l'algoritmo valuta tutti i centri candidati non ancora scelti e calcola il loro ERR ortogonalizzato;
2. il neurone che garantisce il valore di ERR più alto viene promosso a nodo definitivo della rete e rimosso dalla lista dei candidati;

3. il processo continua aggiungendo un neurone alla volta, calcolando la somma progressiva degli ERR.

Il criterio di arresto dell'algoritmo interviene non appena la somma dei contributi cumulativi (ERR) raggiunge una soglia di tolleranza prestabilita. L'esito di questa procedura di selezione è una topologia neurale ottimizzata e compatta, caratterizzata da un numero ridotto di nodi $M_{OLS} < M$ e da una corrispondente matrice dei pesi sinaptici W_{OLS} .

All'interno dell'architettura di controllo ad anello chiuso, tale matrice assume un ruolo cruciale: essa viene infatti impiegata come condizione iniziale per l'integrazione della legge di adattamento di Lyapunov. Grazie a questa inizializzazione (tecnica di *warm start*), l'evoluzione online dei pesi sinaptici non parte da una condizione nulla; al contrario, la legge di adattamento interviene in tempo reale unicamente per affinare la stima nominale, compensando le fluttuazioni parametriche, i disturbi esogeni e le dinamiche residue non modellate dalla regressione offline.

A valle della procedura di potatura (o *pruning*) effettuata dall'algoritmo OLS, emerge la necessità di ricalcolare il parametro di ampiezza (o *spread*) delle funzioni di attivazione gaussiane. Poiché la riduzione della dimensionalità ($M_{OLS} < M$) comporta inevitabilmente un diradamento dei centroidi nello spazio di ingresso, il mantenimento delle ampiezze originarie comporterebbe un'insufficiente sovrapposizione tra i campi recettivi dei neuroni superstiti. Da un punto di vista funzionale, ciò indurrebbe una severa perdita di generalizzazione della rete, generando zone d'ombra nello spazio degli stati all'interno delle quali l'attivazione complessiva decadrebbe a zero.

Per scongiurare tale anomalia e garantire una copertura fluida e continua del dominio operativo, lo *spread* viene ricalcolato sfruttando la formulazione euristica precedentemente introdotta nell'equazione (5.12). Tale relazione adatta in modo ottimale la larghezza della campana gaussiana valutando la distanza massima intercorrente tra i nuovi centri operativi selezionati, assicurando così il corretto grado di sovrapposizione (*overlap*) tra i nodi adiacenti.

La rete, ora parsimoniosa ma altamente descrittiva, è pronta per essere integrata nell'anello di controllo per la sperimentazione online. I dettagli relativi all'implementazione pratica di questa architettura in ambiente *Simulink* verranno descritti nel Capitolo 6.

Capitolo 6

Implementazione in ambiente Simulink

6.1 Introduzione e struttura del modello

Al fine di validare il modello matematico del manipolatore ERICC e di testare l'efficacia delle leggi di controllo, sono stati utilizzati modelli a blocchi costruiti all'interno dell'ambiente di simulazione *Simulink* (integrato nella suite software *MATLAB*). Il diagramma a blocchi complessivo dell'architettura di controllo utilizzato nei vari scenari di simulazione è illustrato in Figura 6.1, quest'ultimo è stata partizionato in tre sottosistemi funzionali principali: il generatore delle traiettorie di riferimento, l'unità di calcolo della legge di controllo e il modello del processo fisico.

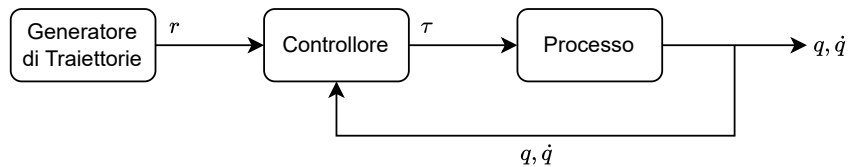


Figura 6.1: Struttura dello schema a blocchi implementato in Simulink.

Nelle sezioni seguenti verrà analizzata nel dettaglio la topologia dei moduli di simulazione relativi alla generazione delle traiettorie, alla dinamica del processo e alle architetture di controllo formalizzate nei capitoli precedenti.

6.2 Generatore di traiettorie

Il modulo di generazione delle traiettorie è deputato alla sintesi del riferimento nominale che l'anello di controllo è chiamato a inseguire. A differenza della semplice pianificazione del percorso geometrico, la sintesi di una traiettoria operativa impone la definizione di una legge oraria temporale che interpoli le configurazioni di partenza e di arrivo, garantendo un elevato grado di regolarità (*smoothness*).

Per soddisfare tale requisito ingegneristico, il generatore calcola e fornisce al sistema, a ogni istante di campionamento, il vettore di posizione $\mathbf{q}_d(t)$, il vettore di velocità $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ e il vettore di accelerazione $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$ desiderati nello spazio dei giunti.

Tali segnali devono essere generati in modo da garantire l'assoluta continuità dei profili di moto, in modo da scongiurare discontinuità nelle accelerazioni che comporterebbero l'insorgere di sforzi impulsivi e vibrazioni non modellate sui riduttori meccanici dell'ERICC.

Al fine di validare le architetture di controllo su scenari eterogenei, sono stati utilizzati due approcci distinti per la generazione del riferimento:

- traiettoria lineare con raccordi parabolici (filtro dinamico);
- traiettoria operativa industriale (polinomio quintico in spazio cartesiano).

6.2.1 Traiettoria lineare con raccordi parabolici

Questo generatore è basato sulla sintesi algoritmica sviluppata e validata in un precedente lavoro di tesi [10]. Elaborando in ingresso segnali di riferimento a gradino, il modulo restituisce una traiettoria continua priva di sovraelongazioni, caratterizzata da un profilo di velocità trapezoidale, il quale definisce spazialmente una traiettoria lineare con raccordi parabolici.

Il vantaggio principale di questo approccio risiede nella capacità di imporre e rispettare limiti cinematici predefiniti (come la velocità massima v_{max} e l'accelerazione massima a_{max}).

6.2.2 Traiettoria operativa industriale

Per simulare manovre industriali realistiche (come un ciclo di *pick-and-place*), il riferimento viene pianificato direttamente nello spazio operativo cartesiano dell'organo terminale. L'interpolazione tra i nodi spaziali preassegnati, corrispondenti alle fasi di avvicinamento, presa, sollevamento e rilascio, è affidata a polinomi di quinto grado, i quali assicurano la stringente continuità dei profili di posizione, velocità e accelerazione, garantendo al contempo un *jerk* finito.

Per convertire il riferimento cartesiano nel dominio delle coordinate articolari compatibili con l'anello di controllo, il modulo esegue in tempo reale la cinematica inversa del manipolatore.

Mentre le posizioni articolari desiderate vengono ricavate in forma chiusa invertendo le relazioni geometriche derivanti dal vettore di traslazione p_n^0 , i campi di velocità e accelerazione si ottengono per via differenziale. Definendo con x_d il vettore di riferimento nello spazio operativo (il quale, per il compito in esame, coincide con le sole coordinate cartesiane di posizione dell'organo terminale fornite da p_n^0), tali grandezze si calcolano invertendo la matrice Jacobiana analitica $J(q_d)$ valutata lungo la traiettoria desiderata:

$$\begin{aligned}\dot{q}_d &= J^{-1}(q_d)\dot{x}_d \\ \ddot{q}_d &= J^{-1}(q_d) \left(\ddot{x}_d - \dot{J}(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d \right)\end{aligned}$$

Questa conversione differenziale impone, in fase di pianificazione, che la traiettoria operativa sia progettata in modo da mantenersi distante dalla configurazione di singolarità cinematica del manipolatore, condizione necessaria per garantire l'esistenza della soluzione differenziale e prevenire divergenze numeriche nell'inversione della matrice.

6.3 Processo fisico

Il modulo relativo al processo fisico implementa la dinamica diretta del modello dinamico del manipolatore. Tale modulo riceve in ingresso il vettore delle coppie $\tau \in \mathbb{R}^n$ provenienti dal modulo relativo al controllore. In uscita invece restituisce l'evoluzione temporale dello stato cinematico, ovvero le posizioni q e le velocità articolari $\dot{q}$. La topologia interna del sottosistema funzionale è schematizzata in Figura 6.2.

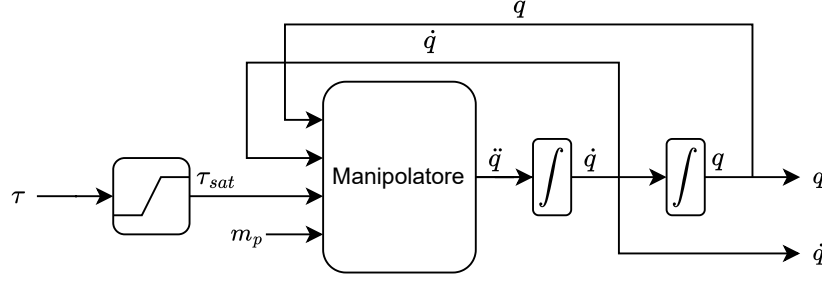


Figura 6.2: Schema a blocchi del sottosistema Processo

Il nucleo matematico del processo è stato codificato all'interno di un blocco *MATLAB Function* (denominato "Manipolatore"). Tale script elabora la dinamica non lineare descritta analiticamente nella Sezione 3.7: a ogni passo di campionamento, l'algoritmo acquisisce lo stato istantaneo retroazionato e il carico utile m_p , valuta i parametri dinamici equivalenti (α^* , β^* , ε^* , e_1 , e_2), assembla le matrici nominali della dinamica.

Sulla base di queste matrici, la *MATLAB function* calcola istantaneamente il vettore delle accelerazioni articolari $\ddot{q}$ (generato dal vettore delle coppie τ_{sat}) risolvendo la (3.4). Il vettore risultante viene successivamente processato da una catena composta da due blocchi integratori vettoriali continui. I segnali cinematici così ottenuti vengono infine prelevati in retroazione sia per aggiornare le matrici dinamiche del manipolatore all'istante di campionamento successivo, sia per chiudere l'anello di controllo globale permettendo il calcolo delle metriche di errore.

Nella fase di implementazione, una criticità numerica rilevante è emersa nella codifica del vettore delle forze di attrito $F(\dot{q})$. Dal punto di vista del modello fisico ideale, la componente di Coulomb subisce un'inversione di segno istantanea in corrispondenza del cambio di verso della velocità articolare. Qualora tale comportamento venisse implementato analiticamente mediante la funzione discontinua segno ($\text{sgn}(\cdot)$), la transizione a gradino nell'intorno dello zero indurrebbe i solutori differenziali a ridurre drasticamente il passo di integrazione per forzarne la convergenza. Di conseguenza, si assisterebbe a un severo onere computazionale e all'insorgere di fluttuazioni numeriche ad alta frequenza che non rispecchiano l'effettiva dinamica meccanica del sistema.

Per ovviare a questa inefficienza, la discontinuità dell'attrito di Coulomb è stata approssimata in modo continuo ricorrendo alla funzione iperbolica $\tanh(k\dot{q})$, dove $k \gg 0$. Tale operatore garantisce un comportamento pressoché coincidente con il modello di Coulomb per velocità sufficientemente lontane dall'origine, restituendo

al contempo una transizione liscia nell'intorno dello zero. L'implementazione algoritmica, estesa per considerare l'asimmetria direzionale presente sul manipolatore ERICC è riportata nel Listato 6.1.

```

1 % --- Vettore di attrito F ---
2 F_s2 = 0.5 * (F_sp2 - F_sn2) * tanh(k * q2p) + 0.5 * (F_sp2
   ↪ + F_sn2) * abs(tanh(k * q2p));
3 F_s3 = 0.5 * (F_sp3 - F_sn3) * tanh(k * q3p) + 0.5 * (F_sp3
   ↪ + F_sn3) * abs(tanh(k * q3p));
4
5 F1 = F_v2 * q2p + F_s2;
6 F2 = F_v3 * q3p + F_s3;
7
8 F = [F1; F2];

```

Listato 6.1: Modellazione continua del vettore di attrito asimmetrico.

Dal punto di vista analitico, la coerenza della combinazione algebrica può essere verificata valutando il comportamento della formula per la singola articolazione i -esima nei tre regimi operativi:

- $\dot{q}_i > 0$: per un guadagno k sufficientemente elevato, il termine $\tanh(k\dot{q}_i)$ e il suo modulo saturano rapidamente al valore limite $+1$. Sostituendo tali costanti nell'equazione, la forza d'attrito calcolata coincide esattamente con la componente dinamica positiva F_{spi} .
- $\dot{q}_i < 0$: il termine $\tanh(k\dot{q}_i)$ approssima il valore -1 , mentre il suo modulo rimane $+1$. Semplificando l'espressione, si ottiene la componente d'attrito negativa F_{sni} .
- $\dot{q}_i \approx 0$: la funzione e il suo modulo si annullano, forzando a zero il vettore delle forze di attrito di Coulomb.

Tale architettura analitica consente pertanto di inglobare l'asimmetria parametrica ($F_{spi} \neq F_{sni}$) all'interno di un'unica equazione vettoriale continua. La formulazione previene l'impiego di diramazioni logiche a commutazione (costrutti `if-else`), garantendo stabilità numerica e fluidità di calcolo. Si sottolinea tuttavia il compromesso teorico intrinseco assunto con questa approssimazione: imponendo un attrito esattamente nullo per $\dot{q} = 0$, si sacrifica deliberatamente la modellazione esatta dell'attrito statico, il quale nella realtà fisica è in grado di bilanciare attivamente sollecitazioni di coppia inferiori alla soglia di stacco. Date le finalità della presente tesi, incentrate sull'inseguimento di traiettorie a regime dinamico, tale semplificazione risulta tuttavia pienamente accettabile.

6.4 Controllore sliding mode

Il sottosistema relativo al controllore costituisce il nodo di elaborazione centrale del sistema in anello chiuso. Esso è configurato per acquisire in ingresso, a ogni passo di campionamento, due vettori:

- **Lo stato del sistema:** le misurazioni di posizione $q(t)$ e velocità $\dot{q}(t)$ retroazionate dall'uscita del manipolatore.
- **Il riferimento cinematico:** le traiettorie nominali $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ e $\ddot{q}_d(t)$ fornite dal generatore di traiettorie.

Il controllore elabora questi segnali e restituisce il vettore delle coppie ai giunti necessarie all'inseguimento della traiettoria di riferimento. La topologia interna del controllore implementato in *Simulink* è schematizzata in Figura 6.3.

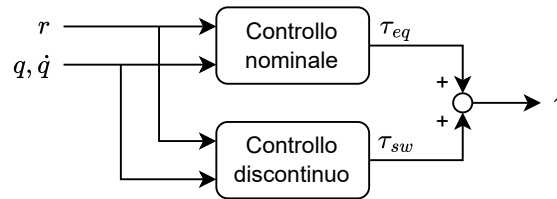


Figura 6.3: Schema a blocchi del sottosistema Controllore SMC

Al fine di favorire la massima efficienza computazionale, l'intera logica di controllo è stata incapsulata all'interno di un blocco *MATLAB function*. Tale *script* elabora i suddetti ingressi e valuta le matrici del modello nominale allo scopo di sintetizzare la legge di controllo globale $\tau = \tau_{eq} + \tau_{sw}$. L'algoritmo traduce le equazioni analitiche ricavate nel Capitolo 4, implementando l'azione di regolarizzazione del *quasi-sliding mode* al fine di erogare segnali di comando continui e compatibili con i limiti operativi degli attuatori.

Dal punto di vista implementativo, il calcolo dell'azione robusta è stato demandato a una funzione ausiliaria interna alla *MATLAB function*, la cui struttura è riportata nel Listato 6.2.

```

1  % --- Funzione di Saturazione ---
2  function y = sat(s, Phi)
3      Phi(Phi == 0) = realmin;
4      y = min(max(s ./ Phi, -1), 1);
5  end

```

Listato 6.2: Implementazione vettorializzata della funzione di saturazione.

Come si evince dal listato, il codice prevede una protezione numerica intrinseca contro le singolarità algebriche (divisione per zero). Qualora lo spessore dello strato limite vettoriale Φ venisse forzato analiticamente a zero, l'algoritmo lo sostituisce istantaneamente con *realmin*, ovvero il più piccolo numero in virgola mobile positivo rappresentabile nell'architettura di MATLAB.

Tale accorgimento garantisce che il rapporto valutato elemento per elemento (s_i/Φ_i) assuma un valore tendente all'infinito, costringendo gli operatori successivi a saturare l'uscita in modo esatto a ± 1 . Da un punto di vista teorico e pratico,

questa logica implica che l'annullamento dello strato limite faccia collassare in modo sicuro e automatico il controllore dal *quasi-sliding mode* allo *sliding mode* ideale (strutturato sulla pura funzione segno $\text{sgn}(\cdot)$), senza incorrere in interruzioni del solutore.

Si sottolinea come il calcolo della saturazione avvenga tramite la combinazione annidata degli operatori $\min$ e $\max$. Questa formulazione puramente algebrica è stata preferita all'impiego dei classici costrutti logici condizionali (quali `if-else`). L'assenza di salti algoritmici e la completa vettorializzazione delle operazioni (operatore `.`/`/`) permettono di processare simultaneamente l'intero spazio dei giunti del manipolatore. Tale topologia del codice assicura un'estrema fluidità di calcolo, ottimizzando le prestazioni anche durante le fasi di commutazione ad alta frequenza.

La validazione del sistema, analizzato sia in condizioni di dinamica nominale sia sotto l'effetto di perturbazioni esogene, sarà oggetto del Capitolo 7. In tale sede, le prestazioni dello *sliding mode control* puramente *model-based* verranno confrontate con quelle della architettura adattiva neurale.

6.5 Controllore neuro-sliding mode

Come anticipato nella sezione precedente il sottosistema relativo al controllore, ha lo scopo di generare, secondo una legge di controllo adattiva, il vettore delle coppie ai giunti del manipolatore.

Il diagramma a blocchi complessivo del sottosistema è illustrato in Figura 6.4. Entrambi i moduli interni ricevono in ingresso il vettore dei riferimenti di traiettoria r (comprensivo di posizioni, velocità e accelerazioni desiderate) e lo stato attuale del manipolatore, ovvero le posizioni q e le velocità articolari $\dot{q}$.

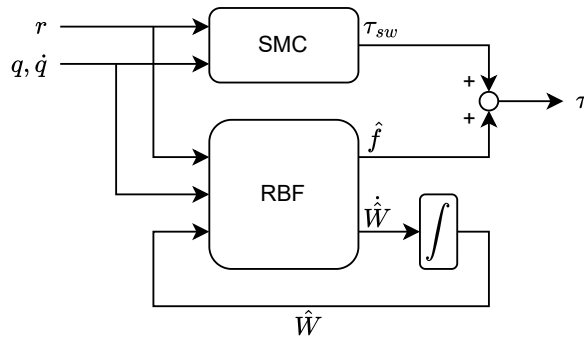


Figura 6.4: Schema a blocchi del sottosistema Controllore SMC-RBF

Per massimizzare l'efficienza computazionale, la logica interna è stata incapsulata in blocchi *MATLAB function*, le cui fasi algoritmiche sono descritte nel dettaglio nelle sezioni seguenti.

6.5.1 Modulo adattivo RBF

Il modulo adattivo ha il compito di stimare in tempo reale le dinamiche ignote del sistema e aggiornare i pesi sinaptici. La logica algoritmica è stata suddivisa in tre fasi, corrispondenti ai tre strati dell'architettura neurale.

Strato di ingresso

In primo luogo, il modulo importa i risultati dell'addestramento offline. In seguito il modulo calcola l'errore di inseguimento e e la sua derivata $\dot{e}$. Tali grandezze, unite ai riferimenti, vengono concatenate per assemblare i vettori di ingresso delle sotto-reti neurali definiti nella (5.11).

Come anticipato nella Sezione 5.3, ogni componente di x_i viene normalizzata rispetto ai propri valori massimi, garantendo parità di importanza statistica e ottenendo lo stato adimensionale $\bar{x}_i$. L'implementazione della costruzione del vettore e la relativa normalizzazione vengono mostrati nel Listato 6.3.

```
1      % Calcolo degli errori
2      e = qd - q;
3      ep = qdp - qp;
4
5      % Costruzione dello stato esteso per i giunti 2 e 3
6      x2 = [e(1); ep(1); qd(1); qdp(1); qdpp(1)];
7      x3 = [e(2); ep(2); qd(2); qdp(2); qdpp(2)];
8
9      % Normalizzazione
10     x2_bar = x2 ./ scale_factors2';
11     x3_bar = x3 ./ scale_factors3';
```

Listato 6.3: Codice per l'estrazione e la normalizzazione dello stato.

Strato nascosto

A partire dai vettori normalizzati, l'algoritmo valuta la distanza tra lo stato attuale e i centroidi fissi c_j , mappandola attraverso la funzione di attivazione gaussiana mostrata nel Listato 6.4.

```
1      % Calcolo dell'attivazione radiale
2      h2 = exp(-sum((x2_bar - c2).^2, 1)' / (b2^2));
3      h3 = exp(-sum((x3_bar - c3).^2, 1)' / (b3^2));
4
5      h = [h2; h3];
```

Listato 6.4: Valutazione delle Gaussiane.

A differenza degli approcci che prevedono l'utilizzo di iterazioni tramite cicli `for` per scandire e valutare individualmente la distanza da ciascun nodo della rete, in questa implementazione si è optato per una forma completamente vettorializzata. Utilizzando la funzione `sum(..., 1)` applicata alla matrice delle differenze al quadrato, il calcolo della norma e la successiva attivazione esponenziale vengono eseguiti simultaneamente su tutti i centroidi sfruttando l'algebra matriciale ottimizzata nativa di *MATLAB*. Questo accorgimento riduce il carico computazionale, rivelandosi ideale per l'esecuzione in tempo reale all'interno di un loop di controllo *Simulink*.

Strato di uscita e aggiornamento dei pesi

Ricevendo in retroazione dall'integratore esterno la matrice dei pesi globale $\hat{W}$, il blocco la partiziona internamente nelle componenti locali $\hat{W}_2$ e $\hat{W}_3$. Effettuando il prodotto matriciale tra l'attivazione dei neuroni e i rispettivi pesi, l'algoritmo restituisce in uscita il vettore delle azioni predittive di pre-compensazione $\hat{f} = [\hat{f}_2, \hat{f}_3]^T$. Questo procedimento viene illustrato nel Listato 6.5.

```

1      % Partizionamento dei pesi e calcolo dell'uscita f_hat
2      W2_hat = W_hat(1:M2);
3      W3_hat = W_hat(M2+1:M2+M3);
4
5      f2_hat = W2_hat' * h2;
6      f3_hat = W3_hat' * h3;
7      f_hat  = [f2_hat; f3_hat];

```

Listato 6.5: Uscita della rete.

Contemporaneamente al calcolo dell'uscita predittiva, la funzione deve fornire la dinamica di aggiornamento dei pesi $\dot{\hat{W}}$. Valutando la variabile di scorrimento s , l'algoritmo calcola la derivata istantanea dei pesi $\dot{\hat{W}}$ applicando la legge di adattamento basata sulla sintesi di Lyapunov (5.7). L'implementazione della legge di adattamento viene mostrata nel Listato 6.6.

```

1      % Calcolo della superficie di Sliding
2      s = ep + Lambda * e;
3
4      % Calcolo della derivata dei pesi sinaptici
5      Wp_hat = Gamma * h * s';

```

Listato 6.6: Implementazione della legge di adattamento di Lyapunov.

Il segnale $\dot{\hat{W}}$ viene espulso dal blocco e instradato verso un blocco integratore continuo. Al fine di accelerare drasticamente la convergenza dell'algoritmo e annullare il transitorio iniziale, la condizione iniziale di tale integratore non è posta a

zero, bensì inizializzata con i valori dei pesi ottimali $\hat{\mathbf{W}}_{\text{OLS}}$ estratti offline durante la fase di regressione *orthogonal least squares*. Questa tecnica di *warm start* garantisce che il controllore operi in prossimità della superficie ideale sin dal primo istante di simulazione, demandando all'adattamento online il solo compito di raffinare le fluttuazioni non modellate dell'attrito e del carico utile.

6.5.2 Modulo di sintesi SMC

Operando in parallelo al blocco neurale, il modulo SMC riceve in ingresso i medesimi segnali cinematici di errore e di riferimento. Il suo compito principale è valutare lo scostamento del sistema dalla traiettoria ideale e generare l'azione di controllo in anello chiuso necessaria per forzare lo stato verso la varietà di scorrimento.

In primo luogo, l'algoritmo computa istantaneamente la variabile di scorrimento vettoriale $\mathbf{s}$. Sulla base di tale metrica, il modulo calcola l'azione robusta discontinua τ_{sw} . Come discusso nel capitolo precedente, la discontinuità pura viene mitigata adottando l'approccio *quasi-sliding mode* per prevenire l'innescio del *chattering* meccanico sugli attuatori.

A valle dell'architettura di calcolo, come evidenziato dal nodo sommatore nello schema in Figura 6.4, la coppia motrice globale τ erogata ai giunti del manipolatore viene infine costruita assemblando il contributo predittivo e quello robusto:

$$\tau = \hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) + \tau_{\text{sw}}$$

Dal punto di vista dell'implementazione in *Simulink*, questo parallelismo architetturale si traduce in un modello modulare e numericamente efficiente. Il segnale continuo in uscita dalla rete neurale $\hat{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$ agisce di fatto come un pre-compensatore dinamico che assorbe il grosso dello sforzo di controllo, sostituendo il gravoso calcolo matriciale della dinamica inversa (tipico dell'azione equivalente τ_{eq}). Il blocco SMC, elaborando in tempo reale l'errore residuo, interviene con l'azione τ_{sw} al solo fine di reiezionare le imperfezioni della stima neurale.

Questa separazione funzionale offre un vantaggio pratico fondamentale in fase di simulazione. Poiché l'azione robusta non deve compensare l'intera dinamica del manipolatore, è possibile impostare per il controllore SMC dei valori di guadagno $\mathbf{K}$ notevolmente più bassi rispetto a un'architettura puramente robusta. In ambiente di simulazione, l'impiego di guadagni ridotti unito all'azione del *boundary layer* consente ottenere segnali di coppia fluidi e fisicamente realizzabili senza gravare sui tempi di calcolo. La flessibilità di taratura garantita da questa struttura e il comportamento dei relativi segnali verranno analizzati quantitativamente nel successivo capitolo dedicato ai risultati.

Capitolo 7

Risultati delle Simulazioni

7.1 Introduzione

Il presente capitolo è dedicato all'esposizione e all'analisi dei risultati ottenuti dalla campagna di simulazioni numeriche condotta in ambiente *Simulink*. L'obiettivo fondamentale di questa fase è validare l'efficacia dell'architettura dello *sliding mode control* e quella adattiva del *neuro-sliding mode* e operare un rigoroso confronto prestazionale ed energetico tra le due.

Al fine di valutare la robustezza e le capacità di generalizzazione delle leggi di controllo sintetizzate, i test sono stati articolati lungo due distinti profili di moto, descritti nella Sezione 6.2:

- traiettorie lineari con raccordi parabolici;
- traiettoria operativa industriale.

Per quantificare in modo oggettivo le prestazioni delle architetture di controllo proposte per ciascuna traiettoria e consentire un confronto numerico diretto tra le architetture di controllo proposte, si rende necessaria la definizione di opportuni indici di prestazione integrali.

7.1.1 Indici di Prestazione

Gli indici di prestazione valutano l'evoluzione temporale dell'errore di inseguimento cinematico per il generico giunto i -esimo controllato, esteso su un orizzonte temporale di simulazione $t \in [0, t_{sim}]$. L'errore del singolo giunto è definito come:

$$e_i(t) = q_{d,i}(t) - q_i(t)$$

Gli indici di prestazione definiti sull'errore $e_i(t)$ sono:

- **IAE (*Integral of Absolute Error*):** quantifica l'accumulo dell'errore assoluto nel tempo, fornendo una stima globale dell'accuratezza di tracciamento, indipendentemente dal segno dell'errore.

$$\text{IAE}_i = \int_0^{t_{sim}} |e_i(t)| dt$$

- **ISE (*Integral of Squared Error*):** penalizza quadraticamente gli scostamenti di grande entità. Risulta pertanto un indicatore particolarmente sensibile ai picchi di errore transitori.

$$\text{ISE}_i = \int_0^{t_{sim}} e_i^2(t) dt$$

- **ITAE (*Integral of Time-multiplied Absolute Error*):** pesa l'errore assoluto moltiplicandolo per la variabile temporale t . Tale indice penalizza severamente gli scostamenti residui a regime.

$$\text{ITAE}_i = \int_0^{t_{sim}} t|e_i(t)| dt$$

- **MaxE (*Maximum Absolute Error*):** individua lo scostamento massimo in valore assoluto, esprimendo il limite di errore peggiore.

$$\text{MaxE}_i = \max_{t \in [0, t_{sim}]} |e_i(t)|$$

Sebbene la legge di controllo agisca operativamente nello spazio dei giunti, l'obiettivo funzionale del manipolatore consiste nell'assicurare il corretto tracciamento spaziale da parte dell'organo terminale. A tal fine, si definisce l'errore di inseguimento cartesiano $e_{cart}(t)$ come la norma euclidea della differenza tra la posizione operativa desiderata $\mathbf{p}_d(t)$ e quella reale $\mathbf{p}(t)$, calcolate mediante le equazioni (3.2) della cinematica diretta:

$$e_{cart}(t) = \|\mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t)\|$$

Sulla base di tale scostamento, le medesime metriche IAE, ISE, ITAE e MaxE verranno valutate sull'*end-effector*, fornendo un quadro prestazionale della precisione di lavoro.

Infine, si sono adottati altri due indici riguardanti lo sforzo di controllo di ciascun giunto, in particolare:

- **RMS _{τ, i} (*Root Mean Square*):** misura l'energia complessiva impiegata dall'attuatore di un giunto per inseguire la traiettoria.

$$\text{RMS}_{\tau, i} = \sqrt{\frac{1}{t_{sim}} \int_0^{t_{sim}} \tau_i^2(t) dt}$$

- **TV _{τ, i} (*Total Variation*):** misura l'oscillazione o la regolarità del segnale inviato agli attuatori. Un indice elevato denoterà un'azione di comando caratterizzata da repentine commutazioni, riflettendo un *chattering* severo.

$$\text{TV}_{\tau, i} = \int_0^{t_{sim}} \left| \frac{d\tau_i(t)}{dt} \right| dt$$

7.1.2 Parametri della simulazione

Al fine di garantire la totale riproducibilità dell'esperimento numerico per tutte le casistiche di validazione affrontate nel presente capitolo, i parametri di sintesi di entrambe le architetture di controllo sono stati concentrati nella Tabella 7.1. Tali grandezze rimarranno inalterate per ogni scenario e profilo di moto analizzato, al fine di garantire una valutazione coerente e confrontabile delle diverse architetture di controllo.

Tabella 7.1: Parametri di controllo e vincoli cinematici condivisi per l'intera campagna di simulazione

Sottosistema	Parametro	Valore
Sliding Mode Control	Pendenza varietà (Λ)	diag(10, 10)
	Guadagno discontinuo (K)	diag(15, 15)
	Strato Limite (Φ)	diag(0.01, 0.01)
Neuro-Sliding Mode	Pendenza varietà (Λ)	diag(10, 10)
	Guadagno discontinuo (K)	diag(1.5, 1)
	Strato Limite (Φ)	diag(0.005, 0.005)
	Guadagno proporzionale (K_p)	diag(20, 20)
	Tasso di apprendimento (Γ)	diag(150, 150)

È importante notare che, per garantire il corretto funzionamento del controllore *sliding mode*, è stato necessario incrementare il guadagno del termine discontinuo affinché risultasse sufficientemente elevato da compensare il caso peggiore di incertezza, rappresentato in questi scenari dalla presenza di un carico utile pari a 3 kg. Nel controllore adattivo, invece, ciò non è stato necessario, in quanto le variazioni parametriche dovute dal carico saranno compensate dalla rete neurale RBF.

7.2 Validazione su traiettoria lineare con raccordi parabolici

La prima fase di validazione delle architetture di controllo impiega il generatore di traiettoria basato su filtro dinamico (introdotto nella Sezione 6.2). L'obiettivo di questo specifico riferimento operativo è garantire una condizione di eccitazione persistente, sollecitando in modo continuo e accoppiato le dinamiche inerziali, di Coriolis e di gravità del manipolatore ERICC sull'intero spazio di lavoro.

L'analisi comparativa tra la strategia di controllo a struttura variabile classica e la sua estensione adattiva neurale viene condotta esaminando dapprima il tracciamento della traiettoria in condizioni nominali a vuoto, per poi valutare la robustezza dei due sistemi a fronte di un'importante perturbazione parametrica, simulata tramite l'inserimento istantaneo di un *payload* incognito di 3 kg all'end-effector.

7.2.1 Analisi Comparativa in Condizione Nominale

In questo primo scenario di test, il manipolatore è tenuto a inseguire la traiettoria in assenza di carico utile all'organo terminale ($m_p = 0$ kg).

Sliding mode control (QSM)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile classica (Figure 7.1 - 7.4 e Tabelle 7.2 - 7.3).

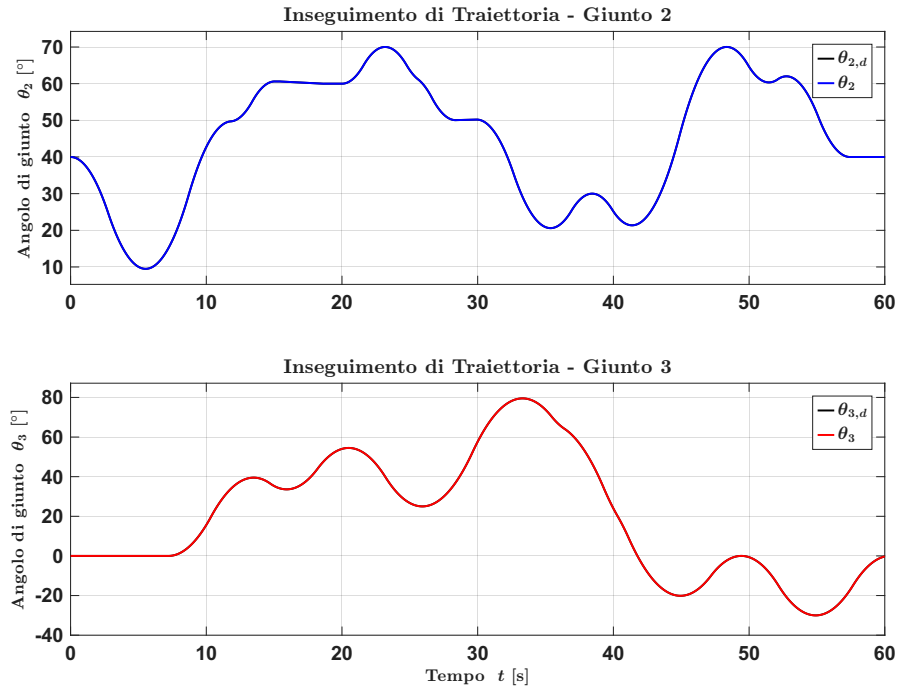


Figura 7.1: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM, $m_p = 0$ kg)

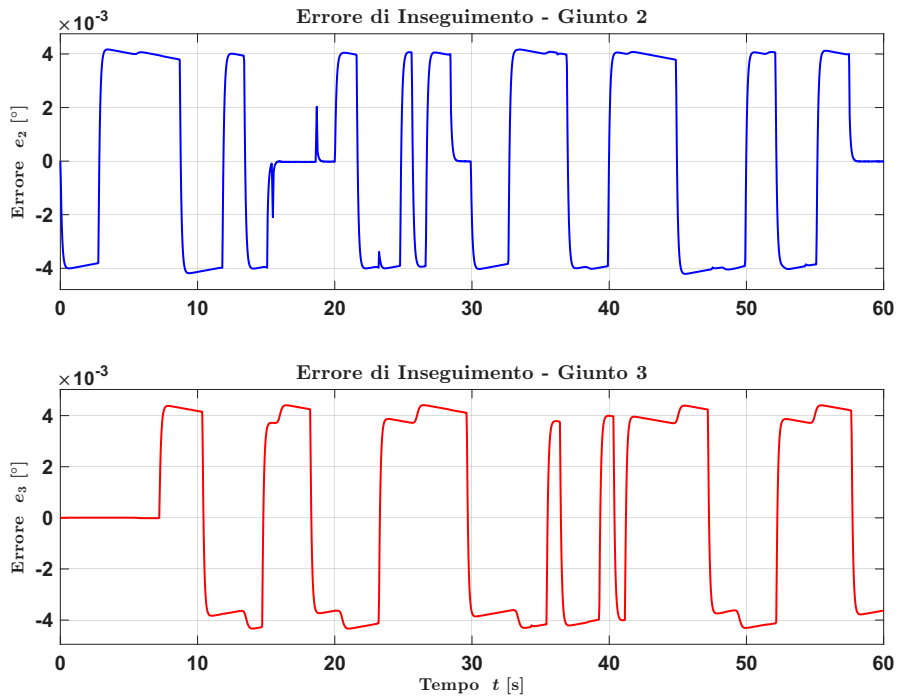


Figura 7.2: Errore di inseguimento dei giunti (QSM, $m_p = 0$ kg)

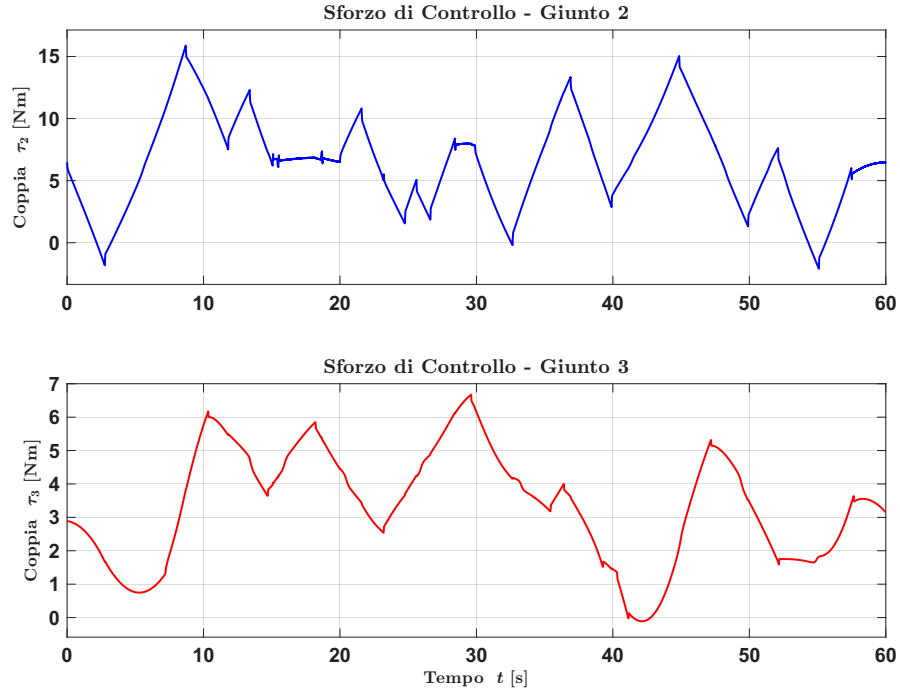


Figura 7.3: Sforzo di controllo ai giunti (QSM, $m_p = 0$ kg)

Tabella 7.2: Indici di prestazione dei giunti (QSM, $m_p = 0$ kg)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_τ	TV_τ
2	0.0034	0.0000	0.1026	0.00007	7.514	234.338
3	0.0035	0.0000	0.1196	0.00007	3.743	41.419

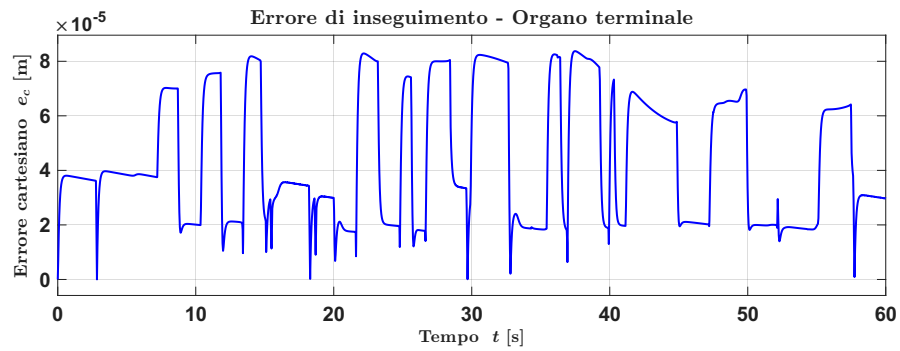


Figura 7.4: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM, $m_p = 0$ kg)

Tabella 7.3: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM, $m_p = 0$ kg)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.0026	0.0000	0.0789	0.00008

Neuro-sliding mode (QSM-RBF)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile adattiva (Figure 7.5 - 7.8 e Tabelle 7.4 - 7.5).

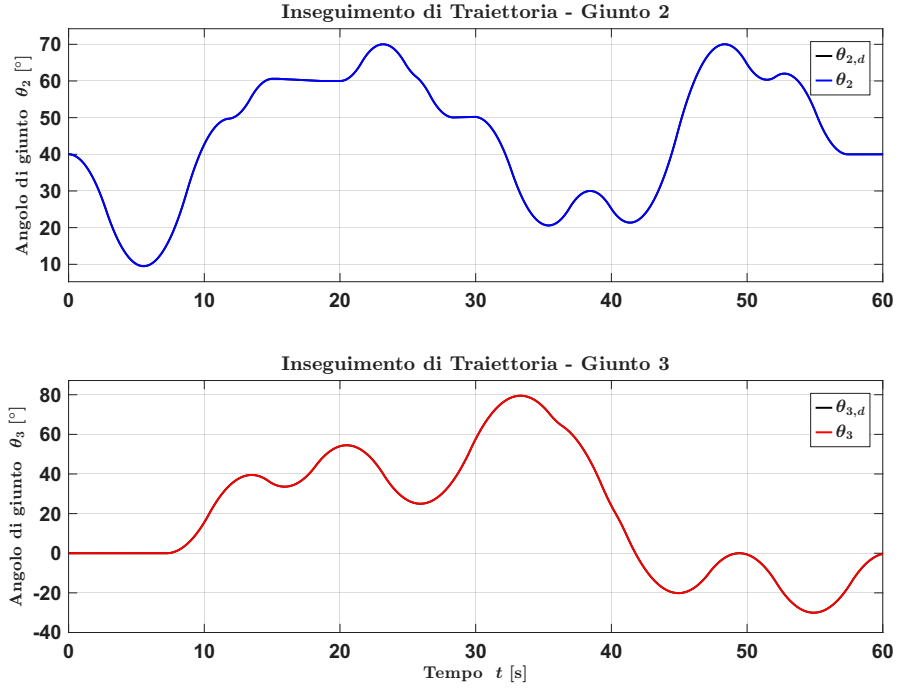


Figura 7.5: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

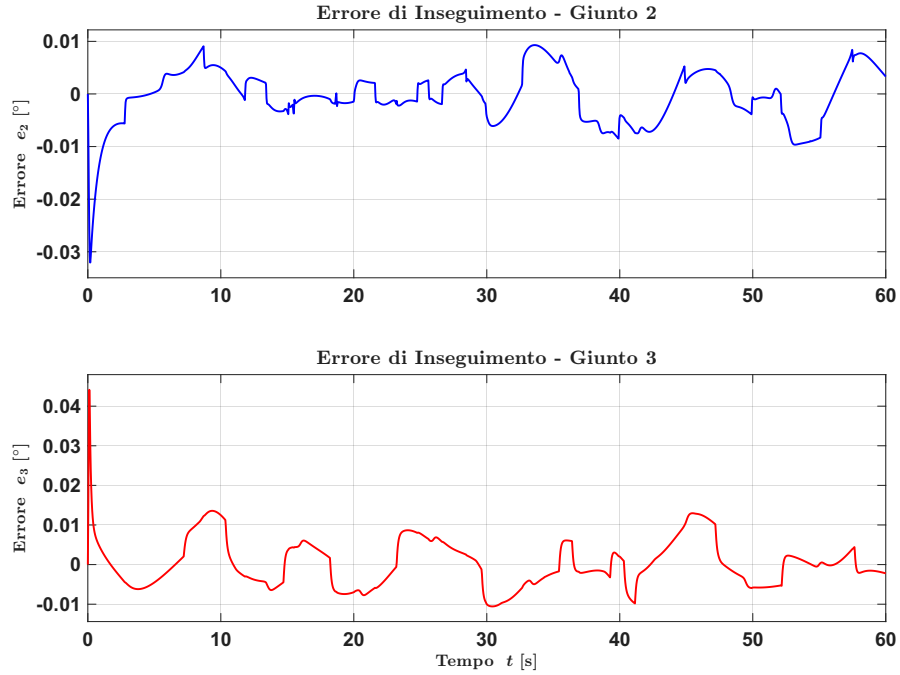


Figura 7.6: Errore di inseguimento dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

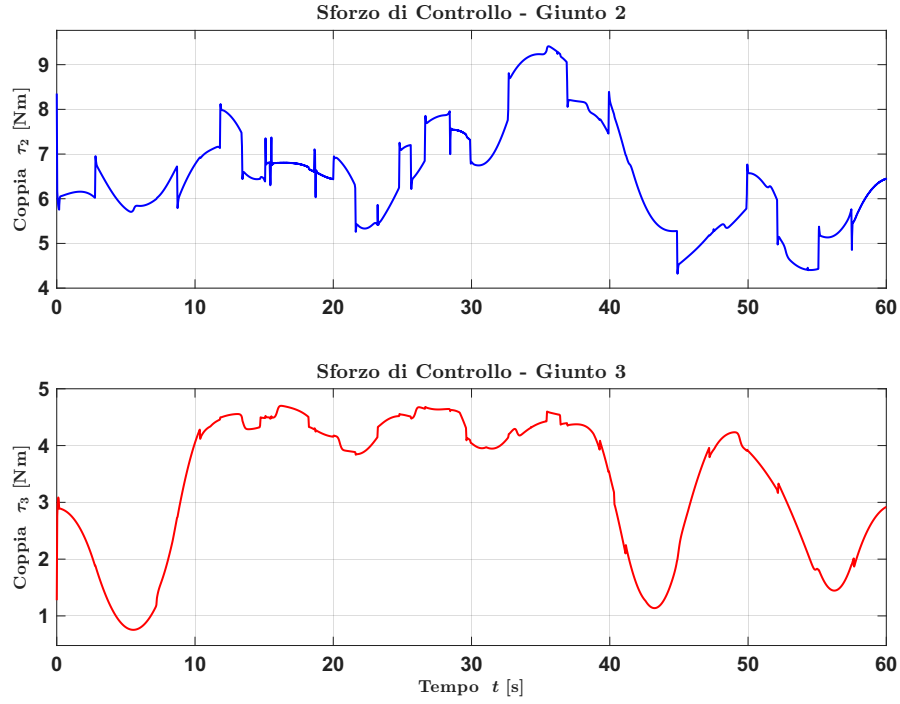


Figura 7.7: Sforzo di controllo ai giunti (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

Tabella 7.4: Indici di prestazione dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_τ	TV_τ
2	0.0042	0.0000	0.1327	0.00055	6.627	57.331
3	0.0050	0.0000	0.1346	0.00077	3.572	25.563

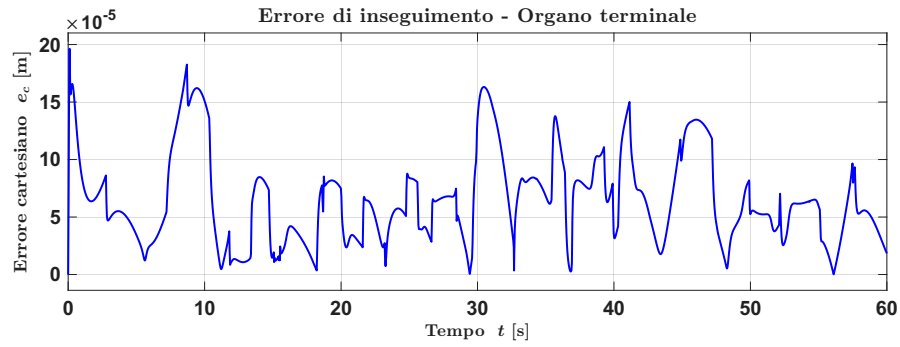


Figura 7.8: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

Tabella 7.5: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM-RBF, $m_p = 0$ kg)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.0039	0.0000	0.1148	0.00019

Analisi comparativa dei risultati

In condizioni nominali, ovvero in assenza di carico applicato all'end-effector, entrambe le architetture di controllo garantiscono un'elevata precisione di inseguimento, come evidenziato dagli indici di prestazione riportati nelle tabelle precedenti.

Per il controllore QSM, gli indici IAE, ISE e ITAE assumono valori estremamente contenuti, indicando che l'errore di tracking rimane ridotto sia in termini di ampiezza sia di energia lungo l'intera simulazione. Anche l'errore massimo, valutato sia nello spazio dei giunti sia nello spazio operativo, risulta molto contenuto, confermando l'elevata accuratezza del controllore.

L'architettura QSM-RBF mostra prestazioni di tracking dello stesso ordine di grandezza. Gli indici IAE, ISE e ITAE evidenziano un lieve incremento rispetto al controllore convenzionale, così come l'errore massimo, che tuttavia rimane estremamente ridotto e compatibile con applicazioni che richiedono elevata precisione di posizionamento. Tali risultati indicano che la rete neurale è in grado di approssimare efficacemente la dinamica del manipolatore, demandando al termine QSM la compensazione del solo errore residuo di stima.

Le differenze più significative emergono analizzando l'azione di controllo. I valori della coppia RMS risultano leggermente inferiori nel caso del controllore adattivo, mentre la metrica *Total Variation* evidenzia una riduzione molto più marcata, in particolare sul giunto 2, dove diminuisce di circa un fattore quattro rispetto al QSM tradizionale. Tale comportamento testimonia una sensibile riduzione dell'attività di commutazione del termine discontinuo e, conseguentemente, del fenomeno del *chattering*.

Nel complesso, in assenza di carico entrambe le strategie assicurano un inseguimento pressoché perfetto della traiettoria di riferimento. Il controllore QSM privilegia la massima accuratezza, ottenendo errori leggermente inferiori a fronte di un'azione di controllo più aggressiva, mentre l'architettura QSM-RBF realizza un migliore compromesso tra precisione e regolarità del comando, riducendo significativamente il *chattering* senza penalizzare in maniera apprezzabile le prestazioni di tracking.

7.2.2 Analisi Comparativa in Condizione Perturbata

In questo secondo scenario di test, si introduce una severa perturbazione all'organo terminale, applicando un *payload* incognito pari a $m_p = 3$ kg. Tale variazione rappresenta una modifica parametrica non compensata a priori nel progetto del controllore.

Entrambi i controllori vengono quindi valutati mantenendo invariati i parametri utilizzati nella prova nominale, con l'obiettivo di analizzarne la robustezza e la capacità di adattamento in presenza di incertezze modellistiche significative.

Sliding mode control (QSM)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile classica (Figure 7.9 - 7.12 e Tabelle 7.6 - 7.7).

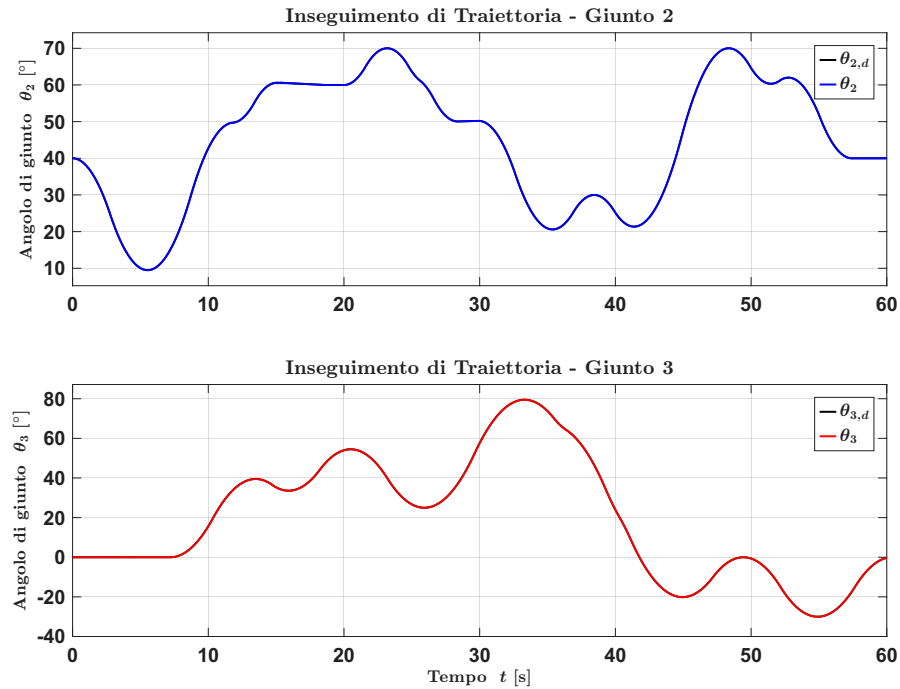


Figura 7.9: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM, $m_p = 3$ kg)

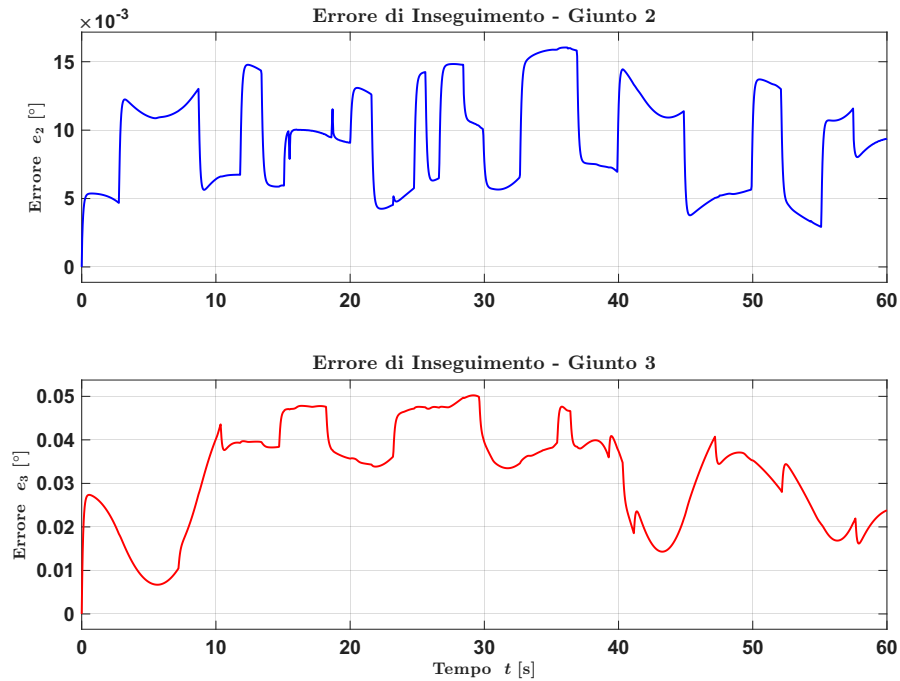


Figura 7.10: Errore di inseguimento dei giunti (QSM, $m_p = 3$ kg)

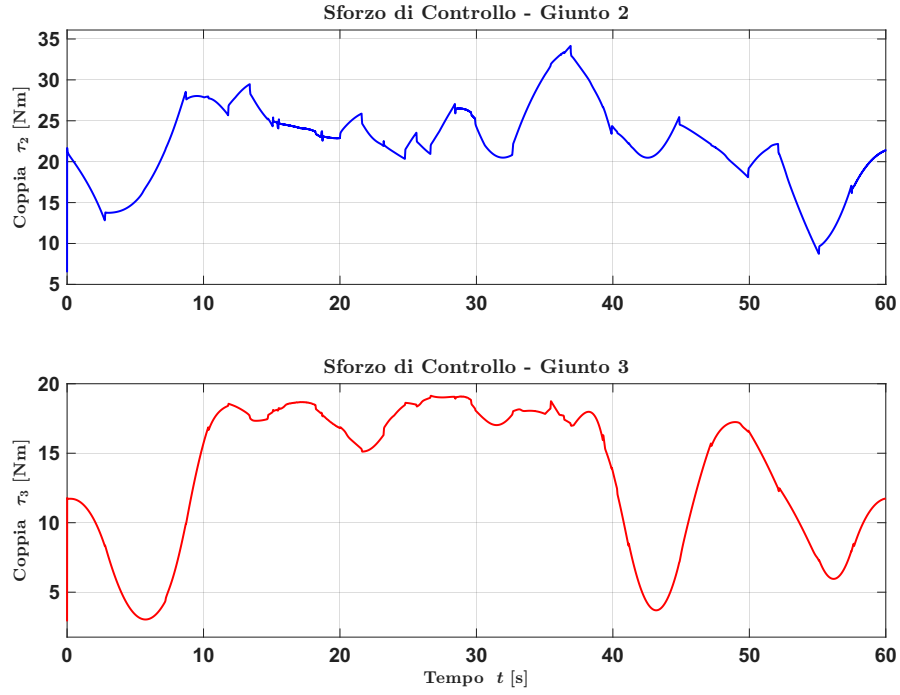


Figura 7.11: Sforzo di controllo ai giunti (QSM, $m_p = 3$ kg)

Tabella 7.6: Indici di prestazione dei giunti (QSM, $m_p = 3$ kg)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_τ	TV_τ
2	0.0097	0.0000	0.2896	0.00028	22.898	229.997
3	0.0337	0.0000	1.0045	0.00087	14.515	102.416

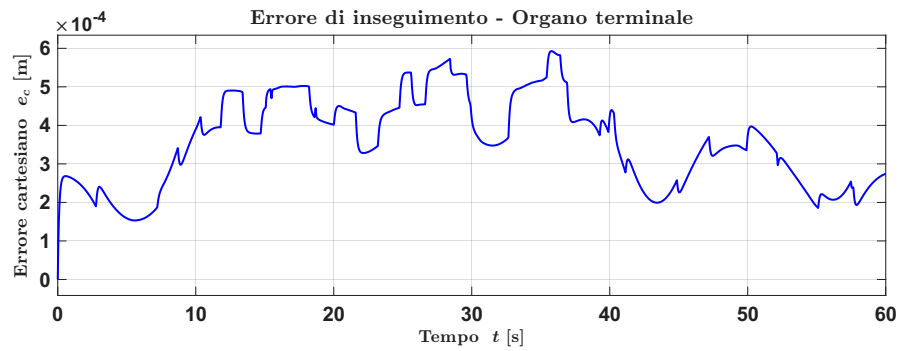


Figura 7.12: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM, $m_p = 3$ kg)

Tabella 7.7: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM, $m_p = 3$ kg)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.0214	0.0000	0.6302	0.00059

Neuro-sliding mode (QSM-RBF)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile adattiva (Figure 7.13 - 7.16 e Tabelle 7.8 - 7.9).

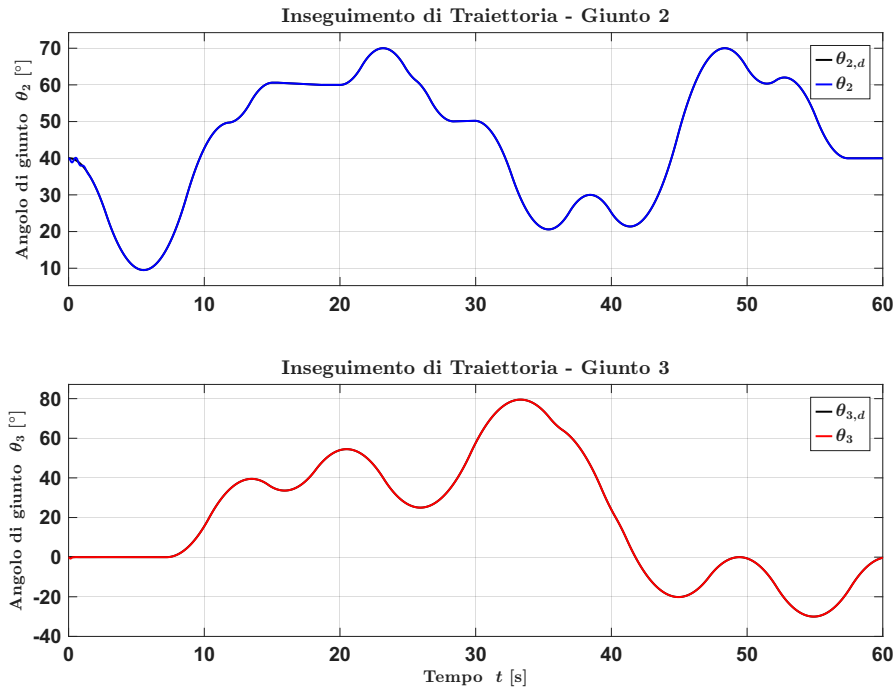


Figura 7.13: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

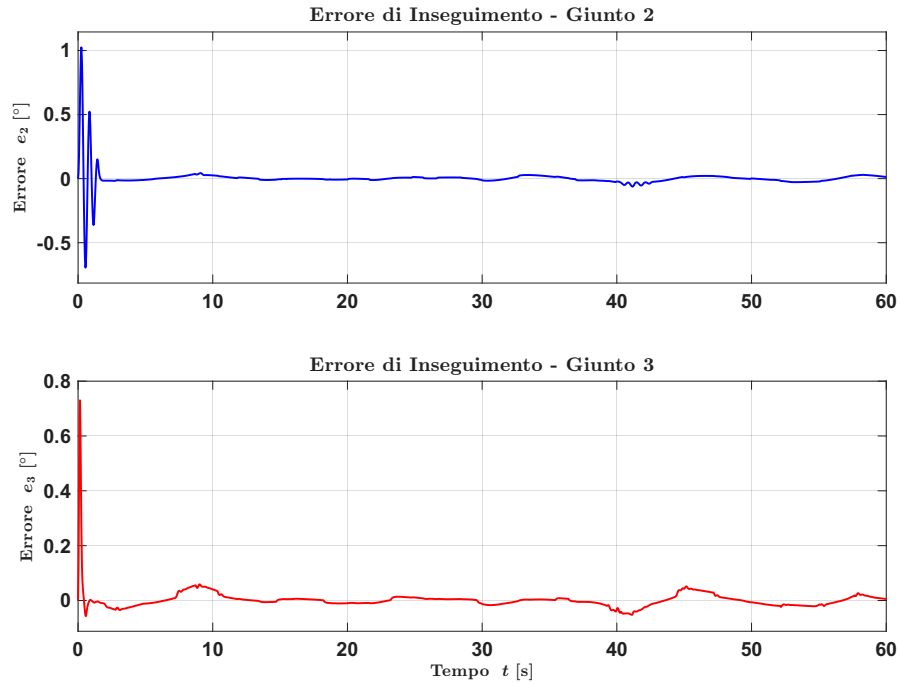


Figura 7.14: Errore di inseguimento dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

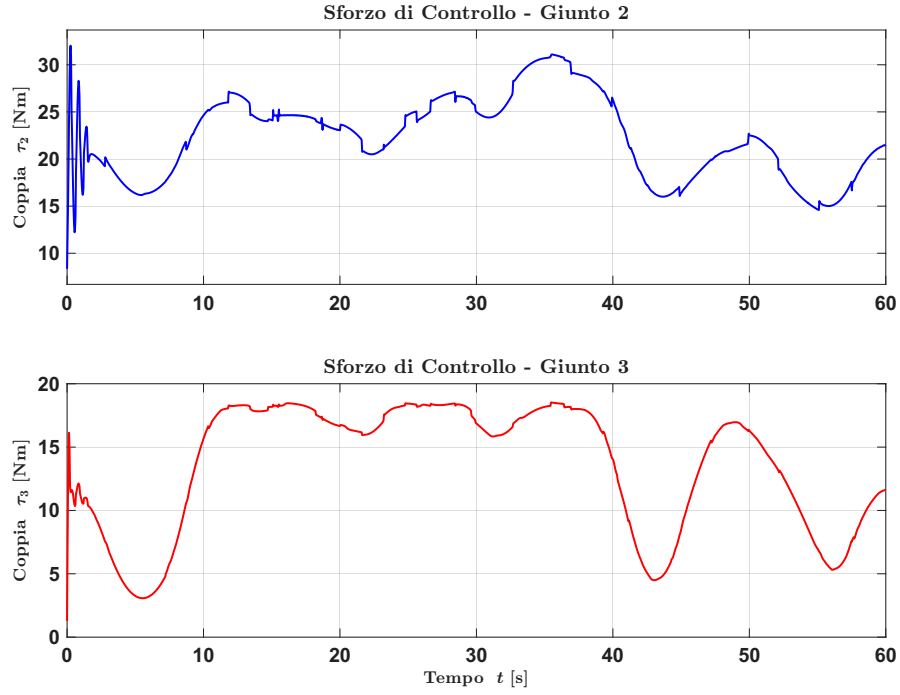


Figura 7.15: Sforzo di controllo ai giunti (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

Tabella 7.8: Indici di prestazione dei giunti (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_τ	TV_τ
2	0.0230	0.0000	0.4703	0.01788	22.723	188.717
3	0.0168	0.0000	0.4428	0.01274	14.431	108.258

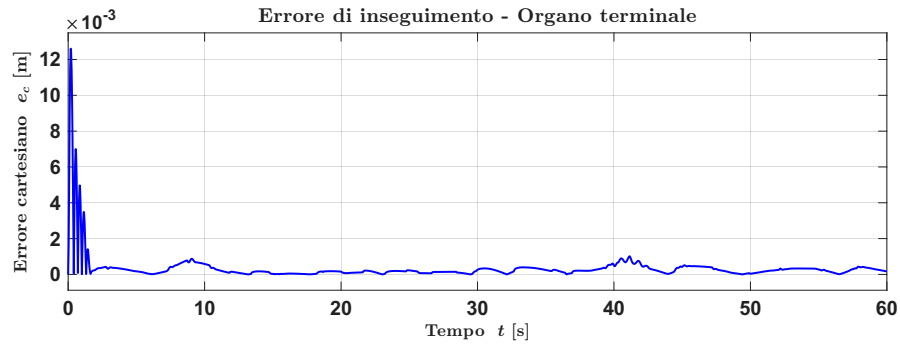


Figura 7.16: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

Tabella 7.9: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM-RBF, $m_p = 3$ kg)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.0202	0.0000	0.4509	0.01260

Analisi comparativa dei risultati

In presenza di un carico utile pari a 3 kg, entrambe le architetture mantengono la stabilità del sistema e garantiscono il corretto inseguimento della traiettoria di riferimento. Tuttavia, rispetto al caso nominale, gli indici di prestazione evidenziano il maggiore impegno richiesto al controllore per compensare l'incremento delle forze dinamiche introdotte dal carico.

Per il controllore QSM si osserva un aumento degli indici IAE e ITAE, sia nello spazio dei giunti sia nello spazio operativo, indicando un inevitabile incremento dell'errore accumulato rispetto alla condizione senza carico. Nonostante ciò, l'errore massimo rimane estremamente contenuto, a conferma della notevole robustezza del controllore nei confronti delle variazioni parametriche.

Anche il controllore QSM-RBF mantiene prestazioni di tracking soddisfacenti, sebbene il comportamento risulti differente rispetto al caso nominale. Gli indici IAE e ITAE assumono valori complessivamente confrontabili con quelli del QSM, suggerendo una buona capacità della rete neurale di compensare la dinamica del sistema anche in presenza del carico utile.

Tuttavia, l'errore massimo aumenta in maniera significativa durante la fase transitoria, a causa della ridotta accuratezza dell'approssimazione della dinamica rispetto alle condizioni di addestramento. Una volta esaurita tale fase, il sistema torna a seguire correttamente la traiettoria di riferimento, confermando la capacità dell'architettura adattiva di recuperare le prestazioni anche in presenza di variazioni parametriche non previste.

Dal punto di vista dell'azione di controllo, entrambe le strategie richiedono valori di coppia RMS sensibilmente superiori rispetto al caso senza carico, come conseguenza diretta dell'aumento delle coppie gravitazionali e inerziali. La metrica *Total Variation* rimane elevata per entrambi i controllori, sebbene il QSM-RBF continui a presentare una minore attività di commutazione sul secondo giunto, confermando la capacità della rete neurale di alleggerire il contributo richiesto al termine discontinuo. Sul terzo giunto, invece, le differenze tra le due strategie risultano meno marcate.

Nel complesso, il confronto evidenzia come l'introduzione del carico riduca il vantaggio prestazionale della soluzione adattiva osservato nel caso nominale. Il controllore QSM conferma la propria elevata robustezza mantenendo errori massimi molto contenuti, mentre il QSM-RBF conserva una buona accuratezza media ma manifesta picchi di errore più elevati, riconducibili alla maggiore difficoltà della rete neurale nel compensare una dinamica significativamente modificata dalla presenza del carico.

7.3 Validazione su traiettoria operativa industriale

La seconda fase della validazione numerica è volta a valutare le prestazioni delle architetture di controllo a fronte di un ciclo di lavoro tipico della robotica industriale. In particolare, avvalendosi del generatore spaziale introdotto nella Sezione 6.2, è stata implementata una sequenza operativa di *pick-and-place* concepita per simulare la traslazione di un carico da un piano di lavoro inferiore a una collocazione posta a una quota superiore, comprendendo le fasi di avvicinamento, aggancio, sollevamento, trasporto e rilascio.

Sliding mode control (QSM)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile classica (Figure 7.17 - 7.20 e Tabelle 7.10 - 7.11).

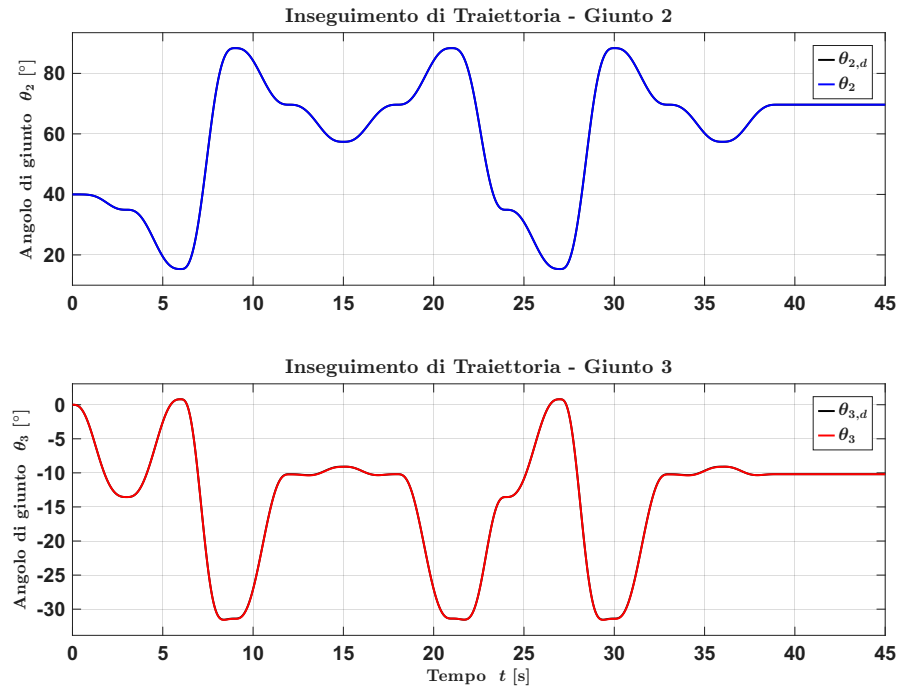


Figura 7.17: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM)

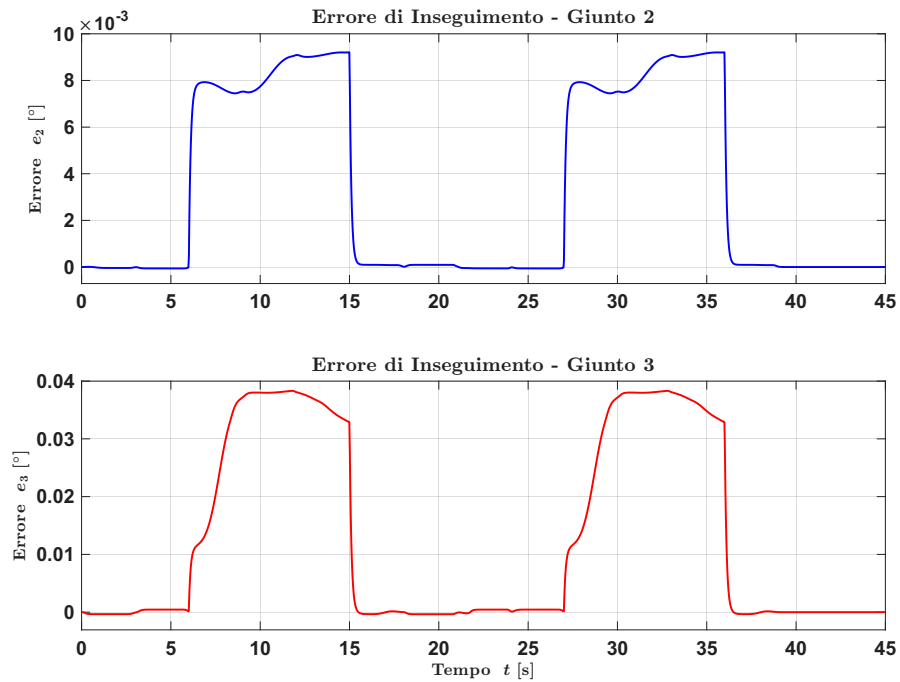


Figura 7.18: Errore di inseguimento dei giunti (QSM)

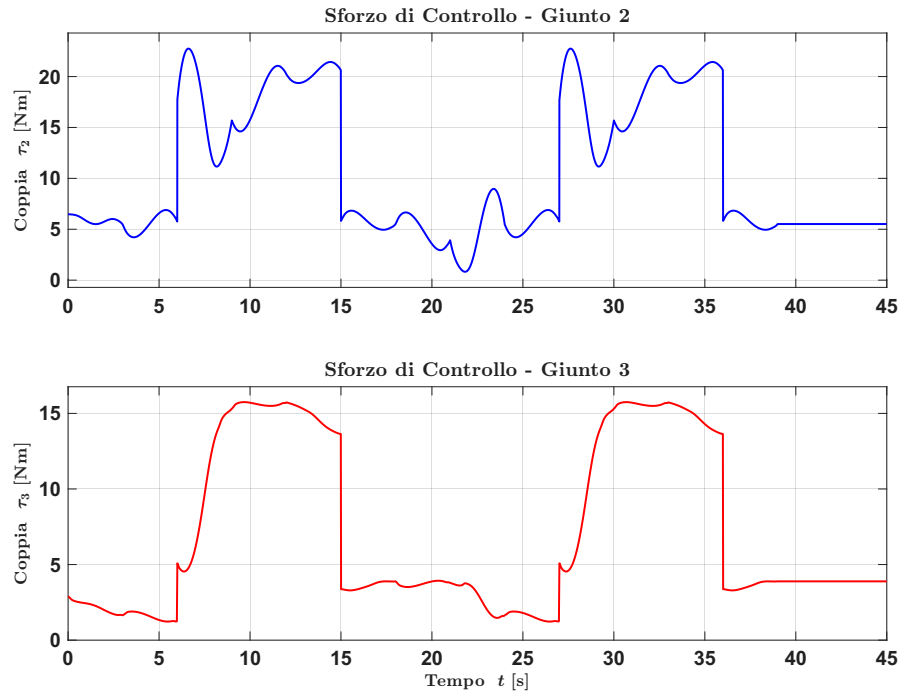


Figura 7.19: Sforzo di controllo ai giunti (QSM)

Tabella 7.10: Indici di prestazione dei giunti (QSM)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_{τ}	TV_{τ}
2	0.002650	0.000000	0.056388	0.000161	12.559	159.596
3	0.010250	0.000006	0.220456	0.000669	9.066	65.204

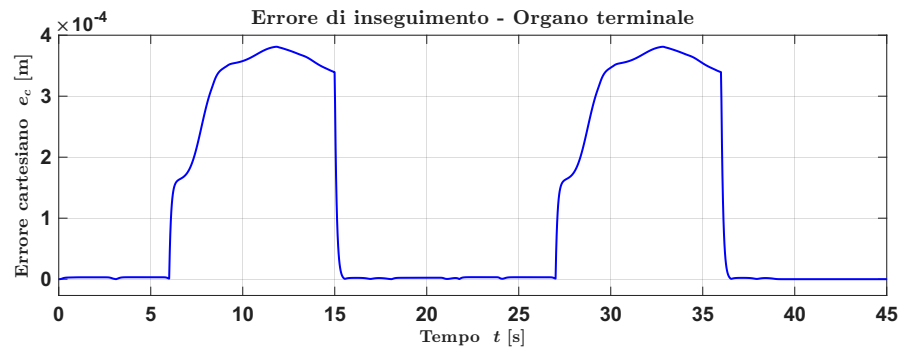


Figura 7.20: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM)

Tabella 7.11: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.005859	0.000002	0.125890	0.000381

Neuro-sliding mode (QSM-RBF)

Di seguito vengono riportati i tracciati cinematici, i profili di sforzo di controllo e le rispettive metriche di prestazione per l'architettura a struttura variabile adattiva (Figure 7.21 - 7.24 e Tabelle 7.12 - 7.13).

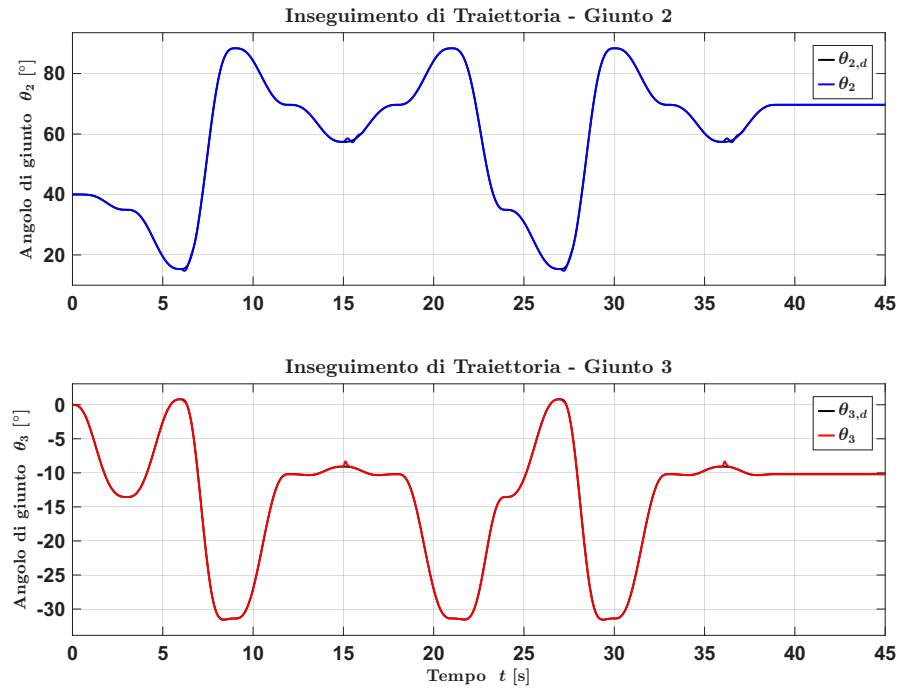


Figura 7.21: Inseguimento di traiettoria dei giunti (QSM-RBF)

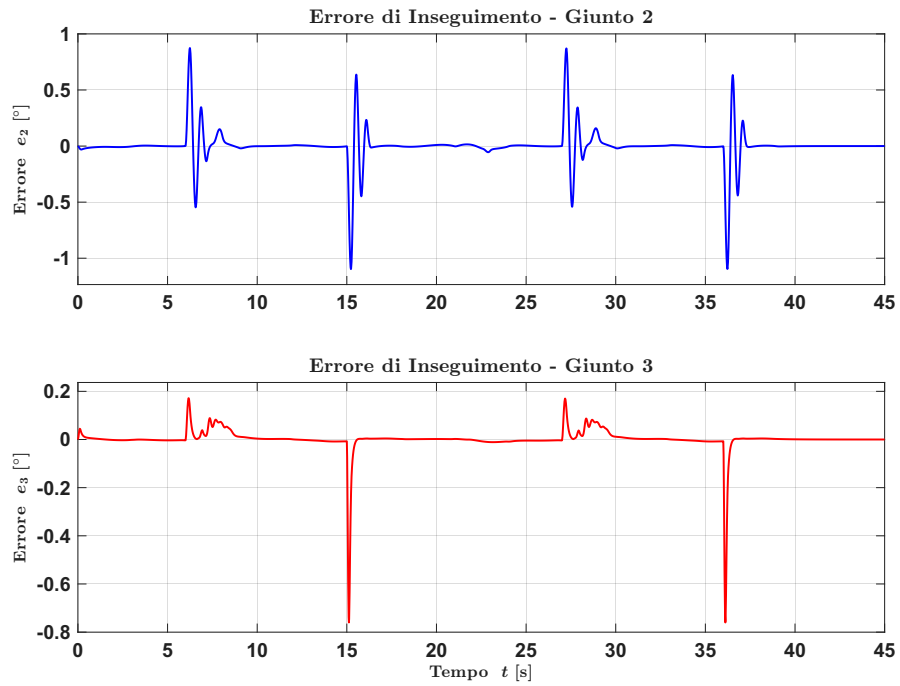


Figura 7.22: Errore di inseguimento dei giunti (QSM-RBF)

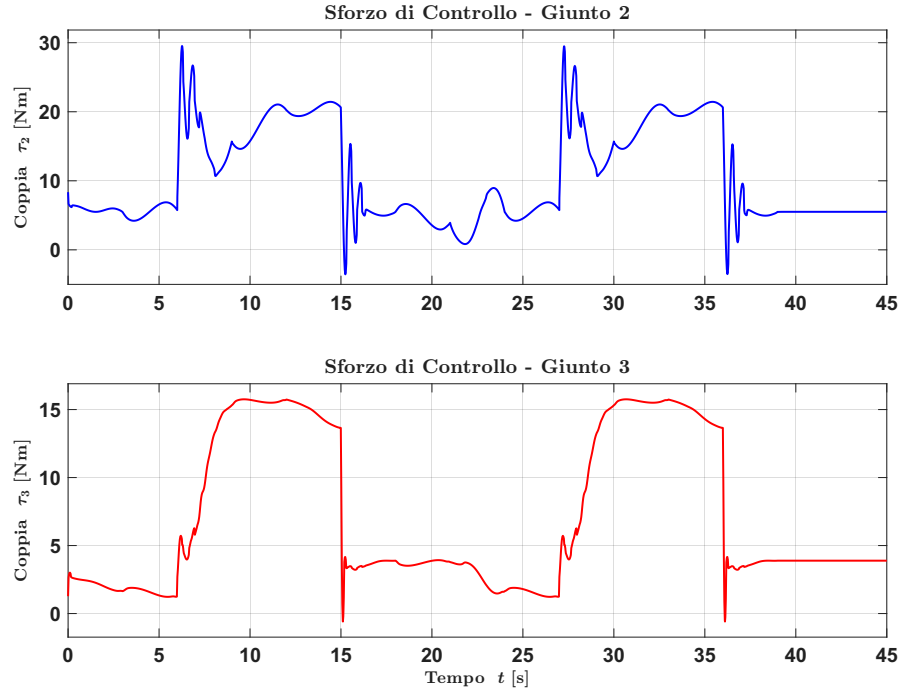


Figura 7.23: Sforzo di controllo ai giunti (QSM-RBF)

Tabella 7.12: Indici di prestazione dei giunti (QSM-RBF)

Giunto	IAE	ISE	ITAE	MaxE	RMS_{τ}	TV_{τ}
2	0.036335	0.000305	0.775008	0.019148	12.660	350.675
3	0.011757	0.000046	0.249792	0.013261	9.075	94.012

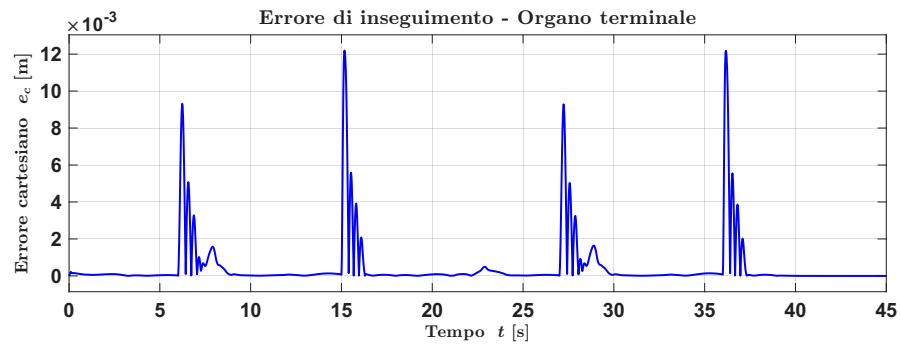


Figura 7.24: Errore cartesiano dell'end-effector (QSM-RBF)

Tabella 7.13: Indici di prestazione dell'end-effector (QSM-RBF)

IAE	ISE	ITAE	MaxE
0.022438	0.000119	0.480347	0.012190

Nel caso della traiettoria operativa industriale, entrambe le architetture garantiscono il corretto svolgimento della sequenza di *pick-and-place*, mantenendo un'elevata precisione di inseguimento lungo l'intero ciclo.

Per il controllore QSM si osservano valori molto contenuti degli indici IAE e ITAE, con errori massimi dell'ordine di 10^{-4} rad nei giunti e inferiori al millimetro nello spazio operativo. L'azione di controllo risulta tuttavia caratterizzata da una significativa attività di commutazione, come evidenziato dai valori elevati della metrica *Total Variation*, in particolare sul giunto 2.

L'architettura QSM-RBF presenta invece un incremento degli indici integrali (IAE, ISE e ITAE), associato alla maggiore complessità della dinamica indotta dalle variazioni discontinue del carico durante le fasi di presa e rilascio. In particolare, l'errore massimo nello spazio dei giunti aumenta sensibilmente rispetto al caso QSM, indicando la presenza di transitori più marcati in corrispondenza delle discontinuità parametriche.

Per quanto riguarda l'azione di controllo, si osserva un incremento significativo della *Total Variation* rispetto al controllore convenzionale. Tale aumento non è riconducibile a fenomeni di *chattering* strutturale del termine a struttura variabile, bensì alla risposta transitoria del sistema adattivo in corrispondenza delle variazioni discontinue della massa del carico. In tali istanti, la rete neurale deve ricalibrare la propria approssimazione della dinamica del manipolatore, generando variazioni temporanee del segnale di controllo che contribuiscono all'incremento complessivo della metrica.

Nonostante ciò, una volta superate le fasi di transitorio, il sistema ripristina un inseguimento accurato della traiettoria di riferimento, confermando la capacità dell'architettura adattiva di gestire variazioni parametriche lungo un ciclo operativo industriale senza perdita di stabilità.

7.4 Considerazioni finali

L'analisi complessiva dei risultati numerici ottenuti nei diversi scenari di simulazione consente di evidenziare con chiarezza le principali differenze tra il controllore a struttura variabile QSM e l'architettura adattiva QSM-RBF.

In condizioni nominali, entrambe le strategie garantiscono prestazioni di tracking estremamente elevate, con errori di inseguimento trascurabili sia nello spazio dei giunti sia nello spazio operativo. In tale scenario, il controllore QSM presenta un'accuratezza leggermente superiore in termini di indici integrali e errore massimo, a fronte però di un'azione di controllo più aggressiva, caratterizzata da elevati valori della metrica *Total Variation*, indicativi di una maggiore attività di commutazione del termine discontinuo.

L'introduzione di un carico costante evidenzia invece il ruolo dell'architettura adattiva. Il controllore QSM-RBF mantiene prestazioni di tracking confrontabili con quelle del controllore classico, mostrando in alcuni casi un peggioramento nei picchi di errore ma preservando errori medi contenuti. Parallelamente, si osserva una riduzione della regolarità del segnale di controllo rispetto al caso nominale, ma con valori complessivamente ancora inferiori o comparabili rispetto al QSM. In questo contesto, la rete neurale contribuisce efficacemente alla compensazione della dinamica incognita, demandando al termine a struttura variabile la gestione dell'errore residuo.

Nella validazione su traiettoria operativa di tipo *pick-and-place*, il comportamento dei due controllori riflette la presenza di variazioni parametriche discontinue dovute alle fasi di presa e rilascio del carico. In particolare, il controllore QSM mantiene una buona accuratezza globale ma mostra un'elevata attività di commutazione lungo l'intero ciclo. L'architettura QSM-RBF, pur introducendo transitori più pronunciati in corrispondenza delle variazioni di massa, conserva un buon inseguimento della traiettoria e una maggiore capacità di adattamento alle modifiche dinamiche del sistema.

Nel complesso, il confronto tra le due architetture evidenzia un chiaro compromesso tra precisione istantanea e qualità del segnale di controllo. Il controllore QSM privilegia la minimizzazione dell'errore di inseguimento a scapito di un'elevata attività del termine discontinuo, mentre il controllore QSM-RBF introduce un meccanismo di apprendimento che consente di ridurre il carico sul termine a struttura variabile, migliorando la regolarità del comando e riducendo il fenomeno di chattering. Tale vantaggio risulta particolarmente efficace in presenza di incertezze modellistiche e variazioni parametriche lente o non strutturate, mentre in scenari caratterizzati da discontinuità rapide, come variazioni istantanee del carico, il sistema può presentare transitori più pronunciati dovuti alla fase di adattamento dell'approssimatore neurale.

Capitolo 8

Conclusioni e Sviluppi Futuri

8.1 Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi è stato affrontato in modo sistematico il problema della sintesi di un controllo robusto e adattivo per il manipolatore antropomorfo ERICC. L'obiettivo primario è consistito nel valutare il superamento delle criticità delle tecniche a struttura variabile classiche, proponendo e validando un'architettura ibrida adattiva (QSM-RBF) capace di coniugare la stabilità del controllo robusto con le capacità di generalizzazione delle reti neurali artificiali. Partendo dalla derivazione della dinamica basata sulla formulazione di Lagrange, è emersa l'impossibilità di fare affidamento su una conoscenza parametrica esatta del processo in scenari operativi reali, motivando la necessità di un'azione compensativa in linea.

Per la sintesi del pre-compensatore neurale, è stata implementata una procedura di identificazione offline mirata: l'impiego di traiettorie *chirp* per l'eccitazione persistente, unito agli algoritmi *k-means* e *orthogonal least squares*, ha permesso di estrarre un dizionario di basi radiali compatto, riducendo la complessità strutturale della rete e rendendola compatibile con i vincoli computazionali del controllo in tempo reale.

In sede di validazione numerica, il controllo a struttura variabile a parametri fissi è stato confrontato con l'architettura ibrida adattiva. Le simulazioni hanno dimostrato che l'architettura neurale produce un'azione di controllo più regolare, con una significativa riduzione delle oscillazioni ad alta frequenza tipiche del *chattering* nel caso nominale.

Tuttavia, l'analisi dei risultati ha evidenziato i limiti intrinseci del paradigma adattivo. A fronte di repentine variazioni di carico, come quelle che si verificano nelle operazioni di *pick-and-place*, la legge di adattamento basata su Lyapunov richiede un tempo finito per adeguarsi alla nuova dinamica. Tale ritardo si traduce in un errore transitorio significativo, che può risultare critico in applicazioni industriali caratterizzate da requisiti di precisione elevata.

In questo contesto, il controllore QSM classico mantiene una maggiore prontezza nella reazione alle discontinuità, garantendo errori massimi più contenuti, sebbene a fronte di una maggiore attività di commutazione e di un più elevato *chattering*. Ne consegue che la scelta tra le due architetture dipende dal compromesso tra precisione in transitorio e qualità del segnale di controllo, in funzione dello specifico scenario applicativo.

8.2 Sviluppi futuri

I risultati teorici e simulativi ottenuti pongono solide basi per i successivi sviluppi della ricerca.

- Implementazione *hardware-in-the-loop* per testare l'architettura SMC-RBF sul manipolatore reale e valutarne le prestazioni al cospetto dei reali ritardi di comunicazione e di attuazione.
- Integrazione di algoritmi di ottimizzazione topologica online per consentire alla rete neurale di variare dinamicamente la propria dimensionalità e allocare nuovi centri durante l'esplorazione di regioni non coperte dello spazio di lavoro.
- Sviluppo di logiche di controllo ibride o predittive in grado di anticipare gli istanti di presa e rilascio del carico, mitigando l'errore di inseguimento causato dal transitorio di apprendimento neurale.

Bibliografia

- [1] Barras Provence. *ROBOT ERICC: Descriptif technique guide d'exploitation et d'entretien*. Manuale cartaceo. ABB. 1985.
- [2] Portescap. *Speedy Line: High Performance Electromechanical Drive Systems Catalog*. Catalogo tecnico dei motori C.C. escap, motori passo-passo e riduttori. Portescap - A Danaher Motion Company. 2006.
- [3] L. Colombo. «Controllo di coppia di un robot industriale». Tesi di laurea mag. Università Politecnica delle Marche, 2011.
- [4] S. Antonelli. «Controllo Dinamica a Struttura Variabile di un Manipolatore Antropomorfo». Tesi di Laurea. Università Politecnica delle Marche, 1998.
- [5] Bruno Siciliano et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, 2009.
- [6] Jinkun Liu e Xinhua Wang. *Advanced Sliding Mode Control for Mechanical Systems: Design, Analysis and MATLAB Simulation*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [7] Jean-Jacques E. Slotine e S. Shankar Sastry. «Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators». In: *International Journal of Control* 38.2 (1983), pp. 465–492.
- [8] Jean-Jacques E. Slotine e Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [9] J. Park e I. W. Sandberg. «Universal approximation using radial-basis-function networks». In: *Neural Computation* 3.2 (1991), pp. 246–257.
- [10] R. Signorini. «Controllo Sliding Mode basato su Reti Neurali per un robot industriale a più gradi di libertà». Tesi di Laurea. Università Politecnica delle Marche, 2008.