



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile e Ambientale

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura

**Analisi numerica di travi in materiale omogeneo in presenza di
danneggiamento localizzato**

**Numerical analysis of homogeneous material beams in the presence of
localized damage**

Relatore:

Dr. Erica Magagnini

Tesi di Laurea di:

Gabriele Bordi

Anno Accademico 2025/2026

INDICE

INTRODUZIONE	5
1 - DANNEGGIAMENTO IN ELEMENTI PER PIPING	7
1.1 Introduzione	7
1.2 Principali meccanismi di danneggiamento	8
1.2.1 Corrosione	8
1.2.2 Erosione ed erosione-corrosione	9
1.2.3 Fatica	9
1.2.4 Corrosione-fatica	9
1.2.5 Stress Corrosion Cracking	9
1.2.6 Vibrazioni indotte dal flusso	10
1.2.7 Danneggiamento in corrispondenza delle saldature	10
1.3 Effetti del danneggiamento sul comportamento strutturale	10
1.3.1 Influenza del danneggiamento sui parametri modali	11
1.4 Danneggiamento localizzato nelle travi e nelle tubazioni	12
2 - ANALISI DINAMICA TRAVI UNIFORMI	13
2.1 Vibrazioni nelle strutture	13
2.2 Modello matematico	13
2.3 Sistemi discreti e continui	15
2.4 Vibrazioni libere e forzate	15
2.5 Moto Forzato	16
2.6 Moto libero	19
2.7 Soluzione classica per trave libera	22
2.8 Modelli per analisi dinamiche di travi danneggiate	26

3 - TECNICHE SPERIMENTALI DI ANALISI DINAMICA.....	28
3.1 Generalità.....	28
3.2 Tecniche di vibrazione sperimentale.....	29
3.3 Tecniche di controllo non distruttivo	32
3.4 Prova sperimentale di analisi modale su trave in alluminio con danneggiamenti	34
3.4.1 Geometria e descrizione del provino.....	34
3.4.2 Strumentazione	35
3.4.3 Esecuzione della prova	36
3.4.4 Risultati della prova sperimentale	38
4 - ANALISI NUMERICA DI TRAVI CON DANNEGGIAMENTO LOCALIZZATO	39
4.1 Modellazione numerica con il metodo agli elementi finiti.....	39
4.2 Metodo agli elementi finiti con software ANSYS Mechanical APDL.....	41
4.2.1 Pre-Processing	41
4.2.2 Analisi modale	53
4.2.3 Analisi dei risultati.....	54
4.3 Studio dell' effetto del danneggiamento su parametri modali	63
4.3.1 Descrizione dei livelli di danno.....	63
4.3.2 Pre-Processing	64
4.3.3 Analisi modale	72
4.3.4 Confronto dei risultati.....	78
5 - CONCLUSIONI.....	80
BIBLIOGRAFIA.....	82
SITOGRAFIA	83

INTRODUZIONE

Gli elementi strutturali utilizzati nei sistemi di piping sono importanti negli impianti, poiché devono garantire il trasporto continuo e sicuro di fluidi anche in condizioni di esercizio particolarmente gravose. Durante la loro vita utile tali componenti sono soggetti a fenomeni di degrado che possono alterarne il comportamento meccanico e compromettere la funzionalità dell'intero sistema.

La presenza di un danneggiamento, anche se localizzato, determina una variazione delle caratteristiche strutturali dell'elemento, influenzandone la rigidezza e, di conseguenza, il comportamento dinamico. L'analisi delle vibrazioni rappresenta pertanto uno strumento efficace per valutare lo stato di una struttura, poiché le variazioni delle frequenze naturali e delle forme modali possono essere correlate alla presenza e all'entità del danno. Per questo motivo, negli ultimi anni, le tecniche di monitoraggio strutturale basate sull'analisi dinamica hanno assunto un ruolo sempre più importante nell'ambito della diagnostica non distruttiva.

La modellazione numerica mediante il Metodo degli Elementi Finiti (Finite Element Method, FEM) costituisce uno strumento fondamentale per analizzare il comportamento delle strutture danneggiate, consentendo di simulare differenti configurazioni di danno e di valutarne gli effetti sulla risposta dinamica.

La presente tesi ha come obiettivo l'analisi numerica di travi in materiale omogeneo in presenza di danneggiamento localizzato, al fine di studiarne il comportamento dinamico e valutare l'influenza del danno sui principali parametri modali. L'analisi è stata condotta mediante il software ANSYS Mechanical APDL, un avanzato strumento di calcolo numerico per la simulazione e la risoluzione dei problemi strutturali.

I risultati ottenuti dalla simulazione sono stati confrontati con i dati della sperimentazione effettuata dal lavoro di tesi *"Analisi dinamica vibrazionale di travi omogenee in presenza di danneggiamenti localizzati e rinforzi con BFRP"* (Studente: Michele Santoni, Relatore: Dr. Erica Magagnini), così da verificare la validità dei dati numerici. Successivamente è stata condotta un'analisi esclusivamente numerica, considerando differenti livelli di danneggiamento.

La tesi è organizzata in quattro capitoli. Nel primo capitolo vengono introdotti i principali fenomeni di danneggiamento che interessano gli elementi di piping e i loro effetti sul comportamento strutturale e dinamico. Il secondo capitolo presenta i richiami teorici relativi all'analisi dinamica delle travi e ai modelli utilizzati per rappresentare il

danneggiamento. Nel terzo capitolo sono illustrate le tecniche sperimentali di analisi modale e la prova utilizzata per la validazione del modello numerico.

Il quarto capitolo descrive la modellazione agli elementi finiti sviluppata con ANSYS Mechanical APDL, il confronto tra risultati sperimentali e numerici e lo studio dell'influenza di differenti livelli di danno sui parametri modali della trave.

1 - DANNEGGIAMENTO IN ELEMENTI PER PIPING

1.1 Introduzione

I sistemi di piping costituiscono componenti essenziali in numerosi impianti industriali, quali centrali energetiche, impianti petrolchimici, reti di distribuzione di fluidi e impianti di processo. La loro funzione principale consiste nel trasporto sicuro ed efficiente di fluidi liquidi e gassosi, spesso in condizioni operative caratterizzate da elevate pressioni, temperature e velocità di flusso.

Durante la vita utile dell'impianto, le tubazioni possono essere soggette a diversi meccanismi di degrado che compromettono progressivamente le proprietà meccaniche e strutturali del materiale. Tali fenomeni possono provocare riduzioni della sezione resistente, alterazioni delle caratteristiche dinamiche e, nei casi più gravi, perdite di contenimento o cedimenti strutturali.

Lo studio dei fenomeni di danneggiamento assume pertanto un ruolo fondamentale sia nella fase di progettazione sia nelle attività di monitoraggio e manutenzione, al fine di garantire elevati livelli di affidabilità e sicurezza operativa.

1.2 Principali meccanismi di danneggiamento

I danni che interessano gli elementi di piping possono essere classificati in diverse categorie in funzione del fenomeno fisico responsabile del degrado.



Figura 1.1: Esempi di corrosione localizzata (pitting) in tubazioni metalliche.

1.2.1 Corrosione

La corrosione rappresenta una delle principali cause di deterioramento delle tubazioni metalliche. Essa consiste in un processo chimico o elettrochimico che provoca la progressiva perdita di materiale a causa dell'interazione tra il metallo e l'ambiente circostante.

Le forme più comuni di corrosione nei sistemi di piping sono:

- corrosione uniforme;
- corrosione localizzata (pitting);
- corrosione galvanica;
- corrosione interstiziale;
- corrosione sotto isolamento (CUI);
- corrosione microbiologicamente influenzata (MIC).

La corrosione determina una riduzione dello spessore della parete e conseguentemente una diminuzione della rigidezza e della resistenza meccanica della struttura.

1.2.2 Erosione ed erosione-corrosione

L'erosione è causata dall'azione meccanica di particelle solide trasportate dal fluido o da elevate velocità di scorrimento che asportano progressivamente materiale dalla superficie interna delle tubazioni.

Quando l'azione erosiva si combina con fenomeni corrosivi si parla di erosione-corrosione. Tale meccanismo è particolarmente frequente in corrispondenza di curve, raccordi, valvole e cambiamenti di sezione, dove si verificano elevati livelli di turbolenza.

1.2.3 Fatica

Le tubazioni possono essere soggette a carichi ciclici derivanti da variazioni di pressione, vibrazioni indotte dal flusso, avviamenti e arresti degli impianti o fenomeni di colpo d'ariete.

La ripetizione di tali sollecitazioni nel tempo può provocare l'innescò e la propagazione di cricche da fatica anche in presenza di tensioni inferiori al limite di snervamento del materiale. Le zone maggiormente interessate risultano generalmente le saldature, i raccordi e le discontinuità geometriche.

1.2.4 Corrosione-fatica

La combinazione tra fenomeni corrosivi e carichi ciclici può accelerare significativamente la formazione e la crescita delle cricche. In tali condizioni la vita utile del componente risulta generalmente inferiore rispetto a quella prevista considerando separatamente i due fenomeni.

1.2.5 Stress Corrosion Cracking

Lo Stress Corrosion Cracking (SCC) è un fenomeno caratterizzato dalla formazione di cricche dovute all'azione simultanea di un ambiente aggressivo e di tensioni di trazione. Tale meccanismo può condurre a cedimenti improvvisi anche in assenza di evidenti fenomeni di corrosione generalizzata.

1.2.6 Vibrazioni indotte dal flusso

Nei sistemi di piping industriali un ulteriore meccanismo di danneggiamento è rappresentato dalle vibrazioni indotte dal flusso del fluido trasportato. Tali vibrazioni possono essere generate dalla turbolenza del flusso, dalla separazione dello strato limite, dalla presenza di vortici oppure da instabilità fluidodinamiche.

Quando la frequenza delle eccitazioni fluidodinamiche si avvicina alle frequenze naturali della struttura, possono verificarsi fenomeni di risonanza che determinano un significativo incremento delle ampiezze vibratorie. Nel lungo periodo ciò può provocare fenomeni di fatica, allentamento dei collegamenti, danneggiamento dei supporti e formazione di cricche nelle zone maggiormente sollecitate.

Le vibrazioni indotte dal flusso rappresentano una delle principali problematiche nei sistemi caratterizzati da elevate velocità del fluido, come linee di vapore, condotte per gas e impianti petrolchimici.

1.2.7 Danneggiamento in corrispondenza delle saldature

Le giunzioni saldate costituiscono generalmente le zone più critiche delle strutture di piping. Durante il processo di saldatura si generano infatti tensioni residue e variazioni microstrutturali che possono influenzare il comportamento meccanico del materiale.

Le saldature rappresentano inoltre punti di concentrazione delle tensioni e risultano particolarmente vulnerabili a fenomeni di fatica, corrosione localizzata e propagazione di cricche. Per questo motivo le attività di ispezione e monitoraggio si concentrano frequentemente sulle zone saldate, utilizzando tecniche non distruttive quali controlli ultrasonici, radiografici e vibrazionali.

1.3 Effetti del danneggiamento sul comportamento strutturale

La presenza di un danno comporta una modifica delle proprietà meccaniche della tubazione, principalmente attraverso una riduzione locale della rigidità. Dal punto di vista statico ciò si traduce in un aumento delle deformazioni sotto l'azione dei carichi applicati.

Dal punto di vista dinamico, invece, il danneggiamento altera i parametri modali della struttura, quali:

- frequenze naturali;
- forme modali;
- coefficienti di smorzamento.

In generale, l'aumento della cedevolezza indotto dal danno determina una riduzione delle frequenze proprie e una modifica delle forme modali associate.

1.3.1 Influenza del danneggiamento sui parametri modali

Le proprietà dinamiche di una struttura dipendono principalmente dalla distribuzione di massa, rigidità e smorzamento. La presenza di un danno modifica localmente tali proprietà e produce variazioni misurabili nella risposta dinamica.

La frequenza naturale di vibrazione di una struttura può essere espressa in forma semplificata come:

$$f = (1/2\pi)\sqrt{k/m} \quad (1.1)$$

dove k rappresenta la rigidità equivalente e m la massa equivalente del sistema.

Poiché la maggior parte dei fenomeni di degrado determina una riduzione della rigidità locale, il danneggiamento produce generalmente una diminuzione delle frequenze naturali. Tale variazione risulta tanto più marcata quanto maggiore è l'entità del danno.

Anche le forme modali possono subire modifiche significative. In particolare, le deformate associate ai modi di vibrazione tendono a presentare variazioni locali nelle zone danneggiate. Questa caratteristica viene frequentemente sfruttata nelle tecniche di identificazione del danno basate sull'analisi modale sperimentale.

Un ulteriore parametro influenzato dal degrado è lo smorzamento strutturale. La presenza di cricche e discontinuità può infatti introdurre fenomeni dissipativi aggiuntivi che alterano il comportamento vibratorio del sistema.

1.4 Danneggiamento localizzato nelle travi e nelle tubazioni

Molti difetti presenti nelle strutture di piping possono essere modellati come danneggiamenti localizzati. Esempi tipici sono rappresentati da cricche, incisioni, perdite di spessore dovute alla corrosione e difetti di saldatura.

Dal punto di vista numerico, tali difetti vengono spesso rappresentati come riduzioni locali della rigidezza flessionale della struttura. Questa semplificazione consente di studiare l'influenza del danno sul comportamento dinamico attraverso modelli analitici e modelli agli elementi finiti.

L'identificazione delle variazioni dei parametri modali rappresenta il principio alla base delle moderne tecniche di monitoraggio strutturale e dei controlli non distruttivi basati sulle vibrazioni.

2 - ANALISI DINAMICA TRAVI UNIFORMI

2.1 *Vibrazioni nelle strutture*

L'analisi del comportamento statico e dinamico di una struttura viene condotta mediante modelli matematici semplificati che ne rappresentano le caratteristiche essenziali.

La descrizione della struttura avviene attraverso tre fasi successive. In primo luogo vengono individuate le proprietà geometriche e fisiche del sistema, nonché le azioni a cui esso è sottoposto. Successivamente si esegue l'analisi modale, che consente di determinare i modi propri di vibrazione della struttura in assenza di sollecitazioni esterne. Infine, l'analisi modale viene ripetuta considerando anche l'effetto delle azioni esterne applicate. Alla struttura viene imposta un'eccitazione di riferimento, dalla quale si ottiene un modello di risposta rappresentato da un insieme *di funzioni di risposta in frequenza* (FRF).

Il procedimento inverso consiste nel verificare la coerenza tra le caratteristiche della risposta misurata e i corrispondenti parametri modali e spaziali della struttura.

2.2 *Modello matematico*

Il modello matematico di una struttura reale è costituito da tre elementi fondamentali:

Modello geometrico: descrive la configurazione della struttura attraverso le sue caratteristiche geometriche e le condizioni di vincolo che ne regolano il comportamento;

Modello meccanico o reologico: rappresenta le proprietà meccaniche dei materiali utilizzati, definite mediante opportune leggi di comportamento, quali quelle costitutive, viscosi o viscoelastici;

Modello delle azioni esterne: comprende l'insieme delle sollecitazioni applicate alla struttura, tra cui i carichi permanenti e variabili di tipo verticale, nonché le forze orizzontali generate da eventi sismici.

La struttura complessa viene semplificata in una struttura elementare così da rendere più semplice lo studio di : massa, molla e smorzatore.

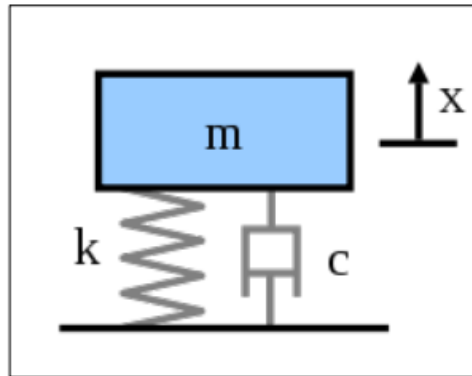


Figura 2.1: Modello semplificato

- L'azione della *massa* m sulla struttura è definita dalla seconda legge della dinamica, che descrive le caratteristiche inerziali della struttura:

$$FI = m\ddot{u} = m(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1) \quad (2.1)$$

- La molla (spring) descrive la forza elastica dei componenti attraverso la *rigidezza* k , ovvero la forza necessaria per muovere la massa di uno spostamento relativo unitario:

$$FS = ku = k(u_2 - u_1) \quad (2.2)$$

- Lo smorzatore (damper) descrive la capacità della struttura di fornire dissipazione sia per attrito sia per plasticizzazione del materiale che lo costituisce; esso viene definito da un parametro chiamato *smorzamento* c :

$$FD = c\dot{u} = c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (2.3)$$

Poiché le azioni agenti su una struttura sono meglio definite dalla rigidezza e dallo smorzamento se posti in parallelo l'uno all'altro (modello di Kelvin), *l'equazione costitutiva viscoelastica* rappresenta al meglio questo comportamento:

$$F = FS + FD = ku + c\dot{u} \quad (2.4)$$

2.3 Sistemi discreti e continui

Un sistema fisico rappresenta un modello geometrico o strutturale di una struttura reale. I gradi di libertà (DOF, *Degrees of Freedom*) sono le variabili necessarie per descrivere la posizione di una massa rispetto alla configurazione di equilibrio del sistema. In base al numero di gradi di libertà, i sistemi possono essere classificati in continui o discreti.

Sistemi continui: sono caratterizzati da un numero infinito di gradi di libertà e richiedono quindi un numero infinito di coordinate per descriverne lo stato. Il loro comportamento dinamico è governato da equazioni differenziali alle derivate parziali, poiché le grandezze che definiscono il moto dipendono sia dal tempo sia dalle coordinate spaziali. Il movimento del sistema è pertanto rappresentato da una funzione delle variabili spaziali e temporali, che descrive lo spostamento di ogni punto della struttura.

Sistemi discreti: possiedono un numero finito di gradi di libertà e il loro stato può essere descritto mediante un insieme limitato di parametri variabili nel tempo. Di conseguenza, il moto di tali sistemi è regolato da equazioni differenziali ordinarie, nelle quali le variabili dipendono esclusivamente dal tempo.

Per qualsiasi elemento strutturale, le *equazioni del moto* si ricavano imponendo le condizioni di equilibrio dinamico a un generico elemento di materia considerato nella sua configurazione corrente.

2.4 Vibrazioni libere e forzate

I sistemi discreti possono essere classificati in due categorie principali in funzione del numero di gradi di libertà che ne descrivono il comportamento dinamico:

- Sistemi a un grado di libertà (SDOF – *Single Degree of Freedom*): il loro stato è completamente definito da una sola coordinata generalizzata, sufficiente a descrivere la posizione della massa rispetto alla configurazione di equilibrio.
- Sistemi a più gradi di libertà (MDOF – *Multiple Degrees of Freedom*): richiedono due o più coordinate generalizzate per descriverne il moto. In questi sistemi, le proprietà spaziali e dinamiche, come spostamenti, velocità, accelerazioni e forze, vengono generalmente rappresentate mediante vettori e matrici.

2.5 Moto Forzato

La soluzione dell'equazione del moto forzato viene ottenuta a partire dall'ipotesi di Eulero-Bernoulli, nota come *principio di conservazione delle sezioni piane* (la sezione retta si conserva piana e ortogonale all'asse geometrico deformato).

E' data una trave, vincolata agli estremi e sollecitata dal carico distribuito $p(x,t)$, applicato normalmente all'asse, nel piano della trave; la sollecitazione della trave è di flessione retta con il vettore momento ortogonale al piano $x - y$.

Il carico $p(x,t)$ dipende dalle variabili x e t , dato che cambia generalmente al variare di t , anche le caratteristiche di sollecitazione nelle varie sezioni cambiano, poiché le prime dipendono da t .

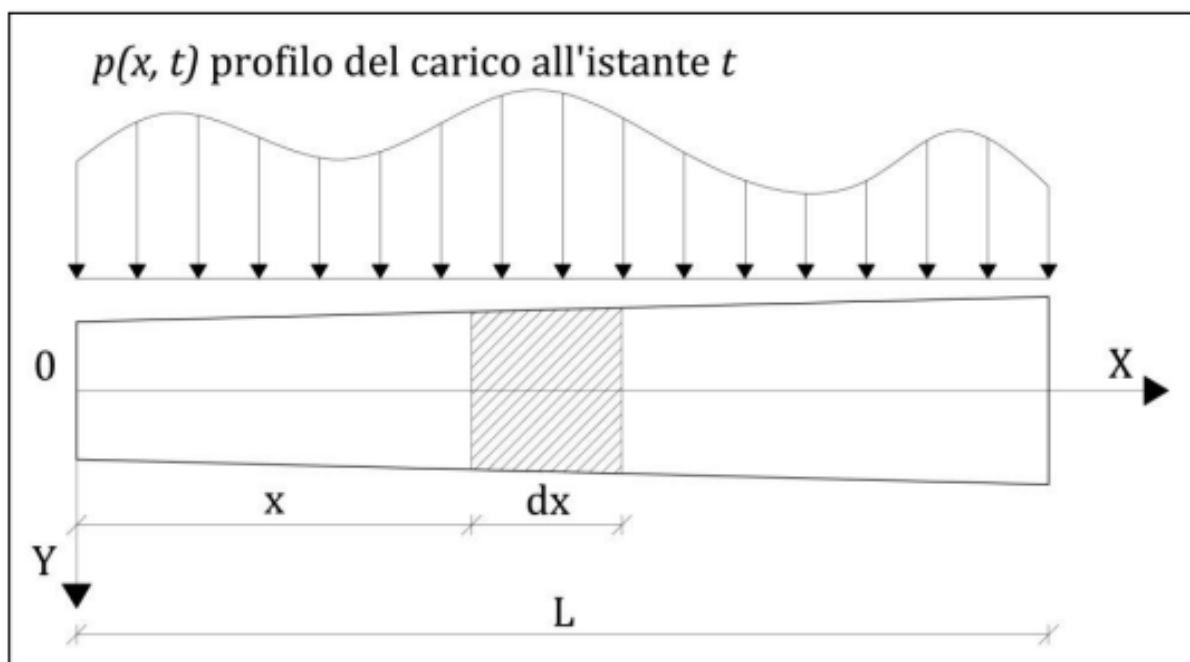


Figura 2.2: Trave a flessione con massa e carico tagliente $p(x,t)$

Nella figura successiva invece è rappresentata una porzione di trave di lunghezza infinitesima dx delimitata dalle facce piane ed ortogonali all'asse della trave:

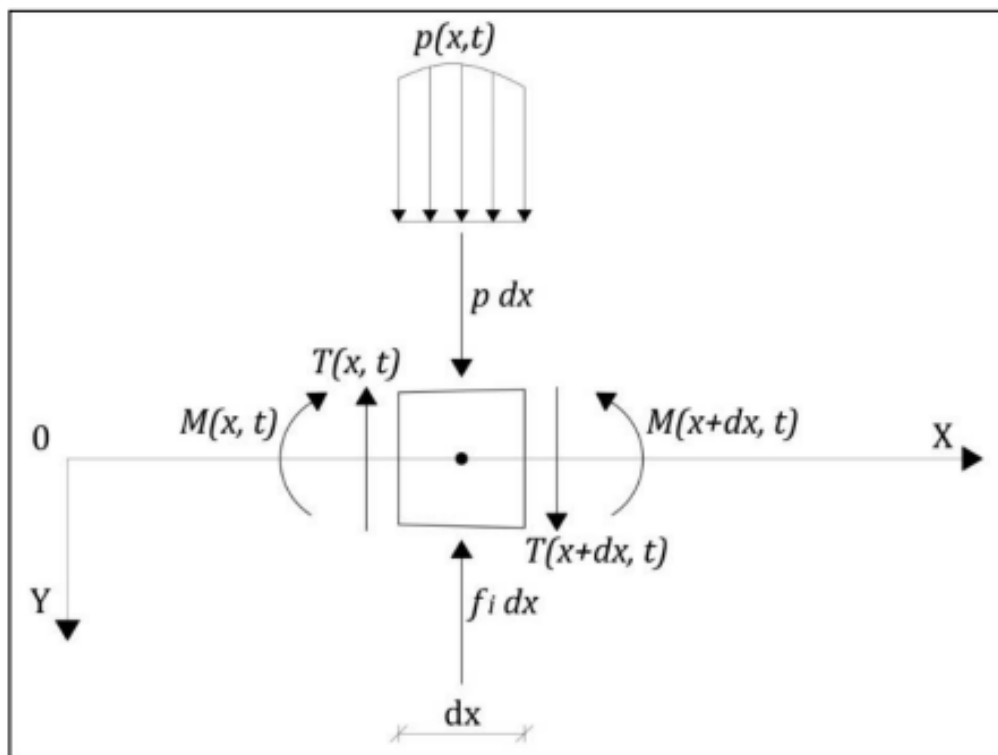


Figura2.3: Forze interne ed esterne agenti sul tronco di trave in condizioni dinamiche

Sulla faccia di ascissa x agiscono il taglio $T(x, t)$, ed il momento flettente $M(x, t)$. A causa della presenza del carico distribuito $p(x, t)$, lungo il tratto dx , sulla faccia di ascissa $x + dx$, agiscono il taglio $T(x + dx, t)$ ed il momento $M(x + dx, t)$. Sulla porzione di trave è anche rappresentata la forza di inerzia Fi descritta nella seguente formula in cui $dm = \mu A dx$, μ densità di massa, A area della sezione trasversale della porzione di trave, $v = v(x, t)$ spostamento dell'asse geometrico della trave nel piano principale $x - y$ in direzione y :

$$Fi = fi dx = -dm (\partial^2 v / \partial t^2) = -\mu A dx (\partial^2 v / \partial t^2) \quad (2.5)$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, uguagliando a zero la somma delle forze agenti sulla porzione di trave della figura precedente, si arriva alla condizione di equilibrio dinamico per le forze in direzione y :

$$-T + p dx - \mu A dx (\partial^2 v / \partial t^2) + T + dT = 0 \quad (2.6)$$

da cui:

$$\mu A dx \partial^2 v / \partial t^2 - dT = p dx \quad (2.7)$$

con

$$dT = (\partial T / \partial x) dx \quad (2.8)$$

Si giunge quindi all'equazione *indefinita di equilibrio dinamico*:

$$\mu A (\partial^2 v / \partial t^2) - (\partial T / \partial x) = p(x,t) \quad (2.9)$$

Si ritiene applicabile l'equazione differenziale della linea elastica dalla *teoria della flessione retta* del cilindro di *S. Venant* poiché la trave è un *continuo elastico, lineare, omogeneo ed isotropo* e la porzione di trave può essere definita cilindrica, data la sua lunghezza infinitesima:

$$\partial^2 v / \partial x^2 = -M / EI \quad (2.10)$$

$$M = -EI (\partial^2 v / \partial x^2) \quad (2.11)$$

con E modulo di elasticità normale e I momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro. La condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di trave attorno al punto di intersezione del suo asse con le rette di azione delle risultanti delle forze esterne $p dx$ e delle forze di inerzia $f_i dx$, trascurando i contributi degli infinitesimi di ordine superiore al primo risulta:

$$T dx + M - (M + dM) = 0 \quad (2.12)$$

da cui si ricava la relazione tra momento flettente e taglio:

$$T = \partial M / \partial x \quad (2.13)$$

Sostituendo la relazione e successivamente M nell'equazione indefinita di equilibrio dinamico, si ottiene *l'equazione fondamentale del moto forzato* della trave ad asse rettilineo e a sezione variabile, vibrante nel piano principale $x - y$ sotto l'azione del carico trasversale $p(x,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (2.14)$$

Se la sezione trasversale della trave è costante, il modulo di elasticità $E = E(x)$, non dipendendo da x , assume un valore costante per tutta la lunghezza del solido, e l'equazione fondamentale diventa:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (2.15)$$

ovvero un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del quarto ordine. È approssimata in quanto descrive il moto (vibrazione) forzato trascurando il contributo delle *deformazioni taglienti* e dell'*inerzia rotazionale*, ossia di quelle deformazioni prodotte dalle forze inerziali, indotte dalle rotazioni delle sezioni terminali delle porzioni infinitesime in cui può immaginarsi suddivisa la trave.

2.6 Moto libero

Nel caso di trave a sezione costante e in assenza di carico $p(x, t)$, l'equazione fondamentale si riduce all'equazione omogenea, nota come *equazione differenziale delle oscillazioni libere* della trave:

$$EI \left(\partial^4 v / \partial x^4 \right) + \mu A \left(\partial^2 v / \partial t^2 \right) = 0 \quad (2.16)$$

La soluzione $v = v(x, t)$ di questa equazione a variabili separabili si può scrivere come il prodotto di due funzioni, una funzione della sola x (detta forma modale) ed una solo del tempo t :

$$v(x, t) = V(x)g(t) \quad (2.17)$$

Derivando la funzione $v(x, t)$, rispetto alle variabili x e t sostituendola nell'equazione del moto divisa per EI , si ottiene:

$$V''''(x)g(t) + \frac{\mu A}{EI} V(x)\ddot{g}(t) = 0$$

$$\frac{EI}{\mu A} \frac{V''''(x)}{V(x)} = -\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} \quad (2.18)$$

dove gli apici e i puntini indicano le derivate rispetto a x e t .

Affinché l'identità esista entrambi i membri devono essere uguali ad una costante che indicheremo con ω^2 , ricavando le due *equazioni differenziali ordinarie*:

$$V''''(x) - \lambda^4 V(x) = 0 \quad (2.19)$$

detta *equazione delle forme modali* definita con :

$$\lambda^4 = (\mu A / EI) \omega^2 \quad (2.20)$$

otteniamo la *pulsazione naturale* :

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{EI / \mu A} \quad (2.21)$$

Quest'equazione, definita *equazione differenziale dei moti armonici*:

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0 \quad (2.22)$$

ha una soluzione che può scriversi in varie forme, come:

$$g(t) = G \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.23)$$

con G che indica l'ampiezza e φ la fase, che si determinano in base alle condizioni iniziali assegnate al sistema al tempo $t = 0$. L'equazione differenziale è risolta ponendo:

$$V(x) = B e^{rx} \quad (2.24)$$

Essendo:

$$V''''(x) = r^4 B e^{rx} \quad (2.25)$$

L'equazione differenziale diventa:

$$(r^4 - \lambda^4) B e^{rx} = 0 \quad (2.26)$$

Le radici dell'equazione caratteristica $(r^4 - \lambda^4) = 0$ sono:

$$r_{1,2} = \pm \lambda, r_{3,4} = \pm i\lambda \quad (2.27)$$

La *soluzione generale* di tale equazione si ottiene dalla combinazione lineare delle quattro soluzioni particolari, date dalla sostituzione delle radici nell'equazione differenziale:

$$V(x) = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 e^{i\lambda x} + B_4 e^{-i\lambda x} \quad (2.28)$$

Se si esprimono le funzioni esponenziali in termini di funzioni trigonometriche ed iperboliche:

$$\begin{aligned} e^{\pm \lambda x} &= \cosh \lambda x \pm \sinh \lambda x \\ e^{\pm i \lambda x} &= \cos \lambda x \pm i \sin \lambda x \end{aligned} \quad (2.29)$$

la soluzione generale diventa:

$$V(x) = B_1' \cos \lambda x + B_2' \sin \lambda x + B_3' \cosh \lambda x + B_4' \sinh \lambda x \quad (2.30)$$

La forma modale è caratterizzata dalle quattro costanti arbitrarie che intervengono nella soluzione generale, le B_j , le B_j' ($j = 1, \dots, 4$), che vengono calcolate in base alle condizioni al contorno della trave.

Le condizioni al contorno permettono di determinare tre delle costanti in funzione della quarta e di ricavare *l'equazione delle frequenze* da cui si deduce il parametro λ . Poiché si tratta di vibrazioni libere, non è possibile determinare la quarta costante che definisce l'ampiezza del moto e che dipende dalle condizioni iniziali.

La soluzione stazionaria del moto libero a regime può essere espressa con:

$$v(x,t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.31)$$

con la costante G assorbita dalle costanti B_j' , per la quale la soluzione stazionaria descrive il moto trasversale di una trave per qualsiasi condizione al contorno o condizione iniziale.

Le B_j' sono determinate attraverso le condizioni al contorno che sono soddisfatte solo per particolari valori di $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, detti *autovalori*, a ciascuno dei quali corrisponde la relativa pulsazione naturale.

All'autovalore λ_n corrisponde anche l'*autofunzione* $V_n(x)$ (funzione spaziale, modo di vibrare) che definisce la deformata della trave in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n , che può essere definita anche n -esimo modo di vibrare del sistema. La seguente equazione fornisce la soluzione dell'equazione differenziale dei moti armonici corrispondente all'autovalore λ_n :

$$g_n(t) = G \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (2.32)$$

L'espressione della deformata dell'asse geometrico della trave in vibrazione libera è espressa dall'integrale generale dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad (2.33)$$

Nell'espressione deformata si assume, per l'autofunzione $V_n(x)$, l'espressione relativa all'autovalore n -esimo che si ricava è:

$$V_n(x) = B_1' \cos \lambda_n x + B_2' \sin \lambda_n x + B_3' \cosh \lambda_n x + B_4' \sinh \lambda_n x \quad (2.34)$$

2.7 Soluzione classica per trave libera

Le condizioni al contorno agli estremi liberi della trave si esprimono annullando i valori di taglio e momento per

$x = 0$:

$$M(0,t) = 0 \quad T(0,t) = 0 \quad (2.35)$$

$x = L$:

$$M(L,t) = 0 \quad T(L,t) = 0 \quad (2.36)$$

Per la teoria della flessione retta del cilindro di *S. Venant* (linea elastica) e dalla condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di trave, il momento $M(x,t)$ ed il taglio $T(x,t)$ sono espressi in termini di spostamento:

$$\begin{aligned} M(x,t) &= -EI \partial^2 v / \partial x^2 \\ T(x,t) &= -EI \partial^3 v / \partial x^3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

essendo la funzione spostamento $v = v(x,t)$ soluzione dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere, nella forma della soluzione stazionaria. Così le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{aligned} M(x,t) &= -EIV''(x) \cos(\omega t - \varphi) \\ T(x,t) &= -EIV'''(x) \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Viene derivata l'autofunzione $V(x)$:

$$V'' = -\lambda^2 (B_1' \cos \lambda x + B_2' \sin \lambda x - B_3' \cosh \lambda x - B_4' \sinh \lambda x) \quad (2.39)$$

$$V''' = \lambda^3 (B_1' \sin \lambda x - B_2' \cos \lambda x + B_3' \sinh \lambda x + B_4' \cosh \lambda x) \quad (2.40)$$

Sostituendo e applicando le condizioni al contorno, si ottiene:

$$M(0,t) = EI \lambda^2 (B_1' - B_3') \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (2.41)$$

$$T(0,t) = EI \lambda^3 (B_2' - B_4') \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (2.42)$$

da cui: $B_1' = B_3'$; $B_2' = B_4'$

quindi l'autofunzione $V(x)$ diventa:

$$V(x) = B_1' (\cos \lambda x + \cosh \lambda x) + B_2' (\sin \lambda x + \sinh \lambda x) \quad (2.43)$$

Derivandola:

$$V'' = \lambda^2 [B_1' (-\cos \lambda x + \cosh \lambda x) + B_2' (-\sin \lambda x + \sinh \lambda x)] \quad (2.44)$$

$$V''' = \lambda^3 [B_1' (\sin \lambda x + \sinh \lambda x) + B_2' (-\cos \lambda x + \cosh \lambda x)] \quad (2.45)$$

Sostituendo e applicando le condizioni al contorno, si ottiene:

$$M(L,t) = EI \lambda^2 [B_1' (-\cos \lambda L + \cosh \lambda L) + B_2' (-\sin \lambda L + \sinh \lambda L)] \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

$$T(L,t) = EI \lambda^3 [B_1' (\sin \lambda L + \sinh \lambda L) + B_2' (-\cos \lambda L + \cosh \lambda L)] \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (2.46)$$

da cui si ottiene il sistema di equazioni in B_1' e B_2' :

$$B_1' (-\cos \lambda L + \cosh \lambda L) + B_2' (-\sin \lambda L + \sinh \lambda L) = 0$$

$$B_1' (\sin \lambda L + \sinh \lambda L) + B_2' (-\cos \lambda L + \cosh \lambda L) = 0 \quad (2.47)$$

Annullando il determinante della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni (2.47) si ottiene:

$$\det \begin{bmatrix} -\cos \lambda L + \cosh \lambda L & -\sin \lambda L + \sinh \lambda L \\ \sin \lambda L + \sinh \lambda L & -\cos \lambda L + \cosh \lambda L \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\cos \lambda L + \cosh \lambda L)^2 - (\sin \lambda L + \sinh \lambda L)(-\sin \lambda L + \sinh \lambda L) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \lambda L + \cosh^2 \lambda L - 2 \cos \lambda L \cosh \lambda L + \sin^2 \lambda L - \sinh^2 \lambda L = 0$$

essendo $\sin 2\lambda L + \cos 2\lambda L = 1$ e $\cosh 2\lambda L - \sinh 2\lambda L = 1$, dal determinate si ricava l'equazione delle frequenze:

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L = 1 \Rightarrow \cos \lambda L = 1 / \cosh \lambda L \quad (2.48)$$

Non esistendo una semplice soluzione, l'equazione delle frequenze è risolta numericamente tracciando i grafici delle funzioni $\cos \lambda L$ e $1 / \cosh \lambda L$ le cui intersezioni forniscono appunto i valori di λL che verificano l'uguaglianza come mostrato in figura:

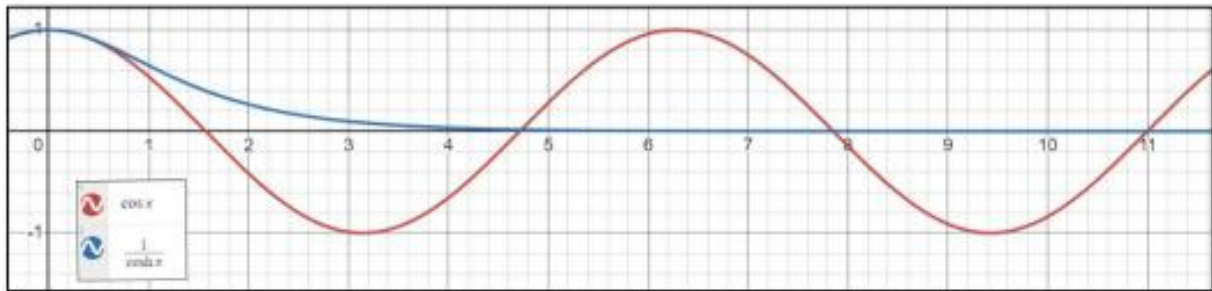


Figura 2.4: Grafico delle funzioni $\cos \lambda L$ e $1/\cosh \lambda L$

Le prime tre intersezioni si hanno per:

$$\lambda_1 L = 1,506\pi = 4,730$$

$$\lambda_2 L = 2,5\pi = 7,853$$

$$\lambda_3 L = 3,5\pi = 10,996 \quad (2.49)$$

Poiché la funzione $1 / \cosh \lambda L$ tende velocemente a zero, per valori di $\lambda_n L$ abbastanza elevati ($n \geq 4$), i punti di intersezione corrispondono alle soluzioni dell'equazione $\cos \lambda L = 0$, cioè

$$\lambda_n L = (n - 1/2) \pi \quad \text{per } n \geq 4 \quad (2.50)$$

Utilizzando i valori di $\lambda_n L$, si possono ricavare dall'equazione delle forme modali i valori per le pulsazioni naturali ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) e le corrispondenti frequenze cicliche f_n . In oltre, è possibile anche determinare le costanti C_1' e C_2' che sostituite nell'autofunzione $V(x)$, ci forniscono le autofunzioni $V_n(x)$ (deformate della trave) in corrispondenza delle pulsazioni naturali ω_n .

Le costanti C_1' e C_2' sono legate dalla relazione:

$$C_2' = C_1' \frac{(\cos \lambda_n L - \cosh \lambda_n L)}{(\sin \lambda_n L - \sinh \lambda_n L)} \quad (2.51)$$

Per cui le auto funzioni $V_n(x)$ saranno:

$$V_n(x) = C'_1 \left[(\cos \lambda_n x + \cosh \lambda_n x) + \frac{(\cos \lambda_n L - \cosh \lambda_n L)}{(\sin \lambda_n L - \sinh \lambda_n L)} (\sin \lambda_n x + \sinh \lambda_n x) \right] \quad (2.52)$$

Le prime tre autofunzioni $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$, corrispondenti alle pulsazioni naturali ω_1 , ω_2 , ω_3 sono:

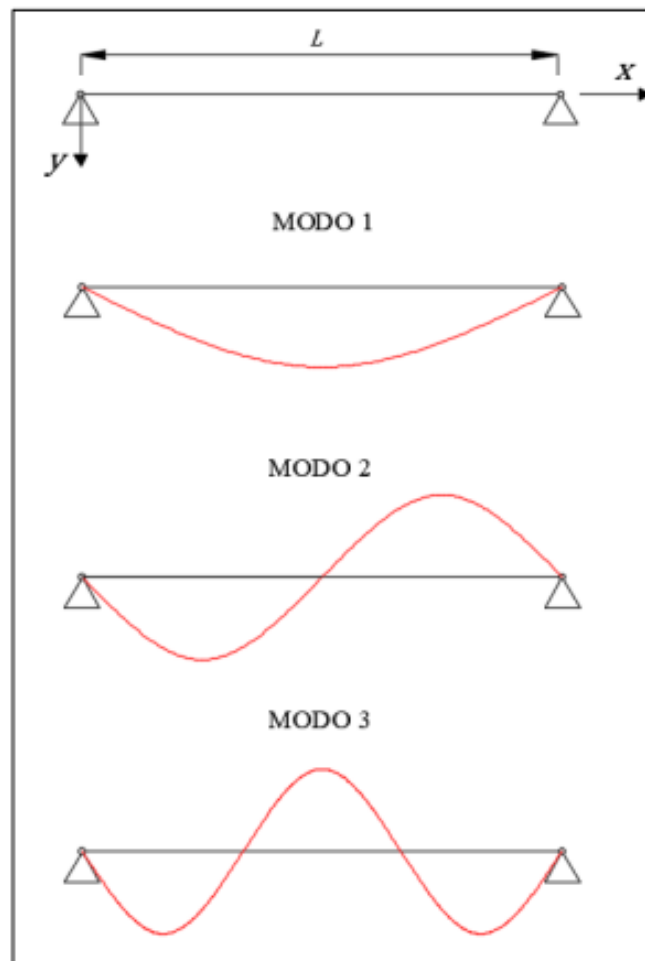


Figura 2.5: Primi tre modi di vibrare una trave

2.8 Modelli per analisi dinamiche di travi danneggiate

Nello studio del comportamento dinamico delle strutture, la presenza di un danneggiamento può essere rappresentata attraverso opportuni modelli matematici che consentono di descrivere la variazione delle proprietà meccaniche della trave rispetto alla configurazione integra.

Nel caso delle travi e delle strutture di piping, i difetti maggiormente riscontrati, quali cricche, intagli, fenomeni corrosivi localizzati e perdite di spessore, producono generalmente una riduzione locale della rigidezza flessionale. Tale riduzione modifica il comportamento dinamico del sistema e determina variazioni delle frequenze naturali, delle forme modali e delle funzioni di risposta in frequenza.

Dal punto di vista modellistico, il danno viene spesso schematizzato come una discontinuità localizzata della rigidezza. In questa rappresentazione la trave viene suddivisa in due porzioni collegate da un elemento elastico equivalente che simula la cedevolezza introdotta dal difetto.

La severità del danno può essere espressa mediante un parametro adimensionale che rappresenta la riduzione locale della rigidezza rispetto alla configurazione integra. All'aumentare della profondità della cricca o della perdita di materiale, la cedevolezza locale aumenta e la struttura diventa progressivamente meno rigida.

Dal punto di vista fisico, la presenza del danno modifica la distribuzione delle deformazioni lungo la trave. Le zone prossime alla discontinuità risultano caratterizzate da maggiori curvature e da una concentrazione degli stati tensionali. Tali effetti influenzano direttamente le caratteristiche vibratorie della struttura.

In generale, una diminuzione della rigidezza comporta una riduzione delle frequenze naturali. Tale variazione può essere spiegata osservando che la pulsazione naturale di un sistema dipende dal rapporto tra rigidezza e massa. Poiché il danno produce generalmente una variazione trascurabile della massa ma una significativa diminuzione della rigidezza, si osserva una riduzione delle frequenze proprie di vibrazione.

Oltre alle frequenze naturali, anche le forme modali subiscono modifiche. In particolare, le deformate associate ai diversi modi di vibrare possono presentare variazioni localizzate in prossimità del danno. Questa caratteristica costituisce il fondamento delle moderne tecniche di identificazione del danno basate sull'analisi modale.

Le variazioni dei parametri modali risultano influenzate sia dalla posizione sia dall'entità del difetto. In generale, un danno localizzato in prossimità di una zona caratterizzata da elevata curvatura modale produce effetti più evidenti rispetto a un danno situato in corrispondenza di un nodo modale. Analogamente, all'aumentare della severità del danno aumentano le variazioni osservabili nelle frequenze naturali e nelle forme modali.

Per analizzare tali fenomeni vengono frequentemente impiegati modelli agli elementi finiti. In questi modelli il danno viene simulato mediante una riduzione locale delle proprietà elastiche dell'elemento oppure attraverso l'introduzione di elementi elastici equivalenti capaci di riprodurre la cedevolezza associata alla presenza della cricca.

L'analisi delle variazioni dei parametri modali rappresenta la base teorica delle tecniche di monitoraggio strutturale e dei controlli non distruttivi basati sulle vibrazioni. Confrontando le caratteristiche dinamiche della struttura integra con quelle della struttura danneggiata è infatti possibile individuare la presenza di anomalie e ottenere informazioni sulla loro localizzazione e severità.

Nel caso specifico delle strutture di piping, la modellazione del danno come riduzione locale della rigidità costituisce un approccio particolarmente efficace, poiché consente di rappresentare in modo semplice gli effetti prodotti da corrosione, erosione, cricche e difetti di saldatura, fenomeni che rappresentano le principali cause di degrado durante la vita utile dell'impianto.

3 - TECNICHE SPERIMENTALI DI ANALISI DINAMICA

3.1 Generalità

Nel corso degli ultimi anni, l'analisi modale sperimentale ha assunto un ruolo sempre più rilevante nell'ambito dell'ingegneria strutturale, grazie ai significativi sviluppi tecnologici che hanno interessato i sistemi di misura e acquisizione dei dati. Tali innovazioni hanno reso le procedure sperimentali più accurate, affidabili e accessibili dal punto di vista economico rispetto a numerosi metodi tradizionalmente impiegati per la caratterizzazione delle strutture.

La determinazione delle proprietà strutturali, sia in campo statico sia dinamico, costituisce un passaggio essenziale per la comprensione del reale comportamento di un'opera. Questo aspetto assume particolare importanza nel caso di edifici caratterizzati da elevata complessità geometrica o costruttiva, nonché per strutture realizzate con materiali le cui proprietà meccaniche risultano difficilmente definibili mediante le sole indagini teoriche.

Le informazioni ottenute dalle prove sperimentali consentono di sviluppare e calibrare modelli numerici rappresentativi del comportamento effettivo della struttura, aumentando l'affidabilità delle analisi previsionali. Tali modelli possono essere impiegati per valutare la risposta strutturale in presenza di differenti condizioni di carico e di esercizio, fornendo un valido supporto nelle attività di verifica e progettazione.

Sebbene l'elaborazione e l'interpretazione dei risultati sperimentali richiedano competenze specifiche e un'attenta analisi critica, esse rappresentano uno strumento di grande efficacia per l'individuazione di eventuali criticità e per la definizione di interventi finalizzati al miglioramento delle prestazioni e della sicurezza strutturale.

3.2 Tecniche di vibrazione sperimentale

L'analisi modale di una struttura e lo studio della sua risposta dinamica a una generica sollecitazione si basano sulla definizione di un modello matematico capace di descrivere la relazione tra le azioni esterne applicate e la risposta del sistema in termini di spostamenti, velocità e accelerazioni. Tale modello consente di rappresentare il comportamento dinamico della struttura e di comprenderne le caratteristiche vibratorie.

L'approccio tradizionale prevede la risoluzione delle equazioni differenziali del moto, formulate tenendo conto delle opportune condizioni iniziali, al fine di correlare la risposta strutturale $u(t)$ alla forza eccitante $p(t)$. Tuttavia, poiché molti problemi dinamici presentano una complessità tale da rendere difficoltosa una soluzione analitica diretta, risulta spesso più efficace operare nel dominio delle frequenze attraverso l'utilizzo delle Funzioni di Risposta in Frequenza (*Frequency Response Functions*, FRF).

Le FRF vengono generalmente determinate mediante tecniche di elaborazione del segnale basate sulla *Fast Fourier Transform*. Esse sono rappresentate da matrici complesse $H(\Omega)$, dalle quali è possibile estrarre i principali parametri caratterizzanti, tra cui le frequenze naturali, gli smorzamenti e le forme modali, che ne caratterizzano il comportamento dinamico.

L'intero procedimento di identificazione sperimentale dei parametri dinamici può essere schematizzato mediante il diagramma di flusso in figura:

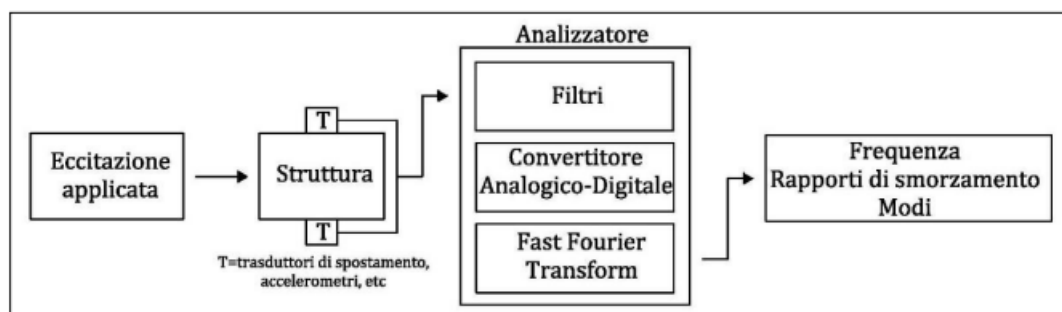


Figura 3.1: Diagramma di flusso dell'analisi

L'analisi modale sperimentale si fonda sull'ipotesi che le strutture analizzate abbiano un comportamento lineare. Ciò significa che esse operano nel campo delle piccole deformazioni e che la risposta generata risulta sempre proporzionale all'eccitazione applicata. In queste condizioni è valido il principio di sovrapposizione, secondo il quale la risposta prodotta da più ingressi simultanei è uguale alla somma delle risposte che si otterrebbero applicando ciascun ingresso separatamente.

La linearità del sistema comporta alcune importanti caratteristiche delle Funzioni di Risposta in Frequenza (FRF):

Sovrapponibilità: le FRF non dipendono dalla natura dell'eccitazione utilizzata. Pertanto, che il sistema venga sollecitato mediante un segnale sinusoidale, un segnale a banda larga o un impatto, la funzione di risposta rimane la stessa.

Omogeneità: le FRF non variano al cambiare dell'ampiezza dell'eccitazione. Aumentando o diminuendo il livello della forza applicata, il rapporto tra risposta ed eccitazione resta invariato.

Reciprocità: grazie alla simmetria propria dei sistemi lineari, descritta dal teorema di Maxwell, la FRF tra due gradi di libertà non cambia se si scambiano il punto di applicazione della forza e quello in cui viene misurata la risposta.

Oltre alla linearità, si assume che la struttura possieda altre proprietà fondamentali:

Causalità: la risposta vibratoria è generata esclusivamente dall'eccitazione applicata e non può precederla.

Stabilità: una volta eliminata la forza eccitante, le vibrazioni tendono progressivamente a estinguersi.

Osservabilità: i dati acquisiti devono contenere informazioni sufficienti per descrivere correttamente il comportamento dinamico della struttura. La mancanza di osservabilità può verificarsi, ad esempio, quando sono presenti componenti non adeguatamente collegati al resto del sistema oppure quando alcuni gradi di libertà non vengono monitorati dai sensori.

Invarianza nel tempo: durante l'esecuzione delle prove, le caratteristiche dinamiche della struttura devono rimanere costanti. Di conseguenza, i parametri che compaiono nelle equazioni del moto non devono subire variazioni nel tempo.

Uno degli aspetti più interessanti dell'analisi modale sperimentale è che il comportamento dinamico di una struttura può essere considerato una vera e propria “impronta digitale”. Esso dipende infatti unicamente dalle proprietà intrinseche del sistema (massa, rigidità, smorzamento e condizioni di vincolo) e non dalle modalità con cui viene applicato il carico. Finché tali caratteristiche rimangono inalterate, anche le frequenze naturali e le forme modali restano sostanzialmente costanti. Al contrario, la presenza di danni o modifiche strutturali determina variazioni di questi parametri, rendendo possibile l'individuazione di anomalie.

Nelle applicazioni pratiche occorre tuttavia considerare alcuni fattori che possono influenzare i risultati delle misure. Nel caso di strutture particolarmente leggere, ad esempio, la massa dei sensori può alterare le proprietà dinamiche del sistema, provocando generalmente una riduzione delle frequenze naturali. Inoltre, variazioni delle condizioni ambientali, come cambiamenti di temperatura durante prove di lunga durata, possono modificare le caratteristiche meccaniche della struttura e influenzarne la risposta dinamica.

3.3 *Tecniche di controllo non distruttivo*

Le tecniche di controllo non distruttivo basate sull'analisi delle vibrazioni consentono di valutare lo stato di integrità di un componente o di un'intera struttura senza comprometterne il funzionamento. Possiamo anche individuare la presenza di difetti o discontinuità geometriche, come fessure, cricche e porosità, preservando al contempo l'operatività del sistema esaminato.

L'impiego di queste tecniche non si limita all'identificazione di danni già presenti o in fase di sviluppo, ma anche il monitoraggio delle condizioni operative della struttura e la valutazione del suo comportamento ad esempio in presenza di eventi sismici o altre condizioni eccezionali di esercizio.

I metodi che si basano sull'analisi della risposta dinamica rappresentano tecniche globali di controllo non distruttivo, consentono di correlare le variazioni dei parametri modali alle modifiche dello stato di integrità strutturale.

Considerando una struttura danneggiata e confrontandola con la corrispondente struttura integra sottoposta allo stesso carico statico, si osserva generalmente un incremento delle deformazioni. Dal punto di vista dinamico, ciò equivale a una diminuzione della rigidità e a un aumento della cedevolezza della struttura. Ne consegue che la presenza di un difetto modifica le caratteristiche dinamiche del sistema e determina variazioni dei parametri modali, ovvero, le caratteristiche geometriche del difetto sono le uniche determinanti della variazione dei parametri modali.

Dall'equazione della pulsazione:

$$\omega_n = \sqrt[2]{EI / \mu A} \quad (3.1)$$

(ω_n è la pulsazione naturale; k è la rigidità; c la cedevolezza e m la massa) da cui è chiaro che, a parità di massa, un aumento della flessibilità della struttura a causa di un danneggiamento, comporta una riduzione delle sue frequenze naturali. Perciò anche altre caratteristiche modali subiscono una variazione in presenza di danni.

Si può osservare che, a parità di carico applicato, la differenza tra la deformazione statica di una struttura integra e quella di una struttura danneggiata è direttamente correlata all'aumento della sua cedevolezza. Analogamente, nel dominio dinamico, le variazioni della risposta vibratoria tra la configurazione sana e quella danneggiata dipendono dalle caratteristiche geometriche del danno.

A partire dalle FRF è infatti possibile determinare la risposta di un sistema a più gradi di libertà soggetto a un'eccitazione costituita da più forze armoniche aventi la stessa frequenza ma differenti ampiezze e sfasamenti.

Le proprietà delle FRF possono essere ricavate anche da prove sperimentali effettuate mediante eccitazioni non sinusoidali. In tali condizioni non esiste una corrispondenza immediata tra il segnale di ingresso e quello di uscita nel dominio del tempo; pertanto è necessario ricorrere a tecniche di elaborazione che consentano di rappresentare i segnali nel dominio delle frequenze. A questo scopo, uno degli strumenti più utilizzati è la serie di Fourier, che permette di scomporre un segnale complesso nella somma di componenti armoniche elementari e di analizzarne il contributo alle diverse frequenze. In questo modo è possibile stimare le FRF e identificare le caratteristiche dinamiche della struttura anche in presenza di eccitazioni di natura non periodica o a banda larga.

3.4 Prova sperimentale di analisi modale su trave in alluminio con danneggiamenti

3.4.1 Geometria e descrizione del provino

Il provino in esame è costituito da una travetta di alluminio di lunghezza 1m e sezione di forma cilindrica di raggio 4 cm cava di spessore 3 mm.

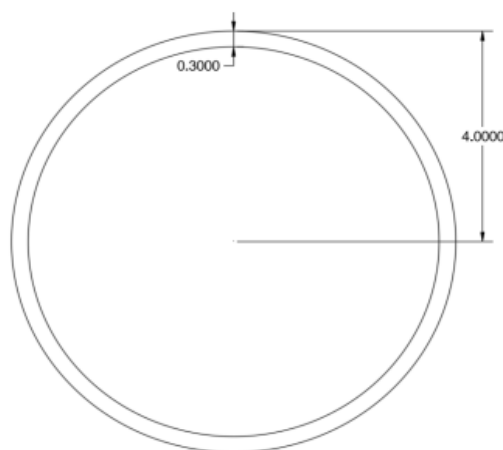


Figura 3.2: Sezione Trave Cilindrica

La trave è realizzata in alluminio 6060 TS con una densità pari a 2700 kg/m^3 e il modulo di Young è pari a 70.000 Mpa con le seguenti caratteristiche :

D, diametro sezione [mm]	80
S, spessore [mm]	3
L, lunghezza [mm]	1000
A, area [mm²]	725,71
p, densità [Ns²/mm⁴]	2,70E-09
E, modulo di Young [N/mm²]	69000
I, momento di inerzia [mm⁴]	538656,7

Tabella 3.1: Proprietà geometriche e meccaniche del provino

3.4.2 Strumentazione

Sono state eseguite prove dinamiche non distruttive in laboratorio (*Laboratorio Ufficiale Prove Materiali e Strutture della Facoltà di Ingegneria dell'Università Politecnica delle Marche*) su una trave in alluminio di sezione cava.

Il presente lavoro sperimentale è ampiamente descritto nel seguente lavoro di tesi: “Analisi dinamica di travi omogenee in presenza di danneggiamenti localizzati e rinforzi con BFRP” (*Studente: Michele Santoni, Relatore: Dr. Erica Magagnini*).

L'esecuzione dell'analisi sperimentale modale ha previsto l'utilizzo del software *BK CONNECT 2018* della *Brüel & Kjær*, è un programma che consente l'analisi in tempo reale dei dati estraendo i parametri modali delle funzioni di risposta in frequenza (FRF). Il tutto attraverso l'utilizzo del kit comprensivo di :

- Dispositivo di acquisizione *Type 3050-A-040*, connesso al PC
- Martello strumentato : *Impact Hammer 8202+2646* con sensibilità -1 mV/s , è un dispositivo di eccitazione non fisso che eccita la trave per il periodo dell'impatto.
- Accelerometro : *Acceleration 4508* con sensibilità $10,09 \text{ mV/s}$, dispositivo in grado di rivelare l'inerzia di una massa quando è sottoposta ad accelerazione.
- PC dotato dell'apposito software Pulse,
- Contenitore con AK22 (stucco plasmabile a forte aderenza) e relativa spatolina per il fissaggio del trasduttore sulla superficie del modello di trave da testare.



Figura 3.3: Dispositivo di acquisizione Type 3050-A040



Figura 3.4: Accelerometro 4508



Figura 3.5: Condizione di vincolo libero-libero

La trave sottoposta alle prove sperimentali viene disposta garantendo le condizioni di vincolo libero-libero, utilizzando due funi elastiche sorrette da una struttura rigida vincolata a terra, le due funi, sono disposte in maniera simmetrica ad una certa distanza dalle estremità. Si sceglie la condizione di vincolo libero-libero per non condizionare il modo di vibrare della trave, anche se tutta via le funi non riescono a garantire completamente questa condizione poiché da un punto di vista tecnico la trave andrebbe “fissata” per rimanere ferma durante la prova. Le funi però sono il metodo più facile e il più vicino alla condizione ricercata.

3.4.3 Esecuzione della prova

La finalità della prova è quella di valutare la variazione delle frequenze proprie e i relativi modi di vibrare della trave in assenza di danneggiamento e con diversi gradi di danneggiamento.

Dopo aver collegato il martello e l’accelerometro al modulo di acquisizione e connesso quest’ultimo al PC tramite un cavo Ethernet, si è configurato il software seguendo questi passaggi:

1. Model: si seleziona la funzione di analisi modale, e si modella la geometria 3D dell’elemento di trave e si creano 10 nodi disposti lungo la lunghezza della trave
2. Setup: si identificano le strumentazioni usate per la prova
3. Dof Setup: si individuano i nodi corrispondenti al punto in cui si battono i colpi con il martello, posto a 20 cm da una estremità, e ai tre punti corrispondenti alle tre posizioni degli accelerometri, posti a 40, 60 e 80 cm dalla stessa estremità.
4. Hammer Setup: si calibra il martello

Il martello impatta in un punto fisso vicino all' estremità (H) e per ogni misurazione l'accelerometro è stato spostato negli altri punti numerati :

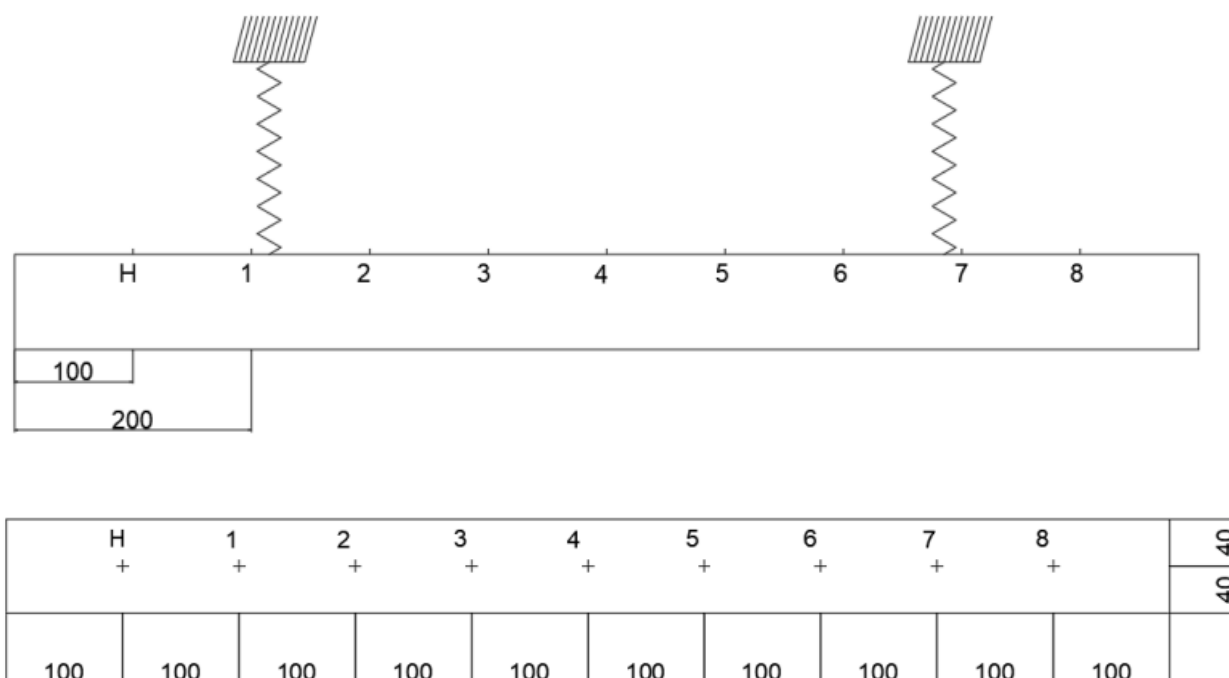


Figura 3.6: Schema di vincolo di partenza posizione del martello e degli accelerometri

Per la trave intatta sono stati eseguiti tre colpi di martello per ogni posizione dell'accelerometro. Indipendentemente dalla posizione della sollecitazione e degli accelerometri il modo di vibrare della trave non cambia. Infine si esportano e si elaborano le misure registrate dagli accelerometri su Microsoft Excel. L'elaborazione consente di ricavare le rappresentazioni grafiche mono-logaritmiche degli andamenti delle frequenze e i primi tre modi di vibrare. Si è nominata la trave intatta come D0.

Poi si è proceduto con il livello di danno DX, costituito da un singolo intaglio distante 20 cm dalla mezzeria, di altezza di sezione 4 cm e spessore 1 mm.

3.4.4 Risultati della prova sperimentale

Dalla rappresentazione grafica della frequenza per ogni posizione dell'accelerometro ricavo i valori medi delle frequenze per la trave in alluminio nella configurazione integra D0.

Livello di danno	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
D0	462.5	1328.37	2346.62

Tabella 3.2: Frequenze naturali per livello D0 derivanti dall' analisi sperimentale

Allo stesso modo, ricavo i valori medi nella configurazione danneggiata DX, notando come la presenza del danno comporta una diminuzione dei valori delle frequenze

Livello di danno	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
DX	433,75	1332,5	2295,87

Tabella 3.3: Frequenze naturali per livello DX derivanti dall' analisi sperimentale

4 - ANALISI NUMERICA DI TRAVI CON DANNEGGIAMENTO LOCALIZZATO

4.1 Modellazione numerica con il metodo agli elementi finiti

Negli ultimi quarant'anni, con l'avanzamento delle tecnologie elettroniche e lo sviluppo di computer sempre più potenti, il calcolo strutturale ha conosciuto una trasformazione significativa. Le operazioni che in passato venivano svolte manualmente sono state sostituite da procedure di calcolo automatiche gestite dai calcolatori. Uno degli strumenti fondamentali per questo progresso è il *Metodo degli Elementi Finiti* (FEM, *Finite Element Method*), una tecnica numerica che permette di risolvere in modo discreto sistemi complessi di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE). Il metodo si basa sulla trasformazione delle PDE in un sistema di equazioni algebriche, semplificandone la risoluzione.

Il passaggio dal modello fisico a quello numerico avviene in cinque fasi principali:

1. Modellazione: il sistema fisico viene astratto in un modello matematico, concentrandosi solo su alcuni aspetti di interesse. Il sistema di riferimento viene suddiviso in una serie di elementi finiti, ciascuno dei quali viene rappresentato da un modello matematico adeguato alla sua forma e geometria semplice. La scelta del tipo di elemento nel software FEM implica una selezione del modello matematico sottostante.
2. Discretizzazione: nella simulazione numerica, è necessario passare da un numero infinito di gradi di libertà, tipico di un continuum, a un numero finito, tipico di una griglia. Questo processo consente di creare un modello discreto, caratterizzato da un numero limitato di gradi di libertà.
3. Assemblaggio del sistema globale: si combinano le equazioni di ogni elemento per generare un sistema di equazioni che descrive il problema globale
4. Risoluzione del sistema di equazioni: si ottengono soluzioni approssimate del problema in base alla *mesh*
5. Post-processamento: si elaborano i risultati ottenuti in modo da ottenere ulteriori informazioni

Il FEM è la base dell'Analisi agli Elementi Finiti (FEA, *Finite Element Analysis*), una tecnica di simulazione che consente di suddividere i corpi fisici in un numero finito, spesso molto grande, di elementi finiti di forma e dimensioni definite. Ogni elemento viene considerato come un campo di integrazione numerica con caratteristiche omogenee.

La caratteristica principale del metodo FEM è la discretizzazione attraverso la creazione di una *mesh* (o griglia), composta da elementi di forma predefinita, come triangoli e quadrilateri in 2D, o esaedri e tetraedri in 3D. La soluzione su ciascun elemento è approssimata come una combinazione lineare di funzioni, chiamate *funzioni di forma* (*shape functions*). È importante notare che, essendo un'approssimazione, i valori calcolati nei punti potrebbero non corrispondere esattamente a quelli reali, ma minimizzano l'errore complessivo su tutta la soluzione.

4.2 Metodo agli elementi finiti con software ANSYS Mechanical APDL

Per questa attività di tirocinio e tesi è stato utilizzato il software *ANSYS Mechanical APDL*.

Questo software articola l'analisi in tre fasi principali:

1. Pre-processing (pre-elaborazione o definizione del problema): dove è costruito il modello agli elementi finiti
2. Processing (soluzione): fase di calcolo vero e proprio con la risoluzione del problema agli elementi finiti
3. Post-processing (post-elaborazione): fase di elaborazione e presentazione della soluzione.

4.2.1 Pre-Processing

In questa prima fase vengono inserite le informazioni necessarie per definire il problema:

- tipo di elemento
- parametri che caratterizzano il materiale
- coordinate dei *Keypoints* per creare la geometria
- mesh

Caratteristiche dei materiali e tipologia di elementi

Essendo il provino in analisi una trave di sezione cava si è scelto come tipo di di effettuare due tipologie di analisi, la prima con elementi trave, la seconda con elementi solidi tridimensionale. A questo proposito, sono stati adottati gli elementi BEAM188 e SOLID185. L'elemento BEAM188 segue la teoria della trave di Timoshenko ed è definita da due nodi, mentre l'elemento SOLID185 è usato per modelli 3D di strutture solide ed è definito da otto nodi.

D0	
DX	

Figura 4.1: Livelli di danneggiamento D0, DX

In particolare, il livello D0 sono state eseguite due analisi modellando la trave adottando prima l'elemento BEAM188, affinché si conduca l'analisi come elemento monodimensionale (dotato successivamente di sezione), sia l'elemento SOLID185 come elemento tridimensionale.

Mentre il modello danneggiato DX è stato definito solamente adottando l'elemento SOLID185 data l'impossibilità di modellare il danneggiamento da intaglio con modellazione monodimensionale. Per scegliere l'*Element Type* si usa il seguente comando: *"Preprocessor/Element Type/Add-Edit-Delete/Add"* e si seleziona dalla libreria la tipologia scelta. In seguito si definiscono i parametri del materiale. Si assume che il materiale abbia un comportamento elastico-lineare e isotropo tramite la sequenza: *"Material Props/Material Models/Structural/Linear/Elastic/Isotropic"*. Quindi si inseriscono i parametri tipici dell'alluminio:

- EX = $7e10$, cioè il modulo di Young E
- PRXY = 0.33, cioè il modulo di Poisson
- Density = 2700, cioè la densità (non è stato possibile ottenere la densità della trave direttamente dal provino tramite il rapporto della massa sul volume, perciò è stato usato il valore tipico dell'alluminio)

Modellazione della geometria

Successivamente, si modellano le geometrie dei travetti. Si distinguono i vari metodi di modellazione in base all' *Element Type*: per BEAM188 si genera una linea, a cui poi si associa una sezione, per SOLID185 si procede per volumi (si genera il volume pieno esterno e il volume pieno interno, poi si sottrae il volume interno da quello esterno in modo da ottenere la trave cava e gli intagli). Si riportano le coordinate dei punti per generare i modelli.

Trave non danneggiata – modellazione monodimensionale (D0 BEAM188)

Innanzitutto, per creare la sezione della trave in esame si procede con: “*Preprocessor/Sections/Beam/Common Sections*”, nella finestra del Beam Tool si seleziona la sezione cava come Sub-Type e si inseriscono i valori dei raggi $R_i=0.037$ e $R_o=0.04$, come riportato nella seguente figura.

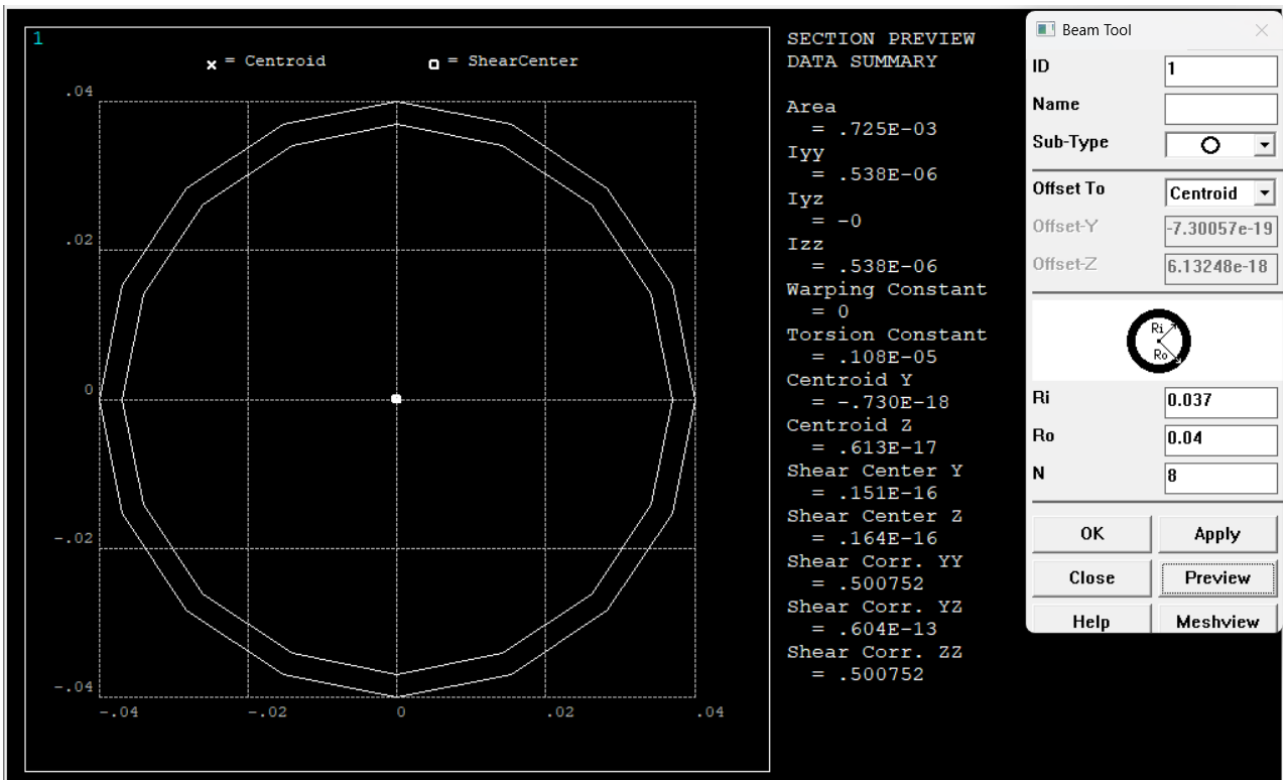


Figura 4.2: Vista della sezione cilindrica

Si avanza creando i due *Keypoints* corrispondenti alle estremità della trave tramite le seguenti coordinate richieste dal comando: “*Preproessor/Modelling/Create/Keypoints/In Active CS*”.

<i>Keipoint</i>	X	Y	Z
1	0	0	0
1	1	0	0

Tabella 4.1: Coordinate Keypoints

Si genera la linea che unisce i le due estremità tramite la sequenza: “*Modelling/Create/Lines/Straight Line*” e si ottiene la linea nella seguente figura.

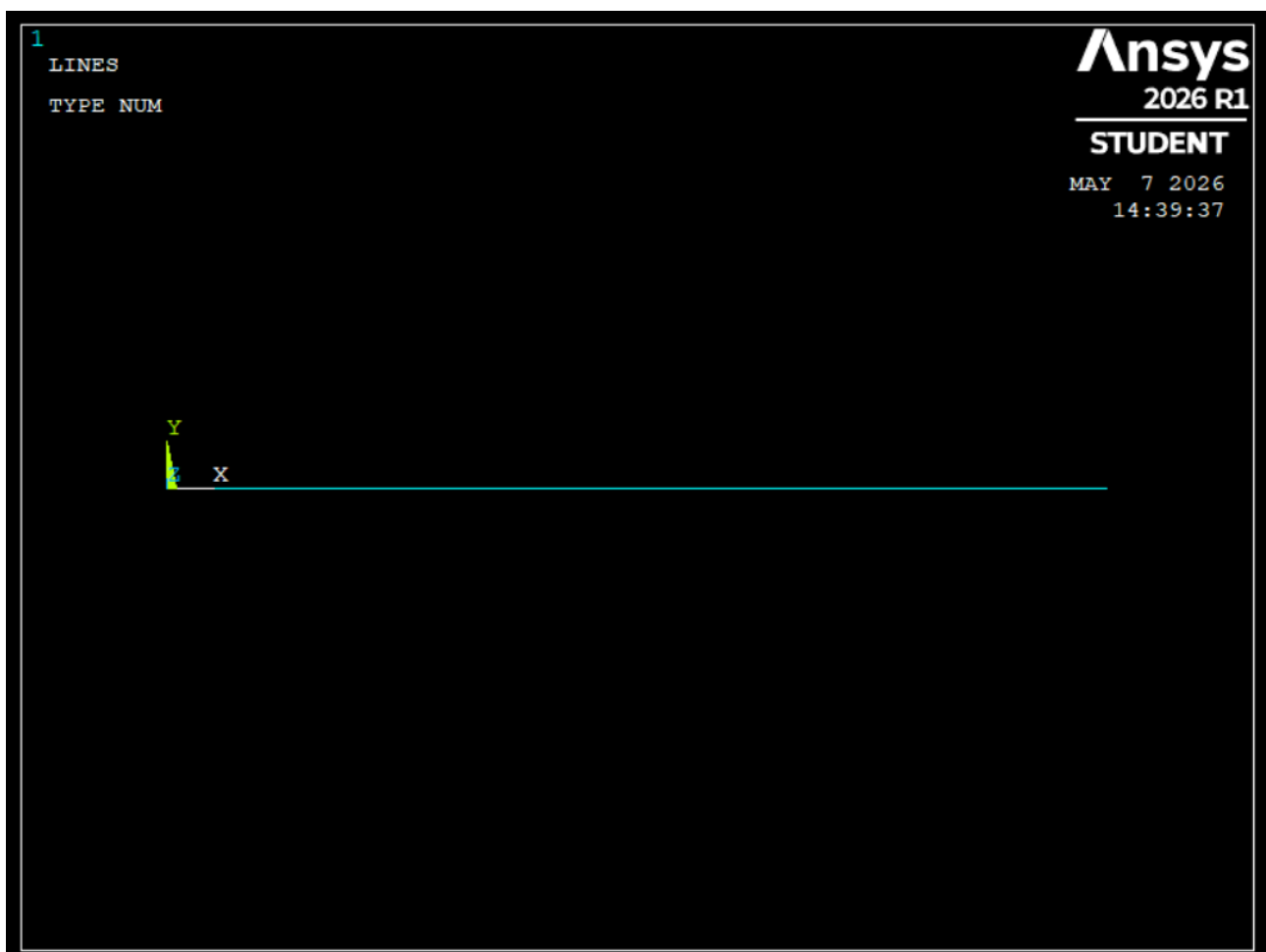


Figura 4.3: Linea D0 Beam188

Trave non danneggiata – modellazione solida tridimensionale (D0 SOLID185)

Essendo l'elemento tridimensionale, si procede per volumi tramite il comando: “*Preprocessing/Modelling/Create/Volumes/Cylinder/Hollow Cylinder*” e si inseriscono i dati della nostra trave :

WPx	0
WPy	0
Rad-1	0.037
Rad-2	0.04
Depth	1

Tabella 4.2: Coordinate per il volume della trave non danneggiata

In questo modo si genera direttamente una trave cava di lunghezza 1m, raggio 4cm e spessore 3mm.

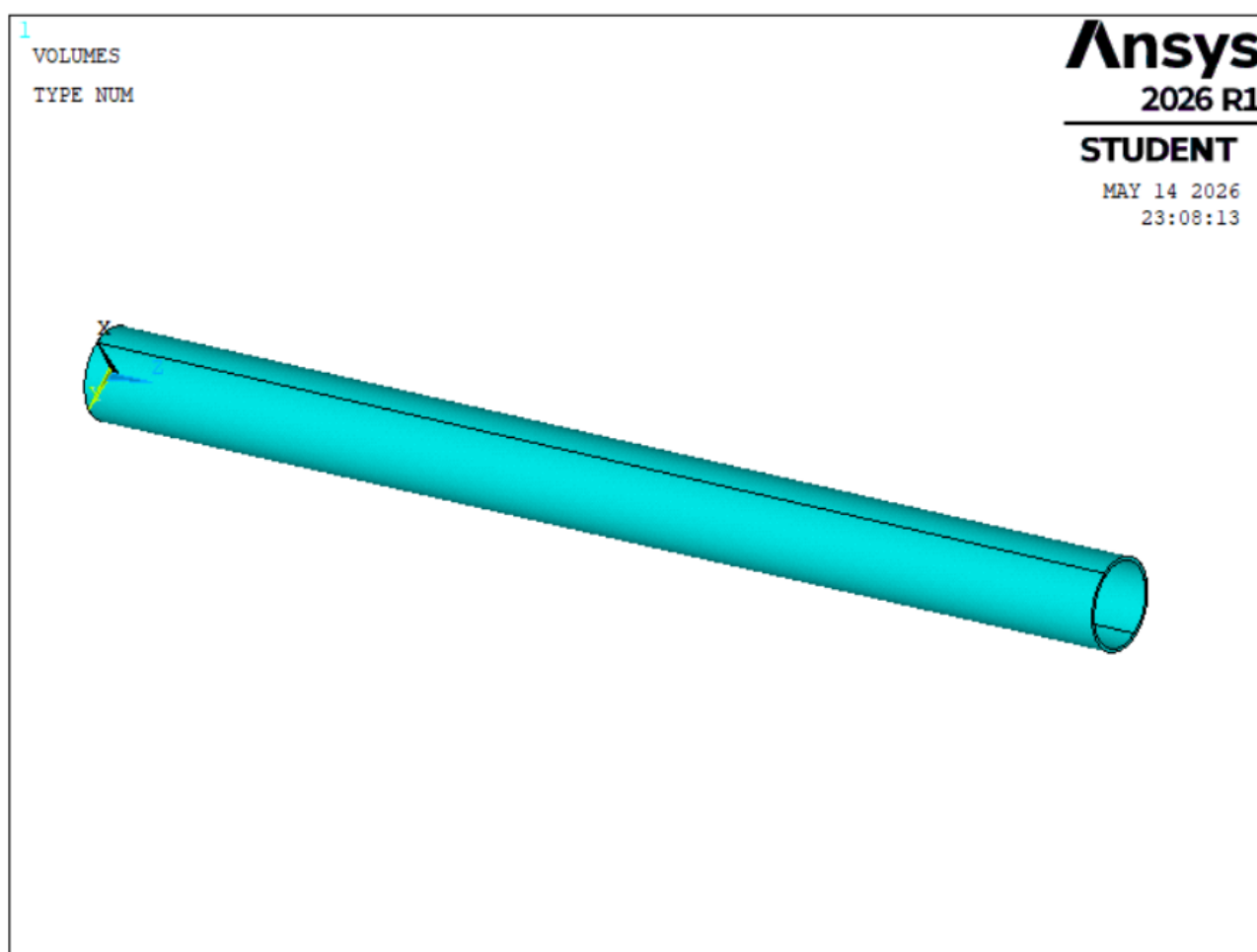


Figura 4.4: Volume D0 Solidi185

Trave con danneggiamento DX (DX SOLID185)

La procedura di modellamento è analoga anche per le travi danneggiate. Per i livelli di danneggiamento DX, D1, D2 e D3 è necessario però aggiungere gli intagli corrispondenti a quei determinati livelli (come descritti nella figura “*Livelli di danneggiamento*”). Per il livello DX, dopo aver creato il volume “di base” della trave vado a creare e posizionare un intaglio posto ad una distanza pari a 20 dalla sezione di mezzeria, di altezza di sezione 4 cm e spessore 1 mm. Utilizzo il comando: “*Preprocessing/Modelling/Create/Volumes/Cylinder/Partial Cylinder*” e inserisco i seguenti dati:

WPx	0
WPy	0
Rad-1	0.04
Theta-1	-90
Rad-2	0
Theta-2	90
Depth	0.001

Tabella 4.3: Coordinate per volume da sottrarre per creare intagli

In seguito alla creazione di questo volume, creato all’ estremità della trave, lo sposto nella posizione dove si desidera creare l’intaglio utilizzando il comando: “*Preprocessing/Modelling/Move/Move Volume*” e inserisco i seguenti dati:

Dx	0
Dy	0
Dz	0.30

Tabella 4.4: Tabella per comando dello spostamento del volume

A questo punto rimane da sottrarre il volume attraverso il comando : “*Preprocessing/Modelling/Operate/Booleans/Subtract*” e selezionare prima il volume di base e poi il volume da sottrarre, così si crea l’intaglio per il livello di danneggiamento DX posto a 20 cm dalla sezione di mezzeria.

Si ottiene dunque :

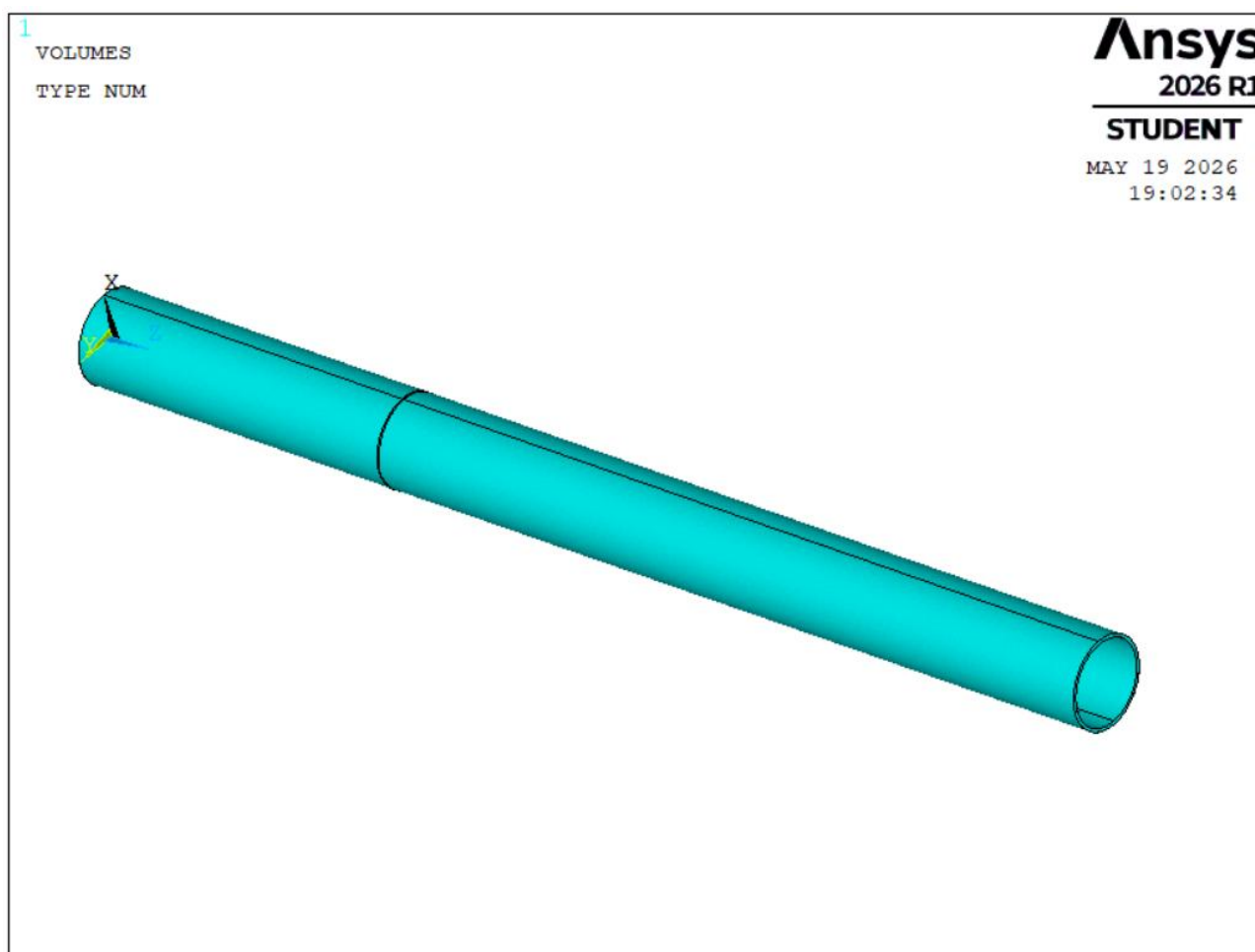


Figura 4.5: Volume DX SOLIDI185

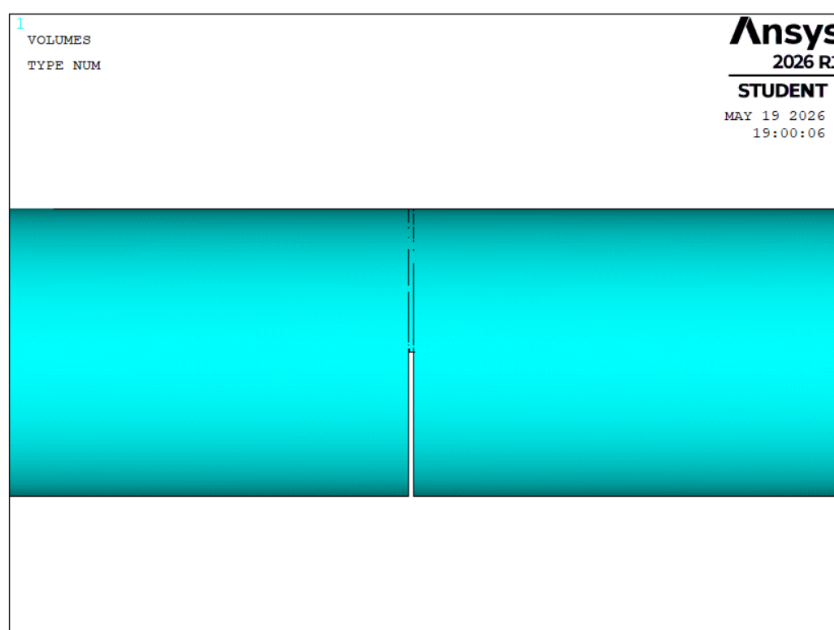


Figura 4.6: Dettaglio dell' intaglio DX

Definizione della mesh

Dopo aver modellato la geometria dei provini, si procede alla fase di discretizzazione del *continuum*. La definizione della mesh è cruciale poiché è su di essa che il software implementa e risolve un numero finito di equazioni. È fondamentale trovare un equilibrio ottimale nella definizione della *mesh*, raffittendola nelle aree più critiche, ovvero negli intagli, e riducendola altrove. Questo approccio garantisce accuratezza nella soluzione senza compromettere eccessivamente i tempi di calcolo. La modellazione della trave in più volumi permette di creare queste zone con diversa densità di *mesh*. Se i modelli fossero stati creati come un unico volume, non sarebbe stato possibile raffittire la mesh in zone specifiche.

Il processo di *meshatura* inizia con la suddivisione delle linee che delimitano i volumi, prestando attenzione a suddividere in modo simmetrico i lati opposti per mantenere la coerenza della discretizzazione. Il comando utilizzato per impostare la suddivisione delle linee e creare la mesh è “*Preprocessor/Meshing/MeshTool*”. La mesh deve essere regolare e bisogna verificare che non sia di forma troppo allungata poiché si creano problemi di calcolo al software. Nel modello BEAM188 si suddividerà la linea in un certo numero di segmenti longitudinali, ma non sarà possibile suddividere i lati della sezione. Al contrario, nel modello SOLID185 si suddivideranno sia le linee longitudinali che quelle di sezione. Per volumi pieni, di solito si utilizza la mesh di tipo “*Hex-Mapped*”. In questo caso di trave cava si utilizzerà la mesh di tipo “Hex-Sweep”, che si adatta meglio a volumi cavi.

Trave non danneggiata – modellazione monodimensionale (D0 BEAM188)

Dal Mesh Tool si seleziona la linea e si imposta un NDIV (*Number of Element Division*). Sono state effettuate suddivisione più o meno fitte (NDIV = 10, 20, 50, 100, 250, 1000) in modo da valutare l'influenza della mesh sui risultati ottenuti. Si applica infine la *mesh*, tramite il tasto “Mesh” e selezionando la linea.

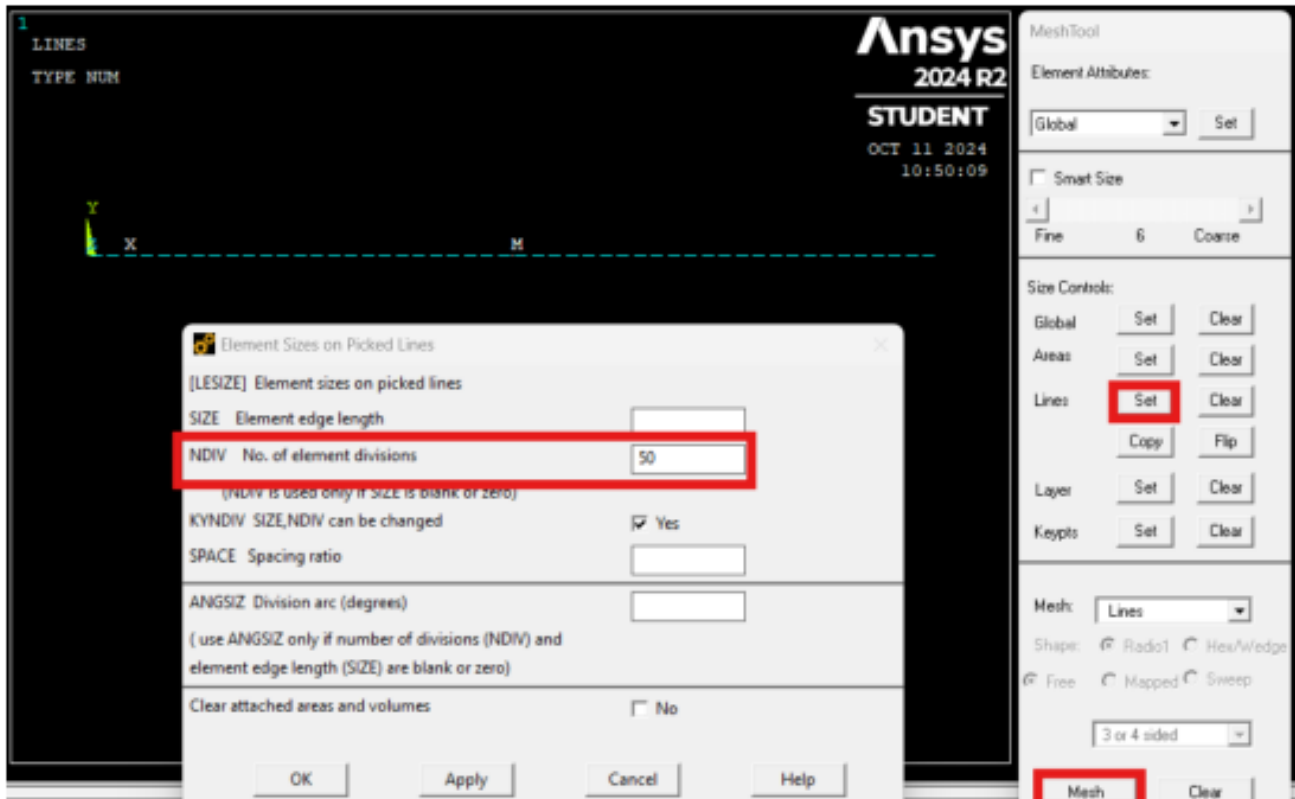


Figura 4.7: Funzionamento del comando "MeshTool"

Trave non danneggiata – modellazione solida tridimensionale (D0 SOLID185)

Tramite il Mesh Tool si imposta le seguenti suddivisioni:

- Si selezionano tutte le linee longitudinali e si imposta un NDIV=200
- Si selezionano i lati interni ed esterni della sezione si imposta SIZE=0.0025

Questi valori sono in funzione delle dimensioni e della geometria della trave poiché il programma ha un limite di elementi totali quindi nel caso si superi il limite del programma occorre dover cambiare NDIV e SIZE sapendo che un NDIV più basso e un SIZE più alto contribuiscono alla diminuzione degli elementi totali.

Si crea la mesh “*Hex-Sweep*” e si ottiene la seguente mesh regolare e omogenea. Sono stati generati 28 000 elementi.

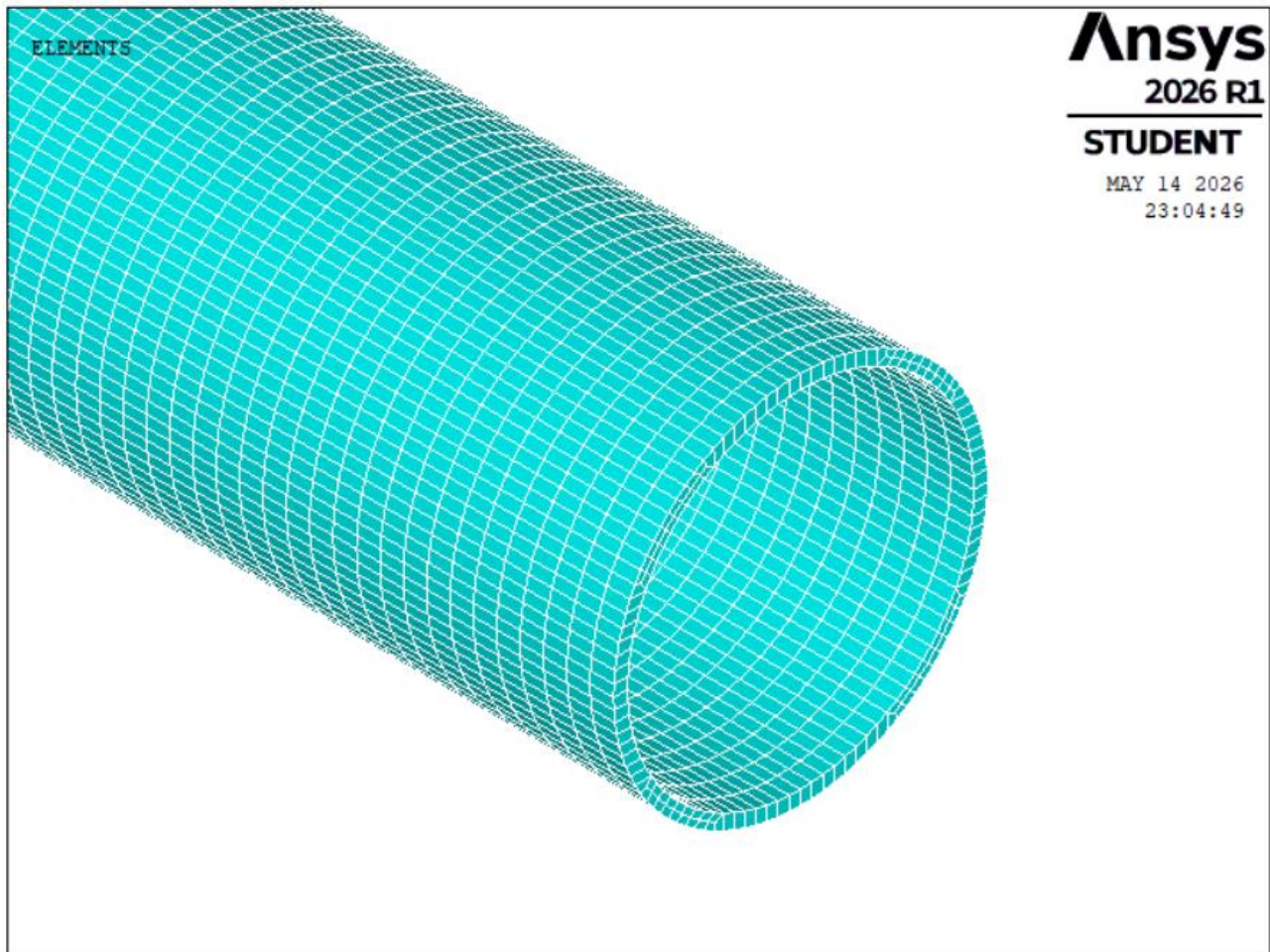


Figura 4.8: Mesh D0 SOLID185

Trave con danneggiamento DX (DX SOLID185)

In presenza degli intagli è necessario raffittire la *mesh*, impostiamo per le linee longitudinali NVDI=50, mentre per i lati interni ed esterni imposto SIZE=0.0025

A causa della geometria della trave e della presenza degli intagli la *mesh* è composta da triangoli ma non si tratta di un errore ma il programma ANSYS, visto che senza intagli la geometria è “semplice” mentre con gli intagli diventa complessa, passa automaticamente a mesh tetraedrica. Sono stati generati 96 602 elementi.

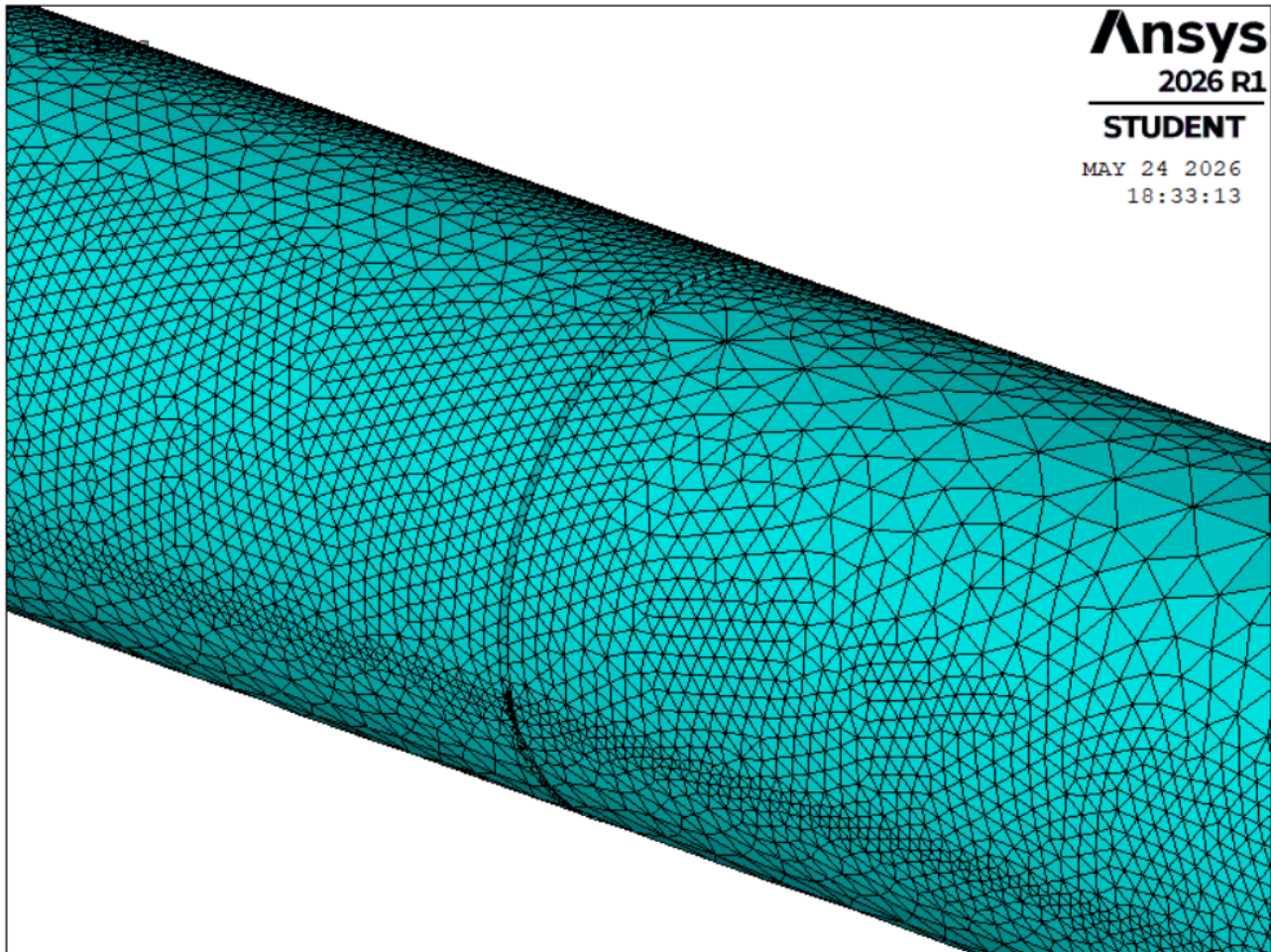


Figura 4.9: Mesh DX SOLID185

Prima di avviare l'analisi, è essenziale completare un ultimo passaggio cruciale: utilizzando il comando “*Preprocessor/NumberingCtrls/Mergeitems*”, si uniscono di tutti gli elementi che costituiscono l'oggetto in esame. Questo avviene attraverso la fusione dei nodi separati ma coincidenti e dei punti chiave (*keypoints*). In sostanza, si unisce in un'unica entità ciò che era stato precedentemente suddiviso in piccoli elementi durante la fase di meshing. Si applica prima ai *Keypoints* con un *Range of Coincidence* minore dello spessore dell'intaglio (0.001), per esempio 0.0004, poi si applica anche ai *Nodes* con lo stesso *Range of Coincidence*.

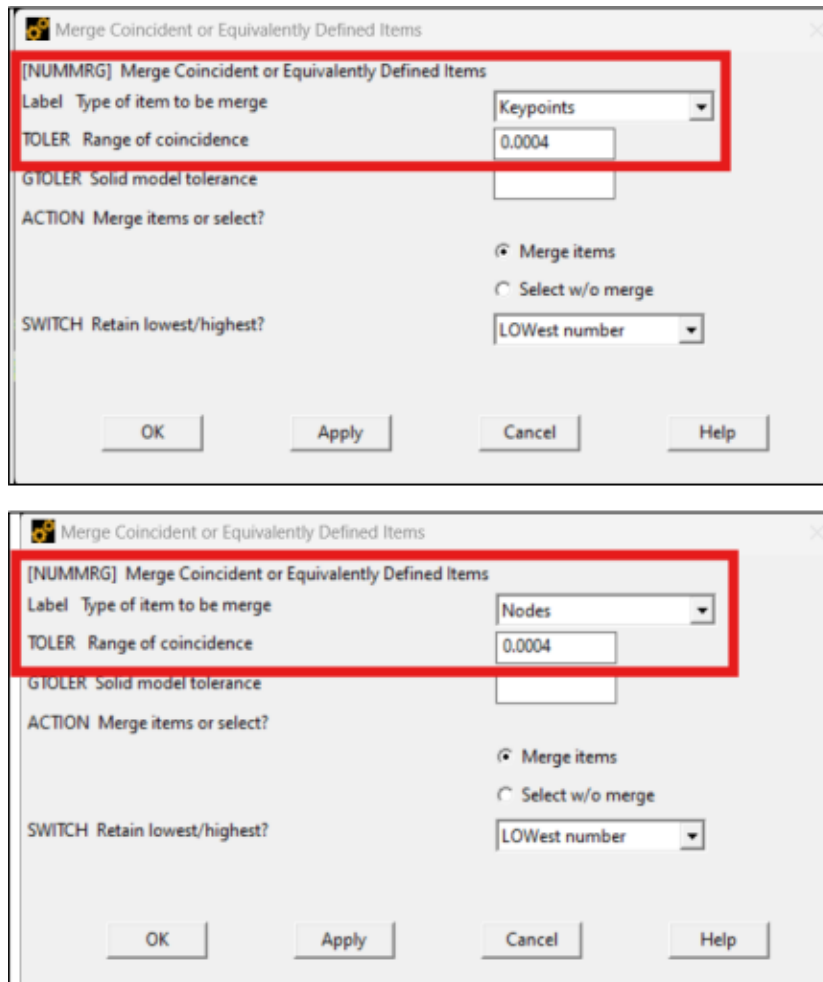


Figura 4.10 Merge Items

4.2.2 Analisi modale

Nella seconda fase si sceglie il tipo di analisi da eseguire, che può essere statica, dinamica, termica, ecc. In questo caso, viene selezionata l'analisi dinamica (*modal*) e si procede con la risoluzione del problema tramite il metodo degli Elementi Finiti. L'analisi modale fornisce i modi di vibrazione della struttura, indicando per ciascuno il periodo di vibrazione, ovvero il tempo necessario affinché la struttura completi un'oscillazione completa. Il tempo di calcolo è influenzato dal numero di nodi presenti, motivo per cui è utile densificare la mesh nelle zone in cui si desidera analizzare le frequenze. Il comando per selezionare il tipo di analisi è: “*Solution/Analysis Type/New Analysis/Modal*”, “*Solution/Analysis Type/Analysis Options/*” e si inserisce come “*No. Of modes to extract*” e “*No. Of modes to expand*” un valore abbastanza elevata per ricavare i primi tre modi di vibrare, per esempio 50.

A questo punto è possibile lanciare la risoluzione tramite: “*Solution/Solve/Current LS*”

Il post-processing elabora e visualizza la soluzione, sia per le grandezze fondamentali direttamente rappresentate in forma discreta nel metodo FEM (ad esempio, gli spostamenti in ambito strutturale), sia per le grandezze derivate da queste, rilevanti per la fisica del problema analizzato (come le tensioni in problemi strutturali, utilizzando un approccio compatibile). Tramite il comando “*GeneralPostprocessor/ReadResults/By Pick*” si possono leggere i risultati delle frequenze calcolate e confrontarli con le *Deformed Shape*, cioè le forme di deformazione corrispondenti ai modi di vibrazione di una trave.

4.2.3 Analisi dei risultati

L'analisi di modellazione ha prodotto i seguenti risultati, in termini di frequenza e deformazioni, corrispondenti ai modi di vibrare di una trave.

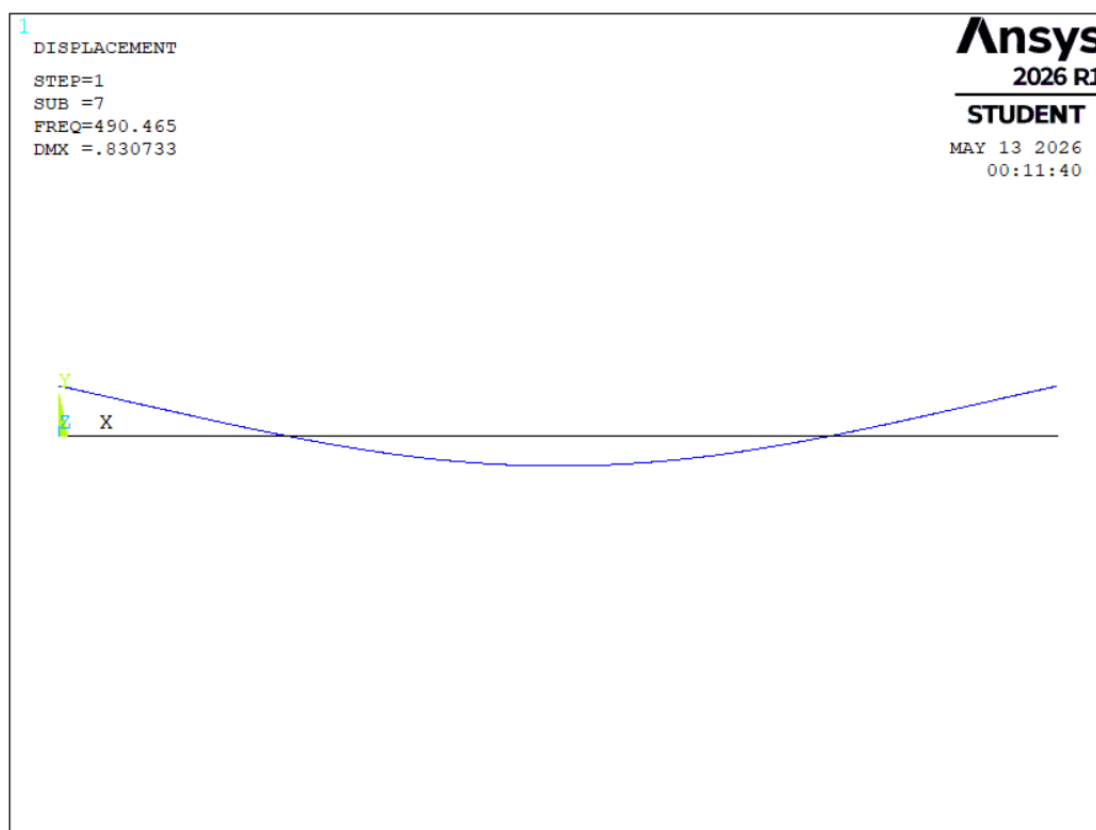
Trave non danneggiata – modellazione monodimensionale (D0 BEAM188)

N. di elementi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
10	496,99	1317,47	2469,43
20	492,12	1273,11	2310,25
50	490,73	1260,63	2265,94
100	490,53	1258,85	2259,65
250	490,48	1258,35	2257,87
1000	490,47	1258,26	2257,56

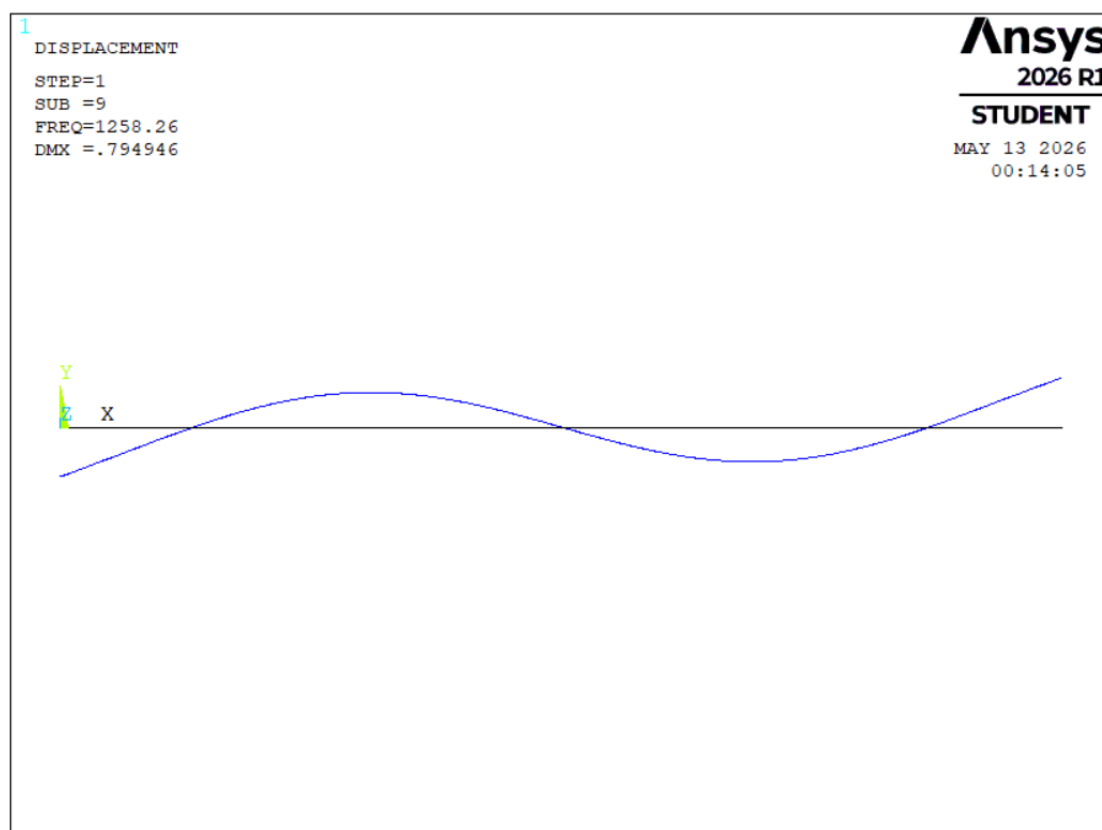
Tabella 4.5: Tabella risultati in termini di frequenze

Si riportano le deformate relative all'analisi caratterizzata da una suddivisione della linea in 1 000 elementi.

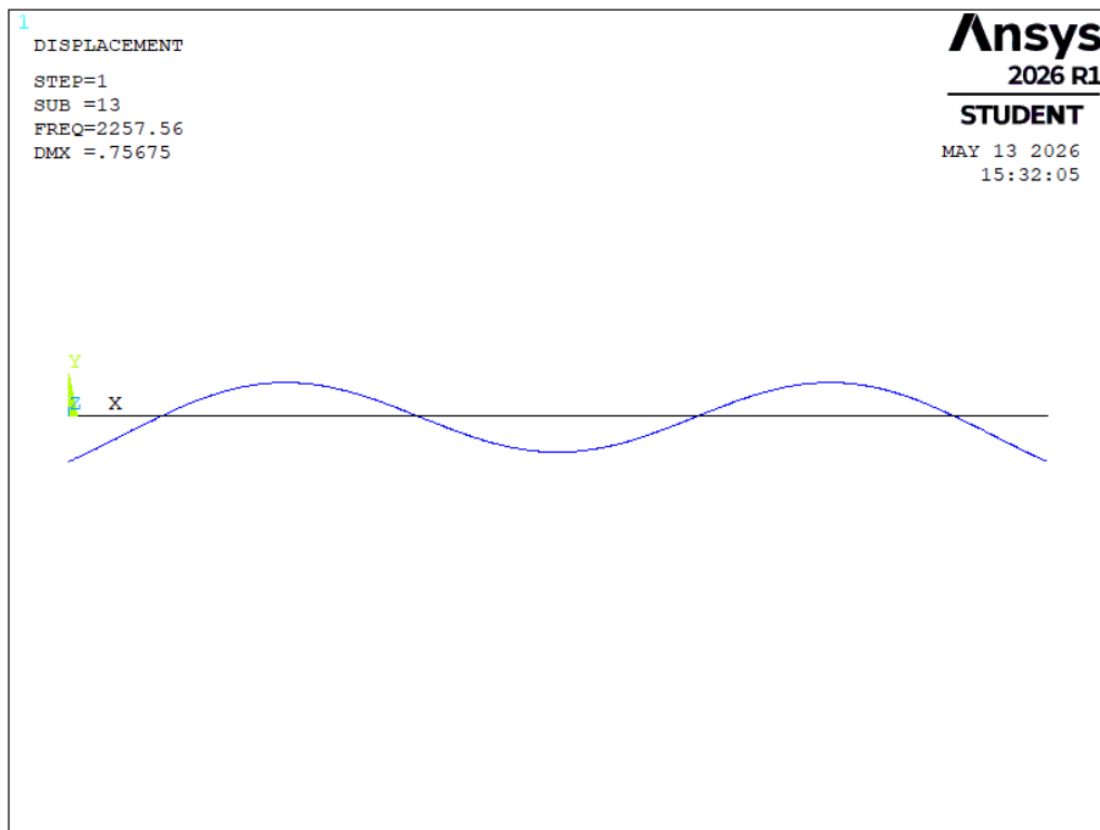
❖ PRIMO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ SECONDO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ TERZO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE

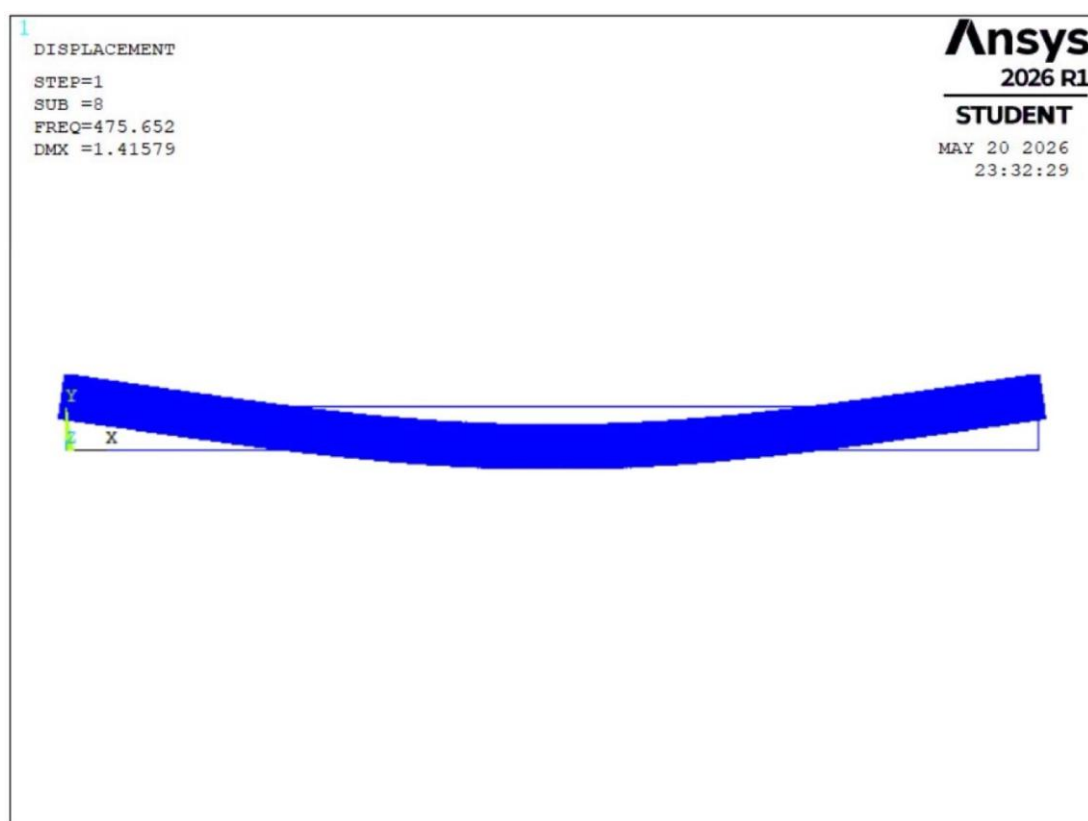


Trave non danneggiata – modellazione solida tridimensionale (D0 SOLID185)

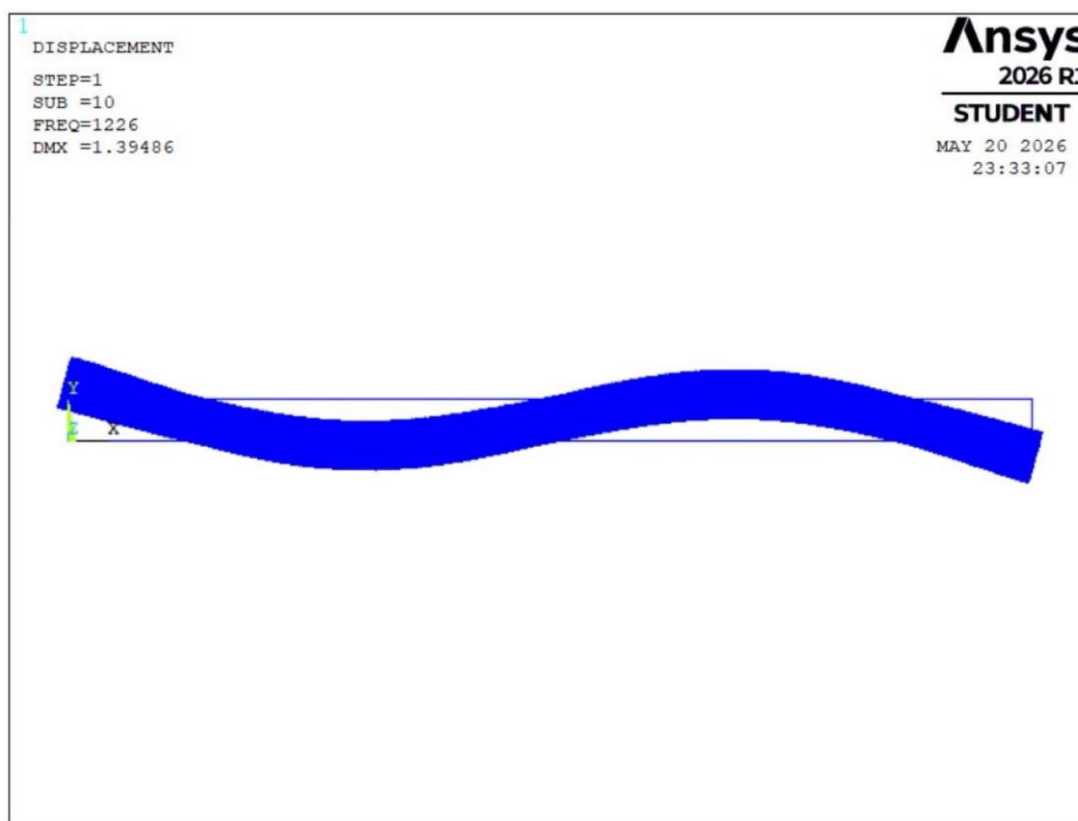
N. di elementi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
28000	475,65	1226	2210,06

Tabella 4.6: Tabella risultati in termini di frequenze

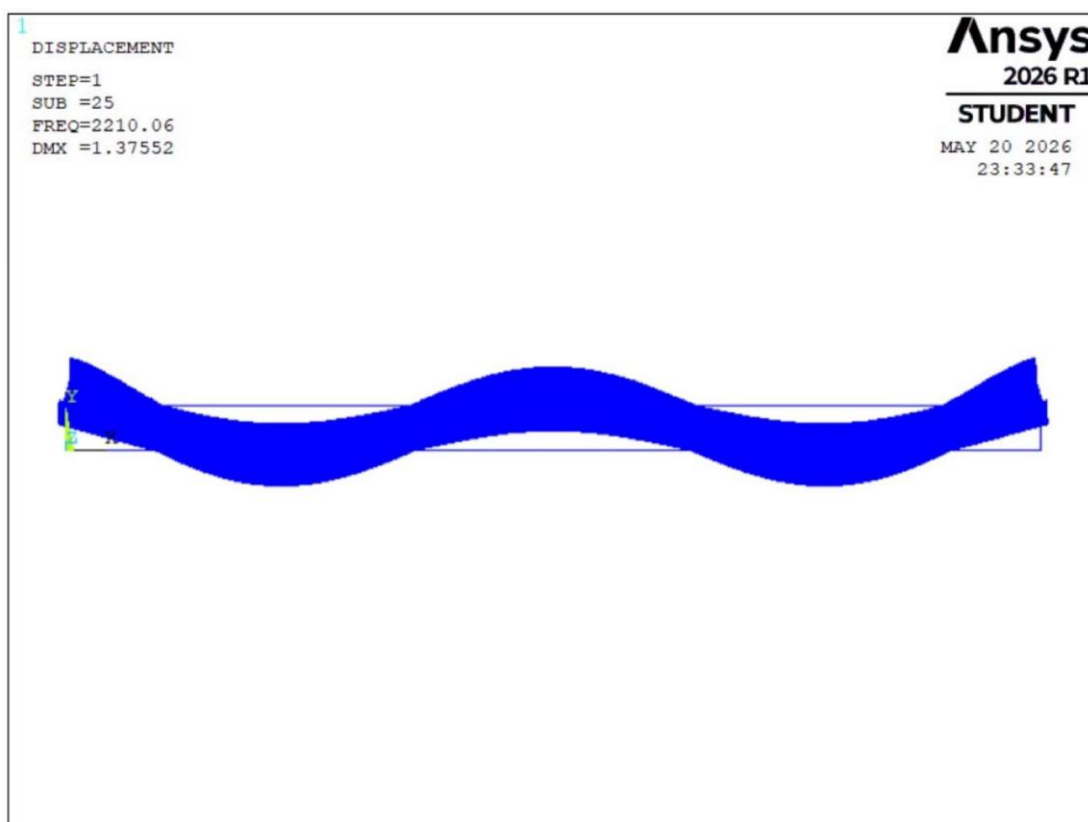
❖ PRIMO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ SECONDO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ TERZO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



Confronto dei risultati

Confrontando i risultati, si calcola lo scarto dei risultati dell'analisi numerica rispetto a quelli ottenuti dall'analisi sperimentale eseguita in laboratorio, descritta precedentemente.

D0 BEAM188						
	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]	Scarto f1 [%]	Scarto f2 [%]	Scarto f3 [%]
Analisi Sperimentale	462,5	1328,37	2346,62	SCARTO = (fsp - fnum)/fsp x 100		
Analisi Modellazione	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]			
10	496,99	1317,47	2469,43	-7,46	0,82	-5,23
20	492,12	1273,11	2310,25	-6,40	4,16	1,55
50	490,73	1260,63	2265,94	-6,10	5,10	3,44
100	490,53	1258,85	2259,65	-6,06	5,23	3,71
250	490,48	1258,35	2257,87	-6,05	5,27	3,78
1000	490,47	1258,26	2257,56	-6,05	5,28	3,80

Tabella 4.7: Calcolo degli scarti numerici rispetto a quelli sperimentali per la trave D0 BEAM188

D0 SOLIDI185						
	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]	Scarto f1 [%]	Scarto f2 [%]	Scarto f3 [%]
Analisi Sperimentale	462,5	1328,37	2346,62	SCARTO = (fsp - fnum)/fsp x 100		
Analisi Modellazione	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]			
28000	475,65	1226	2210,06	-2,84	7,71	5,82

Tabella 4.8: Calcolo degli scarti numerici rispetto a quelli sperimentali per la trave D0 SOLIDI185

DX SOLIDI185						
	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]	Scarto f1 [%]	Scarto f2 [%]	Scarto f3 [%]
Analisi Sperimentale	433,75	1332,5	2295,87	SCARTO = (fsp - fnum)/fsp x 100		
Analisi Modellazione	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]			
96602	354,45	936,83	2006,69	18,28	29,69	12,60

Tabella 4.9: Calcolo degli scarti numerici rispetto a quelli sperimentali per la trave DX SOLIDI185

Riepilogo i risultati tramite un istogramma, per gli stati di danno, contenente sia il dato sperimentale che quello numerico.

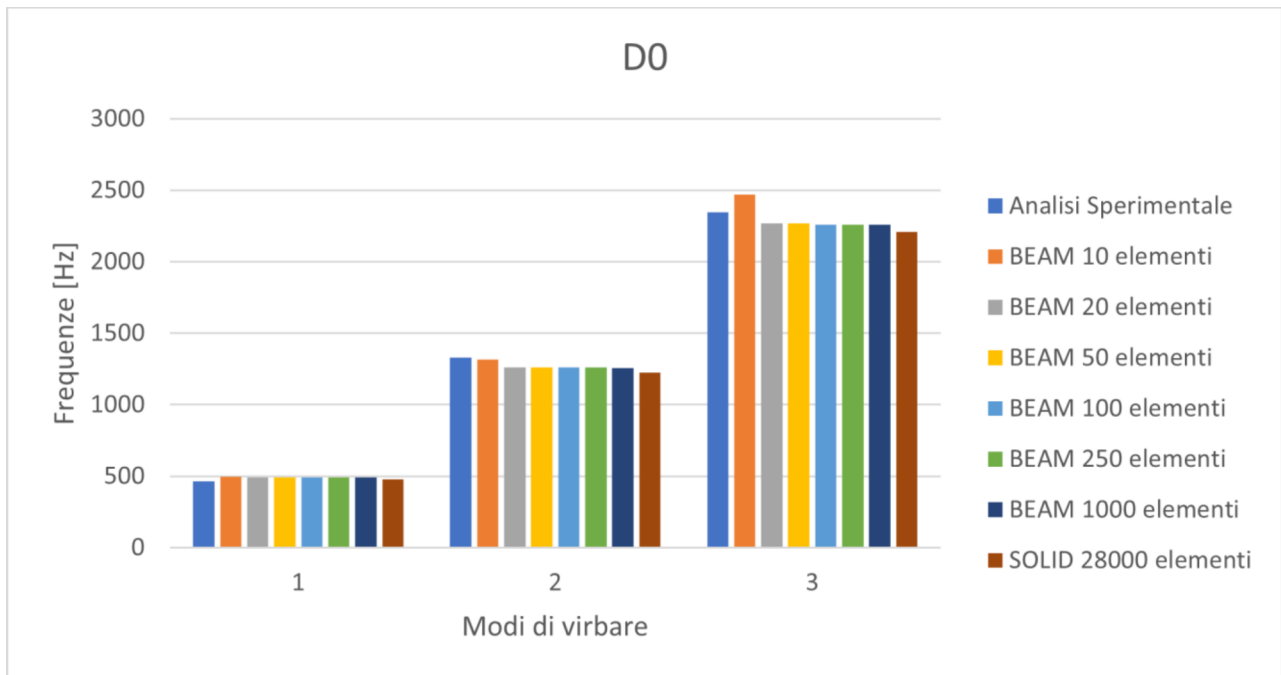


Figura 4.11: Istogramma delle frequenze relative ai primi tre modi di vibrare la trave per il livello D0

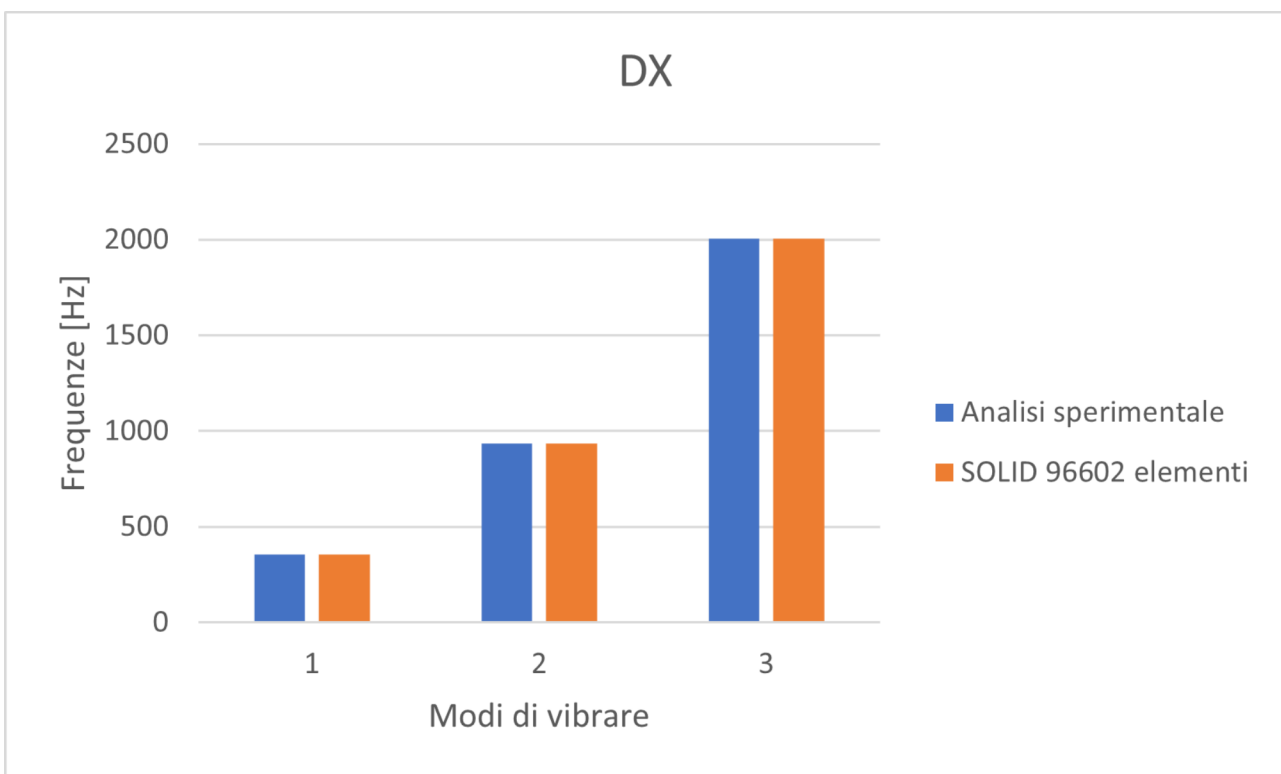


Figura 4.12: Istogramma delle frequenze relative ai primi tre modi di vibrare la trave per il l

Teoria di Eulero-Bernulli

Per avere una visione più completa si può considerare nel confronto anche la frequenza secondo la teoria di Eulero-Bernoulli. Questa teoria è utilizzata per calcolare le frequenze naturali teoriche dei primi tre modi di vibrare delle due travi da esaminare. Si utilizza la seguente relazione applicabile per qualsiasi condizione al contorno:

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(\lambda L)_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.1)$$

Riporto le caratteristiche del provino:

D, diametro sezione [mm]	80
S, spessore [mm]	3
L, lunghezza [mm]	1000
A, area [mm²]	725,71
p, densità [Ns²/mm⁴]	2,70E-09
E, modulo di Young [N/mm²]	69000
I, momento di inerzia [mm⁴]	538656,7

Tabella 4.10: Caratteristiche del provino

Ricordando le radici delle equazioni per le condizioni di vincolo libero-libero relativi ai primi tre modi di vibrare:

(λL)1	(λL)2	(λL)3
4,73	7,853	10,996

Tabella 4.11: Radici per le condizioni di vincolo libero-libero

Dalla formula si ricavano le frequenze naturali per travetto intatto, cioè D0:

Frequenze naturali teoriche [Hz]	
f_r (Modo 1)	490,42
f_r (Modo 2)	1351,44
f_r (Modo 3)	2650,34

Tabella 4.12: Frequenze teoriche relative ai primi tre modi di vibrare

Livello di danno	Tipo di analisi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
D0	Teorica	490,42	1351,44	2650,34
	Sperimentale	462,5	1328,37	2346,62
	Modellazione : BEAM188	490,47	1258,26	2257,56
	Modellazione : SOLID185	475,65	1226	2210,06
DX	Sperimentale	433,75	1332,5	2295,87
	Modellazione : SOLID185	354,45	936,83	2006,69

Tabella 4.13: Tabella valori di analisi per i livelli di danno D0 e DX

Attraverso questa tabella possiamo osservare chiaramente come tutti i metodi di analisi dimostrano che all'aumentare del danno, passando da D0 a DX, le frequenze di vibrazione diminuiscono a causa della perdita di rigidità della struttura.

Notiamo come per D0, le frequenze teoriche risultano sistematicamente superiori rispetto ai valori ottenuti sia sperimentalmente sia numericamente. Ciò suggerisce che il modello teorico faccia riferimento a una struttura perfettamente integra, priva di difetti o danneggiamenti, mentre nella pratica le imperfezioni e i danni strutturali incidono in modo rilevante sul comportamento dinamico.

In conclusione, i risultati ricavati mediante il software FEM mostrano una buona coerenza e risultano molto vicini a quelli ottenuti sperimentalmente, evidenziando un'elevata correlazione tra i due approcci di analisi.

4.3 Studio dell'effetto del danneggiamento su parametri modali

Dal confronto dei risultati ottenuti attraverso i metodi di analisi numerica e sperimentale abbiamo accertato che il metodo di analisi numerica è affidabile in quanto i risultati sono coerenti e vicini a quelli dell'analisi sperimentale.

Grazie a questo, possiamo continuare la nostra analisi prettamente numerica su ulteriori livelli di danno.

4.3.1 Descrizione dei livelli di danno

Si procede con la creazione di un file del software di analisi numerica per ognuno dei seguenti livelli di danno:

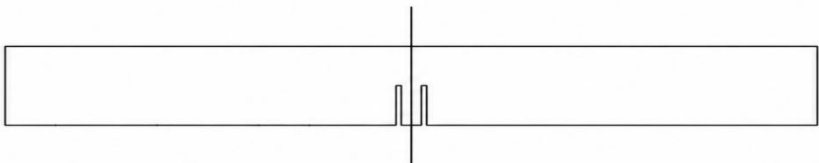
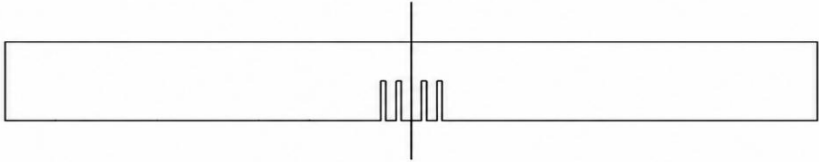
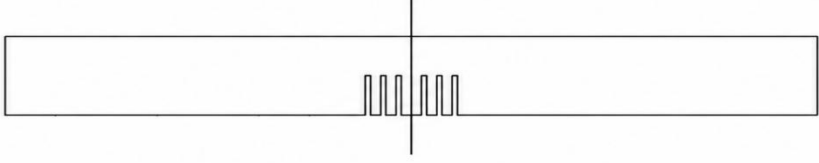
D1	
D2	
D3	

Figura 4.13: Livelli di danneggiamento D1, D2 e D3

Nel livello D1 abbiamo due intagli simmetrici, distanti ognuno 2 cm dalla mezzeria e di spessore 1 mm, nel livello D2 aggiungiamo altri due intagli simmetrici distanti 2 cm dagli intagli del livello D1 e infine nel livello D3 aggiungiamo ulteriormente altri due intagli simmetrici distanti 2 cm dagli intagli del livello precedente.

4.3.2 Pre-Processing

In questa prima fase vengono inserite le informazioni necessarie per definire il problema:

- tipo di elemento
- parametri che caratterizzano il materiale
- coordinate dei *Keypoints* per creare la geometria
- mesh

Caratteristiche dei materiali e tipologia di elementi

Per i livelli D1, D2 e D3 come per il livello DX, sono stati definiti solamente adottando l'elemento SOLID185 data l'impossibilità di modellare il danneggiamento da intaglio con modellazione monodimensionale. Per scegliere l'*Element Type* si usa il seguente comando: "*Preprocessor/Element Type/Add-Edit-Delete/Add*" e si seleziona dalla libreria la tipologia scelta. In seguito si definiscono i parametri del materiale. Si assume che il materiale abbia un comportamento elastico-lineare e isotropo tramite la sequenza: "*Material Props/Material Models/Structural/Linear/Elastic/Isotropic*". Quindi si inseriscono i parametri tipici dell'alluminio:

- EX = $7e10$, cioè il modulo di Young E
- PRXY = 0.33, cioè il modulo di Poisson
- Density = 2700, cioè la densità (non è stato possibile ottenere la densità della trave direttamente dal provino tramite il rapporto della massa sul volume, perciò è stato usato il valore tipico dell'alluminio)

Modellazione della geometria

Successivamente, si modellano le geometrie dei travetti. Si distinguono i vari metodi di modellazione in base all'*Element Type*: per SOLID185 si procede per volumi (si genera il volume pieno esterno e il volume pieno interno, poi si sottrae il volume interno da quello esterno in modo da ottenere la trave cava e gli intagli). Si riportano le coordinate dei punti per generare i modelli.

Trave con danneggiamento D1 (D1 SOLID185)

La procedura di modellamento è analoga a quella per il livello DX. Per il livello di danneggiamento D1, dopo aver creato il volume “di base” della trave vado a creare e posizionare i due intagli simmetrici distanti 2 cm dalla mezzeria, di altezza di sezione 4 cm e spessore 1 mm. Utilizzo il comando: “*Preprocessing/Modelling/Create/Volumes/Cylinder/Partial Cylinder*” e inserisco i seguenti dati:

WPx	0
WPy	0
Rad-1	0.037
Rad-2	0.04
Depth	1

Tabella 4.14: Coordinate per volume da sottrarre per creare intagli

In seguito alla creazione di questo volume, creato all’ estremità della trave, lo sposto nella posizione dove si desidera creare l’intaglio utilizzando il comando: “*Preprocessing/Modelling/Move/Move Volume*” e inserisco i seguenti dati:

Dx	0
Dy	0
Dz	0.48

Tabella 4.15: Tabella per comando dello spostamento del volume

A questo punto rimane da sottrarre il volume attraverso il comando : “*Preprocessing/Modelling/Operate/Booleans/Subtract*” e selezionare prima il volume di base e poi il volume da sottrarre. Otteniamo così il primo intaglio, per creare il secondo ripetiamo la procedura in modo analogo e cambiando la misura dello spostamento che sarà : $Dz = 0.52$.

Ottenendo così:

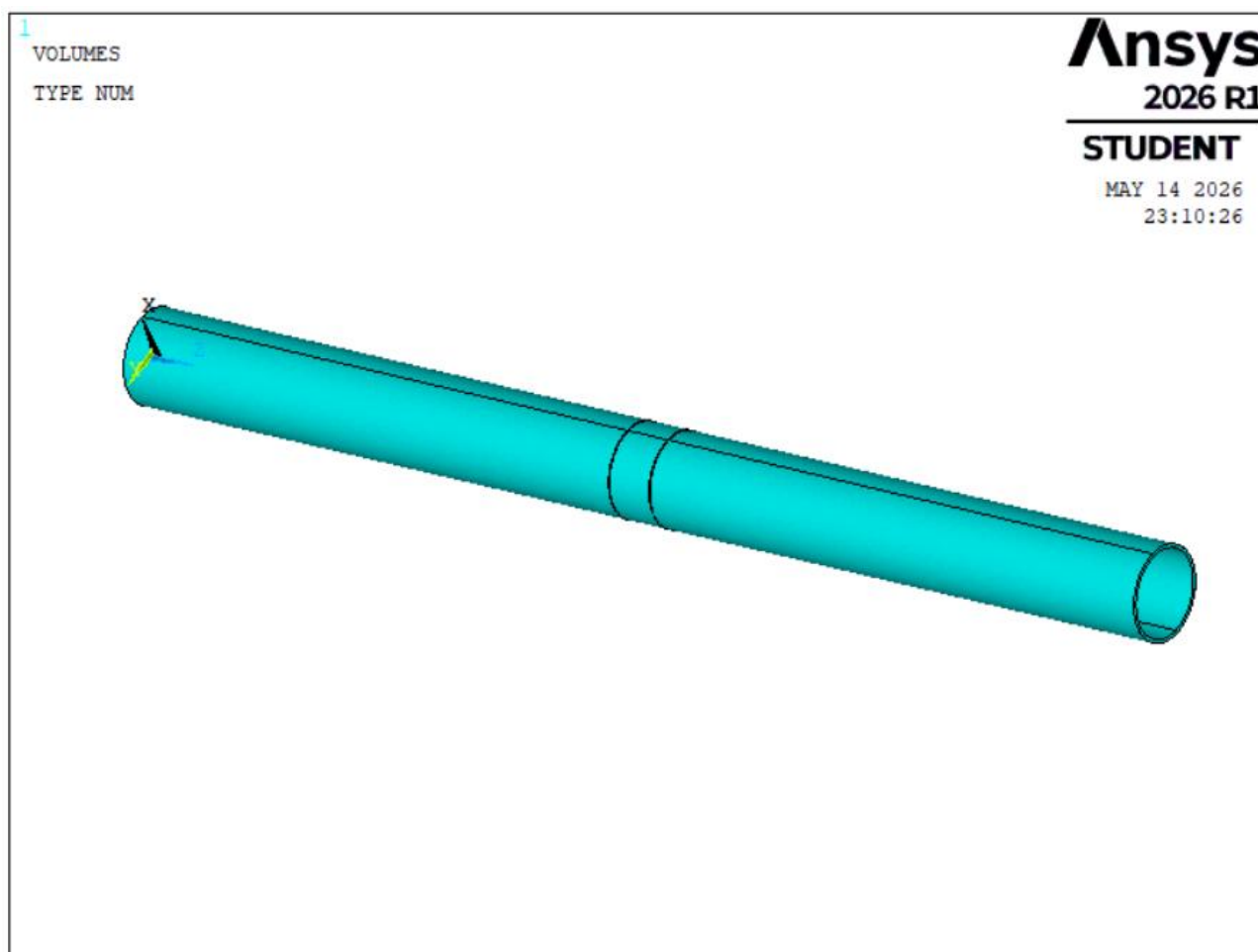


Figura 4.14: Volume D1 SOLID185

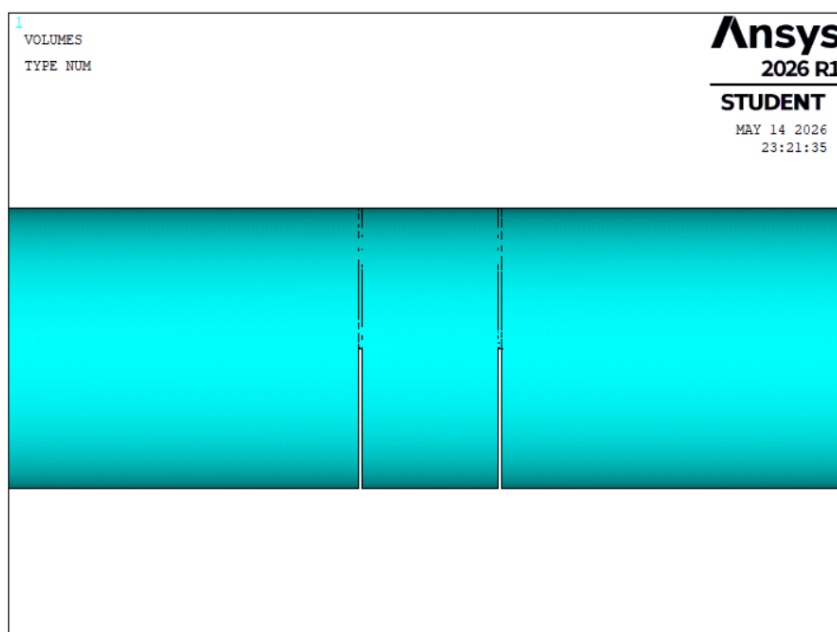


Figura 4.15: Dettaglio degli intagli D1

Trave con danneggiamento D2 (D2 SOLID185)

Si ripete la procedura fatta per la trave con danneggiamento D1, si pone quindi una distanza $Dz=0.46$ e si sottrae così da creare il terzo intaglio, per il quarto basta ripetere tutto spostandolo ad una distanza $Dz=0.54$.

Ottenendo così:

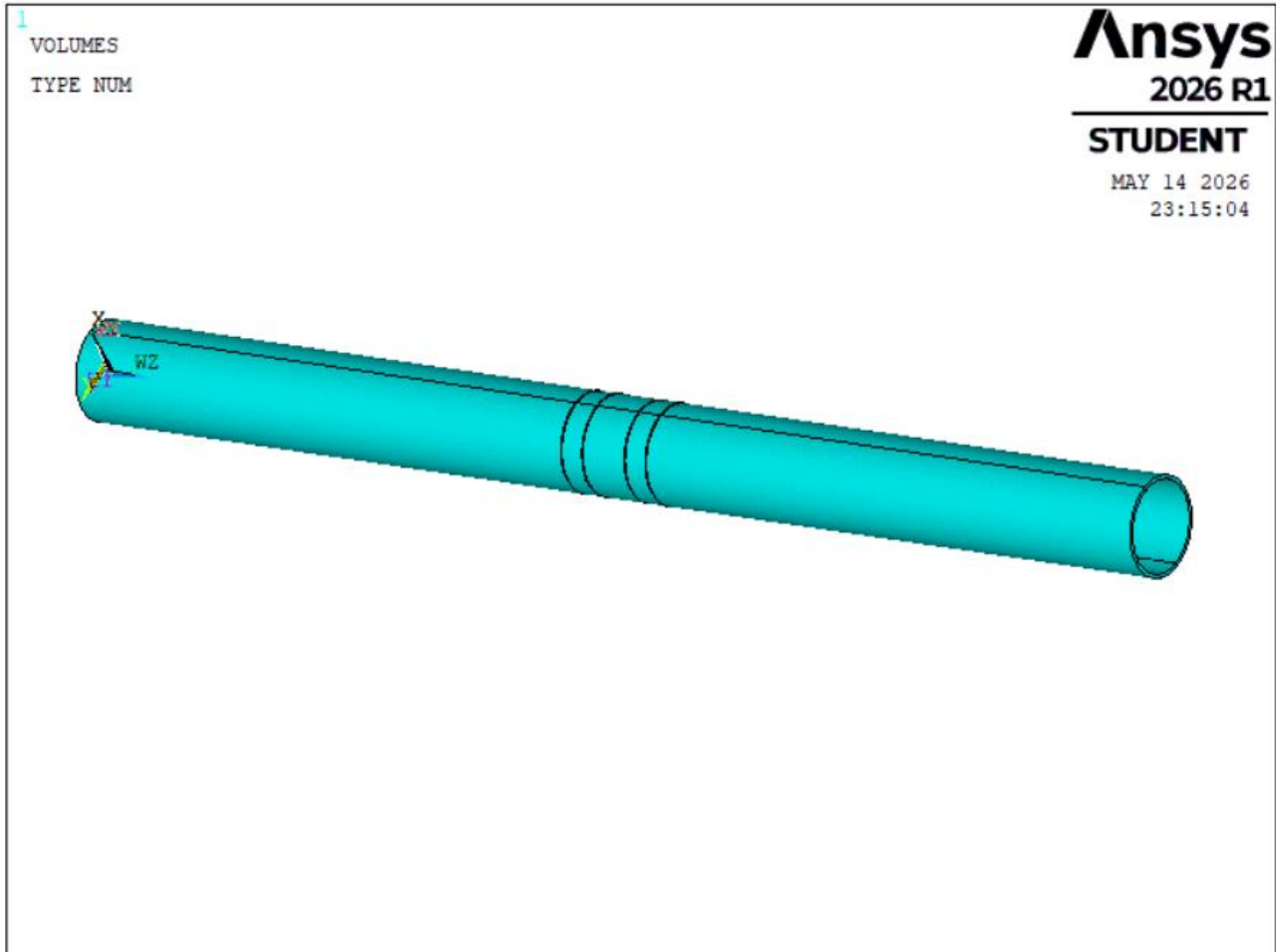
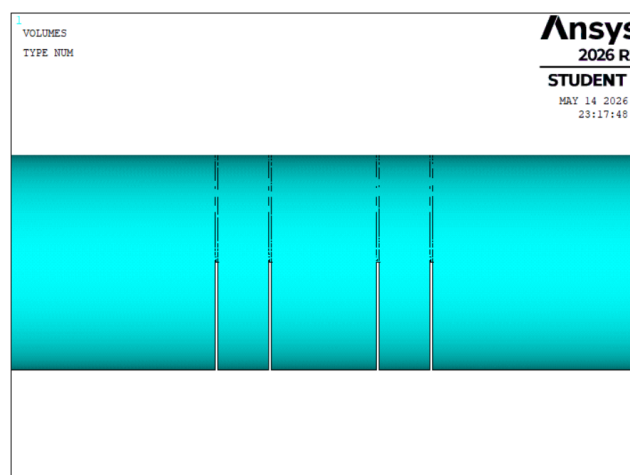


Figura 4.16: Volume D2 SOLID185



Trave con danneggiamento D3 (D3 SOLID185)

Con la stessa modalità creo gli intagli per il livello D3 e il valore per lo spostamento del volume che in seguito verrà sottratto sarà : $Dz=0.44$ e $Dz=0.56$.

Ottenendo così:

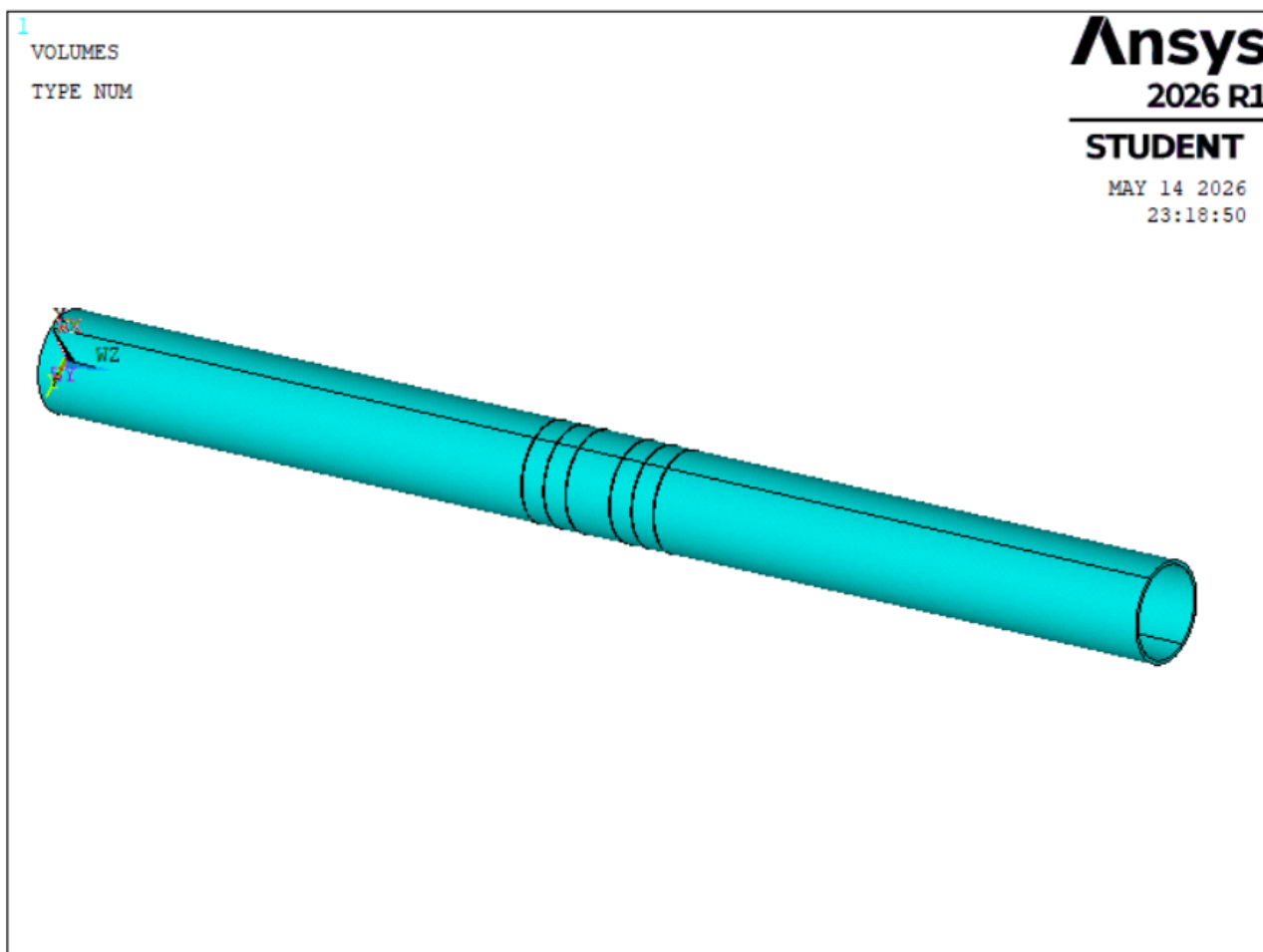


Figura 4.17: Volume D3 SOLIDI185

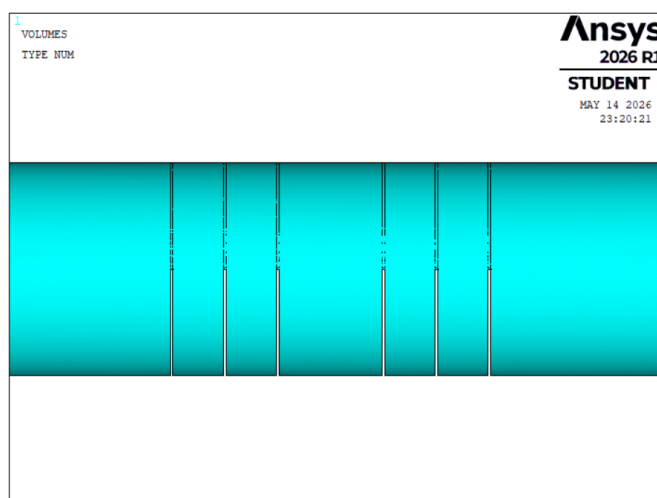


Figura 4.18: Dettaglio degli intagli D3

Mesh

Trave con danneggiamento D1 (D1 SOLID185)

Nel tratto di trave compreso tra i due intagli si generano elementi di dimensioni ridotte, impostando per le linee longitudinali $NDIV=20$. Si procede in maniera analoga a D0SOLID185 sui tratti di trave intatta, impostando $NDIV=100$. Sia nelle sezioni di estremità sia in quelle degli intagli si imposta $SIZE=0.0025$.

A causa della geometria della trave e della presenza degli intagli la *mesh* è composta da triangoli ma non si tratta di un errore ma il programma ANSYS, visto che senza intagli la geometria è “semplice” mentre con gli intagli diventa complessa, passa automaticamente a mesh tetraedrica. Sono stati generati 78 469 elementi.

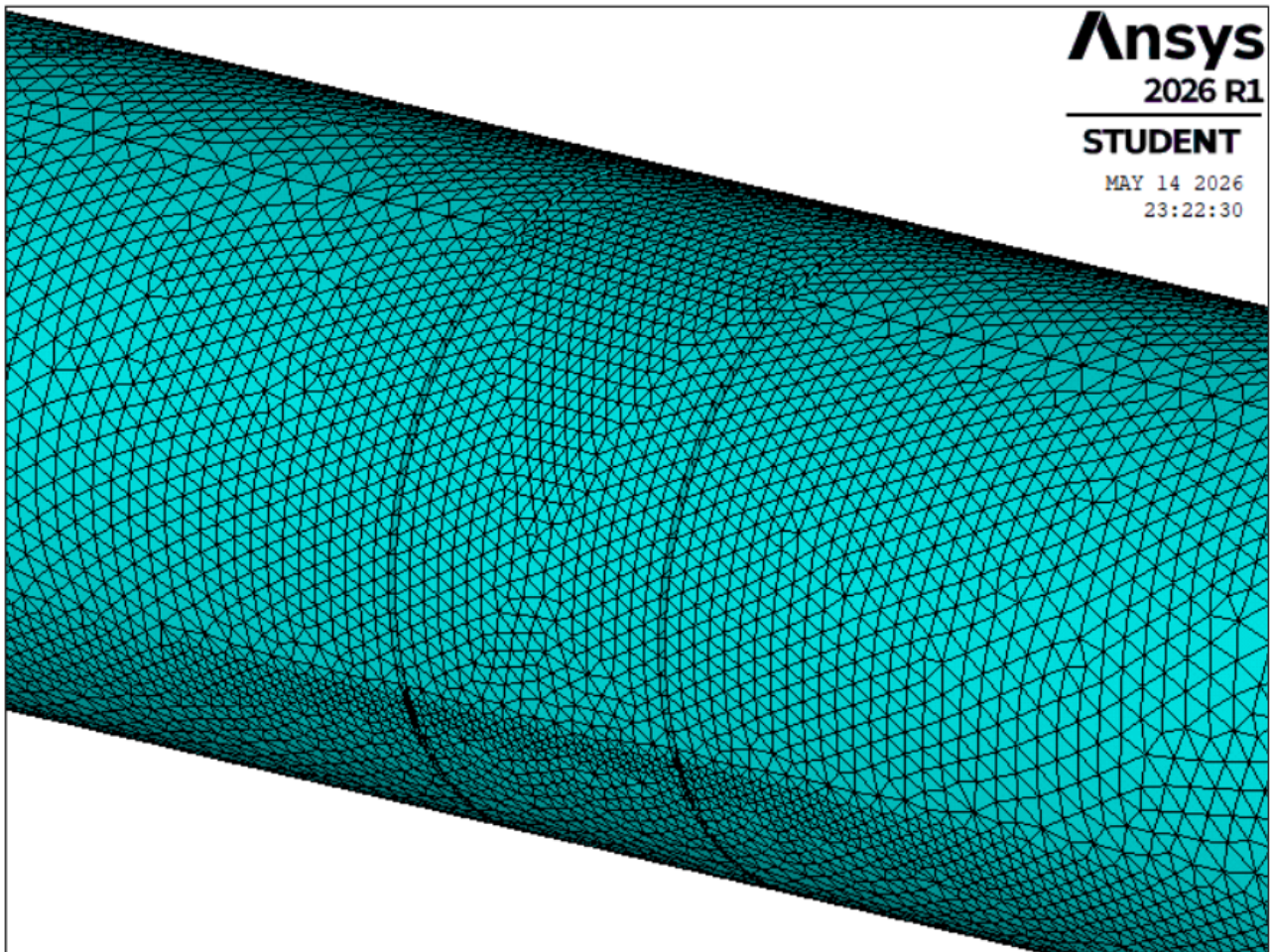


Figura 4.19: Mesh D1 SOLID185

Trave con danneggiamento D2 (D2 SOLID185)

Si procede in maniera analoga a D1 SOLID185. Si dividono le linee longitudinali del tratto centrale con NDIV=20, e i due tratti adiacenti a quest'ultimo con NDIV=10, in modo da avere la stessa densità di mesh. Si ottengono 90 431 elementi.

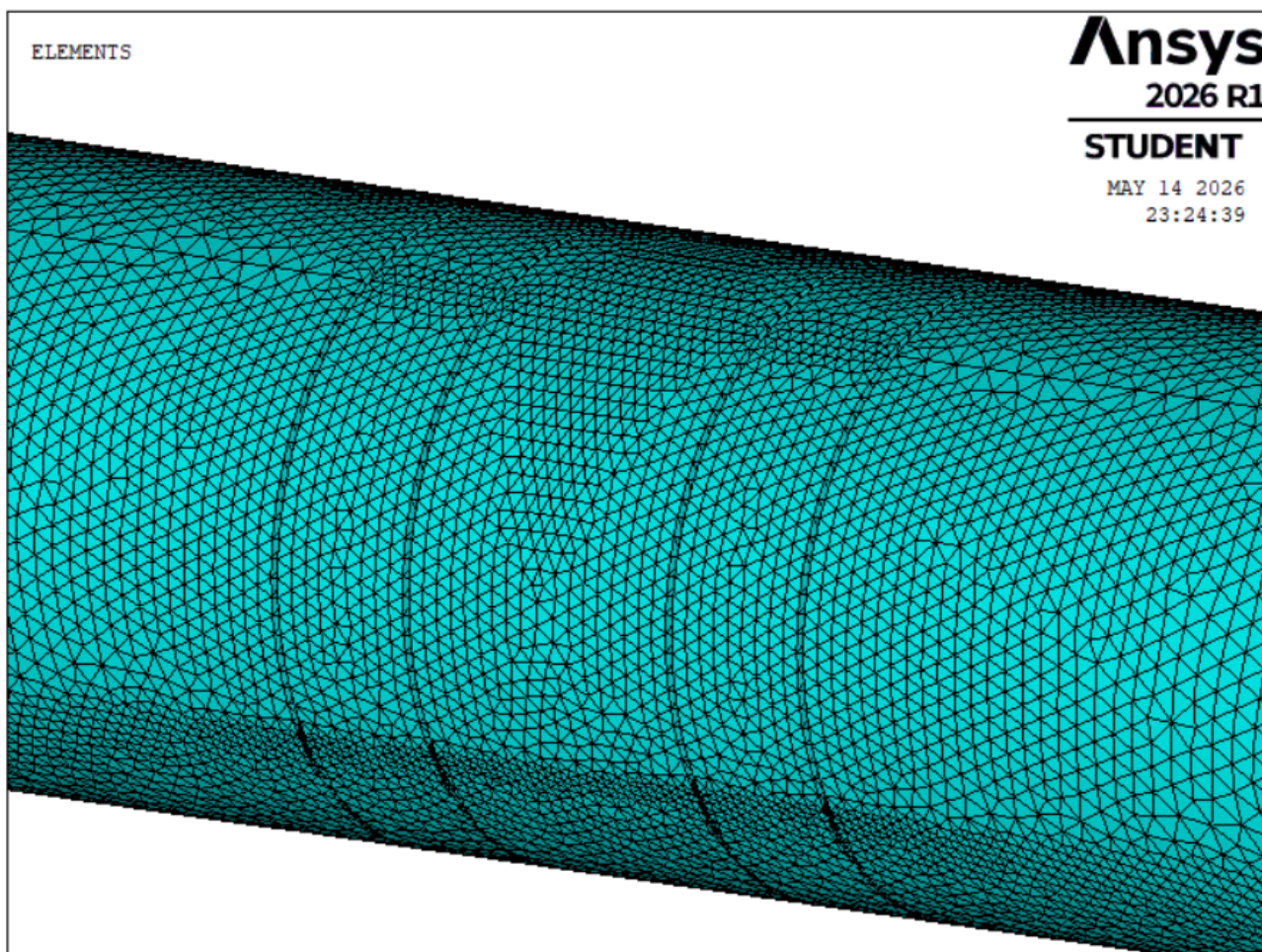


Figura 4.20: Mesh D2 SOLID185

Trave con danneggiamento D3 (D3 SOLID185)

La procedura è analoga ai precedenti. Si riporta la ripartizione e la mesh ottenuta da 100 925 elementi.

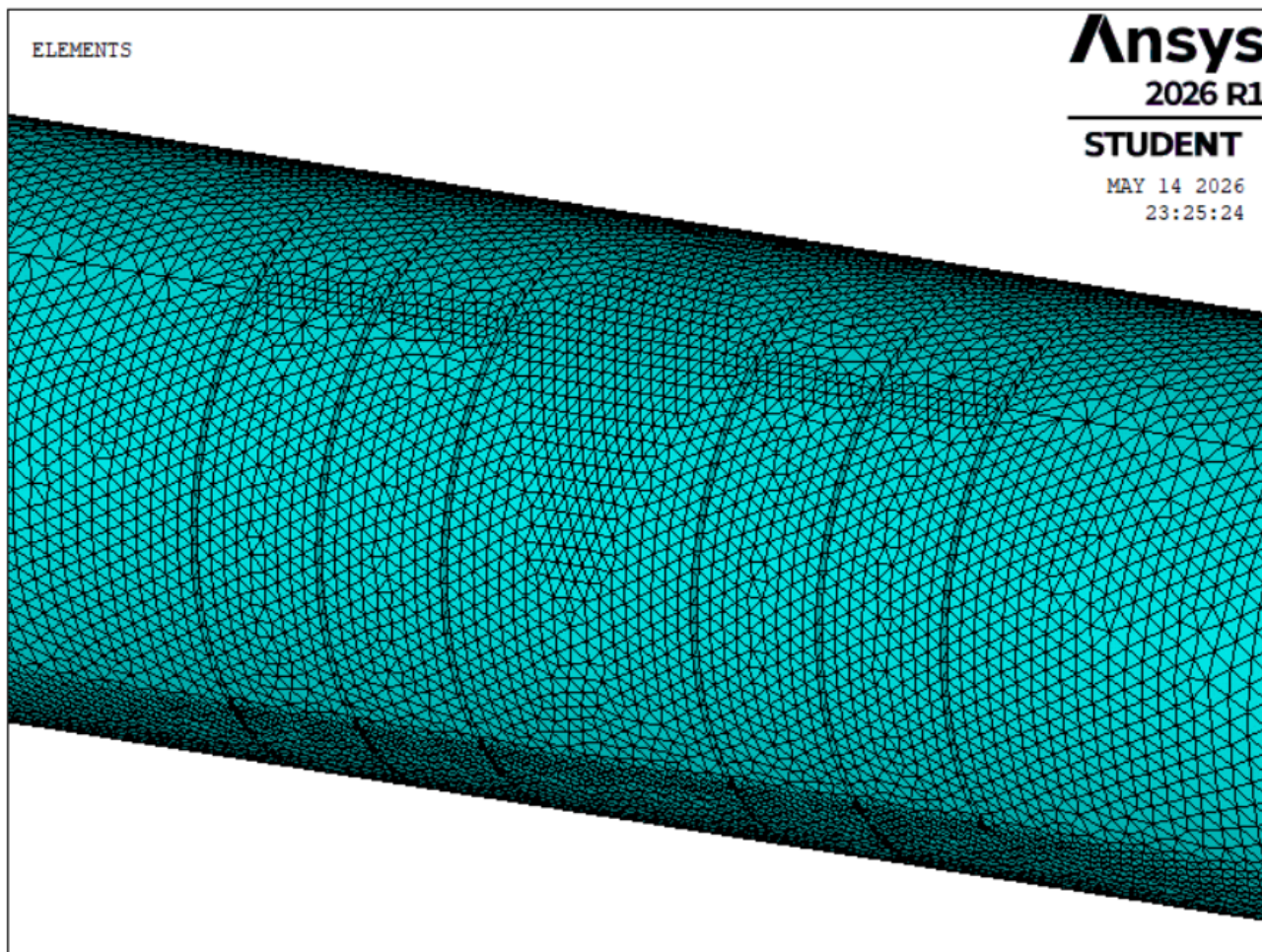


Figura 4.21: Mesh D3 SOLID185

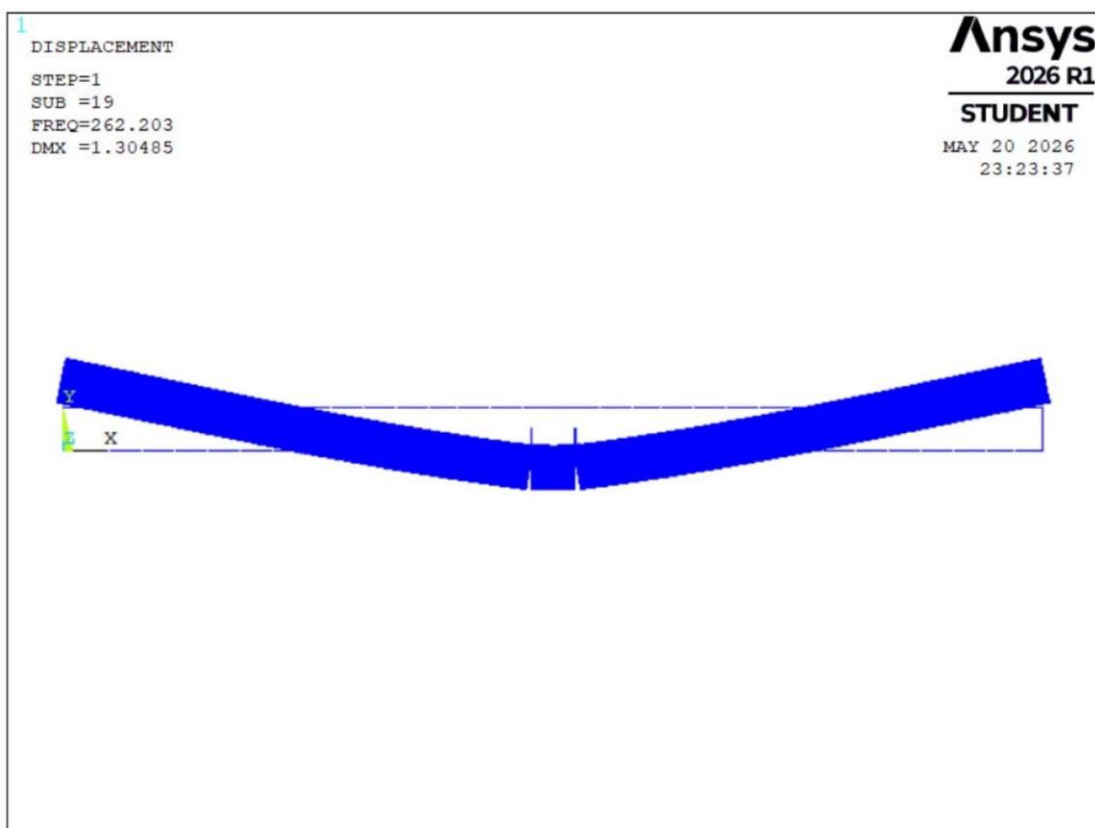
4.3.3 Analisi modale

Trave con danneggiamento D1 (D1 SOLID185)

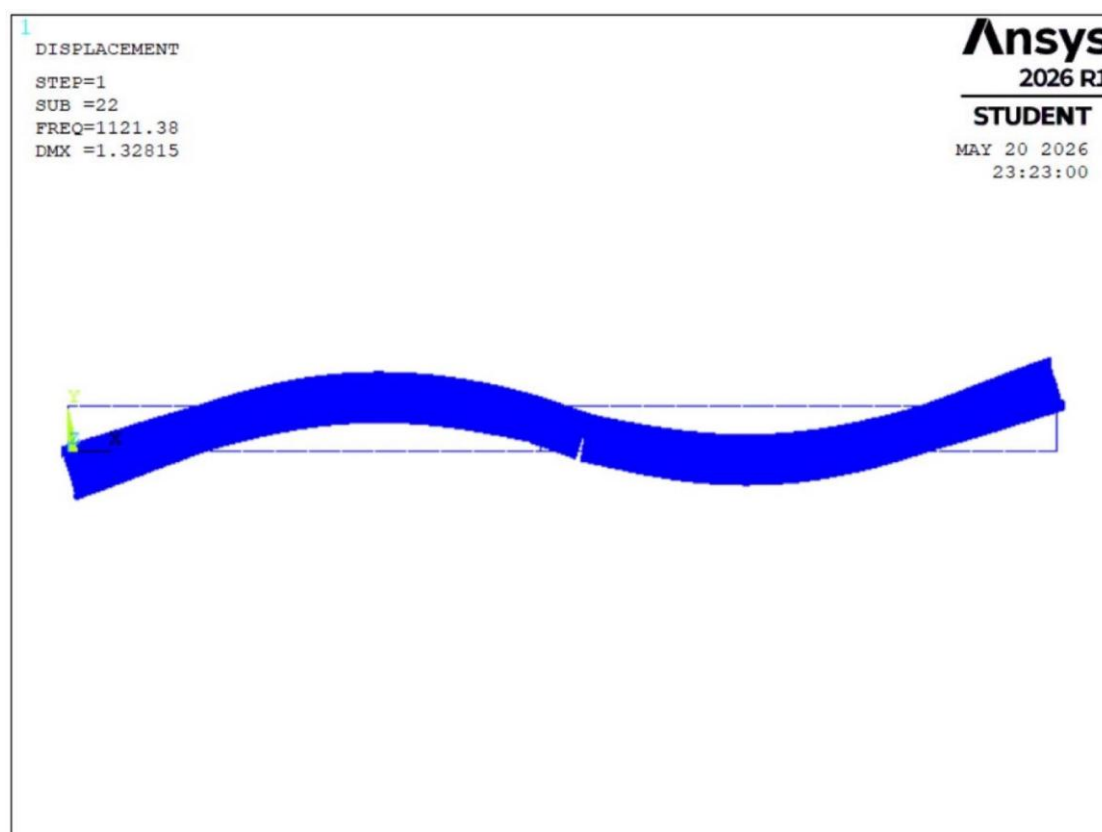
N. di elementi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
78469	262,2	1121,38	1689,54

Tabella 4.16: Tabella risultati in termini di frequenze

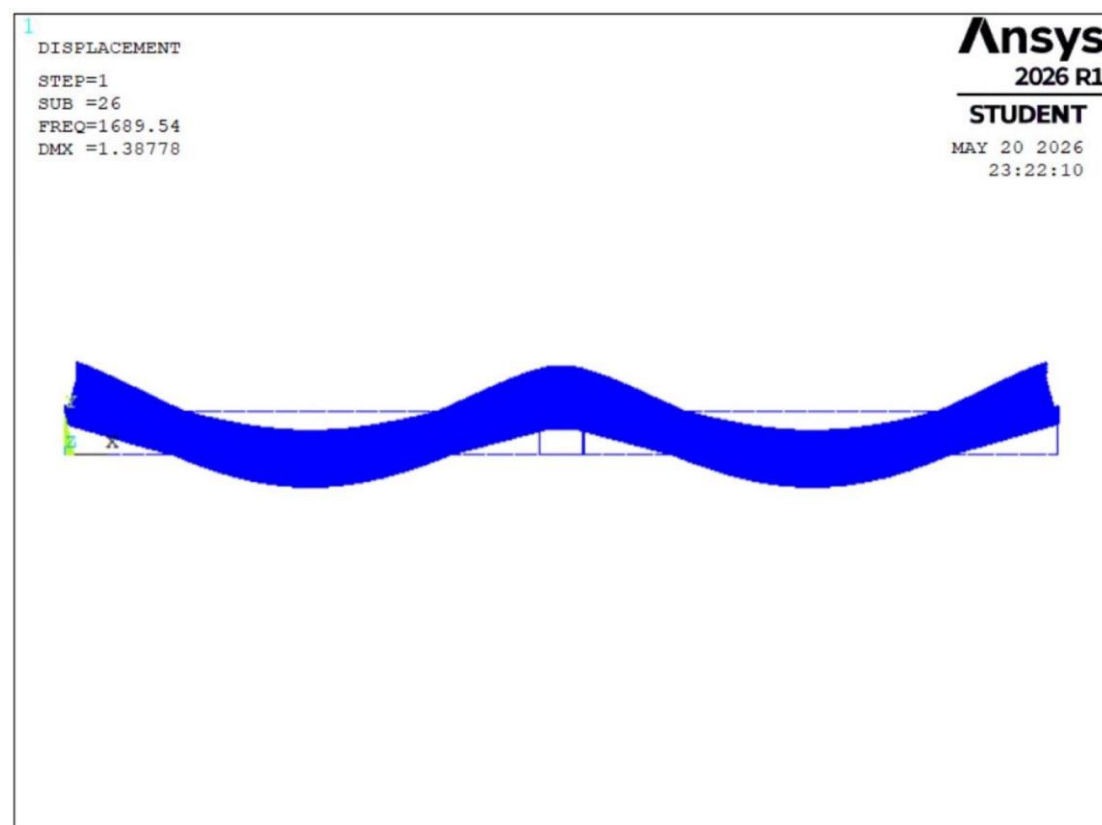
❖ PRIMO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ SECONDO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ TERZO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE

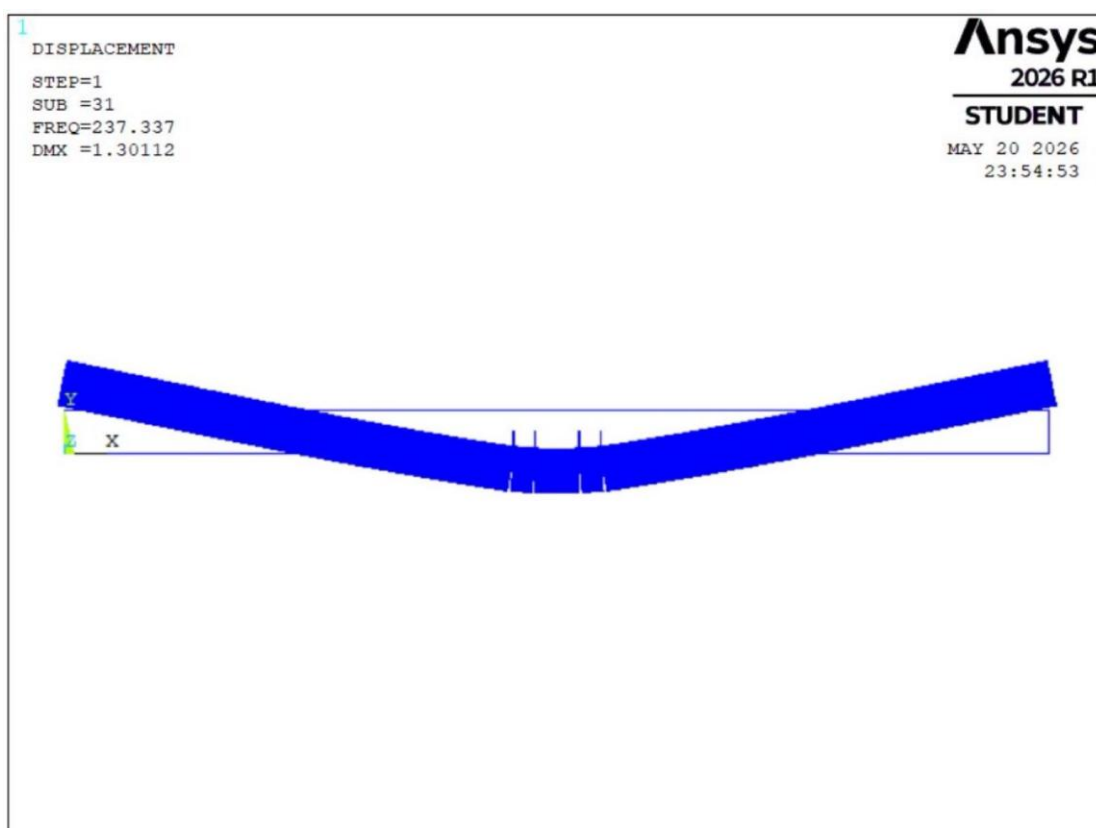


Trave con danneggiamento D2 (D2 SOLID185)

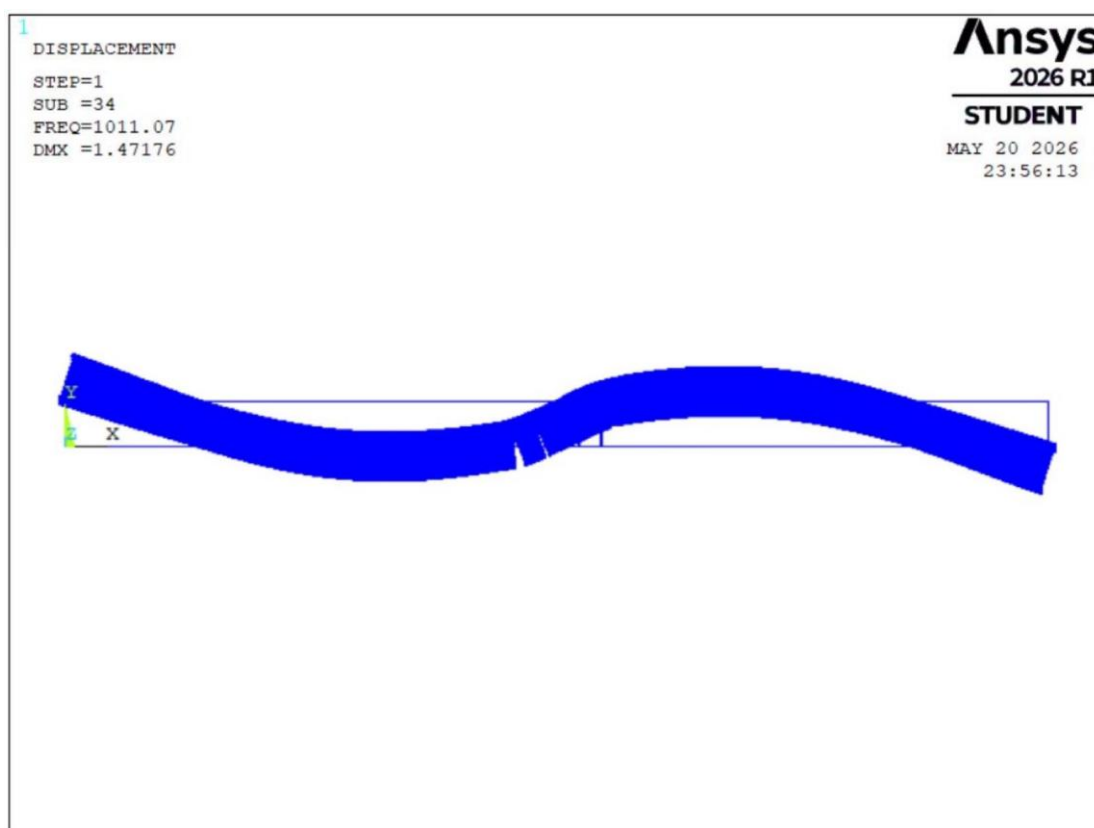
N. di elementi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
90431	237,33	1011,07	1670,66

Tabella 4.17: Tabella risultati in termini di frequenze

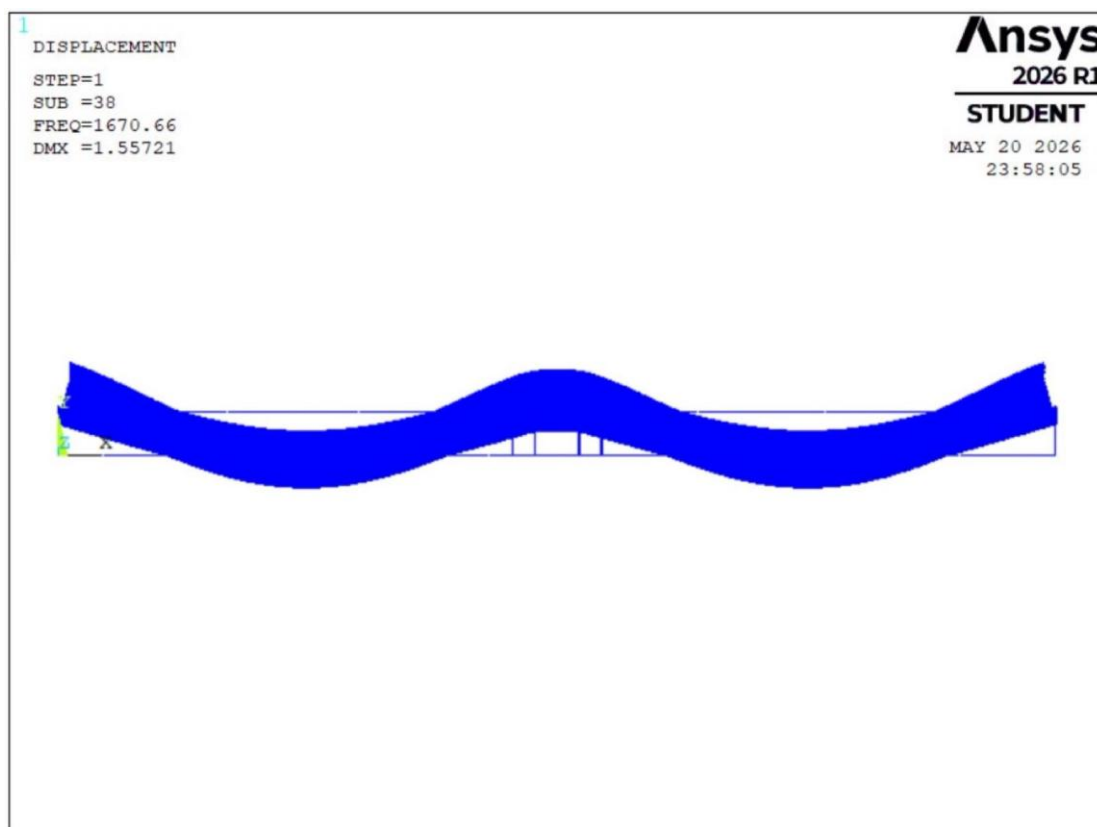
❖ PRIMO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ SECONDO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ TERZO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE

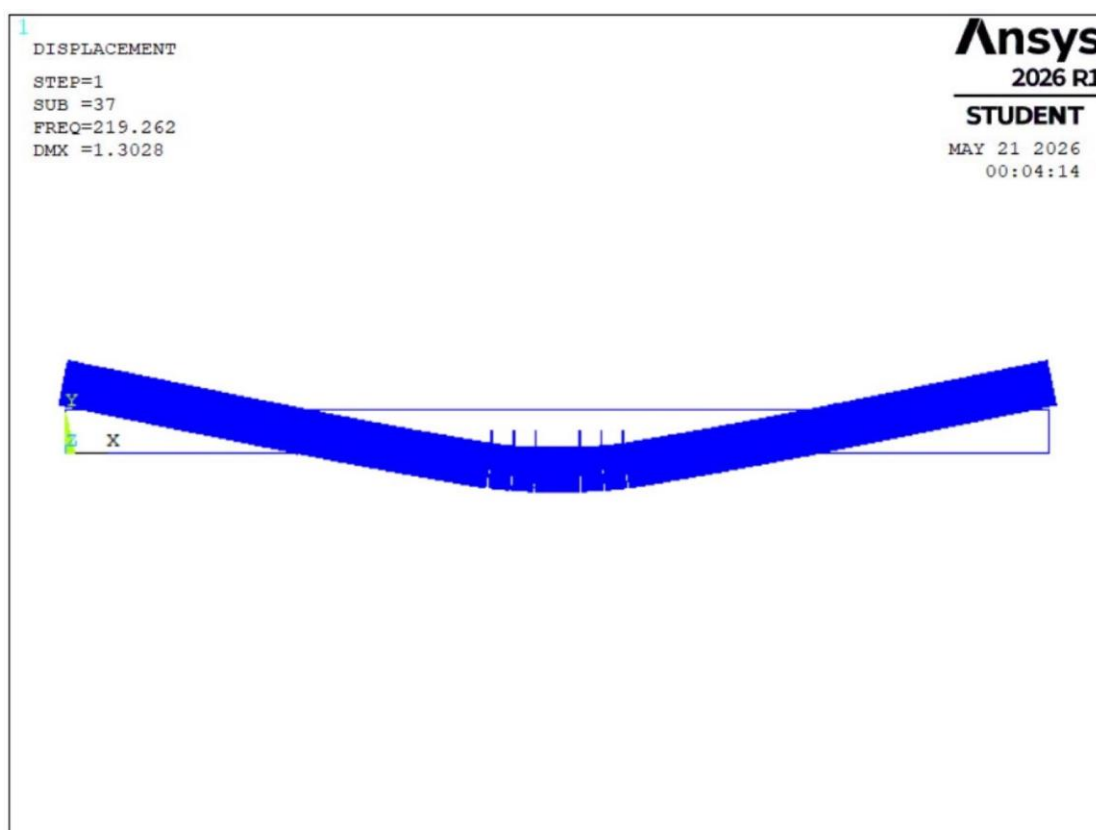


Trave con danneggiamento D3 (D3 SOLID185)

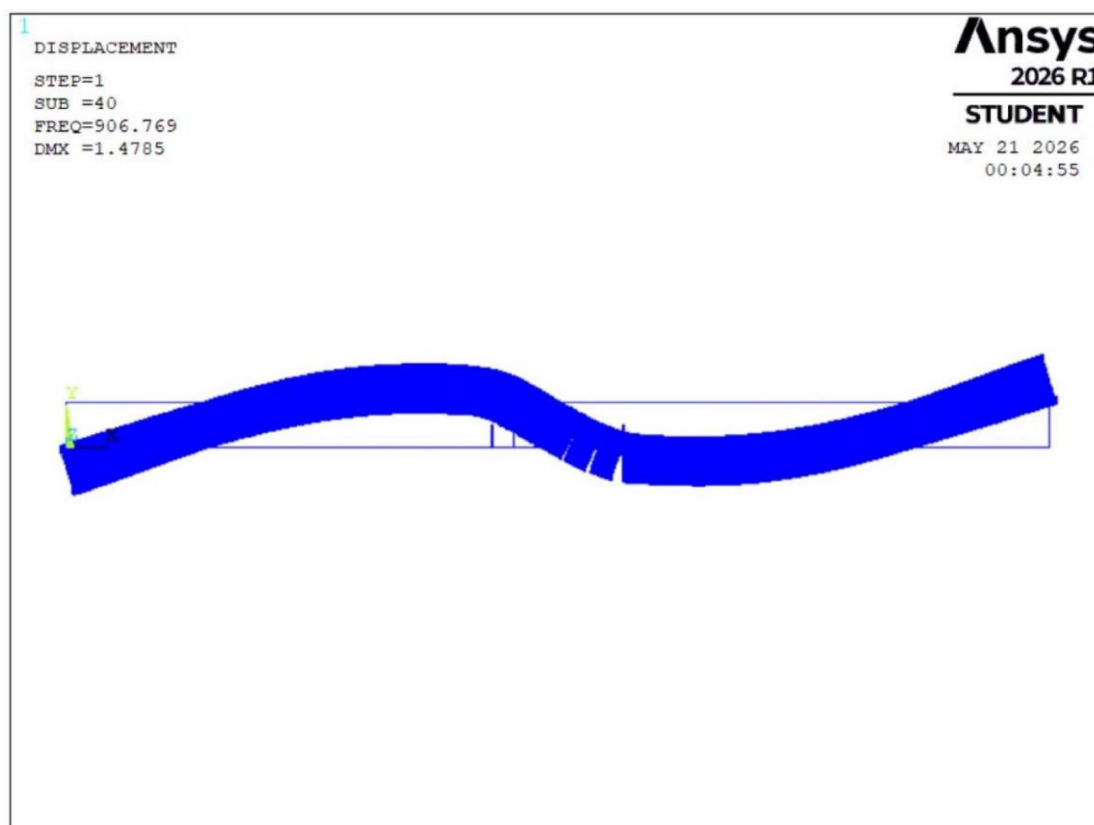
N. di elementi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
100925	219,26	906,76	1646,7

Tabella 4.18: Tabella risultati in termini di frequenze

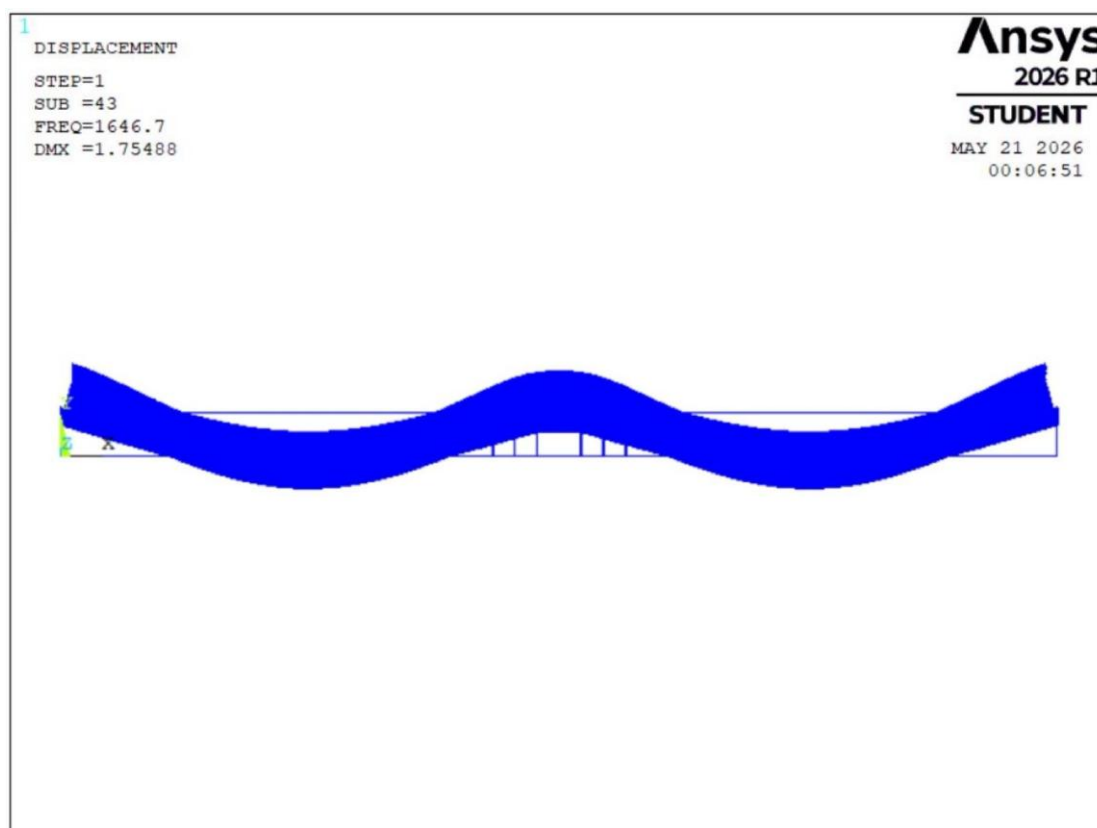
❖ PRIMO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ SECONDO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



❖ TERZO MODO DI VIBRARE FLESSIONALE



4.3.4 Confronto dei risultati

Si raccolgono infine tutti i risultati in questa tabella per un resoconto finale:

Livello di danno	Tipo di analisi	F1[Hz]	F2 [Hz]	F3[Hz]
D0	Teorica	490,42	1351,44	2650,34
	Sperimentale	462,5	1328,37	2346,62
	Modellazione : BEAM188	490,47	1258,26	2257,56
	Modellazione : SOLIDI185	475,65	1226	2210,06
DX	Sperimentale	433,75	1332,5	2295,87
	Modellazione : SOLIDI185	354,45	936,83	2006,69
D1	Modellazione : SOLIDI185	262,2	1121,38	1689,54
D2	Modellazione : SOLIDI185	237,33	1011,07	1670,66
D3	Modellazione : SOLIDI185	219,26	906,76	1646,7

Tabella 4.19: Tabella resoconto di tutte le frequenze ricavate

D0	Sperimentale	462,5	1328,37	2346,62
	FEM	475,65	1226	2210,06
	Variazione	3%	-8%	-6%
DX	Sperimentale	433,75	1332,5	2295,87
	FEM	354,45	936,83	2006,69
	Variazione	-18%	-30%	-13%

Tabella 4.20: Variazione tra sperimentale e FEM

D0	475,65	1226	2210,06
D1	262,2	1121,38	1689,54
Variazione	-45%	-9%	-24%
D0	475,65	1226	2210,06
D2	237,33	1011,07	1670,66
Variazione	-50%	-18%	-24%
D0	475,65	1226	2210,06
D3	219,26	906,76	1646,7
Variazione	-54%	-26%	-25%

Tabella 4.21: Variazione rispetto a D0

D0	475,65	1226	2210,06
D1	262,2	1121,38	1689,54
Variazione	-45%	-9%	-24%
D1	262,2	1121,38	1689,54
D2	237,33	1011,07	1670,66
Variazione	-9%	-10%	-1%
D2	237,33	1011,07	1670,66
D3	219,26	906,76	1646,7
Variazione	-8%	-10%	-1%

Tabella 4.22: Variazione rispetto a livello di danneggiamento superiore

5 - CONCLUSIONI

Il presente lavoro di tesi ha riguardato l'analisi numerica di una trave in alluminio soggetta a diversi scenari di danneggiamento, con l'obiettivo di studiarne il comportamento dinamico e di valutarne le variazioni al crescere dell'entità del danno. Attraverso il confronto tra risultati teorici, sperimentali e numerici, è stato possibile verificare l'affidabilità dei modelli sviluppati nella previsione delle frequenze naturali e delle forme modali, nonché approfondire l'influenza del danneggiamento sulla risposta dinamica della struttura.

Negli ultimi anni, lo sviluppo di software dedicati all'analisi agli elementi finiti (FEM) ha reso possibile la realizzazione di simulazioni sempre più accurate e affidabili. Tali strumenti consentono di creare prototipi virtuali costituiti da modelli geometrici caratterizzati da specifiche proprietà meccaniche e materiali, permettendo di riprodurre il comportamento reale delle strutture in diverse condizioni operative.

L'impiego del software offre numerosi vantaggi, tra cui una significativa riduzione dei costi legati alla progettazione e alla sperimentazione, grazie alla possibilità di limitare o eliminare la realizzazione di prototipi fisici. Inoltre, l'ambiente virtuale consente di apportare modifiche al modello in tempi rapidi, rendendo il processo di analisi più efficiente e flessibile. Tali benefici si traducono in un incremento della produttività e dell'efficacia delle attività di progettazione, a condizione che la modellazione numerica venga eseguita correttamente, sia nella definizione delle proprietà del modello sia nell'applicazione delle procedure di analisi, affinché i risultati ottenuti siano rappresentativi del comportamento reale della struttura.

Confrontando i risultati ottenuti per i livelli D0 e DX, dove abbiamo i risultati in termini di frequenze dell'analisi sperimentale e FEM, notiamo come le frequenze per D0 siano superiori rispetto alle frequenze per DX a causa della perdita della rigidità della struttura. Attraverso le variazioni tra l'analisi sperimentale e FEM (Tab 4.20) possiamo verificare l'affidabilità dell'analisi numerica poiché i risultati ottenuti con quest'ultima mostrano solo una piccola variazione percentuale rispetto a quelli ottenuti con l'analisi sperimentale.

Facendo riferimento invece ai livelli D1 D2 e D3, dove vista l'affidabilità dell'analisi numerica si è continuata l'analisi solo con il FEM, notiamo come all'aumentare del danneggiamento diminuiscono ovviamente le frequenze e attraverso le variazioni percentuali (Tab 4.21) e (Tab 4.22) osserviamo che la riduzione più marcata si ha per

la frequenza F_1 , quella solitamente più sensibile alle variazioni mentre per le frequenze F_2 e F_3 abbiamo delle riduzioni meno evidenti.

Concludendo quindi abbiamo osservato che:

- I valori teorici relativi ai primi tre modi di vibrare sono sempre superiori rispetto ai valori ottenuti con la prova in laboratorio e quelli ottenuti con il FEM poiché il modello teorico si riferisce a una struttura integra e prova di difetti.
- Aumentando in danno, diminuiscono le frequenze a causa della perdita della rigidità della struttura.
- L'analisi modale fornisce risultati coerenti e molto vicini con quell'analisi sperimentale

BIBLIOGRAFIA

- Capozucca R. “*Tecnica delle costruzioni: la trave in cemento armato*”, Bonomo, 2023.
- Capozucca R., Magagnini E. “*Vibration of RC beams with NSM CFRP with unbonded/notched circular rod damage*” Composite Structures 144, 2016
- Capozucca R. “*Static and dynamic response of damaged RC beams strengthened with NSM CFRP rods*” Composite Structures 91, 2009
- Ewins D. J. “*Modal testing: theory and practice*”, Research Studies Ltd, 1995
- Di Biasi M., “*Analisi vibrazionale di modelli di trave*”, Università Politecnica delle Marche, 2024.
- Di Rodi M. “*Rinforzo di travi con FRP*”, Università Politecnica delle Marche, 2024.
- Torella D. “*Travi danneggiate e analisi delle vibrazioni*”, Università Politecnica delle Marche, 2024.
- Capozucca R. “*Assessment of CFRP strengthened RC beams through dynamic tests*” Composites Part:B Engineering 2013; 46:69-80.
- Sordoni D. “*Travi in acciaio con danni sotto vibrazione*”, Università Politecnica delle Marche, 2024
- Santoni M. “*Analisi dinamica vibrazionale di travi omogenee in presenza di danneggiamenti localizzati e rinforzi in BFRP*”, Università Politecnica delle Marche, 2025
- A. Oulad Brahim, Abdelwahhab Khatir, Samir Khatir, Erica Magagnini, Thanh Cuong-Le, Roberto Capozucca : “*Prediction in percentage variation of frequencies on damaged pipe repaired by composite materials GFRP, CFRP, and BFRP*” International Journal of Pressure Vessels and Piping, Volume 222, Part 1, 2026, 105768, ISSN 0308-0161,
<https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2026.105768>.
- A. Oulad Brahim, R. Capozucca, E. Magagnini, S. Khatir, Y. Bouzid: “*Experimental investigation of Notched Identification based on Maximum Resistance Force in Steel Specimens using an Artificial Neural Network*”
Procedia Structural Integrity, Volume 68, 2025, Pages 566-572, ISSN 2452-3216,

<https://doi.org/10.1016/j.prostr.2025.06.098>.

- A. Oulad Brahim, R. Capozucca, S. Khatir, E. Magagnini, B. Benaissa, M. Abdel Wahab, T Cuong-Le: “*Artificial neural network and YUKI algorithm for notch depth prediction in X70 steel specimens*”, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Volume 129, 2024, 104227, ISSN 0167-8442,

<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104227>.

- Magagnini, E., Khatir, S. (2021). “*Effect of Damage by Notches in the Vibration Response of Homogeneous and Heterogeneous Beam Models*”. In: Bui, T.Q., Cuong, L.T., Khatir, S. (eds) *Structural Health Monitoring and Engineering Structures*”, Lecture Notes in Civil Engineering, vol 148. Springer, Singapore.

https://doi.org/10.1007/978-981-16-0945-9_15

- R. Capozucca, E. Magagnini: “*Experimental vibration response of homogeneous beam models damaged by notches and strengthened by CFRP lamina*”, Composite Structures,, Volume 206, 2018, Pages 563-577, ISSN 0263-8223,

<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.08.082>.

SITOGRAFIA

-<https://www.isprambiente.gov.it/files2025/controlli-ambientali/03-corso-rbi-ispra-corrosione-negli-impianti-di-raffinazione.pdf>

-<https://esain.com/it/controlli-non-distruttivi-cnd-impianti-industriali/>

-https://www.politesi.polimi.it/retrieve/a81cb059-685b-616b-e053-1605fe0a889a/2010_07_Dri.pdf

-<https://esain.com/it/controlli-non-distruttivi-cnd-impianti-industriali/>

-https://www.asme.org/?utm_source

-www.ansys.com/academic/students/ansys-student

