UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Sviluppo e implementazione MATLAB di un metodo di identificazione ottima dei parametri di una rete elettrica 2-porte passiva e reciproca

Development and MATLAB implementation of a method of optimal identification of the parameters of a passive and reciprocal 2-port electrical network

Candidato:
CHEIKH CISSE

Relatore:
PROF. SIMONE FIORI

Anno Accademico 2021-2022

UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Sviluppo e implementazione MATLAB di un metodo di identificazione ottima dei parametri di una rete elettrica 2-porte passiva e reciproca

Development and MATLAB implementation of a method of optimal identification of the parameters of a passive and reciprocal 2-port electrical network

Candidato:
CHEIKH CISSE

Relatore:
PROF. SIMONE FIORI

Anno Accademico 2021-2022

Università Politecnica delle Marche
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Via Brecce Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

Ai miei genitori, ai miei zii, ai miei fratelli, a tutta la mia famiglia e a chiunque mi sia stato vicino supportandomi in questo percorso.

Ringraziamenti

Vorrei dedicare questo spazio del mio elaborato a tutte le persone che mi sono state vicine, contribuendo positivamente al raggiungimento di questo traguardo.

Ringrazio il mio relatore, il professor Simone Fiori per la sua disponibilità e per la sua tempestività nel rispondere ad ogni mio dubbio.

Ringrazio i miei genitori e i miei zii, grazie per avermi supportato in ogni momento della mia vita, per avermi insegnato a perseverare con la certezza che prima o poi i risultati sarebbero arrivati. Ringrazio, inoltre, tutta la mia famiglia per essermi stata vicina in questo percorso.

Ringrazio tutti i miei amici, da quelli che conosco da una vita ai più recenti; grazie per la compagnia, per le belle giornate passate insieme, per avermi affiancato nei momenti positivi e in quelli negativi di questa avventura.

Ancona, Dicembre 2022

Cheikh Cisse

Sommario

Il seguente lavoro riguarda le reti 2-porte, in particolare il problema dell'identificazione dei parametri di una rete di questo tipo. Nella seguente trattazione il processo di identificazione avviene senza che si conosca la complessità interna della rete, in pratica la rete stessa è vista come una "scatola nera". L'identificazione dei parametri di una rete di questo tipo è molto importante nelle applicazioni in cui si usano le reti 2-porte per la modellazione di una serie di fenomeni elettrici, come ad esempio la radiazione di un'antenna, oppure fenomeni che non riguardano esclusivamente l'ambito elettrico, come ad esempio la modellazione della circolazione sanguigna. Tra le innumerevoli applicazioni in cui si fa uso della rete 2-porte, (che si possono trovare con una ricerca sul web), risulta di spicco la grande quantità di applicazioni che esulano dall'ambito elettrico rendendo lo studio seguente adattabile a molti scenari ingegneristici differenti.
L'identificazione verrà eseguita grazie a delle misure di ammettenza alle porte della rete in questione. Tali misure saranno affette da rumore, quindi si farà una valutazione degli effetti dell'errore di misura nel processo di identificazione.
Il processo di individuazione dei parametri della rete presa in esame è separato in due casi fondamentali. Nella prima parte si considereranno le ammettenze di porta come delle grandezze puramente reali, in questo caso si avrà il cosiddetto *caso reale*. La seconda parte sarà dedicata al caso, più generale, in cui le ammettenze di porta sono delle grandezze complesse, si avrà quindi il cosiddetto *caso complesso*.
Una volta definito l'algoritmo si passerà alla fase di implementazione MATLAB dell'algoritmo di identificazione. Infine si farà una valutazione generale dei risultati ottenuti confrontando i risultati per il *caso reale* e per il *caso complesso*.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Rete 2-porte

In elettrotecnica una rete 2-porte o doppio bipolo è un elemento circuitale accessibile da due porte di cui interessa solo il comportamento esterno, la circuiteria interna può essere vista come una scatola nera di cui non si ha necessità di conoscere la topologia. Una porta è una coppia di terminali, per la rete 2-porte in Figura 1.2 valgono le seguenti relazioni:

$$i_1(t) = -i_3(t) \tag{1.1}$$

$$i_2(t) = -i_4(t) \tag{1.2}$$

quindi una rete 2-porte è una rete accessibile da 4 terminali.
Esempi di doppi bipoli sono il trasformatore ideale, la coppia di induttori mutuamente accoppiati, ecc. In generale ha interesse il comportamento di un doppio bipolo alle porte, ossia la coppia di relazioni che lega le due tensioni e le due correnti di porta.
Una rete 2-porte può essere un tripolo, 2-porte sbilanciato, se le due porte hanno un terminale comune, come si vede in figura:

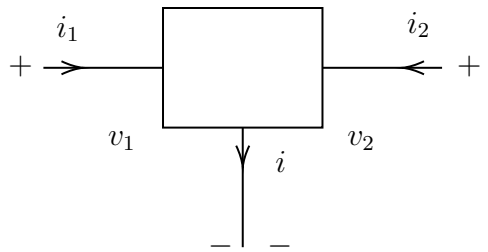

Figura 1.1: 2-porte sbilanciato

Oppure può essere un quadripolo, 2-porte bilanciato, se non abbiamo il morsetto in comune. In pratica ogni porta è costituita da una coppia di terminali distinti,

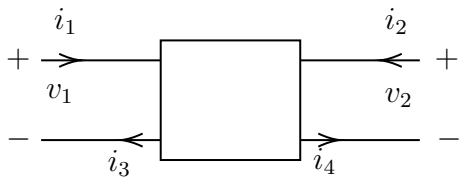

Figura 1.2: 2-porte bilanciato

come si vede in figura:

1.1.1 Rappresentazione dei 2-porte

Le reti 2-porte inerti possono essere rappresentati attraverso delle matrici, da cui si ricavano le relazioni costitutive tra correnti e tensioni di porta. Si possono distinguere 6 tipi di matrici:

- matrice [Z] detta anche matrice delle impedenze di circuito aperto
- matrice [Y] detta anche matrice delle ammettenze di cortocircuito.
- matrice [G] detta anche matrice ibrida "G"
- matrice [H] detta anche matrice ibrida "H"
- matrice [S] detta anche matrice di "Scattering"
- matrice [S'] detta anche matrice inversa

Le matrici ibride mettono in relazione un vettore le cui componenti sono una tensione ad una porta e una corrente all'altra porta, con il vettore le cui componenti sono le rimanenti variabili di porta.
Consideriamo per i nostri scopi la rappresentazione [Y], in forma matriciale, per quanto riguarda il doppio bipolo

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Il termine Y_{11} prende il nome di ammettenza di ingresso di corto circuito, essendo l'ammettenza che si vede alla porta 1 se la porta 2 è chiusa in corto circuito, similmente Y_{22} si chiama ammettenza di uscita di corto circuito. I termini Y_{12} e Y_{21} sono chiamati ammettenze mutue o di trasferimento.

1.1.2 Ipotesi

Le varie tipologie di rappresentazioni di una rete 2-porte possono godere di particolari proprietà, tra le quali:

- Reciprocità: questa condizione si traduce nel fatto che la matrice, nel nostro caso $[Y]$, sia uguale alla sua trasposta quindi è simmetrica. Più esplicitamente:
$$[Y]^T = [Y] \tag{1.4}$$
- Passività: questa condizione invece ci dice che la matrice $[Y]$ deve essere definita positiva, ossia ha tutti gli autovalori strettamente positivi.

1.2 Applicazioni pratiche delle reti 2-porte $[Y]$

Di seguito si mostreranno alcune applicazioni pratiche delle reti 2-porte $[Y]$:

- **Two-port analysis of microcirculation**

  In questa applicazione si utilizzano le reti 2-porte per la modellazione del flusso sanguigno nella microcircolazione. L'applicazione si basa sul modello windkessel, ovvero un modello in cui si descrive il cuore e il sistema arterioso come un circuito idraulico chiuso. Tale modello è stato introdotto dal fisiologo tedesco Otto Frank [1].
  In particolare è possibile attraverso il 3-element windkessel model dare una buona rappresentazione dell'impedenza arteriosa in ingresso quando non ci sono flussi sanguigni che cambiano pressione nella parte venosa della circolazione. Il circuito relativo a questo modello è il seguente:

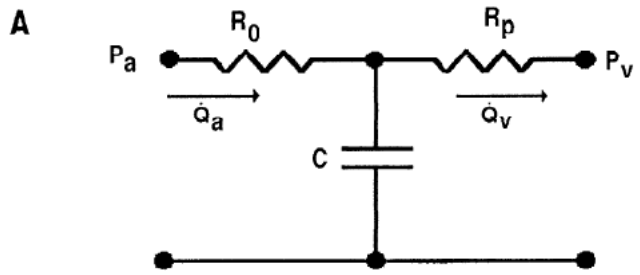

Figura 1.3: Modello elettrico del windkessel a tre elementi

  Questo modello ha però dei limiti che sono risolti, tramite l'analisi delle reti 2-porte, dall'introduzione di un modello windkessel a cinque elementi.

Tale modello è buona approssimazione sia per il lato arterioso che per il lato venoso, inoltre sotto alcune esplicite condizioni è possibile ridurre questo modello ad una rete a tre elementi. Il circuito per il 5-element windkessel model è il seguente:

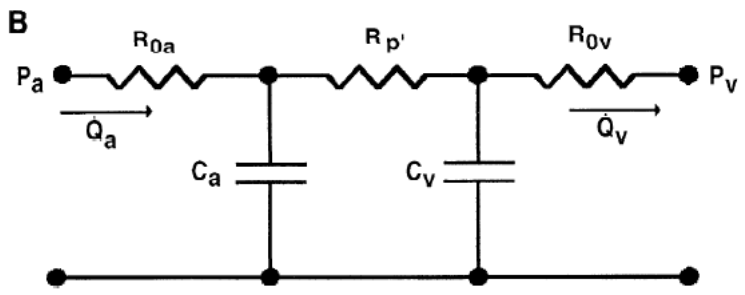

Figura 1.4: Modello elettrico del windkessel a 5 elementi

Per quanto riguarda l'analisi dei due porte si può dire che: qualsiasi rete emodinamica lineare che è accessibile da una singola arteria e da una singola vena può essere caratterizzato da una serie di parametri, al massimo quatto, che descrivono le relazioni pressione-flusso del sistema. I parametri di questa rete 2-porte sono, in generale, funzioni complesse della frequenza che caratterizzano le relazioni tra 4 quantità d'interesse, ovvero il flusso e la pressione arteriosa e venosa.
Un esempio di matrice $[Y]$ è dato dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\dot{Q}_a(j\omega) = y_{11}(j\omega)P_a(j\omega) + y_{12}(j\omega)P_v(j\omega)$$
$$\dot{Q}_v(j\omega) = y_{21}(j\omega)P_a(j\omega) + y_{22}(j\omega)P_v(j\omega)$$

Figura 1.5: Equazioni costitutive della rete 2 porte da analizzare

dove P indica la pressione e $\dot{Q}$ rappresenta il flusso, i pedici a e v indicano rispettivamente la parte arteriosa e la parte venosa. Inoltre è facile provare che se una rete contiene solo elementi passivi e simmetrici, si ha $y_{12} = y_{21}$.
Viene poi usato l'algoritmo di Marquardt-Levenberg per trovare i valori ottimi dei parametri della rete 2-porte le cui equazioni costitutive sono mostrate in Figura 1.5 [2].

- **Two-port representation of an antenna**

In questa applicazione la rete 2-porte è utilizzata per modellare il comportamento di un antenna. In questo modo è possibile analizzare e ottimizzare la rete e quindi la relativa antenna con l'ausilio di simulatori circuitali, grazie a queste simulazioni circuitali si riesce a valutare l'efficienza dell'antenna.
Di seguito si mostra la rete 2-porte associata ad una antenna:

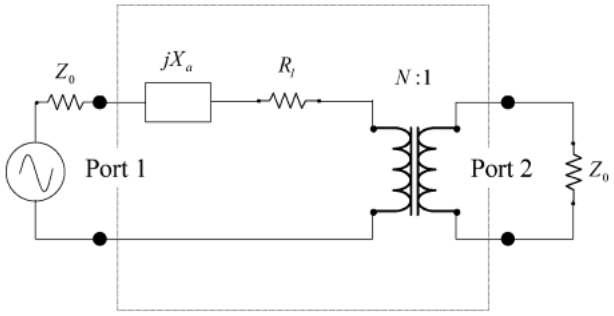

Figura 1.6: Rappresentazione a due porte dell'antenna

E' quindi possibile, data l'impedenza di ingresso e l'efficienza di radiazione di un antenna ad una specifica frequenza, derivare la sua rappresentazione come rete 2-porte per poi analizzare il circuito e derivare in questo modo i parametri di efficienza dell'antenna relativa [3].

- **Two-port network modelling for bio-heat transfers in lungs**

In questa applicazione si fa uso della rete 2-porte per rappresentare il trasferimento di calore nei polmoni. In particolare si riporta il problema dello scambio di calore che si verifica nei polmoni durante le operazioni di chirurgia a cuore aperto. In queste condizioni gli organi non mantengono la temperatura di $37°C$. In questo genere di operazioni gli organi sono esposti all'ambiente esterno. Questa variazione di temperatura può portare a danni nel tessuto polmonare. Una migliore comprensione della variazione di temperatura nei polmoni può portare ad un migliore controllo della protezione termica dell'organo durante l'ECC (circolazione del sangue al di fuori del corpo, come attraverso una macchina cuore-polmone o un rene artificiale).

Si possono utilizzare le reti 2-porte per analizzare questo trasferimento di calore. Dando una corrispondenza tra il flusso di calore con la corrente elettrica e la temperature con la tensione si può ottenere un modello accurato del fenomeno descritto precedentemente. Il due porte che ne risulta è una rappresentazione [T] di questo tipo [4]:

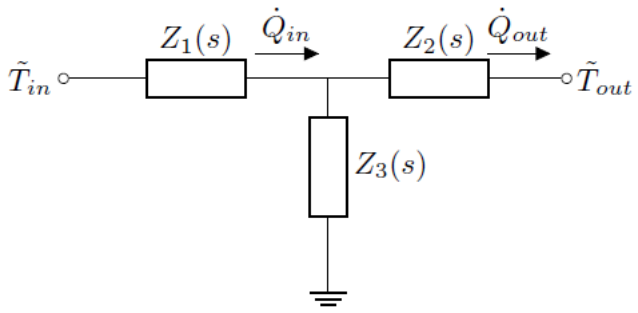

Figura 1.7: Thermal two-port network

- **Two-port model for wave propagation along a long circular microchannel**

In questa applicazione si fa uso della rete 2-porte per rappresentare la propagazione delle onde attraverso un microcanale. In particolare i microcanali riempiti di gas sono una parte essenziale di alcuni dispositivi meccanici, i canali possono trasferire gas da un recipiente ad un altro e il flusso del gas in questione può essere oscillatorio.
La misura della riduzione della frequenza di oscillazione è data da:

$$k = \frac{\omega r_0}{c_0} \tag{1.5}$$

dove ω è la pulsazione angolare, r_0 è il raggio del canale e c_0 è la velocità del suono.
Se k si avvicina a 0 e la velocità del flusso è relativamente basso, il flusso oscillatorio può essere modellato con un flusso lineare di resistenze.
Quando $k > 1$, il canale si comporta come una guida d'onda acustica piuttosto che un flusso viscoso. È necessaria una rete 2-porte per modellare il flusso nel canale [5].

1.3 Tecniche di identificazione dei parametri di una rete 2-porte

Ora si elencheranno una serie di metodi di identificazione dei parametri di una rete 2-porte:

- **Parametric Identification of Two-Port Models in the Frequency Domain**

  Nell'articolo in questione è proposto un metodo di identificazione attraverso una stima dei coefficienti della rete con un criterio di massima verosimiglianza, nel dominio della frequenza, di una distribuzione gaussiana multivariata (ovvero una generalizzazione della distribuzione normale a dimensioni più elevate). Nella identificazione si tiene conto del rumore prodotto dagli errori di misura nelle misure di tensione e di corrente, i risultati sono ottenuti attraverso una procedura di ottimizzazione.
  Usando questo metodo di identificazione, applicato ad un filtro passa-banda scaricato, è possibile stimare la funzione di trasferimento del filtro caricato con un errore di $\pm 0.01dB$ nel modulo e di ± 0.1 gradi nella fase [6].

- **Black-Box Modeling of Low Dropout Voltage Regulator Based on Two-Port Network Parameter Identification**

  Il regolatore di tensione a bassa caduta di tensione (LDO) è utilizzato nei sistemi elettronici per fornire un'alimentazione costante e stabile nel tempo.
  L'articolo in questione propone un metodo di identificazione dei parametri della rete 2-porte che modella le caratteristiche del regolatore, con il regolatore che è visto come una scatola nera.
  Per l'identificazione dei parametri si usa l'identificazione dei sistemi, ovvero si utilizzano metodi statistici per costruire modelli matematici di sistemi dinamici da dati misurati.
  Le funzioni di trasferimento stimate nel processo di identificazione dei sistemi sono integrati nella rete 2-porte e validati con lo scopo di ottenere il modello del regolatore LDO.
  Di seguito si mostra le rete 2-porte equivalente che modella il regolatore:

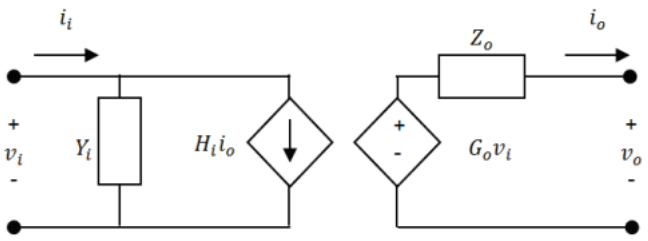

Figura 1.8: Circuito equivalente della rete a due porte del regolatore LDO

il circuito in figura è una rappresentazione [G] (ibrida inversa), le equazioni costitutive della rappresentazione sono:

$$\begin{cases} i_i = Y_i \cdot v_i + H_i \cdot i_o \\ v_o = G_o \cdot v_i - Z_o \cdot i_o \end{cases} \tag{1.6}$$

Si parte da questo modello del regolatore LDO per il processo di identificazione [7].

- **Extensions to Two-Port Network Modeling Method and Analysis of Multiple-VSC-Based Systems**

Nei metodi di analisi della stabilità basati sull'impedenza, il sistema fotovoltaico (VSC) è descritto come un sistema MIMO (multipli ingressi multiple uscite) la quale è anche una rete 2-porte. Nell'articolo in questione è mostrato un metodo di analisi della stabilità basato sul concetto di parametri di scattering.
Di seguito è mostrata la modellazione 2-porte del sistema fotovoltaico (VSC):

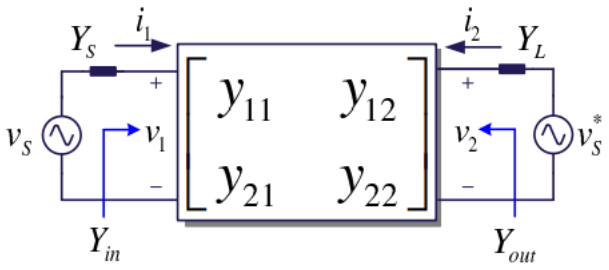

Figura 1.9: Rete 2-porte $[Y]$ che modella il sistema fotovoltaico

I parametri della matrice $[Y]$ sono identificati da varie condizioni di cortocircuito e di circuito aperto nelle operazioni di misura. I parametri

S, invece, non usano condizioni di corto circuito o di circuito aperto, bensì dei carichi adattati in impedenza, questo metodo risulta più efficace se si sale in frequenza [8].

Capitolo 2

Caso reale

Si studia ora la matrice $[Y]$ di rappresentazione nel caso in cui le ammettenze sono delle grandezze reali, quindi si parlerà di conduttanze g (relative alla seconda porta della rete) e h (relative alla prima porta della rete).

2.1 Identificazione del modello

Si riprenda la matrice di rappresentazione $[Y]$ che gode delle proprietà di reciprocità e passività, si deve innanzitutto tradurre queste condizioni in vincoli che andranno rispettati nel percorso di identificazione.

Si ponga per semplicità di notazione:

$$Y_{11} = x \qquad Y_{12} = Y_{21} = y \qquad Y_{22} = z \tag{2.1}$$

la matrice diventa la seguente:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dal vincolo di passività si ricava:

$$x > 0, \qquad x \cdot z - y^2 > 0 \tag{2.3}$$

dalle condizioni in (2.3) si ricava un vincolo anche sulla z, ovvero:

$$z > 0. \tag{2.4}$$

Si indichi ora le relazioni costitutive non più in forma matriciale, bensì sotto

forma di sistema di equazioni:

$$\begin{cases} i_1 = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \\ i_2 = y \cdot v_1 + z \cdot v_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

l'obiettivo è quello di determinare i valori x, y, z "ottimi" eseguendo delle misure di conduttanza (si ricordi che si sta valutando il *caso reale*, per il *caso complesso* si avranno delle misure di ammettenza) alla prima porta chiudendo la seconda porta su una conduttanza nota, si guardi la Figura 2.1. I valori ricavati dovranno ovviamente rispettare i vincoli, esplicitati dalla condizione di passività della rete 2-porte in questione.

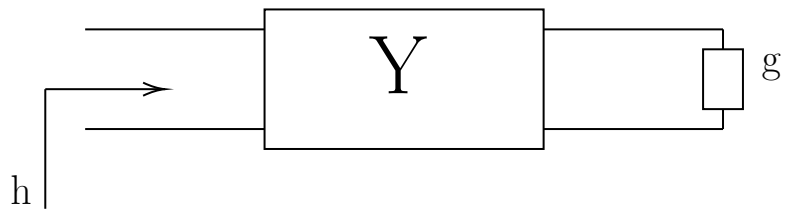

Figura 2.1: Rappresentazione della matrice $[Y]$ con conduttanze g e h

Le relazioni costitutive cambieranno con la chiusura della seconda porta con la conduttanza g, si avrà:

$$\begin{cases} i_1 = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \\ i_2 = y \cdot v_1 + z \cdot v_2 \\ i_2 = -g \cdot v_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

sostituendo la terza equazione nella seconda, si ottiene il nuovo sistema:

$$\begin{cases} i_1 = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \\ -g \cdot v_2 = y \cdot v_1 + z \cdot v_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

si esplicita ora la nel sistema la corrente i_1 relativa alla prima porta e la tensione v_2 relativa alla seconda porta:

$$\begin{cases} i_1 = x \cdot v_1 - \frac{y^2}{g+z} \cdot v_1 \\ v_2 = -\frac{y}{g+z} \cdot v_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

ora sapendo che la h, ovvero la conduttanza di prima porta, è data dal rapporto

della corrente di prima porta e la tensione di prima porta; si può scrivere:

$$h = \frac{i_1}{v_1} = \frac{v_1 \cdot (x - \frac{y^2}{g+z})}{v_1} \tag{2.9}$$

perciò in definitiva si ha:

$$h = x - \frac{y^2}{g+z}. \tag{2.10}$$

Si è quindi trovato la relazione che lega la conduttanza di seconda porta con quella di prima porta, ricordando che la prima grandezza citata è nota a priori. Considerando nota la coppia (h, g) si trova che i parametri (x, y, z) devono soddisfare la seguente relazione:

$$(h - x)(g + z) + y^2 = 0 \tag{2.11}$$

questa relazione deriva dalla (2.10).
Si tratta di un'equazione polinomiale in tre incognite, con la quale non è possibile determinare le incognite. Per risolvere l'equazione ci si avvale del metodo dei minimi quadrati.

2.1.1 Metodo dei minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati è una tecnica di ottimizzazione (o regressione). Il problema con cui abbiamo a che fare adesso consiste nel determinare con buona approssimazione una curva (funzione) che descriva il fenomeno a cui i dati appartengono. Lo scopo è quello di conoscere l'andamento del fenomeno anche negli intervalli fra i punti di osservazione.

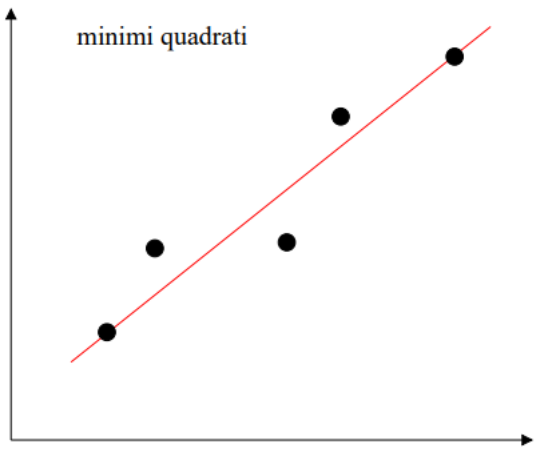

Figura 2.2: Approssimazione ai minimi quadrati

L'approssimazione ai minimi quadrati è quindi volta a determinare una funzione analitica che approssimi un insieme di dati senza necessariamente passare per i dati stessi (interpolazione), o meglio che si avvicini più possibile ad un'interpolazione di un insieme di dati (tipicamente punti del piano). Infatti, se i dati provengono da misure sperimentali e sono quindi affetti da errore oppure se non sono molto precisi (poche cifre significative) allora è opportuno approssimare ai minimi quadrati anziché interpolare.
In particolare la funzione trovata deve essere quella che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai punti.
Consideriamo 2 variabili x ed y legate da una relazione lineare, del tipo:

$$y = A + B \cdot x \tag{2.12}$$

dove A e B sono costanti.
Se abbiano a disposizione N misure $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ e le corrispondenti N misure $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_N$. A causa dell'inevitabile verificarsi di errori di misura, i punti $(x_i,\ y_i)$ non si disporranno esattamente sulla relazione prevista (retta in questo caso) tra le due grandezze fisiche, ma cadranno in prossimità della funzione che la descrive. L'obiettivo è quello di trovare la retta che meglio si adatta alle misure, cioè in pratica trovare la miglior stima per le costanti A e B utilizzando le N coppie di dati a disposizione $(x_i,\ y_i)$ [9].

2.1.2 Identificazione con approccio "input-output matching"

Si considerino ora $N > 1$ coppie di valori noti per le conduttanze in gioco (h_k, g_k), ricordiamo che queste due conduttanze sono strettamente dipendenti tra di loro in caso di assenza di errori di misura. La presenza dell'errore di misura riduce la dipendenza reciproca delle due grandezze; definiamo l'errore di identificazione per una singola coppia di valori:

$$\varepsilon_k = (h_k - x) \cdot (g_k + z) + y^2 \tag{2.13}$$

e l'errore globale di identificazione su tutte le coppie di valori:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2 \tag{2.14}$$

si è definito, quindi, un errore quadratico.
Si vuole determinare la terna (x, y, z) tale per cui:

$$\varepsilon_k \simeq 0 \tag{2.15}$$

quindi l'errore quadratico medio complessivo J deve essere minimizzato.

Si minimizza la funzione errore calcolando le derivate parziali della funzione rispetto alle incognite (x, y, z) e ponendole a zero. Derivando si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \cdot (-g_k - z) \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2 \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{N} y \cdot \varepsilon_k \\ \dfrac{\partial J}{\partial z} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \cdot (h_k - x) \end{cases} \tag{2.16}$$

ponendo ora le derivate a zero, si ottiene:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \cdot (g_k + z) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \cdot (h_k - x) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

si noti che si è trascurato la soluzione "banale" $y = 0$ in quanto i termini in diagonale della matrice $[Y]$ sarebbero nulli, portando alla conclusione che le due porte sono tra di loro disaccoppiate visto che si avrebbe:

$$\begin{cases} i_1 = x \cdot v_1 \\ i_2 = z \cdot v_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

essendo una identificazione legata a fenomeni reali si può escludere questo tipo di soluzione.
Continuando con i calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} [(h_k - x) \cdot (g_k + z) + y^2] \cdot (g_k + z) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} [(h_k - x) \cdot (g_k + z) + y^2] = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} [(h_k - x) \cdot (g_k + z) + y^2] \cdot (h_k - x) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

sviluppando i conti tra parentesi, si ha:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N}[h_k \cdot g_k^2 + h_k \cdot g_k \cdot z - x \cdot g_k^2 - x \cdot g_k \cdot z + g_k \cdot y^2 + h_k \cdot g_k \cdot z + h_k \cdot z^2 \\ \qquad\qquad -x \cdot g_k \cdot z - x \cdot z^2 + y^2 \cdot z] = 0 \\ \sum_{k=1}^{N}[h_k \cdot g_k + h_k \cdot z - x \cdot g_k - x \cdot z + y^2] = 0 \\ \sum_{k=1}^{N}[h_k^2 \cdot g_k + h_k^2 \cdot z - x \cdot g_k \cdot h_k - x \cdot z \cdot h_k + y^2 \cdot h_k - h_k \cdot g_k \cdot x - h_k \cdot z \cdot x + \\ \qquad\qquad x^2 \cdot g_k + x^2 \cdot z - x \cdot y^2] = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

si separano ora le sommatorie in modo da poter definire dei coefficienti che consentano di esprimere il sistema di equazioni in modo più compatto

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} h_k \cdot g_k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} h_k \cdot g_k \cdot z - \sum_{k=1}^{N} g_k^2 \cdot x - 2\sum_{k=1}^{N} g_k \cdot x \cdot z + \sum_{k=1}^{N} g_k \cdot y^2 + \\ \qquad\qquad \sum_{k=1}^{N} h_k \cdot z^2 + N \cdot y^2 \cdot z - N \cdot x \cdot z^2 = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} h_k \cdot g_k + \sum_{k=1}^{N} h_k \cdot z - \sum_{k=1}^{N} g_k \cdot x - N \cdot x \cdot z + N \cdot y^2 = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} h_k^2 \cdot g_k + \sum_{k=1}^{N} h_k^2 \cdot z - 2\sum_{k=1}^{N} g_k \cdot h_k \cdot x - 2\sum_{k=1}^{N} h_k \cdot x \cdot z + \\ \qquad \sum_{k=1}^{N} h_k \cdot y^2 + \sum_{k=1}^{N} g_k \cdot x^2 + x^2 \cdot z \cdot N - x \cdot y^2 \cdot N = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Si ricavano ora i coefficienti, che sono in tutto sette, per una scrittura migliore del sistema risolvente; ogni coefficiente è segnato con una lettera dell'alfabeto, il risultato è il seguente:

$$\begin{cases} A + 2 \cdot B \cdot z - C \cdot x - 2 \cdot D \cdot x \cdot z + D \cdot y^2 + E \cdot z^2 + N \cdot y^2 \cdot z - N \cdot x \cdot z^2 = 0 \\ B + E \cdot z - D \cdot x - N \cdot x \cdot z + N \cdot y^2 = 0 \\ F + G \cdot z - 2 \cdot B \cdot x - 2 \cdot E \cdot x \cdot z + E \cdot y^2 + D \cdot x^2 + N \cdot x^2 + N \cdot x \cdot y^2 = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Occorre trovare, ora, le soluzioni (x, y, z) del sistema di equazioni in (2.22) rispettando i vincoli prima imposti, ovvero:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \cdot z - y^2 > 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Si ritorni ora al sistema risolvente, più precisamente alla seconda equazione di tale sistema. Il primo passo è di ricavare la y^2 dalla seconda equazione, si noti come la variabile y sia presente nelle altre equazioni soltanto elevato alla seconda questo ci permette di non esplicitare la radice quadrata. Perciò si può scrivere:

$$y^2 = \frac{1}{N} \cdot (N \cdot x \cdot z + D \cdot x - E \cdot z - B) \tag{2.24}$$

Ora si prenda come riferimento la prima equazione del sistema risolvente sostituendo in essa l'espressione ricavata nella (2.24), si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} A + 2 \cdot B \cdot z - C \cdot x - 2 \cdot D \cdot x \cdot z + D \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot (N \cdot x \cdot z + D \cdot x - E \cdot z - B)\right] \\ + E \cdot z^2 + N \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot (N \cdot x \cdot z + D \cdot x - E \cdot z - B)\right] \cdot z - N \cdot x \cdot z^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

si eseguono ora le operazioni tra parentesi e si ottiene:

$$\begin{aligned} N \cdot A + 2 \cdot N \cdot B \cdot z - N \cdot C \cdot x - 2 \cdot N \cdot D \cdot x \cdot z + N \cdot E \cdot z^2 - N^2 \cdot x \cdot z^2 + \\ D \cdot N \cdot x \cdot z + D^2 \cdot x - E \cdot D \cdot z - D \cdot B + \\ N^2 \cdot x \cdot z^2 + N \cdot D \cdot x \cdot z - E \cdot N \cdot z^2 - N \cdot B \cdot z = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

L'espressione in (2.26) può essere semplificata in questo modo:

$$N \cdot A + N \cdot B \cdot z - N \cdot C \cdot x + D^2 \cdot x - E \cdot D \cdot z - D \cdot B = 0. \tag{2.27}$$

Si può quindi passare alla terza equazione, sostituendo sempre l'espressione ricavata in (2.24), ottenendo:

$$\begin{aligned} F + G \cdot z - 2 \cdot B \cdot x - 2 \cdot E \cdot x \cdot z + E \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot (N \cdot x \cdot z + D \cdot x - E \cdot z - B)\right] + \\ D \cdot x^2 + N \cdot x^2 \cdot z - N \cdot x \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot (N \cdot x \cdot z + D \cdot x - E \cdot z - B)\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Si eseguono ora passaggi analoghi al caso precedente (prima equazione), trascurando i passaggi intermedi si giunge alla nuova equazione:

$$N \cdot F + N \cdot G \cdot z - N \cdot B \cdot x + E \cdot D \cdot x - E^2 \cdot z - E \cdot B = 0. \tag{2.29}$$

Ora si mettono le due equazioni in (2.27) e in (2.29) a sistema e si cerca una soluzione che porti ad ottenere i valori "ottimi" della coppia di variabili (x, z),

ottenendo:

$$\begin{cases} N \cdot A + N \cdot B \cdot z - N \cdot C \cdot x + D^2 \cdot x - E \cdot D \cdot z - D \cdot B = 0 \\ N \cdot F + N \cdot G \cdot z - N \cdot B \cdot x + E \cdot D \cdot x - E^2 \cdot z - E \cdot B = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

separando le due variabili in gioco x, z per raggruppare i coefficienti, si ottiene:

$$\begin{cases} (D^2 - C \cdot N) \cdot x + (N \cdot B - E \cdot D) \cdot z = D \cdot B - N \cdot A \\ (N \cdot G - E^2) \cdot z + (E \cdot D - N \cdot B) \cdot x = E \cdot B - N \cdot F \end{cases} \tag{2.31}$$

Scriviamo ora il sistema risolvente in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} D^2 - C \cdot N & N \cdot B - E \cdot D \\ E \cdot D - N \cdot B & N \cdot G - E^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \cdot B - N \cdot A \\ E \cdot B - N \cdot F \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Si è quindi trovato un sistema la cui risoluzione porta all'identificazione "ottima" dei parametri (x, z) della rete 2-porte e di conseguenza anche della variabile y, vista la relazione in (2.24). Proprio dalla (2.24) si evince che ci saranno due valori di y ritenuti accettabili, vista l'elevazione al quadrato, una positivo e uno negativo.
Moltiplicando la relazione ricavata dal vincolo di passività in (2.3) per N, si ha:

$$N(x \cdot z - y^2) = N \cdot x \cdot z - N \cdot (x \cdot z + \frac{D \cdot x}{N} - \frac{E \cdot z}{N} - \frac{B}{N}) \tag{2.33}$$

Facendo le dovute semplificazioni si ottiene:

$$z = \frac{D}{E} \cdot x - \frac{B}{E} \tag{2.34}$$

dalla risoluzione di questa equazione si ottiene un piano di soluzioni, una rappresentazione qualitativa del grafico della soluzione è la seguente:

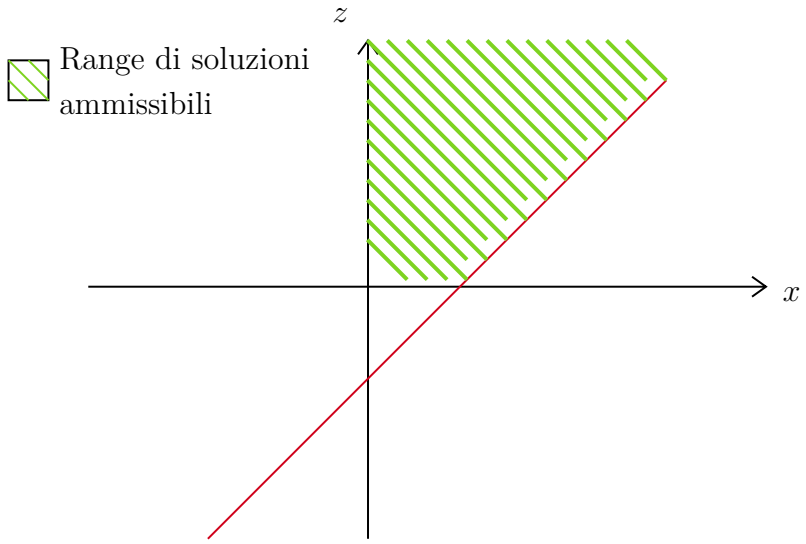

Figura 2.3: Soluzione grafica del sistema

le intersezioni della retta con gli assi si avranno in corrispondenza di:

$$\frac{B}{D} \tag{2.35}$$

per quanto riguarda l' asse x

$$-\frac{B}{E} \tag{2.36}$$

per quanto riguarda l'asse z.

Dai due vincoli si era ricavato che la x e la z devono avere valore positivo, perciò la soluzione può essere identificata dalla parte del grafico che rispetta queste condizioni.

2.2 Implementazione MATLAB del metodo

Si descrive ora la fase di implementazione dell'algoritmo sviluppato nella sezione precedente attraverso MATLAB. In modo da ricavare i valori delle incognite x, y e z ovvero i parametri della rete 2-porte presa in considerazione.

Come prima cosa si definiscono i valori per l'esperimento numerico, trattandosi di un test simulato possiamo stabilire noi il numero N (numero di coppie di valori h_k e g_k) e i valori che dovrebbero assumere i parametri della matrice $[Y]$. Il codice relativo a questa parte è:

```
%% Valori per esperimento numerico
Y = [3 -1
     -1 0.5]; % Y effettiva
N = 50; % Numero di coppie di dati
```

Figura 2.4: Definizione parametri numerici

Si definisca ora il valore delle conduttanze g_k applicate alla seconda porta e di conseguenza delle conduttanza h_k misurata dalla prima porta. Come già detto prima h_k è legata a g_k come si vede in (2.10), inoltre i valori delle conduttanze generate con il MATLAB sono affetti da rumore dovuto all'incertezza di misura. Di seguito si può vedere lo spezzone di codice con la quale si è generato il dataset in cui ci sono i valori delle conduttanze g_k e h_k, il test per la risoluzione del sistema in (2.30) si farà con questi valori:

```
x = Y(1,1); y = Y(1,2); z = Y(2,2);
rum = 0.001; % Deviazione standard del rumore gaussiano
g = 0.2*rand(1,N);
h = x - y^2./(g+z) + rum*randn(1,N);
if (sum(h>0) < N), disp('Dati incoerenti'); return; end
save dataset.txt g h -ascii
```

Figura 2.5: Generazione delle coppie h_k e g_k

Si noti l'utilizzo del comando rand per la generazione di una sequenza pseudo-random per quanto riguarda la g_k, mentre si applica la formula in (2.10) per la generazione della corrispondente h_k a cui è sommato un contributo di rumore gaussiano, tale rumore deriva dall'errore inevitabile che si ha quando si va a fare la misurazione. I valori ricavati sono poi salvati in una matrice di dimensioni $[1 \times N]$ per entrambe le conduttanze.

Una volta generato il "dataset" dei valori delle conduttanze si passa alla ricerca della soluzione per il sistema in (2.31), il codice è il seguente:

```
%% Risoluzione del sistema polinomiale
A = sum(h.*g.^2); B = sum(h.*g); C = sum(g.^2);
D = sum(g); E = sum(h); F = sum(h.^2.*g); G = sum(h.^2);
M = [D^2-C*N  B*N-E*D
     E*D-B*N  N*G-E^2];
d = [B*D-N*A
     B*E-N*F];
sol = inv(M)*d; xs = sol(1); zs = sol(2);
if (xs <= 0)||(B + E*zs - D*xs <=0), disp('Soluzioni non trovate');
    return; end
ys = sqrt((1/N)*(D*xs + N*xs*zs - B - E*zs));
fprintf(['Soluzioni trovate (x,y,z) = (%0.5f, %0.5f, %0.5f) e' ...
    ' (%0.5f, %0.5f, %0.5f)\n'],xs,ys,zs,xs,-ys,zs)
fprintf('Valori effettivi (x,y,z) = (%0.5f, %0.5f, %0.5f)\n',x,y,z)
legend
```

Figura 2.6: Risoluzione del sistema

Si parte in questo caso dalla definizione dei coefficienti in gioco che erano stati sostituiti per una visione più compatta del problema da risolvere e anche della soluzione stessa; i coefficienti sono: A, B, C, D, E, F e G, ognuno di essi è dato da una diversa sommatoria delle conduttanze h_k e g_k.
Una volta definiti la risoluzione avviene semplicemente con l'ausilio del comando MATLAB $inv()$. Si usa questo comando in quanto il sistema è di rango massimo, l'inversa di una matrice è definita solo per sistemi con rango massimo.
Il passo successivo è quello di trovare il valore della incognita y andando a sostituire i risultati trovati dal comando $inv()$ nella (2.24), trovando così i due valori di y ritenuti accettabili.
La soluzione del sistema genera i seguenti risultati per quanto riguarda il valore della terna di variabili (x, y, z):

x	**y**	**z**
2.992465360497988	$\pm$0.995595590363000	0.497455830396248

Tabella 2.1: Valori incognite ricavate

Si erano definiti all'inizio i valori "ottimi" che erano i seguenti:

x	**y**	**z**
3	± 1	0.5

Tabella 2.2: Valori attesi

Si noti che la generazione delle conduttanze h_k e g_k affette da rumore porta a delle soluzioni affette dal medesimo disturbo, quindi i risultati seppur di poco differiscono dai valori attesi.
Di seguito si mostra il grafico della soluzione ottenuta in cui si ha la relazione stimata, la relazione effettiva e il dataset:

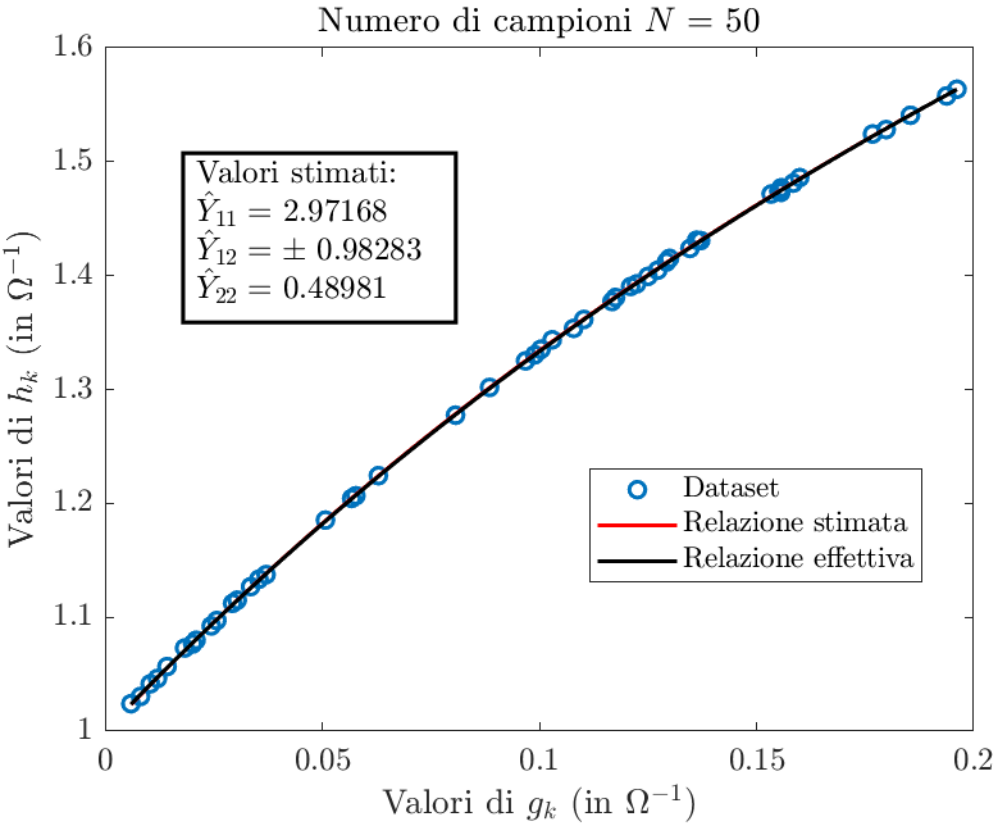

Figura 2.7: Grafico soluzioni

I risultati in figura differiscono da quelli ricavati prima in 2.1, perché nonostante la quantità di rumore gaussiano applicato alla sequenza di h_k sia sempre la stessa, ogni volta che si manda in esecuzione il programma si rigenera una sequenza random diversa da quella precedente. Perciò si avranno valori sempre diversi ma che si trovano sempre nell'intorno dei valori definiti ad inizio codice, ovvero i valori "ottimi".

2.2.1 Test algoritmo caso reale

Si può ora pensare di modificare la potenza del rumore gaussiano e verificare quali sono le ripercussioni nei valori ottenuti. Nell'aumentare il contributo di rumore si sottintende che la misura della conduttanza fatta alla prima porta sia affetta da un errore di misura più importante.
Il valore del contributo di disturbo prima era pari a 0.001, si aumenti ora questo contributo fino a portarlo a 0.005. Vediamo di seguito come diventano le soluzioni, sempre in forma grafica in modo da avere una panoramica migliore:

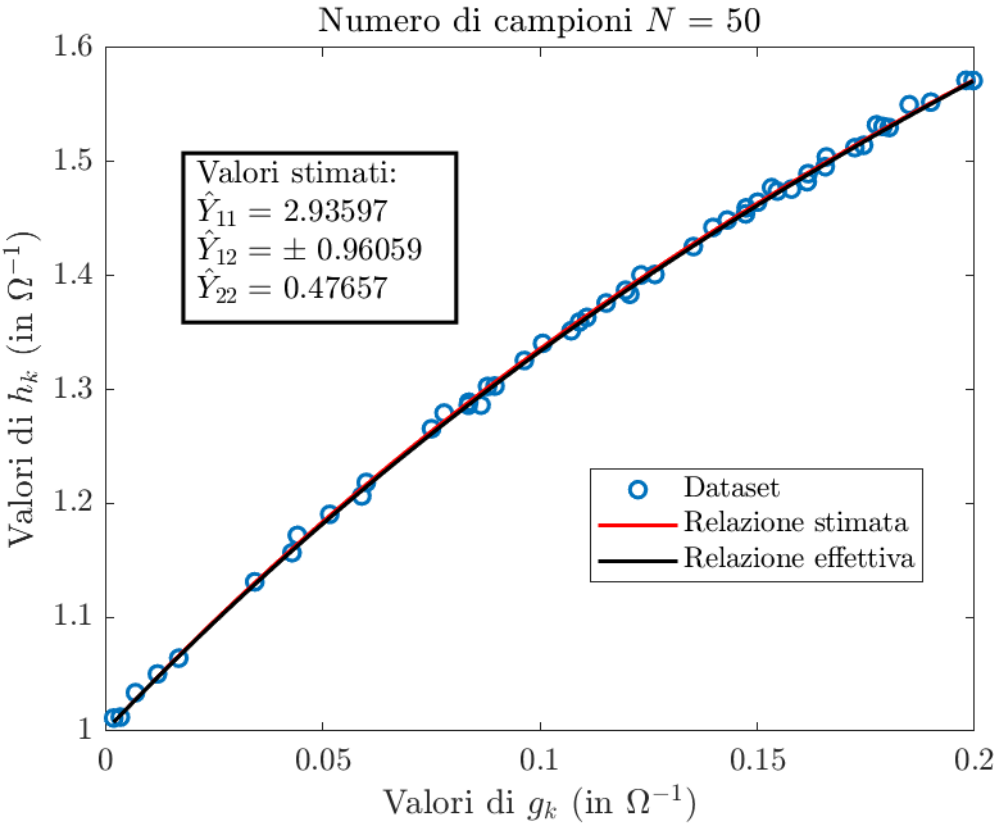

Figura 2.8: Grafico soluzioni con più rumore

Si noti il fatto che i valori ottenuti sono ora più lontani dai valori attesi, quindi si può dire che l'algoritmo porta a risultati più lontani da quelli ideali più la misura eseguita alla prima porta è affetta da rumore. Inoltre dai pallini nella figura si nota come i valori del dataset siano più dispersi nell'intorno della curva mentre nel primo caso erano più concentrati lungo la curva stessa.

Altro parametro su cui possiamo agire, per verificare la robustezza dell'algoritmo, è la matrice $[Y]$ stessa. Si erano definiti ad inizio codice i valori "attesi" del test che rispettivamente per (x, y, z) valevano $(3, \pm 1, 0.5)$, possiamo

ora verificare se cambiando il range di valori che era stato assegnato si otterranno risultati accettabili come per il caso precedente.
Si utilizzi, sempre rispettivamente per (x, y, z), la nuova seguente terna di valori $(6, \pm 2.5, 1.5)$ mantenendo il contributo di rumore assegnato nel primo caso ovvero quello che più si avvicinava ai valori "attesi", il risultato è mostrato nella figura seguente:

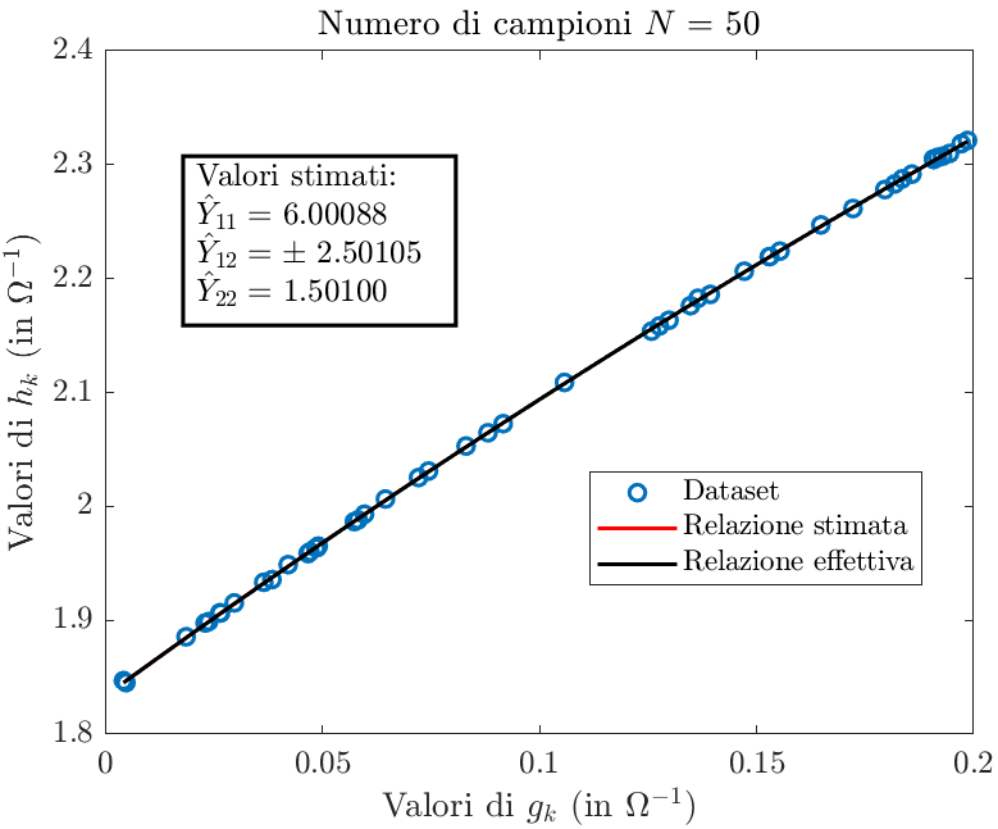

Figura 2.9: Grafico soluzioni con diverso range

In questo caso i pallini, che rappresentano il dataset, sono tornati in prossimità della curva, questo perché è stato rimesso il contributo di rumore iniziale. Per quanto riguarda i valori stimati dalla risoluzione si può vedere come siano più lontani dai valori "attesi" rispetto al caso in cui il range era dato da $(3, \pm 1, 0.5)$ nonostante la varianza del disturbo sia sempre la stessa.
Si nota che l'algoritmo non si comporta nello stesso modo per range di valori diversi. Si può prevedere il comportamento dell'algoritmo se si aumenta la varianza del disturbo portandolo allo stesso valore di prima, ovvero 0.005. Il risultato è il seguente:

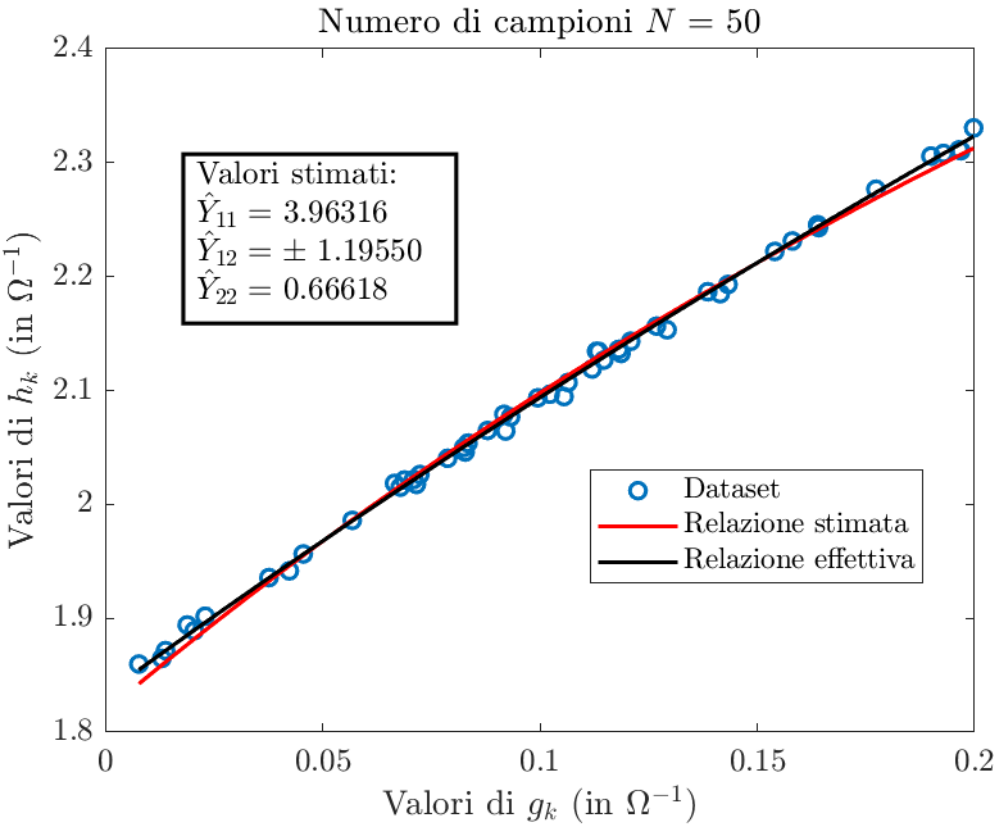

Figura 2.10: Grafico soluzioni con diverso range e più rumore

I pallini non si trovano più in corrispondenza nella curva della relazione stimata, bensì nell'intorno della curva stessa esattamente come per il caso in cui si era aumentato solo il disturbo. I valori stimati sono lontani da quelli "attesi", si nota un peggioramento evidente. Bisogna però eseguire una quantità di test molto elevata per poter definire il comportamento generale dell'algoritmo al cambio di range dei "valori attesi".

Capitolo 3

Caso complesso

Si studia ora la matrice $[Y]$ di rappresentazione nel caso in cui le grandezze Y_l e Y_b sono complesse, sono quindi delle ammettenze.

3.1 Identificazione del modello

Si riprenda il caso generale di una matrice di rappresentazione $[Y]$ 2-porte e si applichi alla seconda porta una ammettenza nota di valore Y_l che porterà, esattamente come per il caso reale, ad un diverso valore di ammettenza alla prima porta Y_b. In figura si vede la matrice rappresentativa:

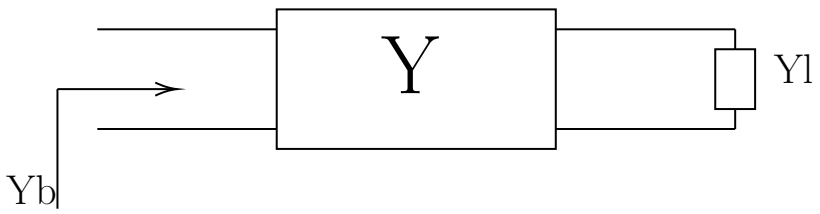

Figura 3.1: Rappresentazione della rete 2-porte $[Y]$ con ammettenze Y_l e Y_b

La rete 2-porte in configurazione $[Y]$ è passiva e reciproca ($Y_{12} = Y_{21}$), in analogia al caso precedente.

Le relazioni costitutive, sotto forma di sistema, per questa particolare matrice sono:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \cdot \dot{V}_1 + Y_{12} \cdot \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{12} \cdot \dot{V}_1 + Y_{22} \cdot \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = -Y_l \cdot \dot{V}_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

sostituendo la terza equazione, del sistema, nella seconda si ottiene:

$$-Y_l \cdot \dot{V}_2 = Y_{12} \cdot \dot{V}_1 + Y_{22} \cdot \dot{V}_2 \tag{3.2}$$

esplicitando la $\dot{V}_2$ si ha:

$$\dot{V}_2 = -\frac{Y_{12}}{Y_l + Y_{22}} \cdot \dot{V}_1 \tag{3.3}$$

ora si sostituisce la (3.3) nella prima equazione del sistema in (3.1), ottenendo:

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \cdot \dot{V}_1 + Y_{12} \cdot \left(-\frac{Y_{12}}{Y_l + Y_{22}}\right) \dot{V}_1 = \left(Y_{11} - \frac{Y_{12}^2}{Y_l + Y_{22}}\right) \cdot \dot{V}_1 \tag{3.4}$$

L'ammettenza Y_b coincide con il rapporto $\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}$, pertanto si può scrivere:

$$Y_b = Y_{11} - \frac{Y_{12}^2}{Y_l + Y_{22}} \tag{3.5}$$

potendo supporre che la quantità $Y_l + Y_{22}$ sia diversa da zero, la relazione in (3.5) è equivalente a:

$$(Y_b - Y_{11}) \cdot (Y_l + Y_{22}) + Y_{12}^2 = 0 \tag{3.6}$$

3.1.1 Identificazione con approccio "input-output matching"

Supponiamo che la rete 2-porte "Y" sia molto complessa e sopratutto inaccessibile all'interno. Seguiamo il metodo di identificazione del caso reale, ovvero possiamo determinare i valori dei parametri Y_{11}, Y_{12} e $Y_{22} \in \mathbb{C}$ con delle misure di ammettenza.

Si scelgono quindi N valori diversi di ammettenza $Y_{l,1}, Y_{l,2}, Y_{l,3}, Y_{l,4}$..... e si misurano le relative ammettenze $Y_{b,1}, Y_{b,2}, Y_{b,3}, Y_{b,4}$..... che dipendono dalla relazione in (3.5).
Le misure sono, ovviamente, affette da errore ma sotto ipotesi di misure perfette questi valori di ammettenza soddisfano la seguente equazione:

$$(Y_{b,k} - Y_{11}) \cdot (Y_{l,k} + Y_{22}) + Y_{12}^2 = 0 \tag{3.7}$$

con $k = 1, 2, 3, 4, ...N$, con un numero sufficiente di coppie di valori $(Y_{l,k}, Y_{b,k})$ si può determinare la terna di valori (Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}) incognita ad eccezione del segno della Y_{12} che come sappiamo può essere sia positiva che negativa vista l'elevazione al quadrato.
Tuttavia nella realtà non è possibile eseguire delle misure perfette, si avrà sempre una incertezza di misura perciò l'equazione in (3.7) diventa:

$$(Y_{b,k} - Y_{11}) \cdot (Y_{l,k} + Y_{22}) + Y_{12}^2 = \varepsilon_k \tag{3.8}$$

con $k = 1, 2, 3, 4, ...N$, dove gli ε_k sono gli errori di identificazione per ogni coppia di valori $(Y_{l,k}, Y_{b,k})$.
Quindi, in analogia al *caso reale*, bisogna "accontentarsi" di trovare una terna che minimizzi l'errore quadratico $|\varepsilon_k^2|$, ovvero che minimizzi la funzione:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{N} |\varepsilon_k|^2 \tag{3.9}$$

definiamo questa funzione come l'errore globale di identificazione su tutte le coppie di valori. Sostituendo l'equazione in (3.8) nella (3.9), si ottiene:

$$J(Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{N} |(Y_{b,k} - Y_{11}) \cdot (Y_{l,k} + Y_{22}) + Y_{12}^2|^2 \tag{3.10}$$

I valori "ottimi" dei tre parametri $(Y_{11}, Y_{12}, Y_{Y_{22}})$ sono quelli che minimizzano la funzione J.

Note sulla notazione utilizzata

- Per un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, la notazione $|z|$ indica il modulo del numero in questione, ovvero se $z = x + jy$ il modulo è dato da:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.11}$$

- Qui la j indica l'unità immaginaria, per cui:

$$j = \sqrt{-1} \tag{3.12}$$

- Il coniugato di un numero complesso z è indicato con z^*, perciò se $z = x + jy$ allora:

$$z^* = x - jy \tag{3.13}$$

- Data una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (cioè una funzione che prende valori complessi e calcola dei valori reali), definisco la sua derivata come:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3.14}$$

Nel nostro caso, dobbiamo calcolare $\frac{\partial J}{\partial Y_{11}}$, $\frac{\partial J}{\partial Y_{12}}$ e $\frac{\partial J}{\partial Y_{22}}$ e porle uguale a zero. Così otterremo un sistema di 3 equazioni nelle tre incognite Y_{11}, Y_{12} e Y_{22}.

Si torni all'identificazione del modello, bisogna quindi derivare il termine:

$$T = |(Y_b - Y_{11}) \cdot (Y_l + Y_{22}) + Y_{12}^2|^2 \tag{3.15}$$

Poniamo:

$$\begin{cases} Y_b = G_b + jB_b \\ Y_l = G_l + jB_l \\ Y_{11} = G_{11} + jB_{11} \\ Y_{12} = G_{12} + jB_{12} \\ Y_{22} = G_{22} + jB_{22} \end{cases} \tag{3.16}$$

sostituendo i numeri complessi esplicitati in (3.16) nella (3.15) in cui però si è esplicitato prima il prodotto tra parentesi, risulta:

$$\begin{aligned} T = |(G_b + jB_b) \cdot (G_l + jB_l) + (G_b + jB_b) \cdot (G_{22} + jB_{22}) - \\ (G_l + jB_l) \cdot (G_{11} + jB_{11}) + (G_{12} + jB_{12})^2 - (G_{11} + jB_{11}) \cdot (G_{22} + jB_{22})|^2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Svolgendo i conti tra parentesi e separando la parte reale da quella immaginaria, si ottiene:

$$\begin{aligned} T = |(G_b \cdot G_l - B_b \cdot B_l + G_b \cdot G_{22} - B_b \cdot B_{22} - G_l \cdot G_{11} + B_{11} \cdot B_l - G_{11} \cdot G_{22} \\ + B_{11} \cdot B_{22} + G_{12}^2 - B_{12}^2) + \\ j(G_b \cdot B_l + B_b \cdot G_l + G_b \cdot B_{22} + B_b \cdot G_{22} - G_{11} \cdot B_l - B_{11} \cdot G_l + 2 \cdot G_{12} \cdot B_{12} \\ - G_{11} \cdot B_{22} - B_{11} \cdot G_{22})|^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Applicando il modulo in (3.11), si ha:

$$\begin{aligned} T = (G_b \cdot G_l - B_b \cdot B_l + G_b \cdot G_{22} - B_b \cdot B_{22} - G_l \cdot G_{11} + B_{11} \cdot B_l - G_{11} \cdot G_{22} \\ + B_{11} \cdot B_{22} + G_{12}^2 - B_{12}^2)^2 + \\ (G_b \cdot B_l + B_b \cdot G_l + G_b \cdot B_{22} + B_b \cdot G_{22} - G_{11} \cdot B_l - B_{11} \cdot G_l + 2 \cdot G_{12} \cdot B_{12} \\ - G_{11} \cdot B_{22} - B_{11} \cdot G_{22})^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ora si possono si possono calcolare le derivate parziali di T rispetto alle variabili G_{11}, B_{11}, G_{12}, B_{12}, G_{22}, B_{22}; quindi si avranno 6 derivate parziali.

Per la Y_{11}, si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial G_{11}} = -2\cdot(G_l+G_{22})-2\cdot(B_l+B_{22}) \qquad \frac{\partial T}{\partial B_{11}} = 2\cdot(B_l+B_{22})-2\cdot(G_l+G_{22}) \tag{3.20}$$

per la Y_{12}, si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial G_{12}} = 4\cdot G_{12}+4\cdot B_{12} \qquad \frac{\partial T}{\partial B_{12}} = 4\cdot G_{12}-4\cdot B_{12} \tag{3.21}$$

per la Y_{22}, si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial G_{22}} = 2\cdot(G_b-G_{11})+2\cdot(B_b-B_{11}) \qquad \frac{\partial T}{\partial B_{22}} = -2\cdot(B_b-B_{11})+2\cdot(G_b+G_{11}) \tag{3.22}$$

L'errore era stato definito come:

$$\varepsilon = (Y_b - Y_{11})\cdot(Y_l + Y_{22}) + Y_{12}^2 \tag{3.23}$$

è quindi possibile scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial Y_{11}} = -2\cdot(Y_l+Y_{22})^*\cdot\varepsilon \\ \dfrac{\partial T}{\partial Y_{12}} = 4\cdot Y_{12}^*\cdot\varepsilon \\ \dfrac{\partial T}{\partial Y_{22}} = 2\cdot(Y_b-Y_{11})^*\cdot\varepsilon \end{cases} \tag{3.24}$$

considerando coppie di valori di $Y_{l,k}$, $Y_{b,k}$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial Y_{11}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(Y_{l,k}+Y_{22})^*\cdot\varepsilon_k \\ \dfrac{\partial T}{\partial Y_{12}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} Y_{12}^*\cdot\varepsilon_k \\ \dfrac{\partial T}{\partial Y_{22}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(Y_{b,k}-Y_{11})^*\cdot\varepsilon_k \end{cases} \tag{3.25}$$

In analogia al caso reale si esclude la soluzione "banale" $Y_{12} = 0$ che porterebbe ad avere due porte disaccoppiate. Di conseguenza il sistema precedente, ponendo

a zero ogni equazione, diventa:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} (Y_{l,k} + Y_{22})^* \cdot \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} (Y_{b,k} - Y_{11})^* \cdot \varepsilon_k = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Si può fare un'importante semplificazione del sistema, in effetti è possibile riscriverlo in questo modo:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot \varepsilon_k + Y_{22}^* \cdot \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot \varepsilon_k - Y_{11}^* \cdot \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Si nota che per la seconda equazione il termine $\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k$ deve essere nullo, di conseguenza anche nella prima e nella terza equazione quel contributo deve essere nullo, quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot \varepsilon_k = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

ricordando che:

$$\varepsilon_k = (Y_{b,k} - Y_{11}) \cdot (Y_{l,k} + Y_{22}) + Y_{12}^2 \tag{3.29}$$

Si deve trovare, come nel *caso reale*, una soluzione al sistema in (3.28) in modo da determinare i parametri della rete 2-porte.
Innanzitutto per una questione di ottimizzazione di spazio si tratteranno le equazioni del sistema separatamente per giungere ad un sistema risolutivo più compatto.
Cominciando a sviluppare i conti dalla prima equazione del sistema, si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot (Y_{b,k} \cdot Y_{l,k} + Y_{b,k} \cdot Y_{22} - Y_{11} \cdot Y_{l,k} - Y_{11} \cdot Y_{22} + Y_{12}^2) = 0 \tag{3.30}$$

sviluppando ulteriormente i conti e separando le sommatorie, risulta:

$$\sum_{k=1}^{N} |Y_{l,k}|^2 \cdot Y_{b,k} + \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{b,k} \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} |Y_{l,k}|^2 \cdot Y_{11} - \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \tag{3.31}$$

Per la seconda equazione, risulta:

$$\sum_{k=1}^{N} Y_{b,k} \cdot Y_{l,k} + Y_{b,k} \cdot Y_{22} - Y_{11} \cdot Y_{l,k} - Y_{11} \cdot Y_{22} + Y_{12}^2 = 0 \tag{3.32}$$

separando le sommatorie, si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^{N} Y_{b,k} \cdot Y_{l,k} + \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k} \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} Y_{11} \cdot Y_{l,k} - N \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + N \cdot Y_{12}^2 = 0 \tag{3.33}$$

Infine per la terza equazione è possibile scrivere:

$$\sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot (Y_{b,k} \cdot Y_{l,k} + Y_{b,k} \cdot Y_{22} - Y_{11} \cdot Y_{l,k} - Y_{11} \cdot Y_{22} + Y_{12}^2) = 0 \tag{3.34}$$

separando, anche in questo caso, le sommatorie, si ha:

$$\sum_{k=1}^{N} |Y_{b,k}|^2 \cdot Y_{l,k} + \sum_{k=1}^{N} |Y_{b,k}|^2 \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{l,k} - \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \tag{3.35}$$

il sistema risolvente diventa il seguente:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} |Y_{l,k}|^2 \cdot Y_{b,k} + \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{b,k} \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} |Y_{l,k}|^2 \cdot Y_{11} - \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{N} Y_{l,k}^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k} \cdot Y_{l,k} + \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k} \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} Y_{11} \cdot Y_{l,k} - N \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + N \cdot Y_{12}^2 = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} |Y_{b,k}|^2 \cdot Y_{l,k} + \sum_{k=1}^{N} |Y_{b,k}|^2 \cdot Y_{22} - \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{l,k} - \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} \\ \qquad + \sum_{k=1}^{N} Y_{b,k}^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Come per il *caso reale* è possibile definire dei coefficienti che portino ad un sistema più compatto e di più facile lettura, nella fase di implementazione

dell'algoritmo questi coefficienti saranno esplicitati. Quindi il sistema diventa:

$$\begin{cases} A + B \cdot Y_{22} - C \cdot Y_{11} - D^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + D^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \\ F + G \cdot Y_{22} - D \cdot Y_{11} - N \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + N \cdot Y_{12}^2 = 0 \\ H + K \cdot Y_{22} - B^* \cdot Y_{11} - G^* \cdot Y_{11} \cdot Y_{22} + G^* \cdot Y_{12}^2 = 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

Bisogna trovare ora le soluzioni (Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}) del sistema in (3.37).

Come prima cosa si ricava, dalla seconda equazione del sistema, il termine $Y_{12}^2 - Y_{11} \cdot Y_{22}$ che poi andrà sostituito nelle altre due equazioni, perciò si ha:

$$Y_{12}^2 - Y_{11} \cdot Y_{22} = \frac{D \cdot Y_{11} - G \cdot Y_{22} - F}{N} \tag{3.38}$$

Si passi ora alla prima equazione tenendo presente la relazione in (3.38), si ottiene:

$$N \cdot A + N \cdot B \cdot Y_{22} - N \cdot C \cdot Y_{11} + |D|^2 \cdot Y_{11} - D^* \cdot G \cdot Y_{22} - D^* \cdot F = 0 \tag{3.39}$$

mentre per la terza equazione, si può scrivere:

$$N \cdot H + N \cdot K \cdot Y_{22} - N \cdot B^* \cdot Y_{11} - |G|^2 \cdot Y_{22} + G^* \cdot D \cdot Y_{11} - G^* \cdot F = 0 \tag{3.40}$$

Ora si mettono le due equazioni in (3.39) e in (3.40) a sistema e si cerca una soluzione che porti ad ottenere i valori "ottimi" della coppia di variabili (Y_{11}, Y_{22}), ottenendo:

$$\begin{cases} N \cdot A + N \cdot B \cdot Y_{22} - N \cdot C \cdot Y_{11} + |D|^2 \cdot Y_{11} - D^* \cdot G \cdot Y_{22} - D^* \cdot F = 0 \\ N \cdot H + N \cdot K \cdot Y_{22} - N \cdot B^* \cdot Y_{11} - |G|^2 \cdot Y_{22} + G^* \cdot D \cdot Y_{11} - G^* \cdot F = 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

Si scriva ora il sistema risolvente in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} |D|^2 - N \cdot C & N \cdot B - D^* \cdot G \\ G^* \cdot D - N \cdot B^* & N \cdot K - |G|^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^* \cdot F - N \cdot A \\ G^* \cdot F - N \cdot H \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Quindi, similmente al primo caso analizzato, si è trovato un sistema lineare in due equazioni la cui risoluzione porta all'identificazione "ottima" dei parametri Y_{11}, Y_{22}. Di conseguenza vista la relazione in (3.38) è possibile ricavare anche il valore della Y_{12} a meno di un segno vista l'elevazione al quadrato, per quest'ultimo parametro si avranno quindi due valori ritenuti accettabili.

3.2 Implementazione MATLAB del metodo

Si passi ora alla fase di implementazione del metodo identificato nella sezione precedente attraverso l'ausilio del MATLAB. In modo da poter definire quelli che dovrebbero essere i valori "ottimi" dei parametri Y_{11}, Y_{12} e Y_{22} della rete 2-porte in esame.

Si parte dalla definizione, a monte del codice, dei valori che dovrebbero assumere i parametri della rete 2-porte, si tratta quindi dei valori ottimi ricercati dall'algoritmo di identificazione. Si determina, inoltre, il numero N di coppie di valori delle ammettenze in gioco nell'esperimento numerico. L'estratto di codice per questa parte è il seguente:

```
%% Valori per esperimento numerico
Y = [3 -1;-1 0.8] + 1i*[0.2 2; 2 1]; % Y effettiva
N = 50; % Numero di coppie di dati
```

Figura 3.2: Valori esperimento numerico caso complesso

Il prossimo passo è quello della generazione delle coppie $(Y_{l,k}, Y_{b,k})$ per l'esperimento. I valori generati saranno, ovviamente, affetti da rumore, si era già accennato al fatto che fosse impossibile avere delle misure di ammettenza perfette. La parte di codice per la generazione delle coppie è la seguente:

```
%% Generazione delle coppie (Y_l,k, Y_b,k)
SIG = 0.001; % Deviazione standard del rumore gaussiano
v = randn(1,N) + 1i*randn(1,N); v = v - mean(v);
w = randn(1,N) + 1i*randn(1,N); w = w - mean(w);
DC = SIG*inv(sqrtm(cov(v,w))); % Operatore di decorrelazione e scalatura
vw = DC*[v; w]; v = vw(1,:); w = vw(2,:);
Yl = 1.5*rand(1,N) + 1.5*1i*rand(1,N) + v;
Yb = Y(1,1) - Y(1,2)^2./(Yl + Y(2,2)) + w;
if (sum(real(Yb)>0) < N), disp('Dati incoerenti'); return; end
save dataset Yl Yb % Registra il dataset su file
```

Figura 3.3: Generazione coppie caso complesso

Analizzando le righe di codice si nota la definizione della deviazione standard del rumore gaussiano che determina quanto le nostre misure sono affette da incertezza. Si generano poi le sequenze pseudo-random che rappresentino le coppie $(Y_{l,k}, Y_{b,k})$. La generazione delle sequenze per questo caso è "doppia" per la presenza della parte immaginaria. Le sequenze sono poi salvate sul dataset, che in questo caso è una struttura i cui campi sono la coppia di sequenze

pseudo-random (Y_l, Y_b) generate precedentemente.
Lo stem dei valori della $Y_{b,k}$ è il seguente:

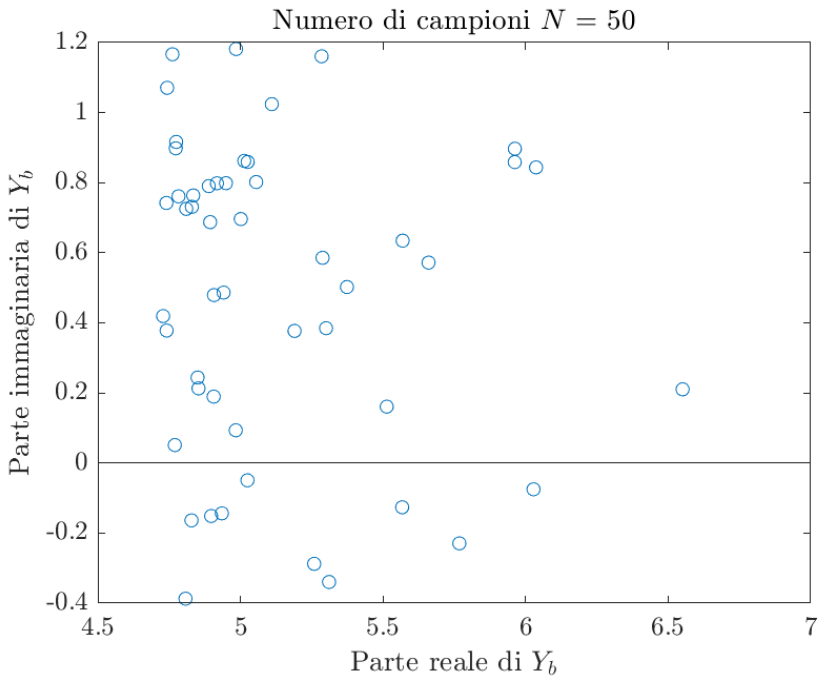

Figura 3.4: Stem della $Y_{b,k}$

mentre lo stem per quanto riguarda la $Y_{l,k}$ è il seguente:

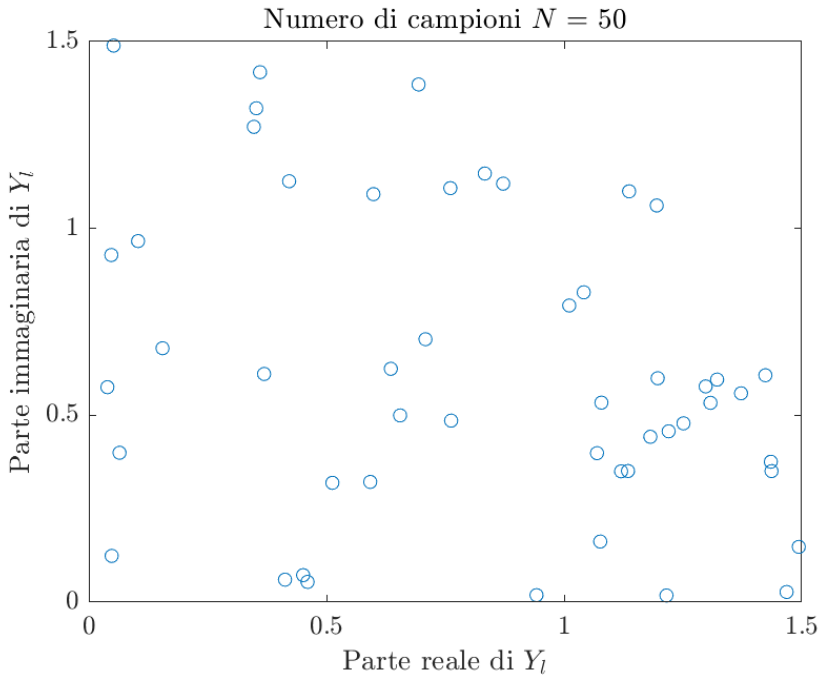

Figura 3.5: Stem della $Y_{l,k}$

Ovviamente essendo questi valori randomici ad ogni riavvio del codice in questione si avranno valori diversi, lo stem è stato aggiunto per dare l' idea della distribuzione dei valori in gioco.
Di seguito si mostra la porzione di codice con la quale si gestisce la rappresentazione grafica che mostra la distribuzione statistica delle parti reali ed immaginarie dei dati salvati nel dataset:

```
figure; % Distribuzione statistica dei dati (separati in Re e Im)
subplot(2,2,1); hist(real(Yl),50); xlabel('Valori di Re$\{Y_\ell\}$');
ylabel('Occorrenze')
subplot(2,2,2); hist(imag(Yl),50); xlabel('Valori di Im$\{Y_\ell\}$');
ylabel('Occorrenze')
subplot(2,2,3); hist(real(Yb),50); xlabel('Valori di Re$\{Y_b\}$');
ylabel('Occorrenze')
subplot(2,2,4); hist(imag(Yb),50); xlabel('Valori di Im$\{Y_b\}$');
ylabel('Occorrenze')
print statisticsC -dpng % Registra la figura su file .png da importare
                        % in LaTeX
```

Figura 3.6: Porzione di codice per la visualizzazione della distribuzione statistica dei dati

Il risultato grafico è il seguente:

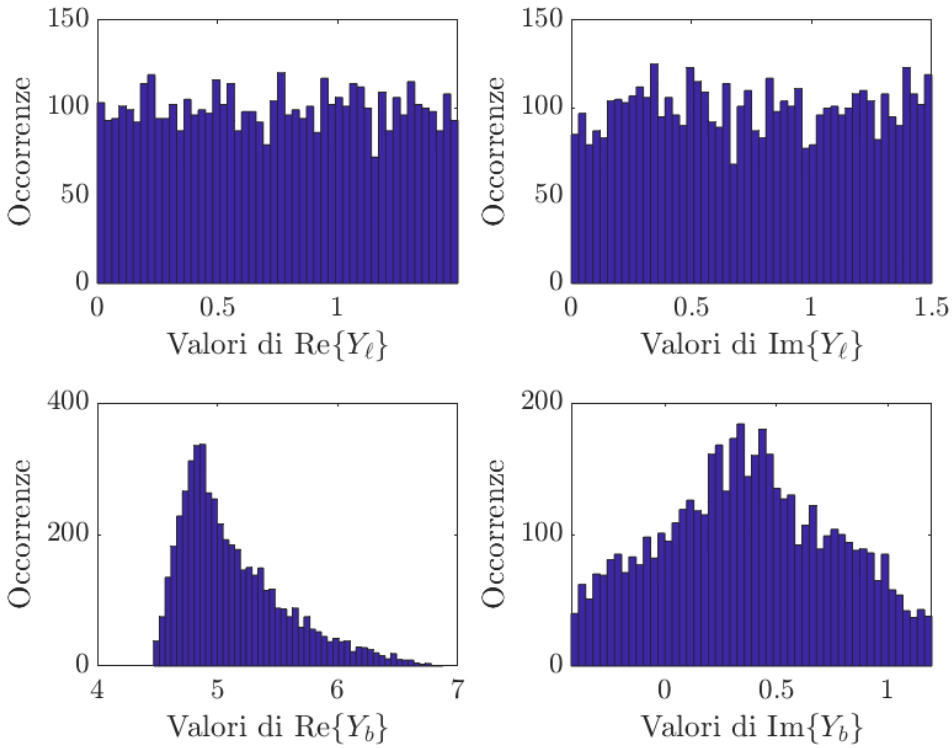

Figura 3.7: Grafico distribuzione statistica

Passo successivo è la ricerca delle soluzioni del sistema che si era trovato in fase di identificazione, ovvero il sistema in (3.42). Le righe di codice che portano alla soluzione sono le seguenti:

```
%% Risoluzione del sistema polinomiale e presentazione risultati
A = sum(abs(Yl).^2.*Yb); B = sum(conj(Yl).*Yb); C = sum(abs(Yl).^2);
D = sum(Yl); F = sum(Yb.*Yl); G = sum(Yb); H = sum(abs(Yb).^2.*Yl);
K = sum(abs(Yb).^2);
M = [N*C-abs(D)^2          G*conj(D)-N*B
     N*conj(B)-D*conj(G)   abs(G)^2-N*K];
d = [N*A-F*conj(D)
     N*H-F*conj(G)];
sol = inv(M)*d; Y11s = sol(1); Y22s = sol(2);
Y12s = sqrt(Y11s*Y22s+(1/N)*(D*Y11s - G*Y22s - F));
Ys = [Y11s Y12s; Y12s Y22s];
av = eig(real(Ys)); if (av(1)<0||av(2)<0), disp('Soluzioni non trovate');
    return; end
disp('Soluzioni trovate (Y11,Y12,Y22) ='); disp([Y11s,Y12s,Y22s])
disp('Valori effettivi (Y11,Y12,Y22) ='); disp([Y(1,1),Y(1,2),Y(2,2)])
```

Figura 3.8: Risoluzione del sistema nel caso complesso

Per prima cosa si definisce il valore dei coefficienti, che erano stati sostituiti con delle lettere dell'alfabeto per avere un sistema più compatto e di più facile lettura, del sistema risolutivo. I coefficienti per questo caso erano: A, B, C, D, F, G, H e K ed ognuno di questi coefficienti è dato da una diversa sommatoria dei campi del dataset $(Y_{l,k}, Y_{b,k})$.
Definiti i coefficienti si passa alla risoluzione, esattamente come per il *caso reale*, con il comando MATLAB *inv*(). Una volta trovati i valori dei due parametri Y_{11}, Y_{22} si può trovare il valore dell' ultima incognita ovvero la Y_{12} attraverso la formula in (3.38), trovando quindi i due valori ritenuti accettabili.
Dopo queste righe di codice la risoluzione del sistema genera i seguenti risultati per la terna di valori (Y_{11}, Y_{12}, Y_{22}):

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
$2.999957 + 0.199497j$	$\pm(1.000364 - 2.000257j)$	$0.800500 + 1.000396j$

Tabella 3.1: Valori incognite ricavate caso complesso

a monte del codice si erano definiti i valori "ottimi" che dovrebbero essere i risultati dell'algoritmo, i valori erano:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
$3 + 0.2j$	$\pm(1 - 2j)$	$0.8 + j$

Tabella 3.2: Valori attesi caso complesso

Si noti come per il *caso complesso*, rispetto a quello reale, i valori trovati dall'algoritmo sono molto più vicini a quelli attesi a parità di varianza del rumore additivo alla generazione delle sequenze pseudo-random. Anche in questo caso si necessitano di numerose prove per stabilire se l'algoritmo continuerà a dare risultati migliori rispetto al *caso reale*. Di seguito si mostra il grafico del risultato dell'algoritmo:

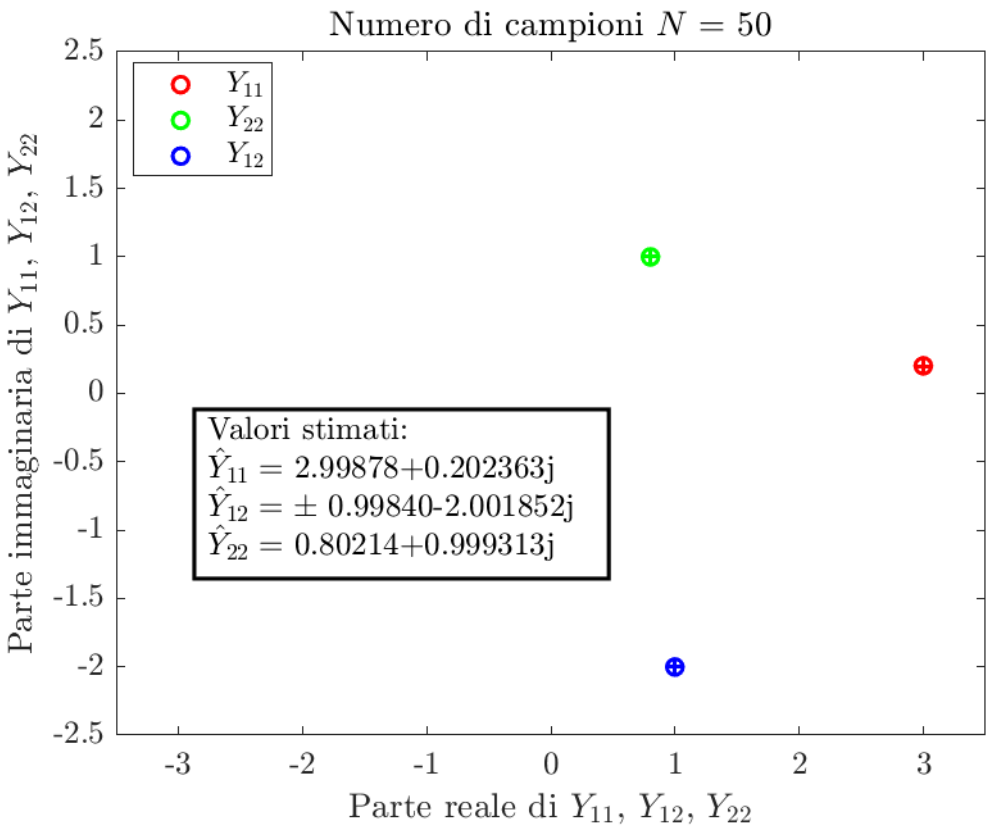

Figura 3.9: Grafico soluzioni nel caso complesso

Nel grafico il "o" rappresenta il valore stimato mentre il "+" indica il valore atteso del parametro della rete. Si noti la sovrapposizione delle due rappresentazioni nel grafico, ad indicare la vicinanza tra valore "stimato" e valore "atteso".

3.2.1 Test algoritmo caso complesso

In analogia al *caso reale* si può pensare di modificare il valore della potenza di rumore gaussiano e verificare come variano i risultati forniti dall'algoritmo. Quando si aumenta la deviazione standard del rumore si sottintende la presenza di misure di ammettenza con un grado di incertezza maggiore. Se al posto del precedente contributo di rumore, che era 0.001, si mette un contributo pari a 0.005 le soluzioni dell'algoritmo diventano:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
$2.995126 + 0.211994j$	$\pm(0.991376 - 2.008140j)$	$0.809813 + 0.995584j$

Tabella 3.3: Valori incognite ricavate *caso complesso* con varianza a 0.005

Le soluzioni sono comunque molto vicine a quelle "ottime", infatti si era evidenziato come i primi risultati del caso complesso fossero di gran lunga migliori rispetto al caso reale. Perciò, per questo caso, aumentiamo ulteriormente la potenza di rumore. Portiamo, quindi, la deviazione ad un valore pari a 0.05, si ottengono i seguenti risultati:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
$3.127730 + 0.272416j$	$\pm(0.888851 - 1.910010j)$	$0.760359 + 0.872572j$

Tabella 3.4: Valori incognite ricavate caso complesso con varianza a 0.05

Si è portato la varianza ad un valore 50 volte più grande rispetto al valore iniziale (0.001), nonostante ciò i risultati sì differiscono ma non in modo da ritenere i valori completamente "inaccettabili". I valori trovati sono molto simili, per scarto in decimali, a quelli che erano stati trovati nel *caso reale* in cui però la varianza del rumore era pari a 0.005.

Sempre in analogia al primo caso si può pensare di agire sulla matrice $[Y]$ stessa, ovvero sui valori che erano stati definiti ad inizio codice e che dovevano essere i risultati "ottimi" dell'algoritmo e quindi i parametri della rete in questione. I valori che dovevano assumere i parametri della matrice $[Y]$ erano $(3 + 0.2j, \pm(1 - 2j), 0.8 + j)$, si cambi ora la terna di valori portandoli a $(6 + 0.4j, \pm(2,5 - 5j, 1,4 + 2j))$ riportando la varianza del rumore al valore

iniziale, ovvero: 0.001.
I risultati ottenuti sono i seguenti:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
$6.002507 + 0.396904j$	$\pm(2.501065 - 4.998045j)$	$1.398782 + 2.000146j$

Tabella 3.5: Valori incognite ricavate *caso complesso* con cambio range valori $[Y]$

I valori ottenuti sono comunque molto vicini a quelli imposti ma sono peggiorati (più lontani dai valori "attesi") rispetto al caso in cui non si era cambiato ne il range ne la varianza del rumore, ovvero il primo caso. L'algoritmo quindi non si comporta in modo equivalente per diversi range dei parametri della rete, si hanno quindi risultati differenti al cambio dei parametri attesi della matrice $[Y]$.

Ora si può fare un altro test ovvero: si aumenta il contributo di rumore (la varianza del rumore) fino al valore usato nel test sull'incertezza di misura, ovvero 0.05, e si modifica in contemporanea il range dei parametri della rete, si tenga come range quello usato nel test precedente. I risultati sono i seguenti:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
6.198998 + 0.444962i	±(2.419522 - 4.903637i)	1.370258 + 1.928031i

Tabella 3.6: Valori incognite ricavate *caso complesso* con cambio di varianza e range valori $[Y]$

Come prevedibile i risultati sono ancora "peggiori" rispetto al caso predente, i valori trovati non possono essere considerati "accettabili".
Si faccia ora un ultimo test aumentando ancora il contributo di rumore portandolo a 0.07 e rimanendo nello stesso range del caso precedente, si ottengono i seguenti risultati:

Y_{11}	Y_{12}	Y_{22}
6.424984 + 0.240095i	±(2.495723 - 4.704691i)	1.222374 + 1.926264i

Tabella 3.7: Valori incognite ricavate *caso complesso* con cambio di varianza e range valori $[Y]$

I valori sono ovviamente peggiorati, sono sicuramente i "peggiori" trovati fino ad adesso e non possono anch'essi essere considerati "accettabili".

Capitolo 4

Conclusioni

Nello sviluppo del lavoro di tesi sono stati riportati i risultati trovati sia per il *caso reale* che per il *caso complesso*; per entrambi i casi si è usato lo stesso metodo di identificazione.
Passo importante, nel modellamento matematico, è stata la trasformazione di un problema di risoluzione di un sistema di tre equazioni non lineare in un sistema di due equazioni lineare, la cui risoluzione ci porta ad ottenere due delle tre incognite ricercate in modo abbastanza agevole; poi, con una semplice sostituzione di questi valori in una terza equazione, è stato possibile trovare l'ultima incognita.
Una volta modellato matematicamente il problema e trovato il sistema lineare risolvente, si è passato alla fase di implementazione per la soluzione del sistema stesso. Avendo usato lo stesso metodo di identificazione per entrambi i casi, i codici scritti per la soluzione dei due casi sono molti simili.
I risultati ottenuti sono stati analizzati separatamente facendo delle modifiche al codice scritto, mettendo in risalto sia i punti di forza dell'algoritmo che i punti deboli. Il primo caso è analizzato nel Capitolo 2, mentre il secondo caso nel Capitolo 3. Si è giunti alla conclusione che per il caso in cui l'impedenza di porta è una grandezza complessa, che rappresenta il caso più generale, si hanno risultati migliori rispetto al caso in cui l'impedenza è una grandezza reale quando l'errore di misura alle porte è più evidente. Dalla seguente trattazione si hanno risultati migliori per il secondo caso, anche se si considera il semplice cambio di range di valori definito per il test numerico.
In pratica, i risultati dell'implementazione dell'algoritmo ci dicono che per il *caso complesso* l'algoritmo di identificazione si comporta meglio rispetto al *caso reale* alla variazione di alcuni parametri che caratterizzano la modellazione.
Avendo fatto il test per un solo cambio di range e per un solo caso di aumento dell'incertezza di misura, non si può asserire ciò. Si dovrebbero quindi eseguire una moltitudine di test simulati in cui si variano tutti i parametri rilevanti per l'implementazione dell'algoritmo e poi giungere a delle conclusioni più generali.

Comunque, all'aumentare dell'incertezza di misura i risultati degradano per entrambi i casi ma mantenendo dei risultati "accettabili" per il caso studiato nel Capitolo 3, mostrando quindi la limitatezza dell'algoritmo se le misure di ammettenza eseguite alle porte non sono abbastanza precise.

Bibliografia

[1] Marianne Catanho, Mridu Sinha, and Varsha Vijayan. Model of aortic blood flow using the windkessel effect. *University of California of San Diago, San Diago*, 2012.

[2] H Frederick Frasch, J Yasha Kresh, and Abraham Noordergraaf. Two-port analysis of microcirculation: an extension of windkessel. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 270(1):H376–H385, 1996.

[3] James T Aberle. Two-port representation of an antenna with application to non-foster matching networks. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56(5):1218–1222, 2008.

[4] Jean-François Duhé, Stéphane Victor, Pierre Melchior, Youssef Abdelmounen, and François Roubertie. Two-port network modeling for bio-heat transfers in lungs. *IFAC-PapersOnLine*, 54(15):169–174, 2021.

[5] Timo Veijola. A two-port model for wave propagation along a long circular microchannel. *Microfluidics and Nanofluidics*, 3(3):359–368, 2007.

[6] Patrick Guillaume, Rik Pintelon, and Joannes Schoukens. Parametric identification of two-port models in the frequency domain. *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, 41(2):233–239, 1992.

[7] Mohd Hairi Mohd Zaman, M Marzuki Mustafa, and Aini Hussain. Black-box modeling of low dropout voltage regulator based on two-port network parameter identification. In *2015 IEEE 11th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications (CSPA)*, pages 78–83. IEEE, 2015.

[8] Shih-Feng Chou, Xiongfei Wang, and Frede Blaabjerg. Extensions to two-port network modeling method and analysis of multiple-vsc-based systems. In *2019 20th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*, pages 1–8. IEEE, 2019.

[9] Alberto Rotondi, Paolo Pedroni, and Antonio Pievatolo. Minimi quadrati. In *Probabilità, Statistica e Simulazione*, pages 463–507. Springer, 2021.