



**UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

---

Corso di Laurea triennale in **INGEGNERIA BIOMEDICA**

**Sistemi di misura inerziali indossabili (IMU) e loro impiego nel test**

**Stand-to-Sit-to-Stand**

**Wearable Inertial Measurement Systems (IMU) and their use in the**

**Stand-to-Sit-to-Stand-test**

Relatore:

Prof. **Sandro Fioretti**

Tesi di Laurea di:

**Maria Pia Talozzi**

**A.A. 2020/2021**



.....I lavori di Hamilton si diffusero presto in Inghilterra, dove pure arrivavano gli echi delle affermazioni delle geometrie non euclidee..... Charles Dogson, docente di matematica ad Oxford, meglio noto sotto lo pseudonimo di Lewis Carroll, dopo i tentativi fallimentari di confutare le nuove teorie, si rifugiò nella satira letteraria.

Nel suo "Alice nel paese delle meraviglie" non manca il riferimento ai quaternioni e l'ironia sul loro bizzarro comportamento non commutativo:

"Al tè delle sei, i compagni di Alice sono il Cappellaio Matto, la Lepre Marzolina e il Ghiro. Manca però il Tempo, che ha lasciato un orologio rotto".

Questi quattro personaggi rappresentano le quattro dimensioni dei quaternioni di Hamilton: quando ne manca una, i quaternioni non possono ruotare nello spazio ma solo su un piano. E infatti, i tre commensali continuano a ruotare intorno al tavolo in cerca di piattini e tazzine.

[da Carroll L., Le avventure di Alice nel paese delle meraviglie, (1865), tr. it.

Pietrocola-Rossetti T., 1872, Cap.7]

di Giovanna Guidone



*Ai responsabili del laboratorio di analisi del movimento, in primis la **Professoressa Federica Verdini** e a coloro che mi hanno aiutata nella realizzazione del filmato e nella registrazione dei dati durante l'esecuzione del task Stand to Sit to Stand, oggetto della presente dissertazione.*

*Al **Professore Sandro Fioretti**, mentore, guida discreta, presente ed illuminante in questo percorso alla scoperta degli strumenti per lo studio della biomeccanica del movimento.*

*A loro i miei più sentiti ringraziamenti!*

## ***Indice***

<b>1.</b>	Introduzione.....	9
<b>2.</b>	Materiali e Metodi.....	14
<b>2.1</b>	Sistema di Riferimento Spaziale.....	15
<b>2.2</b>	Strumenti Matematici e Geometrici.....	19
2.2.1	Angoli di Eulero.....	20
2.2.2	Rotazioni notevoli e matrici di rotazione fondamentali.....	22
2.2.2.1	Derivate temporali degli angoli di Eulero.....	24
2.2.2.2	Parametri di Eulero Rodrigues.....	29
2.2.3	Il Quaternione dell'orientamento.....	30
2.2.3.1	Elementi di algebra dei quaternioni.....	30
2.2.3.2	Rotazioni finite e quaternioni.....	35
2.2.4	Metodi numerici per problemi ai valori iniziali: Ordinary Differential Equations.....	43
2.2.5	Metodi di Runge Kutta.....	49
2.2.6	Metodo geometrico di identificazione, rappresentazione degli angoli: <i>angolo <math>\varphi</math>, <math>\sin\varphi</math>, componente <math>p</math> velocità angolare</i> .....	55
<b>2.3</b>	Sistemi di filtraggio.....	61
2.3.1	Piattaforma IMU e problemi che affliggono le sue componenti.....	62
2.3.1.1	Giroscopio.....	63
2.3.1.2	Accelerometro.....	65
2.3.2	Inertial Sensor Fusion Filter: Classificazione.....	70
2.3.2.1	Filtro di Madgwick.....	70
2.3.2.2	IMU Filter.....	83

2.3.3	Filtri per la correzione del “rumore”: Filtro di Butterworth.....	83
<b>2.4</b>	<b>Protocollo sperimentale.....</b>	<b>84</b>
2.4.1	Soggetti coinvolti.....	85
2.4.2	Strumentazione usata e acquisizione dati.....	85
2.4.3	Strumenti Informatici: MatLab toolbox.....	88
2.4.4	Descrizione fasi esperimento .....	89
2.4.5	Elaborazione del segnale.....	90
2.4.6	Analisi statistica.....	91
<b>3.</b>	<b>Risultati sperimentali.....</b>	<b>92</b>
<b>4.</b>	<b>Discussione e conclusioni.....</b>	<b>108</b>
<b>5.</b>	<b>Allegati.....</b>	<b>118</b>
	<i>Bibliografia.....</i>	<i>121</i>

## ***1.Introduzione***

Il task dello Stand to Sit to Stand consiste nel passare dalla posizione eretta a quella seduta e successivamente nel sollevamento del corpo da una posizione seduta ad una posizione eretta. Lo svolgimento dell'azione avviene prevalentemente nel piano sagittale in modo che siano minime le accelerazioni normali allo stesso. Da un punto di vista clinico sono stati messi a punto diversi test utili nella valutazione funzionale oggettiva e non solo soggettiva, ovvero mediante somministrazione di questionari al soggetto da valutare (*Walgaard S, et al., 2016*). Tra tali test, un ruolo rilevante è svolto appunto dallo Stand to Sit to Stand test, che utilizza l'analisi di una delle più impegnative attività quotidiane, la capacità di sollevarsi da una sedia e la capacità di mantenere l'equilibrio e l'assetto posturale durante il movimento inverso, ossia il sedersi. A seconda degli scopi, il test viene svolto con l'utilizzo di altre apparecchiature quali pedane di forza (*Hellmers S., 2019*) e walkway systems in caso di impiego del timed up and go test (*Witchel HJ, 2018*).

Si è osservato che le variabili cinematiche forniscono un contributo importante nella valutazione della indipendenza funzionale. Tuttavia i sistemi di misurazione fino ad ora utilizzati sono legati ad attività di laboratorio di analisi del movimento. E' per tale motivo che si è passati, da parte di molti ricercatori, allo studio dei sensori indossabili inerziali in ambito clinico (*Walgaard S, et al., 2016*). Tali sistemi inerziali indossabili sono allo studio come strumenti ad uso domestico in ambito neurologico e geriatrico (*Ganea R. et al., 2011*) ad esempio in pazienti con malattia di Parkinson (*Pham M.H. et al, 2018*) e soggetti affetti da sclerosi multipla (*Witchel HJ. et al., 2018*); sono di estrema utilità in ambito riabilitativo come nella medicina dello sport e nella valutazione del rischio di caduta (*Howcroft et al. 2013*). Ad esempio il CDC, dipartimento della prevenzione ed il controllo dei traumi, ha realizzato uno score definito per età e sesso utilizzando il 30 second chair rise, che valuta il rischio di caduta dei soggetti esaminati (*Allegato 1*).

Nell'ambito di questa tesi, è stato utilizzato un Sistema di Misura Inerziale (IMU) unitamente al sistema cinematico Stereofotogrammetrico disponibile presso il laboratorio di analisi del movimento del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università Politecnica delle Marche. Il modello usato per l'analisi dello Stand to Sit to Stand test considera la parte superiore del corpo (Head, Arms, Torso=HAT) come un unico corpo rigido del quale abbiamo studiato l'orientamento rispetto ad un sistema di riferimento esterno. Il dispositivo inerziale (G-Walk-BTS sensor), montato su una placca al centro di 4 marker passivi, è stato indossato a mezzo di una cintura e posizionato a livello lombare. Il segnale ottenuto è stato elaborato utilizzando un metodo classico che fa riferimento all'impiego dei quaternioni dell'orientamento che tuttavia ha mostrato dei risultati non ottimali, in quanto il metodo classico non consente un data fusion ottimizzato dei vari sensori contenuti nella IMU.

E' per tale motivo che, al fine di migliorare la qualità del segnale ottenuto durante la registrazione del task dello Stand to Sit to Stand eseguito diverse volte in sequenza dallo stesso soggetto, sono stati usati sistemi di filtraggio non solo per la riduzione del rumore del segnale (es. filtro di Butterworth), ma anche per il "data fusion" ottimale mediante l'impiego di due "Inertial Sensor Fusion Filter" modificati per poter essere applicati ad un sistema privo di magnetometro. Queste due tecniche di Inertial fusion Filter applicate, hanno consentito una ottimizzazione dei risultati.

Scopo dello studio è valutare la validità del sistema di misura inerziale (IMU) utilizzato, composto da un accelerometro e un giroscopio triassiali presenti in un unico dispositivo in assenza di magnetometro, posto sul tronco a livello lombare, comparandone i dati ottenuti durante il nostro test con quelli derivanti dalla stereofotogrammetria che è stata usata per validare i dati ottenuti dal sensore inerziale (*Cardarelli S. et al, 2020*).

Dalla piattaforma IMU è possibile ricavare diversi parametri di utilità clinica: tra questi, di importanza notevole sono i parametri angolari, come l'angolo di flesso estensione del tronco, ma anche di

rotazione laterale e assiale (twist), che rappresentano i cardini nello studio della cinematica del tronco. Oltre ai parametri angolari, la IMU fornisce parametri spaziali e temporali permettendo lo studio del “displacement” nelle tre direzioni dello spazio e della durata delle fasi del task cioè i tempi delle fasi di standing e di sitting, dello Stand to Sit e del Sit to Stand (dette fasi di transizione posturale), nonché delle sottofasi di queste. Inoltre, durante l’esecuzione dello Stand to Sit to Stand test, è possibile la misurazione delle accelerazioni antero-posteriore, laterale e verticale nelle fasi dinamiche del test, dati questi utili tra l’altro nella valutazione del rischio di caduta (ad es. accelerazioni laterali indice di sbandamento).

Dunque, si è scelto di investigare il task dello Stand to Sit to Stand in quanto test semplice da eseguire, economico e che, grazie all’impiego di una sola IMU, a sua volta strumento non invasivo e di semplice impiego, applicata al tronco considerato come unico corpo rigido, consente di valutare numerose condizioni cliniche, seguirne l’evoluzione e gli esiti nel tempo. Lo Stand to Sit to Stand test è eseguibile in diverse fasce di età e in vari campi di applicazione; risponde inoltre alla necessità crescente di un test ad uso domestico (*Pham M.H. et al., 2018*) che possa essere autosomministrato, ponendo una soluzione alle difficoltà di accesso alle strutture dedicate specie da parte di alcune categorie di soggetti quali anziani, portatori di handicap, persone non autosufficienti per diversi motivi, problema che si è acuito in periodo Covid, in cui la limitazione dell’accesso alle strutture e il prevalere della telemedicina hanno richiesto lo sviluppo di apparecchiature che il paziente stesso possa gestire, calibrare, con autosomministrazione del test e successiva comunicazione del risultato al curante/riabilitatore.

Inoltre, lo studio delle prestazioni di un sensore inerziale per la misurazione dei parametri del task è anche motivato dalla necessità di migliorarne le caratteristiche e validarne l’impiego in campo medico riabilitativo, al fine di aumentare la precisione delle rilevazioni, ottimizzando gli aspetti strutturali di tali strumenti in modo da renderli più leggeri e quindi agevoli da indossare anche al di

fuori di ambienti controllati, in cui sono eseguiti test in condizioni standard; è finalizzato inoltre allo sviluppo di sensori a più basso costo computazionale, con conseguente riduzione degli errori di calcolo e della tecnologia necessaria al loro funzionamento, il che implica anche una riduzione di costo monetario (*Cobo A. et al, 2020*)

## ***2. Materiali e Metodi***

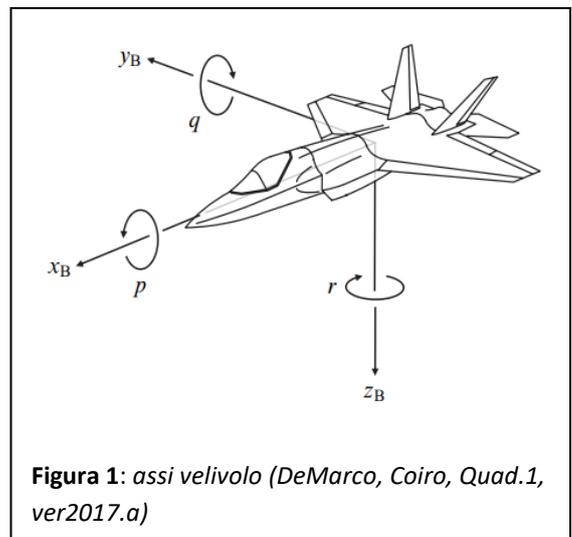
## ***2.1 Sistemi di Riferimento Spaziale***

L'analisi cinematica rappresenta lo studio del moto di un corpo supposto rigido che equivale a definire, per ogni istante di tempo, la sua posizione e orientamento rispetto a un sistema di riferimento scelto. Si parte con l'analisi della posizione e quindi si passa all'analisi cinematica di velocità e accelerazione (mediante metodo geometrico o analitico). Poiché l'obiettivo che ci poniamo è lo studio del movimento dello Stand to Sit to Stand test, la prima cosa necessaria è definire un sistema di coordinate che permetta di individuare in modo univoco e ad ogni istante la posizione di tutti gli elementi del sistema nello spazio. Inoltre, per definire la posa di un corpo rigido, che è identificato da tre punti non allineati, è necessario conoscere non solo il vettore posizione ma anche la matrice che ne stabilisce l'orientamento in modo da descrivere completamente i suoi sei gradi di libertà. Diversi sono i tipi di coordinate che possono essere usate (*Cappozzo A. et al, 1995*): dal momento che abbiamo misurato i parametri del task dello Stand to Sit to Stand ponendo una singola IMU sul tronco, considerando la parte superiore del corpo come un unico corpo rigido (HAT) in moto nello spazio, caratterizzato quindi da sei gradi di libertà, e poiché tale movimento è equiparabile ad una manovra aerea, abbiamo fatto riferimento ad un sistema di coordinate aeronautiche utilizzando il *Blockset Aerospace di MatLab (De Marco, Coiro, Quad.1, ver2017.a)*. I sistemi di coordinate permettono di tracciare la posizione e l'orientamento di un corpo: nello studio dei problemi della meccanica del volo in atmosfera, quando occorre definire un riferimento fisso, è ragionevole assumere un dato riferimento tangente come sistema di riferimento inerziale, trascurando gli effetti della rotazione terrestre. Nelle stesse circostanze, per l'entità e la breve durata dei fenomeni da studiare, è anche possibile sostituire alla superficie terrestre una superficie piana di estensione indefinita e coincidente con il piano  $\{O; x; y\}_T$ . Sono queste le assunzioni note come ipotesi di Terra piana ed inerziale (non-rotating, flat Earth). Quando non vi è possibilità di equivoco, si parla di riferimento Terra (Earth Frame, E),  $T_E = \{O; x; y; z\}_E$ , anziché di riferimento tangente. Nel nostro esperimento abbiamo adottato come riferimento fisso (di laboratorio) il sistema di riferimento Terra

(Earth Frame, E),  $T_E = \{O; x; y; z\}_E$ . La scelta della terna mobile di riferimento più adeguata è legata alla natura del problema da esaminare. In alcuni casi può essere opportuno riferirsi ad assi solidali al velivolo (assi velivolo) mentre in altri è preferibile assumere sistemi particolari non solidali al velivolo e non connessi direttamente alla traiettoria quali ad esempio gli assi aerodinamici (*De Marco, Coiro, Quad.1, ver2017.a*).

**Assi velivolo o assi Body:** nel caso di applicazioni aeronautiche dalle quali si possono poi estrapolare

per analogia grandezze di nostro interesse (ovvero il moto del tronco nello Stand to Sit to Stand misurato tramite IMU), si definisce terna di assi velivolo  $T_B$  (Body Axes), una terna trirettangola levogira solidale al velivolo, con origine nel baricentro. L'asse longitudinale  $x_B$  è contenuto nel piano di simmetria del velivolo ed è orientato positivamente verso la prua. L'asse velivolo  $z_B$ , normale a  $x_B$ , è contenuto nel piano di simmetria ed è



**Figura 1:** assi velivolo (*DeMarco, Coiro, Quad.1, ver2017.a*)

diretto positivamente nel senso testa-piedi del pilota. L'asse trasversale  $y_B$  completa la terna levogira e risulta quindi orientato positivamente verso il lato destro del pilota (*De Marco, Coiro, Quad.1, ver2017.a*). L'orientamento del velivolo rispetto allo spazio fisso, indipendentemente dalla traiettoria del suo baricentro, resta definito istante per istante dalla terna di angoli  $\phi, \theta, \psi$ . L'angolo di azimuth, o angolo di rotta (heading)  $\psi$ , è l'angolo compreso fra il piano verticale contenente l'asse velivolo longitudinale  $x_B$  ed il piano di riferimento verticale  $\{O_E; x_E; y_E; z_E\}$ . L'angolo di elevazione (elevation)  $\phi$ , viene definito come l'angolo che l'asse velivolo longitudinale  $x_B$  forma con il piano orizzontale  $\{O_E; x_E; y_E\}$ . Infine, l'angolo di inclinazione laterale (bank o roll)  $\theta$ , è l'angolo di cui risulta ruotato intorno

a  $x_B$  l'asse velivolo  $y_B$  a partire dalla posizione orizzontale (ali livellate). Tali angoli rappresentano gli angoli di Eulero del velivolo.

Per definizione, gli intervalli di variazione degli angoli di Eulero sono i seguenti:

**Tabella 1:** intervalli di variazione angoli di Eulero velivolo

$-\pi < \phi \leq \pi$	$-180^\circ < \phi_{deg} \leq 180^\circ$
$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$-90^\circ < \theta_{deg} < 90^\circ$
$0 \leq \psi < 2\pi$	$0^\circ \leq \psi_{deg} < 360^\circ$

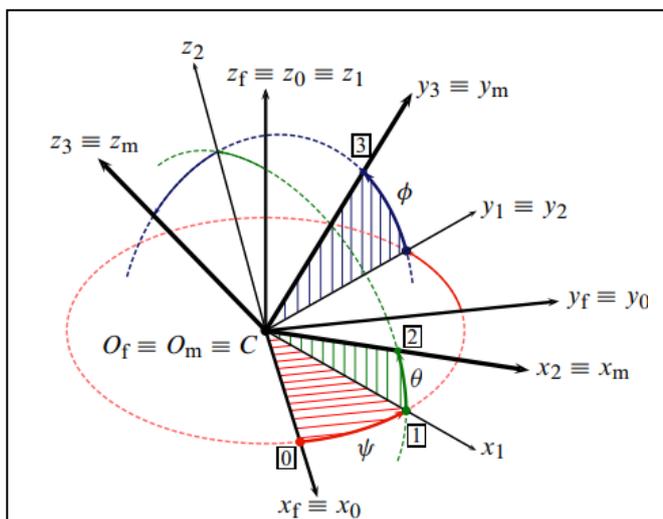
Spesso le rotazioni e l'orientamento di un corpo rigido nello spazio vengono descritti con metodi alternativi: angoli di Eulero, matrici di rotazione, vettori di rotazione o quaternioni (*Valenti R.G, et al, 2015*).

## ***2.2 Strumenti Matematici e Geometrici***

### 2.2.1 Angoli di Eulero

E' possibile esprimere l'orientamento di un corpo rigido come il risultato di una sequenza di tre rotazioni elementari. La rappresentazione matriciale per le rotazioni di un corpo rigido semplifica molte operazioni ma necessita di nove elementi per una descrizione completa dell'orientamento di un corpo rigido rotante.

La definizione comunemente accettata in ambito aeronautico è così formulata: siano genericamente definite  $T_f \{O_f, x_f, y_f, z_f\}$ , una terna fissa e  $T_m \{O_m, x_m, y_m, z_m\}$  una terna mobile, quest'ultima con origine solidale al velivolo. Ad ogni dato istante del moto, gli angoli di Eulero della terna  $T_m$  sono tre scalari corrispondenti alle entità di tre rotazioni ordinate e consecutive attorno a tre assi distinti. Tali rotazioni sono quelle che un sistema di coordinate immaginario  $T_0$ , con origine posta nell'origine del sistema mobile  $T_m$  ed avente inizialmente gli assi allineati a quelli del riferimento fisso  $T_f$ , deve compiere per trovarsi completamente sovrapposto a quello mobile.



**Figura 2:** rotazioni ordinate e consecutive attorno a tre assi distinti che un sistema di assi immaginario, con origine coincidente con quella del sistema mobile e assi allineati inizialmente con quelli di un sistema di riferimento fisso, deve compiere per trovarsi sovrapposto al sistema mobile di assi cartesiani (De Marco, Coiro, Quad.2, ver2017a)

Dalla Figura 2, nella quale è supposto che il punto  $O_m \equiv C$  solidale al velivolo, si deduce che le tre rotazioni in questione sono descritte come segue:

- prima rotazione del sistema è  $\{C; x_0; y_0; z_0\} \equiv \{C; x_f; y_f; z_f\}$  intorno a  $z_f \equiv z_0$  dell'angolo  $\psi$  per portarsi nella posizione individuata dalla terna  $\{C; x_1; y_1; z_1\}$  (avente  $z_1 \equiv z_0$ );
- seconda rotazione del sistema  $\{C; x_1; y_1; z_1\}$  intorno a  $y_1$  dell'angolo  $\theta$  per portarsi nella posizione individuata dalla terna  $\{C; x_2; y_2; z_2\}$

(avente  $y_2 \equiv y_1$ );

-una terza rotazione del sistema  $\{C; x_2; y_2; z_2\}$  intorno a  $x_2$  dell'angolo  $\phi$  per portarsi nella posizione finale individuata dalla terna  $\{C; x_3; y_3; z_3\} \equiv \{C; x_m; y_m; z_m\}$  (avente  $x_2 \equiv x_3 \equiv x_m$ ); in questa situazione la terna iniziale si è venuta a sovrapporre a quella mobile (*De Marco, Coiro, Quad.2 ver2017.a*).

L'ordine delle rotazioni è molto importante. In generale se le rotazioni avvenissero con ordine diverso, a parità di angoli, l'orientamento finale al quale pervenirebbe la terna  $T_0$  sarebbe diverso.

Quando la terna mobile coincide con quella degli assi velivolo (Body),  $T_m \equiv T_B$ , gli angoli di Eulero definiti in questo modo sono gli angoli di Eulero del velivolo e vengono denominati: angolo di azimuth o angolo di rotta- $\psi$  (heading), angolo di elevazione- $\theta$  (elevation) e angolo di inclinazione laterale - $\phi$  (bank). Spesso tali angoli vengono chiamati in modo non appropriato angolo di "imbardata", di "beccheggio" e di "rollio". Questi nomi corrispondono alla traduzione dei termini inglesi yaw, pitch e roll. Tuttavia esiste una sottile ma importante differenza tra gli angoli di Eulero e gli angoli di yaw, pitch e roll. L'angolo di azimuth rappresenta una rotazione intorno all'asse fisso  $z_f \equiv z_E$  mentre lo yaw, l'imbardata, è una rotazione intorno alla posizione istantanea di  $z_m \equiv z_B$ . Analogamente, l'angolo di elevazione rappresenta una rotazione intorno all'asse ausiliario  $y_1$  mentre il pitch, il beccheggio, è una rotazione intorno all'asse velivolo  $y_m \equiv y_B$ . Infine mentre i vettori di yaw, pitch e roll sono in linea generale tra loro ortogonali, i vettori rotazione non lo sono. (*De Marco, Coiro, Quad.2 ver2017.a*)

### 2.2.2 Rotazioni notevoli e matrici di rotazione fondamentali.

Come descritto da De Marco, Coiro nel Quaderno 2: "Orientamento del velivolo e trasformazione di assi", versione 2017a, se il vettore

$$\{\mathbf{v}\}_0 = [v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}]^T \quad (1a)$$

è un vettore  $\mathbf{V}_0$  nella terna di riferimento  $T_0$  e se  $T_1$  è una nuova terna ottenuta dalla prima attraverso una rotazione intorno all'asse  $z_0$  di un angolo  $\xi$ , allora lo stesso vettore espresso nella nuova terna è dato dalla

$$\begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\{\mathbf{v}\}_1 = [R(3, \xi)] \{\mathbf{v}\}_0 \quad (3a)$$

Generalizzando, la legge di trasformazione delle componenti di un vettore da un riferimento ad un altro, ottenuta per rotazione di un angolo intorno ad uno degli assi coordinati è espressa, rispettivamente, dalle matrici ortogonali seguenti

$$\begin{aligned} [R(1, \xi)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & \sin \xi \\ 0 & -\sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} & [R(2, \xi)] &= \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{bmatrix} \\ [R(3, \xi)] &= \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4a)$$

Tali matrici, chiamate matrici di rotazione fondamentali, sono matrici ortogonali, cioè tali che

$$[R(k, \xi)]^{-1} = [R(k, \xi)]^T \quad (5a)$$

ovvero l'inversa coincide con la trasposta; per tale motivo, il passaggio inverso dalla terna  $T_1$  alla  $T_0$  è immediato:

$$\{v\}_0 = [R(k, \xi)]^T \{v\}_1 \quad (6a)$$

La composizione delle rotazioni notevoli permette di esprimere la relazione che lega le componenti di uno stesso vettore nel sistema di assi Terra e nel sistema degli assi velivolo.

Per la trasformazione diretta  $T_E \rightarrow T_B$ , detta *earth-to-body*, si ha

$$\begin{pmatrix} v_{x_B} \\ v_{y_B} \\ v_{z_B} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{x_E} \\ v_{y_E} \\ v_{z_E} \end{pmatrix} \quad (7a)$$

Per la sua inversa, *body to earth*,

$$\begin{pmatrix} v_{x_E} \\ v_{y_E} \\ v_{z_E} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{x_B} \\ v_{y_B} \\ v_{z_B} \end{pmatrix} \quad (8a)$$

Quest'ultima, dopo aver esplicitato i prodotti riga colonna, diventa

$$\begin{pmatrix} v_{x_E} \\ v_{y_E} \\ v_{z_E} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{x_B} \\ v_{y_B} \\ v_{z_B} \end{pmatrix} \quad (9a)$$

Ovvero, in forma compatta

$$\{v\}_E = [T]_{EB} \{v\}_B \quad (10a)$$

Dove

$$[T]_{EB} = [R(3, \psi)]^T [R(2, \theta)]^T [R(1, \phi)]^T \quad (11a)$$

è la *matrice di trasformazione inversa* mentre

$$[T]_{BE} = [R(1, \phi)] [R(2, \theta)] [R(3, \psi)]^T \quad (12a)$$

è la *matrice di trasformazione diretta*. Le matrici di trasformazione  $[T]_{EB}$  e  $[T]_{BE}$ , sono anche dette matrici dei coseni direttori (*direction cosine matrices, DCM*). (De Marco, Coiro, Quad.2, ver2017a)

Quindi mediante la composizione di matrici di rotazione fondamentali si può rappresentare una sequenza di rotazioni finite intorno agli assi principali del sistema OXYZ. Dal momento che le moltiplicazioni delle matrici non sono commutative, è importante porre attenzione all'ordine delle rotazioni.

### **2.2.2.1 Derivate temporali degli angoli di Eulero e Gimbal equations**

Vediamo la relazione che esprime l'entità della variazione degli angoli di Eulero nel tempo in termini di componenti del vettore velocità di rotazione istantanea del velivolo nel riferimento  $T_B$ ,

$$\{\Omega\} = [p, q, r]^T \quad (13a)$$

Grazie alle matrici di rotazione è possibile ottenere la relazione desiderata a mezzo di una composizione di matrici colonna costruite in base alle definizioni degli angoli di Eulero. Se si osserva che l'angolo di bank  $\phi$  è definito come rotazione di base nel riferimento  $T_2$ , l'angolo di elevazione  $\theta$ ,

come una rotazione di base nel riferimento  $T_1$  e l'angolo di azimuth  $\psi$ , come rotazione di base nel riferimento  $T_0 \equiv T_E$ , ne consegue che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14a)$$

che in forma compatta è rappresentata come segue:

$$\begin{aligned} \{\Omega\}_B &= [R(1, \phi)]\{\dot{\phi}\}_2 + \\ &[R(1, \phi)][R(2, \theta)]\{\dot{\theta}\}_1 + \\ &[R(1, \phi)][R(2, \theta)][R(3, \psi)]\{\dot{\psi}\}_E \end{aligned} \quad (15a)$$

Esplicitando i prodotti matriciali si ottiene

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (16a)$$

che in forma compatta si presenta come di seguito indicato

$$\{\Omega\}_B = [G] \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (17a)$$

Dove [G]

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad (18a)$$

Il vettore colonna,

$$[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \quad (19a)$$

al contrario del vettore

$$\{\Omega\}_B = [p, q, r]^T \quad (20a)$$

rappresenta una “collezione di ratei” di variazioni angolari (*De Marco, Coiro, Quad.2, ver2017a*) dal momento che i suoi singoli elementi sono componenti di tre diverse grandezze definite in tre diverse terne di riferimento. Ne consegue che la matrice [G] non è una matrice ortogonale. La matrice inversa di [G] è la matrice che compare nella trasformazione inversa (21a)

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \frac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (21a)$$

che in forma compatta

$$[G]^{-1} \{\Omega\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (22a)$$

dove  $[G]^{-1}$  è rappresentata da

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \frac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \quad (23a)$$

Le equazioni 18a e 21a vengono denominate *gimbal equations*: esse rappresentano le variazioni di posizione angolare dei riferimenti rispetto ai quali si definiscono istante per istante gli angoli di Eulero. Questi, corrispondono agli anelli (*gimbals*) della sospensione cardanica e la loro posizione corrisponde all'orientamento attuale del dispositivo (*De Marco, Coiro, Quad.2, ver2017.a*).

Vi sono inoltre delle relazioni cinematiche ausiliarie: noti ad un generico istante i vettori velocità traslazionale  $\mathbf{V}$  e velocità di rotazione istantanea  $\mathbf{\Omega}$ , se si sceglie come terna mobile la terna degli assi body,  $T_m \equiv T_B$ , e come terna fissa la terna di assi Terra,  $T_f \equiv T_E$ , significa che si conoscono le componenti dei vettori  $\{\mathbf{V}\}_B$  e  $\{\mathbf{\Omega}\}_B$ , ovvero i sei elementi scalari della matrice colonna  $[[u, v, w]^T, [p, q, r]^T]^T$ ; si ottiene allora un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine che mettono in relazione le incognite fondamentali delle equazioni del moto, ovvero le componenti della velocità traslazionale e di rotazione istantanea nel sistema di assi body con le variazioni temporali della posizione del baricentro e dell'orientamento del dispositivo rispetto agli assi del riferimento fisso (Earth). L'integrazione nel tempo di queste relazioni cinematiche ausiliarie permette di determinare la traiettoria del baricentro e la storia degli orientamenti successivi della IMU intesa come corpo rigido solidale al tronco (*De Marco, Coiro, Quad.2, ver2017.a*).

Quando l'assetto del corpo rigido è tale che l'angolo  $\theta$  tende a  $\pm\pi/2$ , la trasformazione perde significato, essendo indeterminata l'integrazione nel tempo degli angoli di Eulero. A causa di questa singolarità, nota come *gimbal lock*, nessun software è in grado di risolvere numericamente le equazioni del moto di un corpo rigido a sei gradi di libertà (degree of freedom, DOF), per cui non

utilizza una formulazione delle equazioni cinematiche ausiliarie basata sugli angoli di Eulero. Esistono formulazioni alternative prive di singolarità, come quelle basate sul quaternioni dell'orientamento o sulle trasformazioni dei coseni direttori.

Una rappresentazione molto usata è quella che usa i *parametri di Eulero*: la relazione tra le componenti di un vettore nella terna di assi velivolo e quelle corrispondenti nel riferimento Terra è data dalla seguente formula

$$\begin{pmatrix} v_{xB} \\ v_{yB} \\ v_{zB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} + C_\mu & e_{xy} + e_z S_\mu & e_{xz} - e_y S_\mu \\ e_{xy} - e_z S_\mu & e_{yy} + C_\mu & e_{yz} + e_x S_\mu \\ e_{xz} + e_y S_\mu & e_{yz} - e_x S_\mu & e_{zz} + C_\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xE} \\ v_{yE} \\ v_{zE} \end{pmatrix} \quad (24a)$$

nota come **Formula di Eulero** che, con la sua inversa

$$\begin{pmatrix} v_{xE} \\ v_{yE} \\ v_{zE} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} + C_\mu & e_{xy} - e_z S_\mu & e_{xz} + e_y S_\mu \\ e_{xy} + e_z S_\mu & e_{yy} + C_\mu & e_{yz} - e_x S_\mu \\ e_{xz} - e_y S_\mu & e_{yz} + e_x S_\mu & e_{zz} + C_\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xB} \\ v_{yB} \\ v_{zB} \end{pmatrix} \quad (25a)$$

forniscono la parametrizzazione asse-angolo, e i quattro parametri  $(\mu, e_x, e_y, e_z)$ ; esse prendono il nome di parametri di Eulero.

Tuttavia, anche questa formulazione basata sui **parametri di Eulero** presenta una singolarità, per cui la parametrizzazione asse-angolo non è utilizzata nella risoluzione delle equazioni del moto, mentre, attraverso un cambio di variabili si ottiene una formulazione alternativa, sempre a quattro parametri, ma priva di singolarità. Le trasformazioni cinematiche che ne conseguono sono basate su quattro quantità che prendono il nome di componenti del quaternioni dell'orientamento del corpo rigido, anche noti come parametri di Eulero-Rodrigues (*De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017.a*).

### 2.2.2.2 Parametri simmetrici di Eulero-Rodrigues

Come detto, la parametrizzazione di Eulero-Rodrigues è legata a quella asse-angolo attraverso un cambio di variabili. I quattro parametri della formulazione basata sull'asse e sull'angolo di Eulero vengono combinati tra loro per ottenere quattro nuove grandezze che risultano più adeguate alla descrizione dell'orientamento.

Tali grandezze si definiscono come:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\mu}{2} \\ e_x \sin \frac{\mu}{2} \\ e_y \sin \frac{\mu}{2} \\ e_z \sin \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

(26a)

note come i quattro parametri simmetrici di Eulero-Rodrigues o come componenti del quaternion di rotazione finita alla base di una parametrizzazione dell'orientamento e delle rotazioni di un corpo rigido molto usata in diversi settori tra i quali la simulazione di volo.

Le quattro grandezze definite nella (26a), descrivono orientamenti a tre gradi di libertà. Le derivate nel tempo dei parametri di Eulero-Rodrigues sono legate a quelle dei parametri della formulazione asse-angolo. Semplicemente differenziando la formula (26°) rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\mu}{2} \\ e_x \cos \frac{\mu}{2} \\ e_y \cos \frac{\mu}{2} \\ e_z \cos \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \frac{\dot{\mu}}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{e}_x \sin \frac{\mu}{2} \\ \dot{e}_y \sin \frac{\mu}{2} \\ \dot{e}_z \sin \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

(27a)

da cui si arriva a

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_x S_{\mu/2} & -e_y S_{\mu/2} & -e_z S_{\mu/2} \\ C_{\mu/2} & -e_z S_{\mu/2} & e_y S_{\mu/2} \\ e_z S_{\mu/2} & C_{\mu/2} & -e_x S_{\mu/2} \\ -e_y S_{\mu/2} & e_x S_{\mu/2} & C_{\mu/2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

(28a)

(De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017.a)

**2.2.3 Il Quaternione dell'orientamento:** i quaternioni sono entità matematiche introdotte da William Rowan Hamilton nel 1843 come estensioni dei numeri complessi. I quaternioni formano un corpo: soddisfano quindi tutte le proprietà usuali dei campi, quali i numeri reali o complessi, tranne la proprietà commutativa del prodotto. I quaternioni contengono i numeri complessi e formano anche uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 (analogamente ai complessi, che sono uno spazio a 2 dimensioni, cioè un piano). Le due proprietà di corpo e di spazio vettoriale conferiscono ai quaternioni una struttura di algebra di divisione non commutativa. I quaternioni trovano un'importante applicazione nella modellizzazione delle rotazioni nello spazio, per questo motivo sono molto usati nella fisica teorica, nella computer grafica 3D e nella robotica.

Il quaternione costituisce la rappresentazione di una rotazione basata sui numeri iper-complessi. Esso è rappresentato da una parte scalare,  $S$ , e una parte vettoriale,  $\mathbf{V}$ ; la parte scalare rappresenta l'angolo di rotazione, mentre la parte vettoriale, l'asse di rotazione. Un vantaggio fondamentale del quaternione è che esso non presenta il fenomeno di singolarità nella rappresentazione spaziale.

**2.2.3.1 Elementi di algebra dei quaternioni.** I numeri complessi possono essere visti come una rappresentazione di un punto su un piano e si basano sulla definizione dell'unità immaginaria  $i^2 = -1$ . Hamilton, volendo estendere questo concetto allo spazio, pose le definizioni seguenti:

**Definizione 1.1.** Sia  $\mathbf{H}$  l'insieme di tutti gli elementi del tipo

$$a + ib + jc + kd \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } i, j, k \text{ simboli.}$$

(1b)

Definiamo su questo insieme le operazioni di somma e prodotto nel seguente modo:

• **somma:**  $(a + ib + jc + kd) + (a_0 + ib_0 + jc_0 + kd_0) = (a + a_0) + i(b + b_0) + j(c + c_0) + k(d + d_0)$

(2b)

• **prodotto:** pretendendo che il prodotto tra numeri reali sia quello di  $\mathbb{R}$ , basta definire i prodotti tra i simboli  $i, j, k$ . Lo facciamo nel seguente modo:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

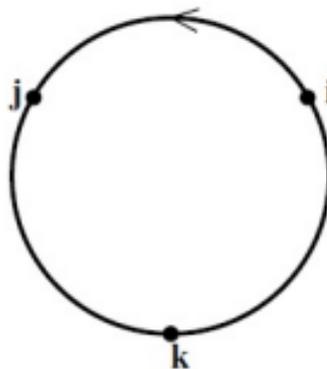
$$ij = k = -ji,$$

$$jk = i = -kj,$$

$$ki = j = -ik$$

(3b)

da qui si vede che il prodotto in  $\mathbf{H}$  è non commutativo.



**Figura 3:** Diagramma moltiplicativo: (ovvero i quadrati risultano tutti essere uguali a  $-1$ ; i prodotti di due elementi consecutivi nell'ordine ciclico  $i, j, k$  dà l'elemento successivo, mentre i prodotti di due elementi consecutivi nell'ordine inverso dà l'opposto del terzo elemento).

Quindi, dati due elementi

$$z = a + ib + jc + kd \quad \text{e} \quad z_0 = a_0 + ib_0 + jc_0 + kd_0 \quad \text{di } \mathbf{H},$$

(4b)

in base alla **Definizione 1.1**, si ha:

$$zz_0 = (aa_0 - bb_0 - cc_0 - dd_0) + i(ab_0 + ba_0 + cd_0 - dc_0) + j(ac_0 + ca_0 + db_0 - bd_0) + k(ad_0 + da_0 + bc_0 - cb_0)$$

(5b)

Gli elementi di  $\mathbf{H}$  sono detti quaternioni di Hamilton. In particolare, preso

$$r \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad z = a + ib + jc + kd \in \mathbf{H},$$

(6b)

il loro prodotto è definito come:

$$rz = ra + irb + jrc + krd$$

(7b)

Le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalari reali dotano l'insieme  $\mathbf{H}$  di una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione quattro ed una sua base è  $(1, i, j, k)$ .

Il prodotto (7b) è definito bilineare. Inoltre le operazioni di somma e prodotto dotano  $\mathbf{H}$  di una struttura di **anello**. Dato un quaternionione  $z = a + ib + jc + kd$ ,

$$\mathbf{a} = \Re z \quad \text{si dirà parte reale di } z,$$

(8b)

mentre

$$\mathbf{ib} + \mathbf{jc} + \mathbf{kd} = \Im z \quad \text{si dirà parte immaginaria di } z.$$

$$\text{Perciò } \mathbf{z} = \Re z + \Im z$$

(9b)

Il quaternionione (6b), può essere rappresentato da una 4-upla di numeri reali  $(a, b, c, d)$ , e quindi è possibile vederlo come un punto o un vettore in  $\mathbb{R}^{(4)}$ .

Possiamo inoltre scrivere  $z$  nella forma:

$$z = (a + ib) + (c + id) j \quad (10b)$$

perciò un quaternionione può essere visto anche come una coppia di numeri complessi

$$(z_{1c}, z_{2c}) = (a + ib, c + id), \quad (11b)$$

o equivalentemente possiamo scrivere

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j. \quad (12b)$$

I quaternioni contengono in modo naturale:

- i **numeri reali** ( $r = (r, 0, 0, 0)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ),
- i **numeri complessi** ( $a + ib = (a, b, 0, 0)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ),
- i **vettori in  $\mathbb{R}^{(3)}$**  ( $\mathbf{v} = (0, v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$ , dove  $i, j, k$  sono in questo caso i versori di un sistema di riferimento cartesiano destrorso).

Anche per i quaternioni, in analogia con i numeri complessi, si definiscono i concetti di coniugato e di norma. Si differenziano però dai complessi per il fatto che il loro prodotto non è commutativo.

**Definizione 1.2 (Coniugato).** Dato un elemento

$$z = a + ib + jc + kd \text{ di } \mathbf{H}, \quad (6b)$$

il suo coniugato è il quaternionione

$$z = a - ib - jc - kd = a + i(-b) + j(-c) + k(-d) \quad (13b)$$

Un quaternionione  $z$  si dice:

- puramente reale se  $b = c = d = 0$ , quindi  $\mathbf{z} = \mathcal{R}\mathbf{z}$
- puramente immaginario se  $a = 0$ , quindi  $\mathbf{z} = \mathcal{I}\mathbf{z}$ .

(Cailotto, M. 2006).

A prescindere dalle definizioni date, in questa trattazione useremo la notazione standard che denota un quaternionione come

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (14b)$$

Inoltre, indicheremo il complesso coniugato di un quaternionione  $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}$ , come  $\mathbf{q}^*$  definito come:

$$\mathbf{q}^* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 \quad (15b)$$

Conseguentemente vale la relazione:

$$(\mathbf{pq})^* = \mathbf{q}^*\mathbf{p}^* \quad (16b)$$

**Norma** La norma di un quaternionione  $\mathbf{q}$  è definita come il prodotto scalare del coniugato per il quaternionione  $\mathbf{q}$ :

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}^*\mathbf{q}} \quad (17b)$$

Un quaternionione si dice unitario se la sua norma è 1.

**Inverso di un quaternionione:** l'inverso di un elemento  $\mathbf{q}$  è definito come l'elemento  $\mathbf{q}^{-1}$  tale che:

$$\mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1 \quad \& \quad \mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = 1 \quad (18b)$$

Pre-moltiplicando ambo i membri della precedente equazione per  $\mathbf{q}^*$  si ottiene:

$$\mathbf{q}^*\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* \Rightarrow |\mathbf{q}|^2\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* \Rightarrow \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*/|\mathbf{q}|^2 \quad (19b)$$

Si deduce quindi che se  $\mathbf{q}$  è un quaternionione unitario, allora  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$

**Prodotto tra quaternioni:** Il prodotto tra due quaternioni  $p$  e  $q$  è definito come il prodotto tra due polinomi nelle incognite  $q_i, p_i$  con  $i \in [0, 3]$ . Tenendo conto della definizione dei numeri complessi, segue che:

$$p \otimes q = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \quad (20b)$$

I quaternioni si definiscono quaternioni puri, quando hanno parte scalare nulla:

$$q = 0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (21b)$$

con  $i, j, k$  i tre versori di  $\mathbb{R}^3$ . (De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017a)

**2.2.3.2 Rotazioni finite e quaternioni.** Le definizioni esposte, in particolare quella di prodotto e di quaternione unitario, permettono un'utile rappresentazione delle rotazioni di un corpo rigido. Detto  $v = (0, \mathbf{v})$  un quaternione a parte scalare nulla con il quale si vuole identificare il generico vettore  $\mathbf{v}$ , una moltiplicazione a sinistra di  $\mathbf{v}$  per un quaternione unitario  $\mathbf{u}$  ed a destra per il coniugato  $\mathbf{u}^*$  fornisce il quaternionone

$$V' = \mathbf{u} \otimes (v \otimes \mathbf{u}^*) \quad (22b)$$

avente anch'esso parte scalare nulla,  $\text{Scal}(V') = 0$ .

Allora è possibile dimostrare che la parte vettoriale dell'operazione (22b), è un vettore  $v'$  da interpretarsi come il risultato di una rotazione del vettore  $v$  nello spazio euclideo tridimensionale

$$(|v'| = |u| |v| |u| = |v| = \sqrt{v \cdot v}) \quad (23b)$$

La rotazione che trasforma  $v$  in  $v'$  dipende dall'entità del quaternione unitario  $u$ . Pertanto, un quaternione unitario può essere utilizzato per operare delle rotazioni di un vettore, se questo viene espresso come quaternione a parte scalare nulla. Applicando la regola (20b) del prodotto tra quaternioni al triplo prodotto di quaternioni

$$p \otimes (q \otimes r) \tag{24b}$$

specializzata al caso particolare

$$v' = u \otimes (v \otimes u^*) \tag{25b}$$

si ottiene la seguente espressione notevole:

$$v' = (u_0^2 - u \cdot u) v + (2u_0) u \wedge v + 2 (v \cdot u) u \tag{26b}$$

molto simile all'espressione per le rotazioni finite intorno ad un versore:

$$v' = \cos \mu v + \sin \mu e \wedge v + (1 - \cos \mu) (v \cdot e) e \tag{27b}$$

dove  $\mu$  è l'angolo di rotazione intorno all'asse di Eulero di versore  $e$ .

Poichè le equazioni viste rappresentano una rotazione e ricordando il teorema di Eulero sulle rotazioni finite, si può considerare il moto di un corpo rigido incernierato in un punto fisso che sarà un moto puramente rotazionale intorno al punto di cerniera. In particolare, il moto del corpo si identificherà con il moto di un sistema di riferimento mobile  $T_m$ , ad esso solidale, con origine nel punto di cerniera, rispetto ad un riferimento fisso  $T_f$  avente la stessa origine. Il vettore  $v'$  si può interpretare come il vettore  $[x]_f$  delle coordinate dello stesso punto materiale ma espresse stavolta nel riferimento fisso. Diversamente rappresentato, la (26b) è una formulazione in termini quaternionali di una trasformazione di rotazione del tipo

$$\{x\}_f = [T]_{fm}\{x\}_m \quad (28b)$$

Data questa interpretazione, si rinominano i quaternioni corrispondenti a  $v$  e  $v'$  con  $X=(0, x)$  e  $X'=(0, x')$ . Possiamo inoltre differenziare l'equazione sopra rispetto al tempo da cui la (29b)

$$dx'/dt = du/dt \otimes (x \otimes u^*) + u \otimes (x \otimes du^*/dt) \quad (29b)$$

che si ottiene applicando la regola di derivazione del prodotto, valida anche per i quaternioni, tenendo conto del fatto che  $\dot{x}=0$ , per definizione di corpo rigido.

Il quaternionone  $dx'/dt$  con parte scalare nulla, rappresenta la velocità istantanea del punto materiale considerato nel riferimento fisso (velocità assoluta):

$$dx'/dt = (0, dx'/dt) \quad (30b)$$

Se si inverte la (25b) e si sostituisce  $v$  e  $v'$  con  $x$  e  $x'$  si ottiene

$$x = u^* \otimes (x' \otimes u) \quad (31b)$$

Inoltre esprimendo  $x$  in termini di  $x'$  al secondo membro della (29b) si ottiene allora

$$dx'/dt = du/dt \otimes (u^* \otimes x') + x' \otimes (u \otimes du^*/dt) \quad (32b)$$

Poiché

$$u^* \otimes u = 1 = (1,0) \quad (33b)$$

si deduce che i quaternioni

$$(du/dt) \otimes u^* \quad e \quad u \otimes (du^*/dt) \quad (34b)$$

hanno entrambi parte scalare nulla e parte vettoriale opposta.

Cioè detto

$$\boldsymbol{\omega}' = \text{Vec}((du/dt) \otimes u^*) \quad (35b)$$

si ha:

$$(du/dt) \otimes u^* = (0, \boldsymbol{\omega}') \quad (36b)$$

e

$$u \otimes (du^*/dt) = (0, -\boldsymbol{\omega}') \quad (37b)$$

Si può allora concludere che il quaternione  $dx'/dt$ , ha parte scalare nulla e parte vettoriale pari a

$$2\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{x}' \quad (38b)$$

Si può scrivere allora

$$dx'/dt = (0, dx'/dt) = (0, 2\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{x}') \quad (39b)$$

Inoltre, se si pone

$$2\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega}'_m \quad (40b)$$

cioè velocità angolare istantanea del corpo rigido rappresentata nello spazio fisso, e si definisce il

quaternione

$$\boldsymbol{\omega}' = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}'_m) \quad (41b)$$

si può dimostrare che

$$\boldsymbol{\omega}' = 2(du/dt) \otimes u^* \quad (42b)$$

è equivalente a

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \{\Omega_m\}_f \end{Bmatrix} = 2 [\widehat{\mathbb{W}}']^T \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix}$$

(43b)

che rappresenta la velocità angolare istantanea del riferimento mobile nel riferimento fisso, cioè il vettore  $\{\Omega_m\}_f$ . L'inversa della relazione (42b), è rappresentata dalla

$$du/dt = 1/2 \Omega' \otimes u$$

(44b)

dalla quale si ottiene la relazione matriciale

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}$$

(45b)

in cui  $q_0, q_x, q_y, q_z$  sono le componenti del quaternione normalizzato (ovvero unitario) dell'orientamento. La relazione (45b) è una relazione fondamentale: rappresenta infatti il sistema di equazioni differenziali che devono essere integrate per ottenere gli angoli di Eulero (poiché  $p, q, r$  sono le componenti della velocità angolare in uscita dal giroscopio), e, nel contempo, mette in relazione le componenti del quaternione e le componenti  $p, q, r$  che sono misurate dal giroscopio.

Poiché la formulazione scelta ai fini dell'integrazione numerica delle equazioni del moto è quella basata sul quaternione dell'orientamento, la relazione differenziale (45b) permette l'aggiornamento dell'orientamento del corpo rigido ad ogni passo e dunque la determinazione del moto. Per quanto riguarda la rappresentazione dell'orientamento, poiché è necessario conoscere i valori degli angoli di Eulero istante per istante (*time histories*), è necessario esprimere la corrispondenza tra angoli di Eulero e un dato quaternione dell'orientamento per cui, noto il quaternione dell'orientamento si

possono trovare i corrispondenti angoli di Eulero e, viceversa, noti gli angoli di Eulero, per un dato orientamento si può trovare il quaternionione corrispondente. La prima relazione è necessaria per la rappresentazione grafica del moto mentre l'operazione inversa, è importante nelle situazioni in cui sono imposte le condizioni iniziali o alcuni vincoli particolari e se ne devono ricavare le corrispondenti relazioni in termini di componenti del quaternionione.

Le componenti p, q, r rappresentano i valori di velocità angolare che un giroscopio triassiale montato su una IMU può misurare; ne consegue che l'integrazione del sistema di equazioni differenziali (45b), consente di ottenere l'evoluzione temporale delle componenti del quaternionione e di conseguenza, date le relazioni tra quaternionione ed angoli di Eulero, anche l'assetto della IMU. Per integrare il sistema di equazioni differenziali ordinarie (45b) sono stati utilizzati metodi di analisi numerica implementati in Matlab. (*De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017.a*)

La formulazione basata sul quaternionione dell'orientamento nasce dalla particolare forma delle relazioni cinematiche differenziali a cui obbediscono le variazioni dell'orientamento di un corpo rigido. La relazione (16a)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

(16a)

e la sua inversa

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi \sin \theta}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$$

(17a)

forniscono l'entità di variazione degli angoli di Eulero del corpo rigido note le componenti della velocità angolare istantanea.

La matrice al secondo membro della 16a, diviene singolare quando l'angolo di elevazione  $\theta$ , tende ad assumere il valore  $90^\circ$ : in tal caso le relazioni precedenti divengono inapplicabili.

Le componenti  $(q_0, q_x, q_y, q_z)$  del quaternione dell'orientamento sono collegate agli angoli di Eulero del riferimento mobile (body) tramite le relazioni seguenti:

$$\begin{Bmatrix} q_0 \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}$$

(46b)

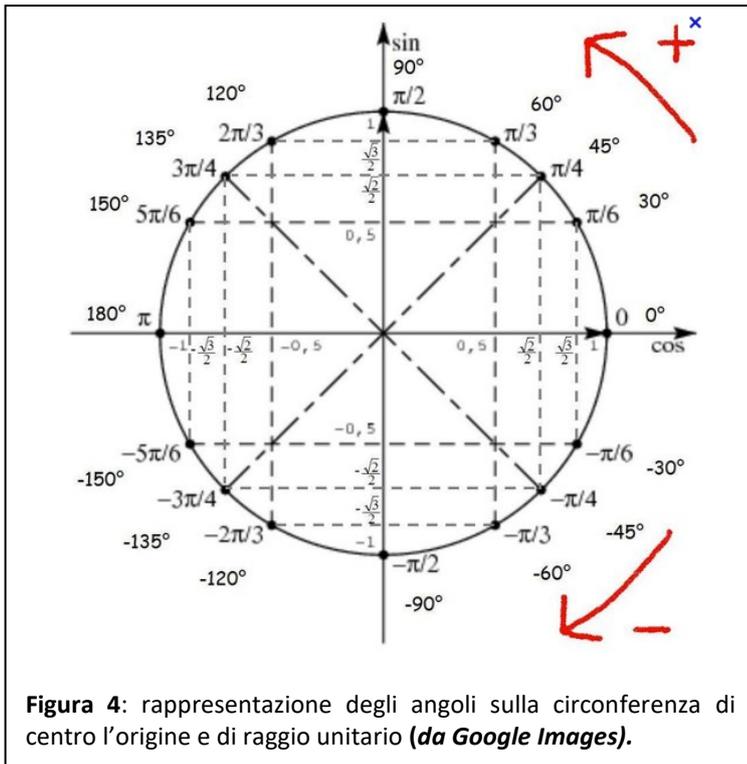
le cui relazioni inverse sono le seguenti:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{atan2} \left[ 2(q_0 q_x + q_y q_z), (q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2) \right] \\ \operatorname{asin} \left[ 2(q_0 q_y - q_x q_z) \right] \\ \operatorname{atan2} \left[ 2(q_0 q_z + q_x q_y), (q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2) \right] \end{pmatrix}$$

(47b)

Tali relazioni consentono di ricostruire la terna di valori degli angoli di Eulero a partire dalle componenti del quaternion unitario dell'orientamento (De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017a).

La funzione  $atan2(s,c)$ , è una funzione a due argomenti che sono il numeratore e il denominatore di un rapporto di cui si vuole l'arcotangente; in particolare il numeratore rappresenta il seno e il



denominatore il coseno dell'angolo che si vuole calcolare. Essendo gli angoli  $\phi$  e  $\psi$  angoli definiti in intervalli di ampiezza  $2\pi$ , la funzione  $atan2$  è necessaria nella prima e nell'ultima delle relazioni poiché essa restituisce un risultato angolare nel quadrante opportuno a seconda dei segni di ciascuno dei suoi argomenti. Viceversa, per la determinazione dell'angolo  $\theta$  non è richiesta una funzione a due

argomenti dato che esso è definito nell'intervallo che va da  $-\pi/2$  a  $+\pi/2$ .

Tale relazione non ha validità generale infatti non è applicabile nei casi in cui l'orientamento della piattaforma IMU dia luogo al *gimbal lock*. Ciò accade nelle situazioni di assetto nelle quali  $\theta \rightarrow \pm \pi/2$ . Qualora l'angolo di elevazione  $\theta$  attraversa i valori  $\pm\pi/2$ , sia l'angolo di heading che l'angolo di bank dovranno subire necessariamente un salto di  $\pi$ . Inoltre, per un angolo  $\theta$  di  $\pm\pi/2$ , l'angolo  $\phi$  può solo essere espresso come funzione del valore arbitrario di  $\psi$  (De Marco, Coiro, Quad.3, ver2017.a).

## 2.2.4 Metodi numerici per problemi ai valori iniziali: Ordinary Differential Equations

Le equazioni differenziali sono il linguaggio che la matematica usa per modellizzare i fenomeni reali. Esse descrivono fenomeni in movimento o in evoluzione nel tempo: un'equazione differenziale descrive come varia una funzione, soluzione del problema, esprimendo il legame tra essa e le sue derivate (De Marchi S, 2019). Un'equazione differenziale è un'equazione che infatti coinvolge una o più derivate della funzione incognita. Ad esempio

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{1c}$$

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \tag{2c}$$

sono due equazioni differenziali di primo e secondo ordine, rispettivamente. Diremo che un'equazione differenziale ha ordine  $p$ , se  $p$  è l'ordine massimo di derivazione che appare nella sua formula. (De Marchi S, 2019). Esclusi pochi casi, le soluzioni di una equazione differenziale ordinaria o di un sistema di esse, non possono essere trovate per via analitica, cioè non possono essere espresse mediante polinomi, funzioni elementari e funzioni trigonometriche per cui sono necessarie tecniche numeriche per la risoluzione di una ODE.

Matlab fornisce diverse funzioni per risolvere sistemi di equazioni differenziali, costituite dal sistema delle ODE solver tra cui ode45, ode23, ode113 che rappresentano metodi espliciti; inoltre vi sono metodi impliciti come ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb (schede MatLab).

E' necessario prima definire il concetto di stiffness di un sistema poiché è in base a tale caratteristica che si sceglie la ode solver più adeguata. L'essenza della stiffness (che significa rigidità) sta nel fatto che la soluzione che deve essere approssimata, varia lentamente e, nello stesso tempo, esistono alcune sue perturbazioni che si smorzano rapidamente su di essa. In altri termini, si può dire che c'è stiffness quando c'è "troppa" stabilità di una soluzione lentamente variabile e questo può causare

difficoltà computazionali nel risolvere un sistema stiff. In termini pratici, un sistema differenziale ben condizionato risulta stiff (rigido), se il modulo del rapporto tra il massimo ed il minimo autovalore della matrice Jacobiana,  $J$ , (vedi 4.c) è grande. Questo significa che una equazione o un sistema di equazioni si dice stiff quando uno schema esplicito è costretto ad usare un passo di integrazione molto piccolo per evitare che la soluzione diventi instabile. E ciò avviene ad esempio quando sono presenti equazioni differenziali con diverse scale di tempo (ad es. sistemi dinamici con costanti di tempo significativamente differenti) (Hairer E. et al., 2008). D'altro canto, ne consegue che un sistema si definisce non stiff quanto tutto ciò non avviene. Quanto appena visto, implica una scelta diversa tra le diverse "ode solver function":

- per problemi non stiff, sono in genere usate le seguenti funzioni: **ode45**, è una function adattativa esplicita, basata su schemi Runge Kutta espliciti di ordine 4 e 5. E' un metodo ad un passo; **ode23**, basata su schemi Runge-Kutta espliciti di ordine 2 e 3. E' più efficiente di ode45 se non si richiede una precisione elevata e se il problema è moderatamente stiff; **ode113**, basata sulla formula di Adams-Bashforth-Moulton di ordine variabile (da 1 a 13). Può essere più efficiente di ode45 a basse tolleranze e quando la valutazione della funzione è molto costosa. E' un metodo multistep, cioè richiede la soluzione in punti precedenti per calcolare quella nel punto corrente.

- per problemi stiff sono in genere usate le seguenti funzioni: **ode15s**, metodo implicito di ordine variabile da 1 a 5, basato sulla differenziazione numerica. E' un metodo di risoluzione multistep da usare quando il problema è stiff oppure l'equazione differenziale è associata ad equazioni algebriche; **ode23s** è un metodo ad un passo basato su una formula di Rosenbrock di ordine 2. E' più efficiente di ode15s ad alte tolleranze; **ode23t**, implementazione della formula dei trapezi per problemi moderatamente stiff; **ode23tb**, basata sulla formula di Runge-Kutta implicita. E' più efficiente di ode15s ad alte tolleranze (scheda matlab OdeSuite).

In generale un'equazione differenziale ordinaria ammette sempre infinite soluzioni. Per ottenere una soluzione particolare dobbiamo fissare alcune condizioni che possono essere condizioni iniziali, condizioni al bordo oppure entrambe. Il numero delle condizioni in genere dipende dall'ordine dell'equazione differenziale.

**Alcune definizioni.**

**a. Problema di Cauchy:** Il problema differenziale del primo ordine di Cauchy (problema a valori iniziali) è rappresentato da  $y'(t)=f(t,y(t))$ ,  $t \in [t_0, T]$ , e descrive fenomeni in evoluzione nel tempo. Se esso ammette una soluzione, ammette una famiglia di soluzioni. Una soluzione particolare  $y(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  si ottiene assegnando la condizione iniziale  $y(t_0)=y_0$  dove  $y_0$  viene chiamato *valore iniziale*. Se  $f$  non dipende da  $t$ , cioè  $f = f(y)$ , allora l'equazione differenziale si dice equazione autonoma.

Molti fenomeni sono descritti da sistemi di equazioni differenziali. I metodi relativi ad un'equazione del primo ordine si estendono semplicemente ai sistemi del primo ordine. Gli stessi metodi si possono utilizzare per risolvere equazioni di ordine  $p > 1$  (con derivate di ordine  $p$ ).

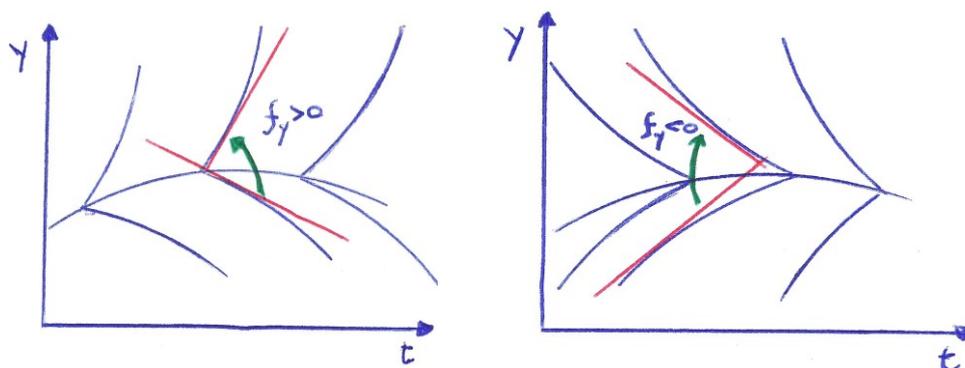
**b. Condizionamento di un problema a valori iniziali.** Prima di risolvere numericamente una equazione differenziale, bisogna analizzare il condizionamento, ossia il comportamento della soluzione in presenza di una perturbazione della funzione o del valore iniziale.

Un'equazione differenziale è ben condizionata se una piccola perturbazione della funzione  $f$  o della condizione iniziale  $y_0$  generano una soluzione che si discosta di poco da quella teorica del problema iniziale

$$y' = f(y, t) + \delta(t) \quad y(t_0) = y_0 + \varepsilon \quad (3c)$$

La soluzione di un'equazione differenziale consiste in una particolare curva univocamente determinata dall'equazione differenziale e dalle condizioni iniziali. Al variare delle condizioni iniziali

si ottengono differenti curve. Tale perturbazione comporta la scelta di una soluzione diversa nella famiglia di soluzioni. Se la distanza tra la curva soluzione vera e quella perturbata diminuisce, il problema è ben condizionato, se tale distanza cresce al crescere di  $t$  il problema è mal condizionato, come mostrato nella figura 5:



**Figura 5:** si pone a confronto la rappresentazione di un sistema mal condizionato (a sinistra) e un sistema ben condizionato (a destra).

Affinché l'equazione differenziale sia ben condizionata, la derivata  $f_y$  deve essere negativa: solo in questo caso le curve della famiglia tendono a ricadere sulla soluzione cercata. Se  $f_y$  è positiva l'equazione differenziale è mal condizionata (De Marchi S, 2019).

Il condizionamento di un sistema di equazioni differenziali viene studiato analizzando il valore degli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  della matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \{\delta f_i / \delta y_j\} \tag{4c}$$

Se la parte reale di un autovalore è grande e positiva il sistema è mal condizionato. Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa il sistema è ben condizionato.

Per il problema generale:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0 \tag{5c}$$

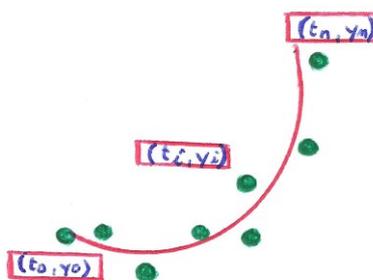
si dimostra che, se  $f(t,y)$  e la derivata parziale  $f_y$  sono continue, allora il problema è ben condizionato se  $f_y < 0$  per  $t \in [t_0, T]$ , il problema è mal condizionato se  $f_y > 0$  per  $t \in [t_0, T]$ . Ciò comporta la possibilità di avere intervalli in cui il problema è ben condizionato e intervalli in cui è mal condizionato.

Un problema mal condizionato non si può risolvere numericamente con una accuratezza accettabile; un problema ben condizionato non assicura una facile risoluzione numerica.

**c. Discretizzazione di un problema a valori iniziali.** I metodi visti si basano sulla discretizzazione del problema, ossia si discretizza l'intervallo  $[t_0, T]$  in un insieme di nodi o punti di griglia:

$$t_0 = t_0 < x_1 < \dots < t_n = T, \quad t_k = t_0 + kh, \quad k=0, \dots, n, \quad h=(T-t_0)/n \text{ (passo)} \quad (6c)$$

ovvero si discretizza la ODE, che significa sostituire al problema continuo un problema discreto, cioè si determinano i valori  $y_k$ , approssimazioni dei valori  $y(x_k)$ . Nota la soluzione in tali punti, sarà possibile ricostruire un'approssimazione su tutto l'intervallo  $[t_0, T]$  tramite un'interpolazione polinomiale o con funzioni spline. A partire da  $y_0$ , in ogni punto la soluzione è approssimata da un valore  $y_k$  ottenuto in funzione dei valori precedenti. I metodi in cui il valore attuale dipende solo dal precedente sono detti metodi one-step. Si costruisce, a partire dal valore iniziale, l'insieme di punti  $y_k$  cercando di seguire la traiettoria della curva soluzione:



**Figura 6:** traiettoria della curva soluzione (modificata da Google Images).

Ovviamente  $y_k \neq y(t_k)$ , che non appartiene alla curva soluzione passante per  $t_0$ , ma ad un'altra curva, è soluzione esatta di un problema con stessa equazione e diversa condizione iniziale. Ad ogni passo una perturbazione (errore di troncamento e di round-off), produce il passaggio da una curva ad un'altra, per cui, se il problema è mal condizionato, i valori calcolati si allontanano da quelli veri e l'errore si amplifica; se il problema è ben condizionato l'errore resta contenuto.

**d. Errore e stabilità della soluzione numerica di una ODE.** Per studiare stabilità e convergenza bisogna ottenere una stima dell'errore globale in ogni punto. Nella soluzione calcolata di un problema di ODE si sommano due tipi di errori: errore di discretizzazione o troncamento che dipende dal metodo numerico scelto per discretizzare la ODE; errore di round-off che dipende dal sistema aritmetico floating-point utilizzato. L'errore di troncamento dipende dal fatto che lo schema di discretizzazione scelto introduce un errore nei singoli passi, errore che si accumula e si propaga nel valore corrente calcolato. Possiamo quindi definire un errore locale e un errore globale di troncamento (De Marchi, S. 2019)

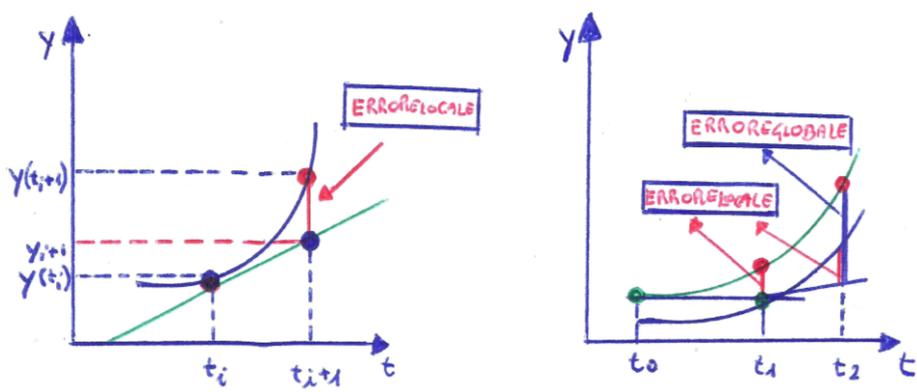


Figura 7: rappresentazione grafica di errore locale ed errore globale (modificata da Google Images).

**Errore locale di troncamento:** è l'errore introdotto in un singolo passo di applicazione dello schema, e si valuta supponendo che i valori calcolati al passo  $k$  siano esatti. E' cioè una stima della bontà dello schema numerico.

**Errore globale di troncamento:** È l'errore commesso nell'approssimare il valore esatto  $y(t_k)$  con  $y_k$ , a cui contribuiscono gli errori locali dei singoli passi e la loro propagazione (l'errore globale non è semplicemente la somma degli errori locali). Ciò che si vuole in definitiva è un errore globale piccolo, ma ciò che si riesce a stimare e controllare in generale è l'errore locale. (*Shampine L.F et al., 1986*):

**2.2.5 Metodi di Runge Kutta.** Si consideri ancora il problema

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ con condizione iniziale } y(t_0) = y_0. \quad (5c)$$

Nella sua formulazione generale, un metodo di Runge-Kutta si scrive con l'iterazione

$$u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n, h; f), \quad n \geq 0, \quad (7c)$$

con (la funzione) incremento  $F$  tale che

$$F(t_n, u_n, h; f) = \sum_{i=1}^s b_i K_i, \quad (8c)$$

$$K_i = f(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} K_j); \quad i = 1, \dots, s. \quad (9c)$$

$s$  viene detto il numero di stadi del metodo di Runge Kutta. I coefficienti  $a_{i,j}$ ,  $b_i$  e  $c_i$  caratterizzano completamente il metodo. Di solito si raccolgono nella cosiddetta **matrice di Butcher**

$c_1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,s}$	$\mathbf{c}$   $A$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $\mathbf{b}^T$
$c_2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,s}$	
$\cdots$			$\cdots$		
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\cdots$	$a_{s,s}$	
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_s$	

(10c)

**Tabella 2:** Matrice di Butcher per un metodo di Runge-Kutta ad  $s$  stadi

Si assume che

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{i,j}, \quad i = 1, \dots, s.$$

(11c)

- Se  $a_{i,j} = 0, \quad j \geq i, \quad i = 1, \dots, s$ , allora i coefficienti  $K_i$  si determinano esplicitamente in funzione degli stadi precedenti  $K_1, \dots, K_{i-1}$ . Sono questi i *metodi di RK espliciti*.
- In caso contrario, lo schema è di tipo implicito. Pertanto per il calcolo di  $K_i$  richiederà la soluzione di un sistema non lineare di dimensione  $s$ .

Alternativamente, per ridurre il costo computazionale nel caso implicito, si usano schemi semi-impliciti

$$K_i = f(t_n + c_i h, u_n + h a_{i,i} K_i + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} K_j)$$

(12c)

che ad ogni passo richiedono solo la soluzione di  $s$  equazioni non lineari indipendenti.

Circa la consistenza, osservando che

$$h\tau_{n+1}(h) = y_{n+1} - y_n - hF(t_n, y_n, h; f)$$

(13c)

con  $y(t)$ , soluzione del problema di Cauchy continuo, si dimostra che affinché il metodo di Runge Kutta sia consistente, ovvero affinché

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \max_n |\tau_n(h)| = 0 \quad (14c)$$

deve essere verificata la condizione

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1. \quad (15c)$$

Inoltre, il metodo si dirà consistente di ordine  $p \geq 1$  rispetto ad  $h$  se l'errore di troncamento globale

$$\tau(h) = O(h^p), \quad h \rightarrow 0 \quad (16c)$$

Infine, per quanto riguarda la convergenza dei metodi di Runge Kutta, basta osservare che trattandosi di metodi ad un passo, la consistenza implica la stabilità.

Infatti, avendo il polinomio caratteristico

$$\rho(\tau) = \tau - 1 \quad (17c)$$

la cui unica radice soddisfa la condizione della definizione di stabilità, si può concludere che i metodi ad un passo consistenti sono convergenti.

ordine	1	2	3	4	4	5	6	6	7
s	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Tabella 3:** Numero di stadi e ordine dei metodi di Runge Kutta a  $s=9$

Se un metodo di Runge Kutta ha un errore di troncamento locale  $\tau_n(h) = O(h^p)$ ,  $\forall n$ , allora anche l'ordine di convergenza sarà  $p$ . Per i metodi di Runge Kutta espliciti vale la seguente importante proprietà:

**Proposizione 1.** Un metodo di Runge Kutta esplicito a  $s$  stadi non può avere ordine maggiore di  $s$ . Inoltre non esistono metodi di Runge Kutta espliciti a  $s$  stadi di ordine maggiore o uguale a 5 (vedi Tabella 3).

Si noti come il numero massimo di stadi in corrispondenza del quale l'ordine non è inferiore al numero massimo di stadi stesso si ottiene per  $s \leq 4$ .

**Derivazione di un metodo Runge Kutta esplicito:** I metodi di Runge Kutta possono essere ricavati o per integrazione numerica o tramite l'utilizzo di opportuni sviluppi in serie di Taylor.

Il metodo più utilizzato, che realizza un compromesso accettabile tra numero di valutazioni di  $f$  ed accuratezza, è Runge Kutta a 4 stadi (RK4), di ordine 4 (Saleri F, A.A. 2003/04).

$$u_{n+1} = u_n + h/6 (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{18c}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n) \\ K_2 &= f(t_n + h/2, u_n + h/2 K_1) \\ K_3 &= f(t_n + h/2, u_n + h/2 K_2) \\ K_4 &= f(t_{n+1}, u_n + h K_3) \end{aligned} \tag{19c}$$

con matrice di Butcher

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(20c)

**Tabella 4:** Matrice di Butcher del metodo di Runge-Kutta di ordine 4

**Adattabilità del passo per i metodi Runge Kutta:** essendo metodi ad un passo, i metodi di Runge Kutta si adattano bene al cambio di passo d'integrazione  $h$  per adattare la soluzione numerica all'andamento dell'errore purchè si disponga di uno *stimatore efficiente dell'errore locale* commesso al singolo passo. Questi stimatori a posteriori, si realizzano in 2 modi:

1. usando lo stesso metodo di Runge Kutta con due passi differenti (es.  $h$  e  $h/2$ );
2. usando 2 metodi di Runge Kutta di ordini diversi ma con lo stesso numero  $s$  di stadi.

Il primo metodo implica in genere un costo computazionale elevato dovuto all'aumento delle valutazioni funzionali. Il secondo metodo rappresenta una alternativa che non richiede valutazioni funzionali addizionali: utilizza simultaneamente due metodi Runge Kutta a  $s$  stadi, di ordine  $p$  e  $p+1$  rispettivamente, che devono presentare lo stesso insieme di valori  $K_i$ . Usando la matrice di Butcher modificata è possibile scrivere l'errore identificando il metodo di ordine  $p$  con gli array  $\mathbf{c}$ ,  $A$  e  $\mathbf{b}$  e quello di ordine  $p+1$  con  $\mathbf{c}$ ,  $A$  e  $\mathbf{b}^\wedge$ , ed essendo  $\mathbf{E} = \mathbf{b}^\wedge - \mathbf{b}$  oppure  $\mathbf{E} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^\wedge$  si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

(21c)

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + h \sum_{i=1}^s \hat{b}_i K_i$$

(22c)

da cui, sottraendo membro a membro si giunge a

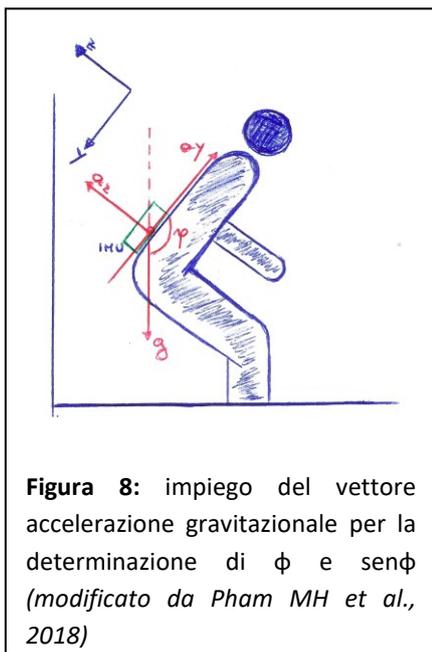
$$u_{n+1} - \hat{u}_{n+1} = u_n - \hat{u}_n + h \sum_{i=1}^s E_i K_i$$

(23c)

E' dunque semplice verificare che la differenza fra le soluzioni approssimate in  $t_n$  ottenute usando i due schemi, fornisce una stima dell'errore di troncamento locale per lo schema di ordine inferiore. D'altra parte, essendo i  $K_i$  uguali, questa differenza è data proprio da  $h \sum_{i=1}^s E_i K_i$  e non richiede dunque ulteriori valutazioni funzionali. Se l'errore si mantiene entro una certa soglia, il passo viene mantenuto, altrimenti si dimezza (calcolandone un nuovo valore). L'unico inconveniente di questo metodo è che ha la tendenza a sottostimare l'errore e non è pertanto del tutto affidabile quando  $h$  è grande (Saleri F, A.A. 2003/04).

## 2.2.6 Metodo geometrico per la determinazione e la rappresentazione degli angoli: angolo $\varphi$ , $\sin\varphi$ , componente $p$ velocità angolare.

Come abbiamo già visto, il task dello Stand to Sit to Stand consiste nel passare dalla posizione eretta a quella seduta e successivamente nel sollevamento del corpo da una posizione seduta ad una posizione eretta. L'azione avviene prevalentemente nel piano sagittale in modo che siano minime le accelerazioni normali allo stesso in condizioni fisiologiche; le accelerazioni laterali (sbandamenti)

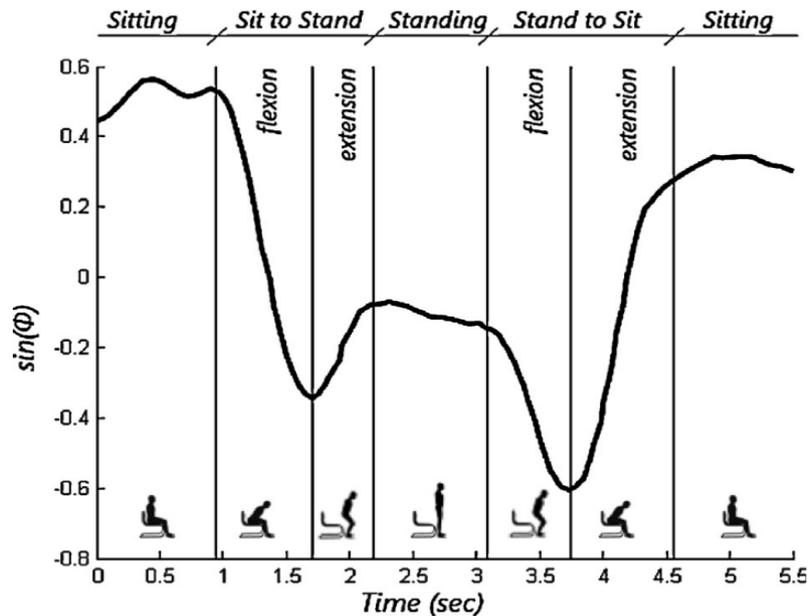


**Figura 8:** impiego del vettore accelerazione gravitazionale per la determinazione di  $\varphi$  e  $\sin\varphi$  (modificato da Pham MH et al., 2018)

subentrano in presenza di stati patologici. Quindi, dal punto di vista concettuale, una simulazione semplificata dello Stand to Sit to Stand test può essere caratterizzata principalmente da un tipo di moto piano, considerando anche che il corpo è simmetrico rispetto al piano del moto e che quindi il baricentro è posto sicuramente nel piano di simmetria. Ricordiamo inoltre che l'accelerometro presente nella IMU, a sua volta posizionata sulla schiena del soggetto sottoposto al test, misura, lungo i suoi tre assi, l'accelerazione gravitazionale che è sempre presente anche

a strumento fermo (ricordiamo che teoricamente l'accelerometro funziona solo in stato di moto e questo valore di accelerazione a  $t_0$  rappresenta l'offset dell'accelerometro).

A  $t_0$ , a strumento fermo, viene registrata solamente l'accelerazione gravitazionale, mentre nei tempi successivi, essa si somma ai valori di accelerazione misurati dallo strumento durante il movimento, in base alla inclinazione del tronco. Questo dato è di estrema utilità poiché dall'accelerazione traslazionale è possibile ottenere l'angolo di flesso estensione del tronco  $\varphi$ ; ricavando quindi il  $\sin(\varphi)$ , è possibile visualizzare i movimenti di flesso estensione i cui punti di massimo e di minimo rappresentano la massima estensione e flessione del tronco nelle fasi di transizione tra la posizione eretta e quella seduta e viceversa (vedi figura 9)



**Figura 9:** rappresentazione del movimento di flessione estensione mediante  $\sin\phi$   
 (R.C. Van Lummel et al., *Gait & Posture* 38 (2013) 153–156)

Nel nostro esperimento sono stati eseguiti movimenti a bassa velocità, senza moti bruschi o improvvisi. Ricordiamo anche che l'orientamento degli assi della IMU da noi utilizzata (assi body) è il seguente: asse Y verticale orientato piedi testa, asse X medio laterale, di flessione estensione, asse Z antero posteriore di rotazione laterale. In questo modo, utilizzando le componenti Y e Z dell'accelerazione lineare registrata dalla IMU, che poniamo uguali alle componenti  $g_y$  e  $g_z$  della accelerazione gravitazionale ( $g_y = a_y$  e  $g_z = a_z$ ), possiamo stimare l'andamento dell'angolo  $\phi$  di flessione estensione grazie all'impiego della funzione matlab  $\text{atan2}(s,c)$  in cui poniamo

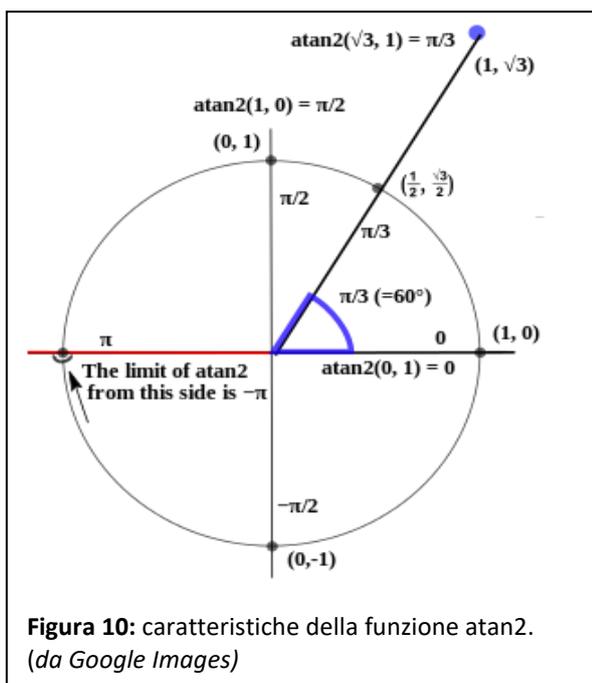
$$\text{atan2}(g_y, g_z) \text{ se } g_y > 0 \text{ oppure } \text{atan2}(g_y, g_z) + 2\pi \text{ se } g_y < 0, \quad (1d)$$

(Pham MH et al., 2018).

La metodica indicata da Pham MH et al., nel suo articolo del 2018, è tuttavia una metodica più complessa rispetto a quella da noi utilizzata per la stima dell'angolo  $\phi$ ; infatti Pham distingue uno *stationary period (sp)*, nel quale l'accelerometro misura solamente l'accelerazione gravitazionale le

cui componenti possono essere usate per la stima dell'angolo di flessione estensione (ed in tal caso è valida la (1d) ), da *un active period (ap)*, in cui si utilizza la componente  $p$  della velocità angolare, cioè la componente attorno all'asse medio laterale (asse x nel nostro caso per cui parleremo di  $\omega_x$ ), che viene integrata ed utilizzata per la determinazione dell'angolo di flessione estensione nel periodo attivo a cui è sommato il drift giroscopico; si stima quindi il drift che sottratto all'angolo in precedenza ottenuto, consente la stima dell'angolo di flessione estensione *nell'active period*, corretto dal drift.

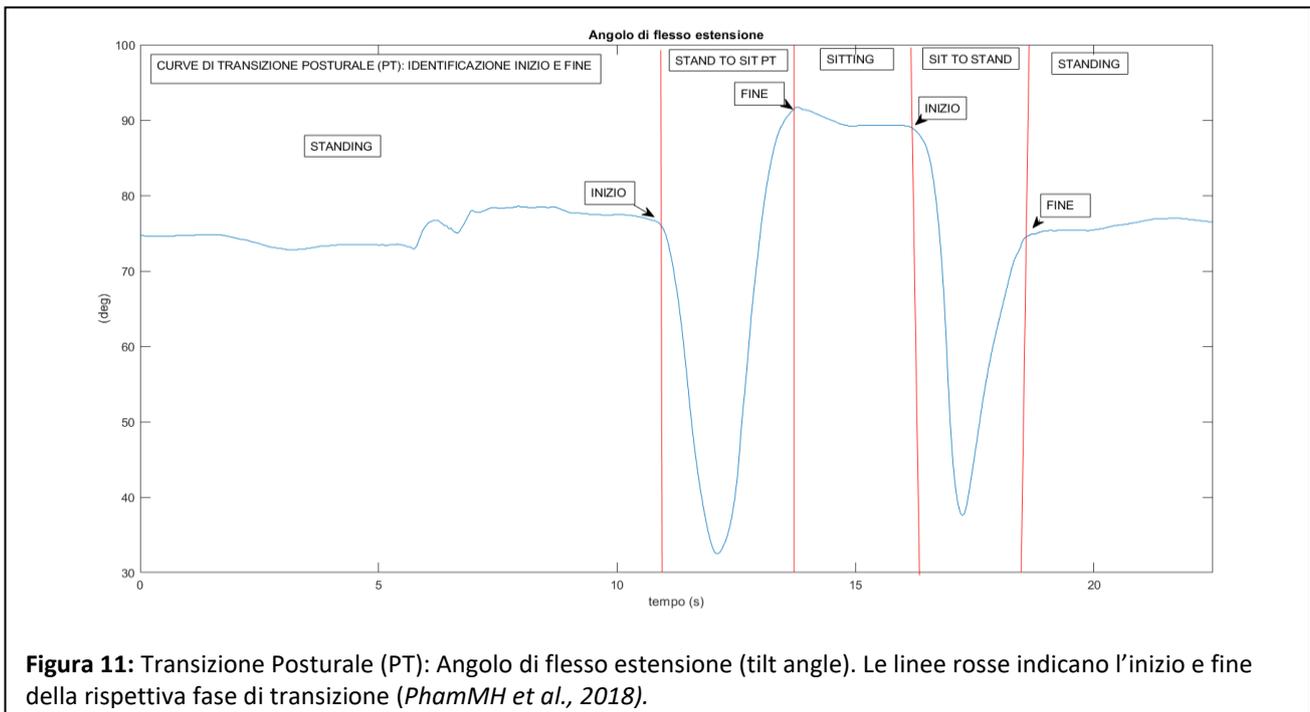
Come è possibile vedere, l'asse  $g_y = a_y$ , corrisponde al  $\sin\phi$ , cioè al seno dell'angolo che stiamo stimando:  $\text{atan2}(s,c)$  calcola la funzione inversa, l'arcotangente dell'angolo, e poiché in ingresso la funzione riceve  $g_y, g_z$ , questi valori corrispondono rispettivamente al seno e al coseno dell'angolo. E'



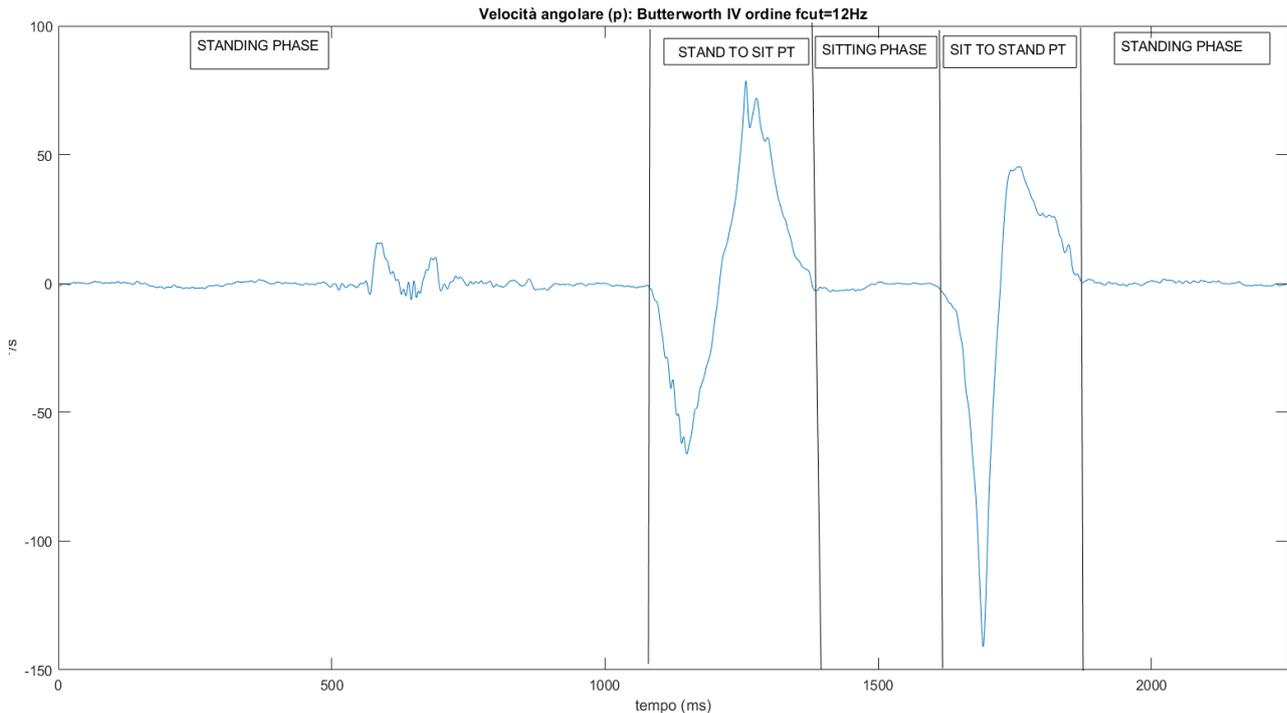
allora evidente che l'asse Y dell'accelerazione lineare, che è un array di valori di accelerazione che variano in funzione del tempo, corrisponde al seno dell'angolo di flessione estensione che plottato, rappresenta la flessione estensione del tronco attorno all'asse X, asse medio laterale. Inoltre, il metodo geometrico visto, permette di ricavare dalla esecuzione del task dati importanti da utilizzare in ambito clinico.

Ad esempio, nel grafico in figura 11, è rappresentato il movimento di flessione estensione e la transizione posturale (PT), cioè il passaggio dalla posizione eretta a quella seduta e viceversa, con indicazione dell'inizio e della fine di ogni fase (linee rosse) utilizzando l'angolo di flessione estensione  $\phi$

trovato sempre nel modo appena descritto, angolo che ruota attorno all'asse medio laterale di flessione estensione che nel nostro esperimento è l'asse X.



Inoltre, parlando di velocità angolare registrata dal giroscopio, esso non fornisce direttamente gli angoli ma permette invece di identificare gli intervalli di tempo del task motorio; ovvero, i frame che vengono registrati altro non sono che le *time histories* misurate, che rappresentano gli intervalli di tempo del task motorio. E' per tale motivo che la velocità angolare ottenuta dal giroscopio, e nello specifico la componente  $p$  del vettore del segnale giroscopico, ovvero la velocità di rotazione attorno all'asse medio laterale ( $\omega_x$ ), può essere utilizzata per lo studio delle varie fasi del test: la curva che si ottiene plottando la componente  $p$  della velocità angolare permette di identificare le varie fasi del task, come indicato dalle linee nere verticali presenti nel grafico in Figura 12. I punti in cui il grafico attraversa la linea dello zero sono considerati i punti di inizio e fine della fase di transizione posturale relativa (PT) (PhamMH et al., 2018).



**Figura 12:** Transizione Posturale (PT): velocità angolare attorno all’asse di rotazione medio laterale; il punto di attraversamento dello zero della curva della componente  $p$  della velocità angolare identifica l’inizio e la fine della transizione posturale (PT) (PhamMH et al., 2018)

Il segnale giroscopico è stato filtrato con Butterworth del secondo ordine passato due volte (ottenendo quindi un filtro di IV ordine) ad una frequenza di cut off ( $F_c$ ) di 12Hz.

L’utilità pratica di quanto mostrato fino ad ora ci viene dal confronto tra i grafici nelle figure 13a,13b, di seguito riportati, in cui il segnale è rappresentato mediante  $\sin\phi$  con in parallelo la velocità lineare lungo l’asse verticale: i grafici raffigurano l’esecuzione in sequenza di 5 serie complete dello Stand to Sit to Stand test. La figura (13a) indica l’esecuzione del task da parte di Adulti più anziani (OA), la figura (13b) indica l’esecuzione della stessa sequenza da parte di un adulto giovane (YA). E’ facile notare la differenza qualitativa e temporale dell’esecuzione nei due casi: vi è variabilità del segnale, maggiore nel caso di esecuzione del task da parte dell’OA rispetto a quello del YA in cui la variabilità è minore. Inoltre, la durata delle fasi di standig e di sitting, è relativamente più lunga per l’OA (Van Lummel R.C. et al, 2013).

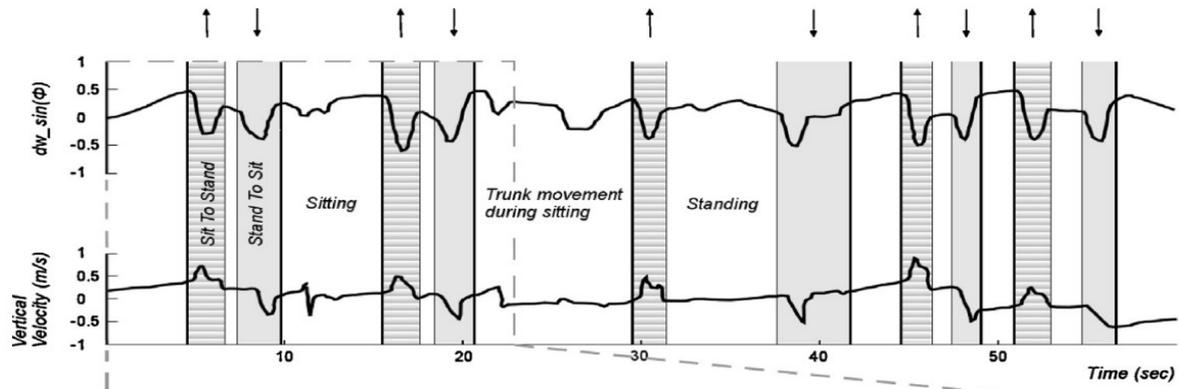


Figura 13a

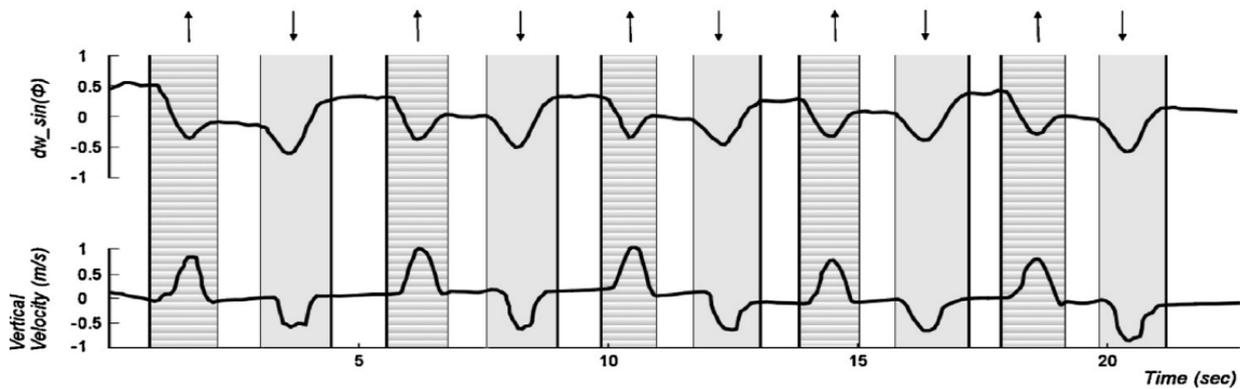


Figura 13b

Figura 13 a,b: (R.C. Van Lummel et al. *Gait & Posture* 38 (2013) 153–156)

Va anche ricordato che, usando l'accelerazione gravitazionale misurata a  $t_0$ , che rappresenta l'unica componente misurata dagli assi XYZ dell'accelerometro fermo, è possibile ricavare nello stesso modo, cioè usando la funzione  $atan2(\sin, \cos)$ , gli angoli  $\phi_0, \theta_0, \psi_0$  a  $t_0$ , necessari per calcolare il quaternion  $Q_0$ , cioè il quaternion al tempo  $t_0$  che rappresenta uno dei 4 ingressi richiesti dal metodo di integrazione ad un passo di Runge Kutta del IV ordine mediante ODE45, da noi utilizzati.

## ***2.3 Sistemi di Filtraggio***

### **2.3.1 Piattaforma IMU e problemi che affliggono le sue componenti.**

I sensori inerziali IMU (Inertial Measurement Unit), sono sistemi elettronici composti da un giroscopio triassiale e da un accelerometro triassiale. Spesso si aggiunge alla piattaforma IMU un magnetometro triassiale da cui il nome MARG (magnetic, angular rate, gravity) (S. Wilson et al., 2019).

Le informazioni sull'orientamento del sensore, date le condizioni iniziali, possono essere ottenute mediante un metodo classico, integrando il sistema di equazioni differenziali (45a) che legano le componenti del quaternioni dell'orientamento con le componenti  $p$ ,  $q$ ,  $r$  rilevate dal giroscopio a bordo della IMU. Questa infatti rappresenta una buona soluzione per colmare la lacuna di dato accelerometrico: i giroscopi rilevano l'orientamento attraverso le variazioni angolari della velocità, ma col tempo tendono ad avere una deriva perché rilevano solo i cambiamenti e non hanno un quadro di riferimento fisso. L'impiego dei dati accelerometrici unitamente ai dati del giroscopio consente di ridurre al minimo il bias del giroscopio e ottenere una stima più accurata della posizione; gli accelerometri rilevano le variazioni di direzione rispetto alla gravità e quei dati servono ad orientare il giroscopio poiché l'unico riferimento fisso iniziale è l'accelerazione gravitazionale. Tuttavia l'accelerazione gravitazionale è parallela all'asse verticale dell'accelerometro triassiale il che rende impossibile determinare l'angolo di rotazione attorno a quell'asse; per tale ragione, il dato accelerometrico risulta incompleto nel fornire un orientamento iniziale che sia adeguato ad inizializzare il giroscopio, il quale ha necessità di una condizione iniziale nota (S. Wilson et al., 2019). Diversi sono gli studi riportati in letteratura, il cui obiettivo è ottenere la migliore stima dell'angolo di heading (rotazione attorno l'asse verticale), senza ricorrere all'impiego di ulteriori dispositivi, come il Global Positioning System (GPS) e il magnetometro, che rappresenta una delle principali soluzioni a tale problema, ma che aumentano la complessità del dispositivo, tendenza opposta a quella che mira ad una semplificazione del sensore, pur garantendo la miglior qualità del segnale stimato. Interessante in tal senso, l'articolo di Hoang ML. e Pietrantonio A., (2021) dal titolo "Yaw/Heading

*optimization by drift elimination on MEMS gyroscope*”, nel quale viene riportato il metodo implementato dagli autori grazie al quale, la eliminazione del drift giroscopico è ottenuta mediante un modello pratico basato sul principio “No Motion No Integration” (NMBI). La tecnica proposta dagli autori mira a ottimizzare il segnale giroscopico per ottenere la migliore stima dell’angolo di heading (ovvero l’angolo di rotazione attorno all’asse verticale, antiparallelo alla direzione dell’accelerazione gravitazionale).

Tornando alle caratteristiche complementari dei dispositivi che compongono la piattaforma inerziale, mentre gli accelerometri risultano più accurati per i calcoli statici (rispetto a quelli dinamici), i giroscopi sono migliori per rilevare l'orientamento quando il sistema è già in movimento. Combinando la precisione a breve termine di un giroscopio con quella nel lungo periodo di un accelerometro, si ottengono letture dell'orientamento più precise, facendo affidamento sui punti di forza di ogni sensore per minimizzare i punti deboli dell'altro sensore.

Si può quindi affermare che l’associazione nella stessa piattaforma inerziale di più sensori fa di questo dispositivo uno strumento estremamente utile ma non privo di problemi, poiché le sue componenti sono soggette a diversi tipi di errore. Come descritto in maniera sintetica da Oliver J. Woodman nel suo report *“An introduction to inertial navigation” (2007)*, i principali errori che possono alterare le misure ottenute dai giroscopi e dagli accelerometri, sono rappresentati da constant bias, random walk, bias stability, temperature effects, calibration errors. Prima dunque di affrontare il capitolo dei sistemi di filtraggio utilizzati, vediamo nello specifico, alcuni di questi problemi.

### **2.3.1.1 Giroscopio.**

a. Constant Bias: le misure giroscopiche sono affette da un errore costante di offset. L’errore di offset è il valore non nullo dell’uscita del sensore che si ottiene in corrispondenza di un ingresso

nullo. Il constant bias si ripercuote su ogni misura effettuata e se integrato nel tempo comporta un errore che nel caso del giroscopio è di tipo lineare:  $\vartheta(t) = \varepsilon \cdot t$

Un tale errore può essere stimato mediando nel lungo periodo i risultati delle misure ottenute a sensore fermo. Ne consegue che compensare le stime successive risulta molto semplice: basta sottrarre l'errore stimato nel lungo periodo all'output del giroscopio.

b. Thermo-Mechanical White Noise / Angle random walk: l'output di un giroscopio è sempre perturbato da un rumore termo-meccanico che varia molto più velocemente del sampling rate del sensore; può quindi essere pensato come un rumore bianco sovrapposto alle misure, a media nulla. Il suo effetto sull'integrazione delle misure di velocità non si ripercuote, come il bias, su un offset di misura (il rumore bianco ha media nulla) ma comporta un aumento della *deviazione standard* proporzionale alla radice quadrata del tempo di integrazione:

$$\sigma_{\theta}(t) = \sigma \cdot \sqrt{\delta t \cdot t}$$

c. Flicker Noise / Bias Stability. L'errore di bias può cambiare nel tempo a causa del flickering, detto anche flicker noise, degli apparati elettronici che compongono lo strumento. Tale rumore presenta uno spettro inversamente proporzionale alla frequenza, i cui effetti sulle misure si possono notare prevalentemente alle basse frequenze poiché alle alte frequenze viene mascherato dal rumore bianco. Solitamente questo errore viene modellato come un random walk a significare che il bias può variare nel tempo attorno ad un valore che può essere pensato come quello di constant bias.

d. Effetti termici: Variazioni di temperatura del sensore e dell'ambiente di lavoro inducono una variazione di bias, per cui molte piattaforme IMU dispongono di sensori di temperatura interni atti a correggere tali fluttuazioni termiche. E' da sottolineare che tali variazioni termiche, non vengono considerate nella misurazione del bias stability calcolato in condizione standardizzate.

e. Errori di Calibrazione. Sono rappresentati da un insieme di errori che includono errori nei fattori di scala, errori di allineamento degli assi, errori di non linearità del giroscopio. Questo genere di errori porta ad un aumento del drift nel segnale integrato, l'entità del quale è proporzionale alla velocità e alla durata del movimento, inducendo un aumento dell'errore globale che allontana il valore misurato dalla stima ottima.

**2.3.1.2 Accelerometro:** poiché i valori di accelerazione lineare registrati possono essere impiegati, mediante integrazione numerica, per determinare la velocità lineare e la posizione del sensore, note che siano le condizioni iniziali, ne consegue che la presenza di errori di misura anche limitati, è in grado di causare un rapido deterioramento del valore di velocità e posizione calcolati. Gli algoritmi di filtraggio fanno uso dei vettori dell'accelerazione misurata per correggere istantaneamente l'assetto della piattaforma IMU calcolato mediante diretta integrazione delle misure del giroscopio. I principali errori degli accelerometri sono gli stessi visti per i giroscopi, ma con caratteristiche loro proprie; la vera differenza è che le misure di accelerazione vengono integrate due volte per ottenere la stima di posizione a differenza dei giroscopi che integrano solamente una volta la velocità angolare per valutare l'orientamento.

a. Constant Bias: come per il giroscopio, il bias è un errore di offset che discosta i valori misurati dalla "stima ottima". Definendo con un " $\epsilon$ " il constant Bias, quando integrato due volte, causa un errore nella stima della posizione che cresce in modo quadratico con il tempo. Ne deriva che l'errore di posizione accumulato è pari a:  $s(t) = \epsilon \cdot t^2 / 2$ , dove  $t$  è il tempo di integrazione. La stima di velocità presenta invece un contributo lineare. Correggere tale errore è meno semplice che per il giroscopio: non è possibile infatti avere misure prive di accelerazione. Dovrebbe essere evitata la misura dell'accelerazione di gravità, operazione fattibile ma poco "pratica" richiedendo precisi sistemi di posizionamento. Questa tecnica rimane comunque una soluzione adottata in fase di calibrazione.

b. Thermo-Mechanical White Noise / Velocity random walk: l'output di un accelerometro, esattamente come quello di un giroscopio, è perturbato da un rumore bianco sovrapposto alle misure, a media nulla. Parlando del giroscopio, abbiamo visto che l'integrazione del rumore bianco produce un random walk la cui deviazione standard cresce proporzionalmente alla radice quadrata del tempo. Analogamente, l'integrazione del rumore bianco sul segnale in output dell'accelerometro crea un velocity random walk, che viene in genere espresso in  $m/s/\sqrt{h}$ , mentre la doppia integrazione del rumore bianco del segnale accelerometrico, causa in un certo intervallo di tempo, la comparsa di un random walk del secondo ordine nella posizione, a media nulla e deviazione standard pari a

$$\sigma_s(t) \approx \sigma \cdot t^{3/2} \cdot \sqrt{\delta t} / 3$$

che cresce proporzionalmente a  $t^{3/2}$ .

c. Flicker Noise / Bias Stability. Anche gli accelerometri sono soggetti a flicker noise, che causa fluttuazioni nel bias. Tali fluttuazioni vengono solitamente modellate come un bias random walk. Usando tale modello, il Flicker Noise determina un random walk del secondo ordine in velocità, la cui incertezza cresce proporzionalmente a  $t^{3/2}$ , e un random walk del terzo ordine in posizione che cresce proporzionalmente a  $t^{5/2}$ .

d. Temperature Effects: analogamente a quanto visto per il giroscopio, anche in questo caso vi possono essere errori dovuto ad effetti termici: cambiamenti di temperatura possono causare variazioni nel bias del segnale in output. Il tipo di relazione tra temperatura e bias dipende dal tipo di sensore, tuttavia è spesso altamente non lineare. Qualunque bias introdotto causa un errore nella posizione che cresce in maniera quadratica nel tempo. E' per tale motivo che le piattaforme IMU contengono dei sensori di temperatura al loro interno per correggere il segnale in uscita da eventuali errori imputabili a variazioni di temperatura.

e. Errori di calibrazione: anche nel caso degli accelerometri, si possono riscontrare quelli che globalmente vengono detti errori di calibrazione, che includono errori nei fattori di scala, errori di allineamento e di non linearità in uscita. Un errore importante è rappresentato dalla distorsione causata dalla non ortogonalità degli accelerometri: la proiezione di vettori su assi non ortogonali causa la stima di componenti di intensità diversa a seconda della rotazione relativa del sensore, difficile da valutare. Gli errori di calibrazione compaiono come errori di bias quando ci sono accelerazioni nel moto; tuttavia, diversamente dal caso dei giroscopi, questo tipo di errore si osserva anche a sensore fermo, sottoforma di bias temporaneo, a causa della presenza dell'accelerazione gravitazionale.

Altri tipi di errori sono i rumori meccanici, per esempio il moto browniano che causa un continuo e imprevedibile movimento della massa di prova che tende ad oscillare anche in condizioni stazionarie.

*(da Woodman O.J. (2007): An introduction to inertial navigation. Computer Laboratory, Aug 2007)*

Alla luce di quanto sopra, risulta evidente che i dati acquisiti dalla piattaforma IMU devono essere filtrati per fornire una stima ottima dell'orientamento. La letteratura è ricca di soluzioni implementative diverse (*Mahony R., et al, 2005; Xue L. et al, 2012; Mazza' C., et al, 2020; Justa J, et al, 2020; ecc*), ognuna delle quali presenta punti di forza e punti di debolezza. Non esiste dunque una soluzione unica: la scelta di un filtro piuttosto di un altro dipende dalle risorse disponibili e più in generale, dalla specifica necessità.

**Tabella 5:** si riportano in sintesi, le sorgenti di errore per il **giroscopio**  
 (da Woodman O.J. (2007): *An introduction to inertial navigation. Computer Laboratory, Aug 2007*)

<i>Tipo di errore</i>	<i>Descrizione</i>	<i>Risultato di integrazione</i>
Bias	Bias costante $\epsilon$	Un errore angolare costantemente crescente:  $\theta(t) = \epsilon \cdot t$
Rumore bianco	Rumore bianco con deviazioni standard = $\sigma$	Un Angle Random Walk, la cui deviazione standard  $\sigma_{\theta}(t) = \sigma \cdot \sqrt{\delta t \cdot t}$  cresce con la radice quadrata del tempo
Effetto termico	Bias dipendente dalla temperatura	Ogni Bias è integrato nell'orientamento causando un errore nell'orientamento che cresce linearmente nel tempo
Calibrazione	Errori deterministici nei fattori di scala, allineamento e linearità del giroscopio	Drift nell'orientamento proporzionale alla velocità e alla durata del movimento
Bias Instability	Fluttuazioni di Bias, generalmente modellato come Bias Random Walk	Random Walk di secondo ordine

**Tabella 6:** si riportano in sintesi, le sorgenti di errore per l'accelerometro*(da Woodman O.J. (2007): An introduction to inertial navigation. Computer Laboratory, Aug 2007)*

<i>Tipo di errore</i>	<i>Descrizione</i>	<i>Risultato della doppia integrazione</i>
Bias	Bias costante $\varepsilon$ nel segnale in uscita dall'accelerometro	Un errore di posizione che cresce in maniera quadratica: $s(t) = \varepsilon \cdot t^2/2$
Rumore bianco	Rumore bianco con alcune deviazioni standard = $\sigma$	Un Random Walk del secondo ordine. La deviazione standard dell'errore di posizione cresce come: $\sigma_s(t) = \sigma \cdot t^{3/2} \cdot \sqrt{\delta t}/3$
Effetto termico	Bias dipendente dalla temperatura	Ogni Bias residuo causa un errore di posizione che cresce in maniera quadratica nel tempo
Calibrazione	Errori deterministici nel fattore di scala, misallineamento ed errori di linearità dell'accelerometro	Drift nella posizione è proporzionale al quadrato della velocità e alla durata dell'accelerazione
Instabilità di Bias	Fluttuazioni di Bias, generalmente modellato come un Random Walk Bias	Random Walk di terzo ordine in posizione

### **2.3.2 Inertial Sensor Fusion Filter: Classificazione**

MatLab possiede un Sensor Fusion e Tracking Toolbox che fornisce diversi filtri utili per la stima della posa e della velocità usando sensori inerziali che includono accelerometri, giroscopi, altimetri, magnetometri, GPS. Ogni filtro può processare certi tipi di misure prodotte da specifici sensori. Ogni filtro esegue inoltre approssimazioni e può presentare limiti da considerare attentamente prima della applicazione (*scheda MatLab*). Nella tabella7 (modificata da MatLab), sono indicati i principali tipi di filtri che usano la “*sensor fusion*” con le loro principali caratteristiche.

**2.3.2.1 Algoritmo gradient descent di Madgwick:** per risolvere almeno alcuni dei problemi che possono insorgere utilizzando una piattaforma IMU, Madgwick ha implementato un algoritmo che fornisce una stima della rotazione attorno all'asse Z (asse verticale), il cui errore non dipende dal tempo, permettendo così di correggere i bias del giroscopio. Una possibile correzione dei dati raccolti può essere realizzata grazie ai dati di accelerazione forniti dall'accelerometro e di campo magnetico dal magnetometro (quando presente) mediante appositi algoritmi di Sensor Fusion.

L'algoritmo di Madgwick, come spiegato da Madgwick stesso nel suo report di presentazione del filtro “*An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays*”, del 30 aprile del 2010 e del quale si riporta di seguito parziale traduzione, può essere dunque applicato sia alla IMU che ad un sistema MEMS cioè un sistema dotato di magnetometro. E' per tale motivo che nella forma implementata con magnetometro, il filtro di Madgwick è classificato come *AHRSfilter*.

**Tabella 7:** modificata da scheda MatLab “Choose Inertial Sensor Fusion Filters”: elenca gli input, output, approssimazioni e gli algoritmi per tutti i filtri dei sensori inerziali che funzionano a mezzo della fusione del segnale dei suoi componenti (*da scheda MatLab*). Ne sono indicati solo alcuni.

Tipo filtro	Sensore	Stati e output	Assunzioni e limitazioni	Algoritmo usato
<b>Ahrsfilter</b>	Accelerometro Giroscopio Magnetometro	Orientamento e velocità angolare	Il filtro valuta accelerazione lineare e angolare non sostenuta oltre ad accelerazione di gravità	Stato di errore del Kalman filter
<b>ImuFilter</b>	Accelerometro Giroscopio	Orientamento e velocità angolare	Il filtro valuta accelerazione lineare e angolare non sostenuta oltre ad accelerazione di gravità	Stato di errore del Kalman filter
<b>Complementary Filter</b>	Accelerometro Giroscopio Magnetometro	Orientamento e velocità angolare	Il filtro assume accelerazione lineare e angolare non sostenuta oltre ad accelerazione di gravità	Approccio non basato sul Kalman filter:  Usa filtri passa alto e passa basso per correggere il noise;  fonde le letture filtrate dei sensori in base al peso assegnato
<b>insfilterNon Holonomic</b>	Accelerometro Giroscopio GPS	Orientazione posizione velocità  bias accelerometro  bias giroscopio	Il passo di previsione impiega l'input di accelerometro e giroscopio.  Il filtro valuta: accelerazione lineare costante, velocità angolare costante; gli spostamenti anterogradi senza considerare gli sbandamenti laterali.  Accelerometro e giroscopio girano allo stesso rate senza campioni sovrannumerari.	Filtro di Kalman discreto esteso

**Orientamento da velocità angolare.** Come spiegato da Madgwick nella sua relazione, il giroscopio triassiale fornisce le misure di velocità angolare in assi body riferita agli assi x, y e z; tali misure, denominate rispettivamente  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sono raccolte in un vettore velocità angolare denominato  ${}^S\boldsymbol{\omega}$  a cui corrisponde il quaternionione

$${}^S\boldsymbol{\omega} = [0 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]$$

(1e)

da cui è possibile ottenere:

$${}^S_E\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} {}^S_E\hat{\mathbf{q}} \otimes {}^S\boldsymbol{\omega}$$

(2e)

L'orientamento del sensore rispetto al sistema di riferimento terra al tempo t,  ${}^E_S\mathbf{q}_{\omega,t}$ , può essere calcolato integrando numericamente il quaternionione derivato  ${}^S_E\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\omega,t}$  conoscendo le condizioni iniziali:

$${}^S_E\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\omega,t} = \frac{1}{2} {}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} \otimes {}^S\boldsymbol{\omega}_t$$

(3e)

$${}^S_E\mathbf{q}_{\omega,t} = {}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} + {}^S_E\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\omega,t} \Delta t$$

(4e)

dove  ${}^S\boldsymbol{\omega}_t$  è la velocità angolare misurata al tempo t,  $\Delta t$  è il tempo di campionamento e  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}$ , è il quaternionione di assetto nella stima precedente.

**Orientamento ottenuto dai vettori delle rilevazioni dei sensori impiegati.** Si assume che inizialmente il sensore misuri solamente l'accelerazione di gravità (nessuna accelerazione lineare) e il magnetometro misuri il solo il campo magnetico terrestre (non vi è alcuna alterazione locale). Il confronto tra il vettore accelerazione misurato dal sensore (in assi body) e la direzione del vettore gravità rispetto al riferimento Terra, posto verticale  $\mathbf{g} = [0, 0, g]$ , permette la determinazione della

rotazione reciproca dei due sistemi di riferimento. In alcune applicazioni può essere accettabile una rappresentazione che si basi sull'impiego degli angoli di Eulero che però consente una soluzione incompleta in quanto rende possibile determinare solamente due angoli di Eulero mentre il terzo rimane indeterminato. Non è possibile determinare l'angolo relativo all'asse parallelo al vettore usato come riferimento. Ad esempio, utilizzando solo il vettore gravità risulta indeterminato l'angolo di Yaw (attorno all'asse z, che nel nostro caso è l'asse y). Ecco perché si utilizza anche il vettore campo magnetico (purché non parallelo a g) per la determinazione dell'orientamento del sensore.

Invece, la rappresentazione mediante i quaternioni necessita di una definizione completa che può essere ottenuta mediante la formulazione di un problema di ottimizzazione: il quaternion che permette la rotazione dal sistema di riferimento Earth al sistema di riferimento in assi body, del sensore, può essere determinato minimizzando una funzione d'errore (seguendo il tipico approccio di un problema di ottimizzazione):

$$\min_{\substack{S \\ E} \hat{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4} \mathbf{f}(S \hat{\mathbf{q}}, E \hat{\mathbf{d}}, S \hat{\mathbf{s}}) \quad (5e)$$

$\mathbf{f}$  viene così definita:

$$\mathbf{f}(S \hat{\mathbf{q}}, E \hat{\mathbf{d}}, S \hat{\mathbf{s}}) = S \hat{\mathbf{q}}^* \otimes E \hat{\mathbf{d}} \otimes S \hat{\mathbf{q}} - S \hat{\mathbf{s}} \quad (6e)$$

In cui

$S \hat{\mathbf{q}}$  è il quaternion da calcolare con la risoluzione del problema di ottimizzazione.

$$S \hat{\mathbf{q}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \quad (7e)$$

${}^E\hat{\mathbf{d}}$  rappresenta il quaternione del campo rispetto alla terra,

$${}^E\hat{\mathbf{d}} = [0 \quad d_x \quad d_y \quad d_z] \quad (8e)$$

${}^S\hat{\mathbf{s}}$  rappresenta il quaternione ottenuto dalle misure del campo (gravitazionale o magnetico)

$${}^S\hat{\mathbf{s}} = [0 \quad s_x \quad s_y \quad s_z] \quad (9e)$$

Si noti che questi quaternioni sono stime ottenute dai sensori o calcolate dal filtro. Esistono diversi algoritmi di ottimizzazione per la determinazione di una soluzione al problema posto, tra i quali l'algoritmo iterativo di "discesa del gradiente" (usato nel filtro di Madgwick) che rappresenta una delle soluzioni più semplice, sia da un punto di vista della implementazione che sotto il profilo computazionale.

$${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = {}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k - \mu \frac{\nabla \mathbf{f}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}})}{\left\| \nabla \mathbf{f}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) \right\|},$$

con  $k = 0, 1, 2, 3 \dots n$  (10e)

La equazione (10e) descrive l'algoritmo di gradient descent per  $n$  iterazioni fornendo una stima dell'orientamento di  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_{n+1}$ , basata su una soluzione di primo tentativo (initial guess) dato da  ${}^S_E\hat{\mathbf{q}}_0$  e un coefficiente moltiplicativo pari a " $\mu$ " (step-size). Il gradiente di una funzione in più variabili può essere calcolato nel modo seguente:

$$\nabla \mathbf{f}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{J}^T({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}) \mathbf{f}({}^S_E\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) \quad (11e)$$

le cui componenti al secondo membro sono la matrice Jacobiana e il termine definito "objective function" che si determinata utilizzando le regole del prodotto tra quaternioni e ricordando che la differenza è definita come sottrazione componente per componente. La si riporta qui di seguito:

$$\mathbf{f}({}^S\hat{\mathbf{q}}_k, {}^E\hat{\mathbf{d}}, {}^S\hat{\mathbf{s}}) = \begin{bmatrix} 2d_x(\frac{1}{2} - q_3^2 - q_4^2) + 2d_y(q_1q_4 + q_2q_3) + \\ 2d_x(q_2q_3 - q_1q_4) + 2d_y(\frac{1}{2} - q_2^2 - q_4^2) + \\ 2d_x(q_1q_3 + q_2q_4) + 2d_y(q_3q_4 - q_1q_2) + \\ 2d_z(q_2q_4 - q_1q_3) - s_x \\ 2d_z(q_1q_2 + q_3q_4) - s_y \\ 2d_z(\frac{1}{2} - q_2^2 - q_3^2) - s_z \end{bmatrix}$$

(12e)

la matrice Jacobiana  $\mathbf{J}^T({}^S\hat{\mathbf{e}}\mathbf{q}^{\wedge}, {}^E\hat{\mathbf{d}}^{\wedge})$ , è ottenuta differenziando ordinatamente le componenti della "objective function" per le componenti di  ${}^S\hat{\mathbf{e}}\mathbf{q}^{\wedge}$  giungendo a

$$\mathbf{J}({}^S\hat{\mathbf{e}}\mathbf{q}^{\wedge}, {}^E\hat{\mathbf{d}}^{\wedge}) = \begin{bmatrix} 2d_yq_4 - 2d_zq_3 & 2d_yq_3 + 2d_zq_4 \\ -2d_xq_4 + 2d_zq_2 & 2d_xq_3 - 4d_yq_2 + 2d_zq_1 \\ 2d_xq_3 - 2d_yq_2 & 2d_xq_4 - 2d_yq_1 - 4d_zq_2 \\ -4d_xq_3 + 2d_yq_2 - 2d_zq_1 & -4d_xq_4 + 2d_yq_1 + 2d_zq_2 \\ 2d_xq_2 + 2d_zq_4 & -2d_xq_1 - 4d_yq_4 + 2d_zq_3 \\ 2d_xq_1 + 2d_yq_4 - 4d_zq_3 & 2d_xq_2 + 2d_yq_3 \end{bmatrix}$$

(13e)

Le equazioni da (10e) a (13e) descrivono la forma generale dell'algoritmo applicabile ad un campo definito in ogni direzione; tuttavia, se la direzione del campo può essere definita con una o due componenti assiali nel sistema di riferimento fisso allora l'equazione si semplifica. Per convenzione, la direzione dell'accelerazione gravitazionale definisce la verticale, l'asse z come mostrato nella equazione (14e). Nel caso del filtro di Madgwick si utilizza il vettore accelerazione di gravità

$${}^E\hat{\mathbf{g}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

(14e)

dal quale si ottiene il quaternione

$${}^S\hat{\mathbf{a}} = [0 \ a_x \ a_y \ a_z]$$

(15e)

e quindi

$$\mathbf{f}_g({}^S_E \hat{\mathbf{q}}, {}^S \hat{\mathbf{a}}) = \begin{bmatrix} 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) - a_x \\ 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) - a_y \\ 2(\frac{1}{2} - q_2^2 - q_3^2) - a_z \end{bmatrix} \quad (16e)$$

$$\mathbf{J}_g({}^S_E \hat{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2q_3 & 2q_4 & -2q_1 & 2q_2 \\ 2q_2 & 2q_1 & 2q_4 & 2q_3 \\ 0 & -4q_2 & -4q_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (17e)$$

Mentre dal campo magnetico (normalizzato e supponendo la presenza di una sola componente orizzontale, i.e.  $b_y = 0$ ),

$${}^E \hat{\mathbf{b}} = [0 \quad b_x \quad 0 \quad b_z] \quad (18e)$$

si ottiene il quaternione

$${}^S \hat{\mathbf{m}} = [0 \quad m_x \quad m_y \quad m_z] \quad (19e)$$

E quindi, per il campo magnetico si ottiene

$$\mathbf{f}_b({}^S_E \hat{\mathbf{q}}, {}^E \hat{\mathbf{b}}, {}^S \hat{\mathbf{m}}) = \begin{bmatrix} 2b_x(0.5 - q_3^2 - q_4^2) + 2b_z(q_2 q_4 - q_1 q_3) - m_x \\ 2b_x(q_2 q_3 - q_1 q_4) + 2b_z(q_1 q_2 + q_3 q_4) - m_y \\ 2b_x(q_1 q_3 + q_2 q_4) + 2b_z(0.5 - q_2^2 - q_3^2) - m_z \end{bmatrix} \quad (20e)$$

$$\mathbf{J}_b({}^S_E \hat{\mathbf{q}}, {}^E \hat{\mathbf{b}}) = \begin{bmatrix} -2b_z q_3 & 2b_z q_4 & -4b_x q_3 - 2b_z q_1 \\ -2b_x q_4 + 2b_z q_2 & 2b_x q_3 + 2b_z q_1 & 2b_x q_2 + 2b_z q_4 \\ 2b_x q_3 & 2b_x q_4 - 4b_z q_2 & 2b_x q_1 - 4b_z q_3 \\ & & -4b_x q_4 + 2b_z q_2 \\ & & -2b_x q_1 + 2b_z q_3 \\ & & 2b_x q_2 \end{bmatrix}$$

(21e)

L'utilizzo delle ultime formule riportate permette di trovare una soluzione unica al problema di stima dell'orientamento utilizzando le seguenti relazioni:

$$\mathbf{f}_{g,b}({}^S\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_g({}^S\hat{\mathbf{q}}, {}^S\hat{\mathbf{a}}) \\ \mathbf{f}_b({}^S\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}) \end{bmatrix} \quad (22e)$$

$$\mathbf{J}_{g,b}({}^S\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_g^T({}^S\hat{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{J}_b^T({}^S\hat{\mathbf{q}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}) \end{bmatrix} \quad (23e)$$

A differenza dell'approccio convenzionale, il filtro proposto da Madgwick, non utilizza iterativamente l'algoritmo di discesa del gradiente, né calcola in tempo reale lo step-size  $\mu$  che va corretto ad ogni iterazione ad un valore ottimo, basandosi sulla derivata seconda della funzione obiettivo ovvero sulla sua Hessiana, approccio questo che aumenta il carico computazionale dell'algoritmo e che in questa applicazione non è necessario. Risulta dunque

$${}^S\mathbf{q}_{\nabla,t} = {}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} - \mu_t \frac{\nabla \mathbf{f}}{\|\nabla \mathbf{f}\|} \quad (24e)$$

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{cases} \mathbf{J}_g^T({}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}) \mathbf{f}_g({}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}, {}^S\hat{\mathbf{a}}_t) \\ \mathbf{J}_{g,b}^T({}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}, {}^E\hat{\mathbf{b}}) \mathbf{f}_{g,b}({}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}, {}^S\hat{\mathbf{a}}, {}^E\hat{\mathbf{b}}, {}^S\hat{\mathbf{m}}) \end{cases} \quad (25e)$$

dove in  ${}^S\mathbf{q}_{\nabla,t}$ , il pedice  $\nabla$  indica che il quaternion è stato stimato mediante l'algoritmo di discesa del gradiente. Tali approssimazioni, rendono il filtro molto più rapido nell'esecuzione in tempo reale e possono comportare solamente errori di secondo ordine (quindi di modesta entità) nel caso in cui

l'assetto del sensore non vari troppo rapidamente. Lo step-size  $\mu$  deve essere sottoposto a specifici limiti per evitare overshooting.

Nel suo articolo Madgwick propone, per il calcolo di  $\mu_t$ , la seguente soluzione

$$\mu_t = \alpha \left\| \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t}^S \right\| \Delta t, \quad \alpha > 1 \quad (26e)$$

Dove  $\Delta t$  è il periodo di campionamento e  $\alpha$  coefficiente di incremento di  $\mu$ , che tiene in considerazione il rumore nelle misure di accelerazione e campo magnetico.

**Filter Fusion Algorithm.** La stima dell'orientamento del sensore rispetto al sistema di riferimento terra in  ${}^S\mathbf{q}_{est,t}$  si ottiene mediante la fusione delle due stime di orientamento precedentemente presentate:  ${}^S\mathbf{q}_{\omega,t}$  e  ${}^S\mathbf{q}_{\nabla,t}$ . Queste vengono fuse assieme al fine di ottenere una stima più accurata del quaternion cercato, e tale fusione è descritta dalla equazione (27e)

$${}^S\mathbf{q}_{est,t} = \gamma_t {}^S\mathbf{q}_{\nabla,t} + (1 - \gamma_t) {}^S\mathbf{q}_{\omega,t}, \quad 0 \leq \gamma_t \leq 1 \quad (27e)$$

dove  $\gamma_t$  e  $(1 - \gamma_t)$ , sono i pesi applicati a ciascun dato di orientamento. Un valore ottimale di  $\gamma_t$  può essere definito come quel valore tale per cui la tendenza a divergere di  ${}^S\mathbf{q}_{\omega}$  (dovuta all'errore di bias) eguagli la tendenza a convergere di  ${}^S\mathbf{q}_{\nabla}$ ; questa condizione è rappresentata dalla formula (28e):

$$(1 - \gamma_t)\beta = \gamma_t \frac{\mu_t}{\Delta t} \quad (28e)$$

dove  $\mu_t/\Delta t$  rappresenta la velocità di convergenza di  ${}^S\mathbf{q}_{\nabla}$  (più cresce  $\mu_t$  più l'algoritmo di discesa del gradiente sarà veloce a convergere alla soluzione) e  $\beta$  rappresenta la velocità di divergenza di  ${}^S\mathbf{q}_{\omega}$  espressa come modulo della derivata temporale del quaternion corrispondente all'errore del giroscopio:

$$\beta = \left\| \frac{1}{2} \hat{\mathbf{q}} \otimes [0 \quad \tilde{\omega}_\beta \quad \tilde{\omega}_\beta \quad \tilde{\omega}_\beta] \right\| = \sqrt{\frac{3}{4}} \tilde{\omega}_\beta \quad (29e)$$

dove  $\tilde{\omega}_\beta$  rappresenta l'errore a media nulla del giroscopio e  $\hat{\mathbf{q}}$  è un qualsiasi quaternione unitario

La (28e) può essere allora riscritta, per definire  $\gamma_t$ ,

$$\gamma_t = \frac{\beta}{\frac{\mu_t}{\Delta t} + \beta} \quad (30e)$$

Le equazioni (27e) e (30e) garantiscono la fusione ottima dei dati ottenuti, cioè di  ${}^S_E \mathbf{q}_\omega$  e di  ${}^S_E \mathbf{q}_\nabla$  assumendo che la velocità di convergenza dell'algoritmo di discesa del gradiente  ${}^S_E \mathbf{q}_\nabla$  governato da  $\alpha$ , sia uguale o maggiore della velocità di variazione dell'orientamento del sensore. Sono possibili delle semplificazioni: se il coefficiente  $\alpha$  risulta ampio, con stime di misura rumorose, anche  $\mu_t$  (26e) diventa molto ampio e quindi  ${}^S_E \mathbf{q}_{est,t-1}$  diventa trascurabile e l'equazione può essere riscritta come segue:

$${}^S_E \mathbf{q}_{\nabla,t} \approx -\mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (31e)$$

Anche  $\gamma_t$  (30e) si semplifica poiché il termine  $\beta$  al denominatore diventa trascurabile e l'equazione può essere riscritta come segue:

$$\gamma_t \approx \frac{\beta \Delta t}{\mu_t} \quad (32e)$$

E' anche possibile assumere  $\gamma_t=0$ .

Tenendo conto delle semplificazioni si ottiene

$${}^S_E \mathbf{q}_{est,t} = \frac{\beta \Delta t}{\mu_t} \left( -\mu_t \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) + (1 - 0) \left( {}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} + {}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} \Delta t \right) \quad (33e)$$

La (33e) può essere semplificata nella (34e):

$${}^S_E \mathbf{q}_{est,t} = {}^S_E \hat{\mathbf{q}}_{est,t-1} + {}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{est,t} \Delta t \quad (34e)$$

In cui  ${}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{est,t}$  è la stima della velocità di variazione dell'orientamento definito nella (35e)

$${}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{est,t} = {}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{\omega,t} - \beta {}^S_E \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\epsilon,t} \quad (35e)$$

e  ${}^S_E \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\epsilon,t}$  è la direzione dell'errore di  ${}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{est,t}$  definito dalla (36e):

$${}^S_E \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\epsilon,t} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (36e)$$

E' evidente dalla (34e) e dalla (36e), che il filtro calcola l'orientamento  ${}^S_E \mathbf{q}_{est}$ , integrando numericamente la velocità stimata  ${}^S_E \dot{\mathbf{q}}_{est,t}$  a sua volta ottenuta come velocità di variazione dell'orientamento misurata dal giroscopio, corretta con un fattore di errore  $\beta$ , che rappresenta l'entità dell'errore di misura giroscopica.

### **Compensazione del bias drift del giroscopio.**

I giroscopi sono soggetti a diversi tipi di problemi tra cui l'errore di bias, che può variare con la temperatura e con il movimento per cui, nella implementazione pratica di un sensore IMU bisogna tenere conto di ciò. Esistono diverse soluzioni per compensare tale errore, ma quella di nostro interesse in questo contesto è la soluzione che meglio si adatta al filtro di Madgwick.

La direzione normalizzata dell'errore stimato della velocità angolare,  ${}^S_E \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{\epsilon,t}$ , può essere espressa come l'errore angolare in ciascun asse giroscopico usando l'equazione

$${}^S\boldsymbol{\omega}_{\epsilon,t} = 2 {}^S\hat{\mathbf{q}}_{est,t-1}^* \otimes {}^S\dot{\mathbf{q}}_{\epsilon,t} \quad (37e)$$

ottenuta dall'inversa della equazione (2e).

Il bias del giroscopio  ${}^S\boldsymbol{\omega}_b$  è rappresentato dalla componente DC di  ${}^S\boldsymbol{\omega}_{\epsilon}$  e può essere rimosso come l'integrale di  ${}^S\boldsymbol{\omega}_{\epsilon}$  pesato mediante un appropriato guadagno,  $\zeta$ .

$${}^S\boldsymbol{\omega}_{b,t} = \zeta \sum_t {}^S\boldsymbol{\omega}_{\epsilon,t} \Delta t \quad (38e)$$

dove  $\zeta$  è un opportuno guadagno utilizzato per compensare eventuali bias di diversa entità, che si ottiene come segue

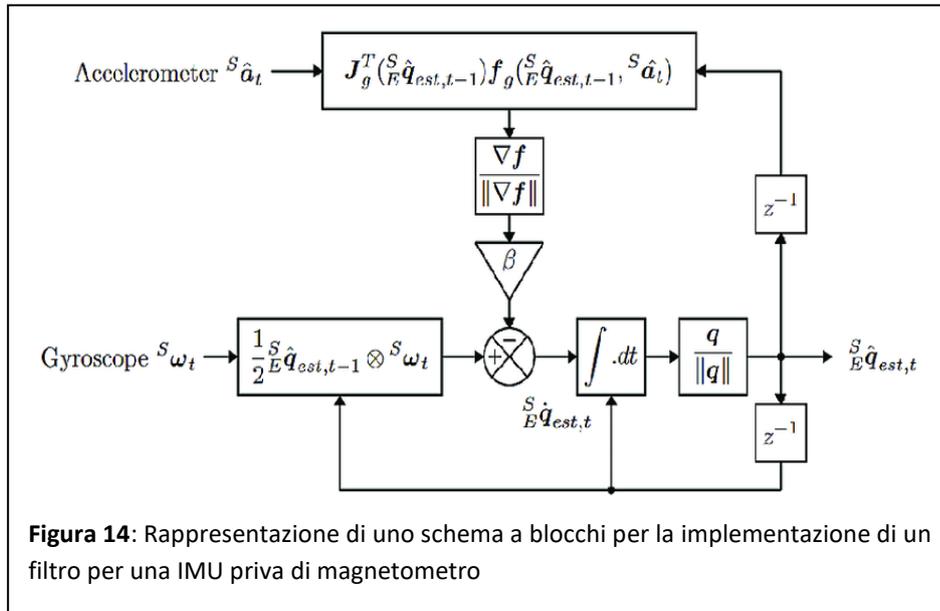
$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}} \tilde{\omega}_{\zeta} \quad (39e)$$

Dove  $\tilde{\omega}_{\zeta}$  rappresenta la velocità di variazione del drift bias giroscopico stimato per ogni asse

Per concludere, si può indicare la relazione seguente,

$${}^S\boldsymbol{\omega}_{c,t} = {}^S\boldsymbol{\omega}_t - {}^S\boldsymbol{\omega}_{b,t} \quad (40e)$$

in cui  ${}^S\boldsymbol{\omega}_{c,t}$  è la componente compensata delle misure giroscopiche,  ${}^S\boldsymbol{\omega}_t$  è la misura effettuata e  ${}^S\boldsymbol{\omega}_{b,t}$  rappresenta la velocità di convergenza della stima del bias giroscopico espresso come modulo del quaternion derivato (29e). Va ricordato che la parte scalare del quaternion è sempre identicamente nulla e quindi ininfluyente.



**2.3.2.2 IMU filter:** è un filtro molto semplice che fonde i dati in uscita da accelerometro e giroscopio portando alla correzione del bias del giroscopio cioè della velocità angolare. La velocità angolare ottenuta dalla imuFilter è corretta dagli effetti del bias del giroscopio durante tutto il periodo di osservazione e converge verso la velocità angolare ottima. Integrando quindi numericamente il segnale giroscopico corretto, si ottiene ancora una volta l'orientamento spaziale della IMU mediante gli angoli di Eulero. Anche in questo caso valgono i concetti enunciati prima circa il tipo di errore a cui sono soggetti accelerometro e giroscopio, per cui la modellazione dell'IMU filter richiede l'impostazione di tolleranze circa i parametri di Random Walk, constant Bias, drift noise tolerance e frequenza di campionamento. Da un punto di vista pratico, si crea un imuSensorSystem object™ con un giroscopio non ideale. Si definisce la IMU con la ground-truth di accelerazione, velocità angolare e orientamento, tutti dati in nostro possesso poiché stiamo operando con un segnale reale. Si procede con l'impostazione dei parametri di randomWalk, impostato su 0.003 e di constant Bias, impostato su 0.3 nonché la frequenza di campionamento del segnale.

Si crea quindi un imuFilter System object, denominato fuse, definito mediante i dati accelerometrici e giroscopici modellati. La modellazione del filtro implica l'impostazione della frequenza di campionamento, della tolleranza del drift noise giroscopico, nel nostro caso impostato su un valore di 1e-6; fuse così impostato prende in ingresso i dati accelerometrici e giroscopici e restituisce la velocità angolare corretta. Si plotta quindi la ground-truth angular velocity, le gyroscope readings e la velocità angolare corretta per ogni asse (per i grafici vedasi il Cap. Risultati Figg. 26,27,28).

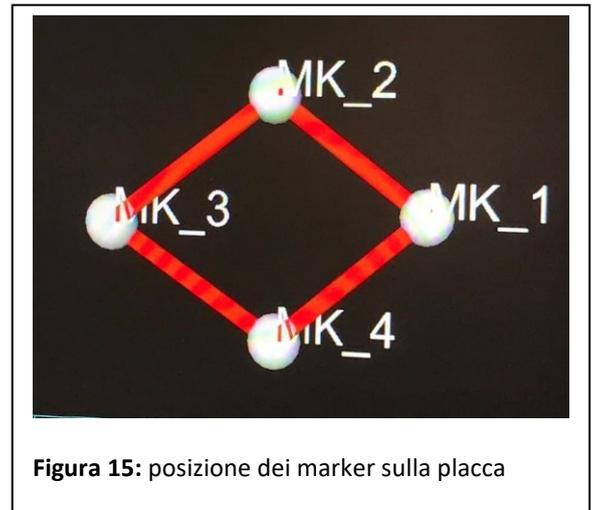
### **2.3.3 Filtri per la correzione del rumore: filtro di Butterworth (del IV ordine).**

I segnali in uscita dalla IMU sono stati filtrati con un filtro passa basso di Butterworth del IV ordine ad una frequenza di taglio di 12Hz, per ridurre l'entità del rumore sui dati acquisiti dai sensori della IMU.

## ***2.4 Protocollo sperimentale***

**2.4.1 Soggetti coinvolti:** il test dello Stand to Sit to Stand è stato eseguito da un soggetto adulto di

sesso femminile, con BMI nella norma, in buone condizioni di salute (né problemi neuromuscolari, né condizioni patologiche a carico dei sistemi preposti all'equilibrio (vestibolare o cerebellare), utilizzando uno sgabello regolabile in altezza, senza braccioli e senza schienale; il probando ha eseguito in sequenza 8 cicli completi di Stand to Sit to Stand test. Il task è stato



**Figura 15:** posizione dei marker sulla placca

eseguito ad una velocità regolare, cercando di evitare accelerazioni specie nelle fasi di transizione posturale.

**2.4.2 Strumentazione usata e acquisizione dati:**



**Figura 16:** regione acromiale\_in rosso (Google Images)



**Figura 17.** IMU su placca al centro di 4 marker passivi

**Sensore inerziale (SI) BTS - G\_Walk** è stato applicato su una placca al centro di 4 marker passivi e indossato grazie ad una cintura in posizione lombare. Il sensore include un accelerometro triassiale e un giroscopio triassiale che registrano il segnale ad una frequenza di campionamento di 100Hz. Sono stati inoltre applicati altri due marker passivi in regione acromiale bilateralmente.

<b>Tabella 8:</b> Caratteristiche tecniche del sensore inerziale utilizzato BTS_G_Walk
Piattaforme Inerziali: tecnologia '4 – Sensor Fusion '
Accelerometro Triassiale 16bit/axes with multiple sensitivity: ( $\pm 2$ , $\pm 4$ , $\pm 8$ , $\pm 16$ g)
Giroscopio Triassiale 16bit/axes with multiple sensitivity: ( $\pm 250$ , $\pm 500$ , $\pm 1000$ , $\pm 2000$ °/s)
Batteria ricaricabile via USB, <b>8 ore</b> di autonomia
Frequenza: Accelerometro: da 4 a 1000 Hz
Giroscopio: da 4 a 8000 Hz
Sensor Fusion: 200 Hz
Modalità di lavoro: Real-time/batch

**Software di gestione dati:** BTS G Studio.

**Sistema cinematico stereofotogrammetrico** ha acquisito e fornito i dati provenienti dai marker passivi, quattro applicati sulla placca indossata più altri due marker posti in regione acromiale



bilateralmente. Tale sistema è composto da 8 telecamere a infrarosso (TVC) di cui sei fissate a parete e due su cavalletti, più una telecamera per la registrazione di filmati posta su cavalletto a terra ad un estremo del walkway system.

Il sistema Stereofotogrammetrico è stato impiegato per validare le stime della cinematica ottenute dalla IMU e dai metodi di sensor fusion e di integrazione dei dati giroscopici implementati. Le telecamere sono posizionate in modo da illuminare completamente un volume di misura di dimensione pari a:

- 3.0 metri di lunghezza,
- 1.5 metri di larghezza,
- 1.8 metri di altezza

posizionate rispettivamente tre su ciascuna parete alle due estremità della lunghezza; due sui cavalletti ai lati del camminamento. La consolle di registrazione è fornita di due personal computer, uno che costituisce l'unità di acquisizione e l'altro, l'host, gestisce le acquisizioni. Il software che gestisce la calibrazione del volume è lo SMART\_DX mentre per la gestione del sistema stereofotogrammetrico è utilizzato lo Smart Capture \_ BTS.

***Dati in uscita della IMU*** sono i dati forniti da accelerometro, giroscopio unitamente agli angoli di Roll, Pitch e Yaw che sono forniti dall'algoritmo di data fusion della IMU e che ci dà l'orientazione della stessa nello spazio. I dati ottenuti dal Sistema Cinematico Stereofotogrammetrico sono file che rappresentano lo spostamento dei marker passivi (i 4 sulla placca e i due acromiali) cioè la variazione della loro posizione nel tempo durante le varie fasi del test. I segnali in uscita dalla IMU hanno una frequenza di campionamento ( $F_s$ ) di 100Hz, mentre quelli ottenuti dai marker passivi hanno una  $F_s$  di 250Hz. Questo ha richiesto un ricampionamento del segnale stereofotogrammetrico a 100Hz per

la comparazione col dato della IMU. I dati vengono rappresentati secondo un sistema di assi

**Tabella 9.** modalità di registrazione i dati in uscita dalla IMU (file .txt)

Time	Acc.			Gyro.			Roll	Pitch	Yaw
t(s)	X(m/s <sup>2</sup> )	Y(m/s <sup>2</sup> )	Z(m/s <sup>2</sup> )	X(°/s)	Y(°/s)	Z(°/s)	(°)	(°)	(°)
0.010	-0.019	9.369	2.532	-1.221	0.122	0.061	74.7	0.3	-111.1

cartesiani coordinati nello spazio, per cui ogni frame è espresso con una triade di assi

x, y, z:

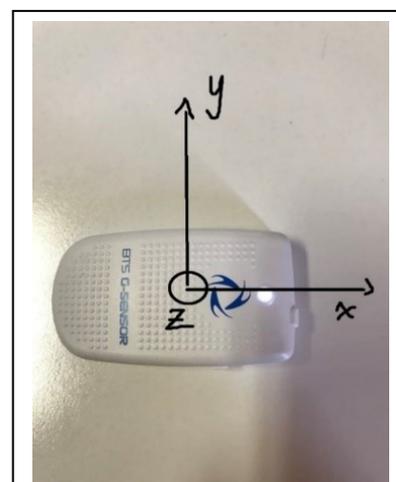
**Tabella 10.** modalità di registrazione dati del sistema stereofotogrammetrico (file .txt)

Frame	Time	M1.X	M1.Y	M1.Z	M2.X	M2.Y	M2.Z	M3.X	M3.Y	M3.Z	M4.X	M4.Y	M4.Z	ACsx.X	ACsx.Y	ACsx.Z	ACdx.X	ACdx.Y	ACdx.Z
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

questo vale per l'accelerazione fornita dall'accelerometro, per la velocità angolare fornita dal giroscopio e per ciascun marker il cui moto è registrato dal sistema stereofotogrammetrico.

I dati forniti da accelerometro, giroscopio unitamente agli angoli di Roll, Pitch e Yaw, sono espressi in coordinate body, corrispondenti alle coordinate velivolo. La IMU nel nostro test è orientata come in figura: asse x medio\_laterale, di flessione estensione, asse z antero\_posteriore, di rotazione laterale, asse y verticale (piedi-testa), di rotazione assiale.

I dati forniti dal sistema cinematico stereofotogrammetrico ottenuti dai marker passivi, sono espressi in assi Terra, cioè sistema di riferimento fisso equivalente al sistema di laboratorio.



**Figura 19:** IMU G\_Walk orientata come nell'esperimento

**2.4.3 Strumenti informatici:** Per l'elaborazione dei segnali registrati

dalla IMU, per il calcolo dei parametri di interesse, per la rappresentazione grafica e la elaborazione dei risultati numerici è stato utilizzato il programma MatLab R2021a, Academic use. Tra i toolbox usati, Aerospace Blockset con uso delle funzioni disponibili nella quaternion library; la ARHS filter

toolbox; il Sensor Fusion e Tracking Toolbox; mathematics toolbox tra cui i sistemi di ODEs; strumenti per la rappresentazione grafica dei dati. I filtri open source modificati ed utilizzati sono:

ImuFilter e ARHS\_Madgwick filter, versione 2011.

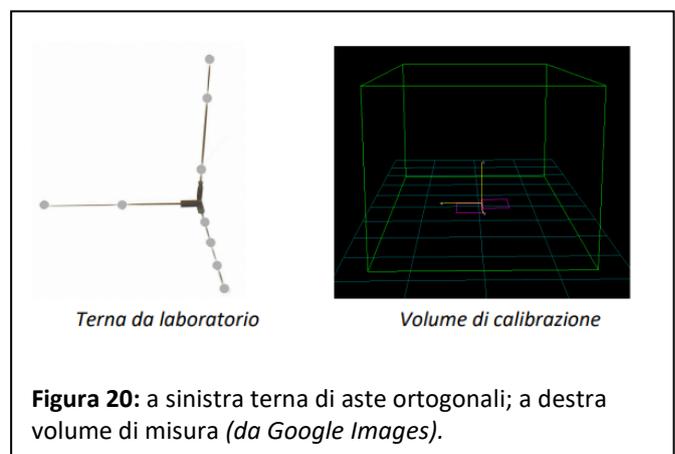
Le funzioni della “quaternion library”, parte dell’Aerospace Toolbox di MatLab maggiormente utilizzate sono:

**angle2quat:** converte gli angoli di Eulero (espressi in radianti) nel quaternione dell’orientamento;

**quat2angle:** opera la conversione inversa a quella della function angle2quat, ovvero trasforma le componenti del quaternione dell’orientamento nella terna di angoli di Eulero;

**angle2dcm:** accetta in input i tre angoli di Eulero e restituisce la corrispondente  $[T]_{EB}$ , matrice di trasformazione dal sistema di riferimento assi corpo al sistema di riferimento assi terra.

**2.4.4 Descrizione fasi esperimento:** Si è innanzitutto provveduto alla calibrazione del volume di misura mediante Calibrazione Dinamica, ovvero utilizzando dapprima tre aste ortogonali poste sul walkway a rappresentare il sistema di coordinate di laboratorio e composte rispettivamente da 4, 3 e 2 marker; tale fase ha avuto una durata di circa 10s; si è quindi passati a spazzolare il volume con la stecca con tre marker per circa 60s; al termine della



calibrazione, il sistema ha rilevato un errore di 0.156 mm nella distanza tra i marker con una DS di 0.19 mm.

**Esecuzione del task.** Il test è stato ripetuto in sequenza dal volontario diverse volte; delle registrazioni effettuate solamente 8 sono state sottoposte alla procedura di tracking. Il test eseguito è stato il seguente: volontario posto in piedi, spalle allo sgabello (preventivamente posizionato alla giusta



altezza perché le gambe del volontario fossero poste a squadra, cioè a  $90^\circ$  in posizione seduta) (Rodosky, M.W. et al, 1989). Quindi, dopo aver eseguito un sollevamento sugli avampiedi al fine di creare un segnale di allineamento tra i due sistemi, una accelerazione verticale a partire dalla quale iniziare l'analisi dei segnali, il volontario ha posizionato le braccia incrociate sul torace e quindi si è seduto eseguendo un movimento regolare ad una velocità costante; dopo una fase stazionaria in posizione seduta ha fatto seguito una fase di alzata fino al recupero della stazione eretta.

**2.4.5 Elaborazione del segnale:** Obiettivo di questo esperimento è validare l'uso di un unico sistema di misura inerziale applicato al tronco come strumento efficace e di validità comparabile col sistema stereofotogrammetrico (qui impiegato solamente per validare i risultati ottenuti dalla IMU) nella determinazione dei parametri temporali, spaziali e cinematici necessari per la valutazione clinica di un soggetto investigato. E' dunque importante elaborare il segnale per trovare i parametri di interesse, e tale elaborazione consiste nel risolvere un problema ai valori iniziali retto dalle equazioni

del moto inerziale e dai quaternioni. Quindi, dopo aver misurato grazie al giroscopio della IMU la variazione nel tempo delle componenti  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $r(t)$  della velocità angolare, abbiamo integrato (**numericamente**) il sistema di quattro equazioni differenziali ordinarie del **primo** ordine per ottenere le storie temporali delle componenti del quaternione  $q_0(t)$ ,  $q_x(t)$ ,  $q_y(t)$ ,  $q_z(t)$  in un intervallo di tempo  $[t_0, t_{fin}]$ . Abbiamo a tale scopo determinato le condizioni iniziali, rappresentate dai valori di  $Q_0$ , cioè delle componenti del quaternione all'istante  $t_0$ , componenti determinate mediante gli angoli  $\Phi_{i0}$ ,  $\Theta_{i0}$  e  $\Psi_{i0}$  a  $t_0$  utilizzando la funzione ***angle2quat*** della "quaternion library".

Determinate le storie temporali delle componenti del quaternione, le storie temporali degli angoli di Eulero si ricavano per mezzo della trasformazione operata da MatLab grazie all'uso della funzione ***quat2angle*** fornita dalla "quaternion library".

**2.4.6 Analisi Statistica:** A causa della dimensione non rappresentativa del campione e della distribuzione non normale di alcune misure, i parametri sono descritti facendo riferimento ai valori medi, di minimo e di massimo. Per i parametri temporali studiati, è stato calcolato l'errore quadratico medio (RMSE) considerando i valori ottenuti con la stereofotogrammetria, il valore ottimo verso il quale valutare il segnale misurato.

### ***3. Risultati sperimentali***

Nel presente capitolo sono raccolti i principali risultati sperimentali ottenuti.

Nella prima parte sono riportati i grafici dei dati di interesse (angoli  $\phi$ ,  $\theta$ , e  $\psi$  a confronto e velocità angolare) ottenuti applicando ai segnali registrati dalla IMU i diversi sistemi di filtraggio utilizzati, e quindi messi a confronto.

Nella seconda parte di questo capitolo sono invece riportati, sottoforma di tabelle, i valori numerici dei parametri spazio temporali e angolari rilevanti ai fini della valutazione clinica di un soggetto che esegue il test.

Parametri importanti che possono essere ricavati dai dati forniti durante l'esecuzione del test dalla IMU e di estrema utilità in ambito clinico riabilitativo sono:

- parametri temporali intesi come durata della fase di standing, della fase di sitting e delle fasi di transizione posturale dalla posizione ortostatica a quella seduta e viceversa, dalla posizione seduta alla stazione eretta; indice importante è anche la durata delle sottofasi delle transizioni posturali;
- parametri spaziali delle fasi di Stand to Sit e Sit to Stand, ovvero gli spostamenti antero\_posteriori(AP), verticali(V) e medio\_laterali(ML) durante l'esecuzione del test;
- le accelerazioni antero\_posteriore (AP), medio\_laterale (ML) e verticale(V) durante le fasi di transizione posturale (Stand to Sit e Sit to Stand), parametri questi, utili per valutare la tendenza del soggetto alla caduta;
- parametri angolari importanti per lo studio della cinematica del tronco: angoli di flessione ed estensione e le relative velocità angolari.

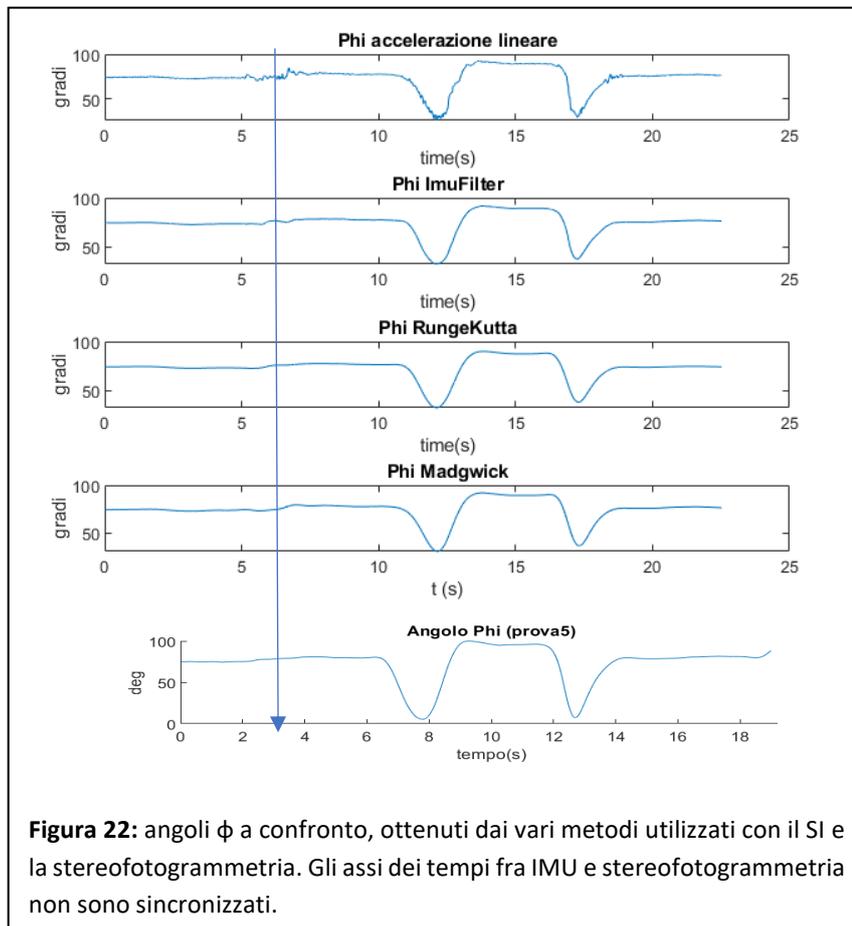
La **cinematica del tronco** rappresenta un utile strumento nella valutazione funzionale di un soggetto in esame ed è per tale motivo che gli studi si sono concentrati sull'utilizzo di una singola IMU applicata al tronco invece di dispositivi multipli applicati agli arti inferiori.

Parametri importanti in tal senso sono gli angoli di flessione ed estensione, ovvero i punti di massima flessione e di massima estensione nonché le ampiezze massime di flessione e di estensione: il **range di flessione** rappresenta il valore angolare che va dall'inizio del movimento di flessione all'inizio del movimento di estensione; il **range di estensione** rappresenta il valore angolare che va dall'inizio del movimento di estensione alla fine dello stesso.

Nelle figure che seguono si rappresentano i grafici delle componenti dei segnali ottenuti con i vari sistemi di filtraggio applicati, posti a confronto tra loro e con gli analoghi segnali ottenuti dal sistema stereofotogrammetrico con l'uso dei marker, sistema utilizzato per la validazione delle misure ottenute dal Sistema Inerziale. Si ricorda che è stata eseguita una sequenza di otto prove dello Stand to Sit to Stand test; i dati riportati si riferiscono all'esame di tutte le otto prove valutate ogni volta per ogni diverso filtro e metodo di elaborazione utilizzato. Per quanto riguarda i grafici, poiché si è osservata una sovrapposizione dei risultati ottenuti in ciascuna delle otto prove eseguite, si riportano i grafici relativi ad una delle prove esaminate (la n. 5).

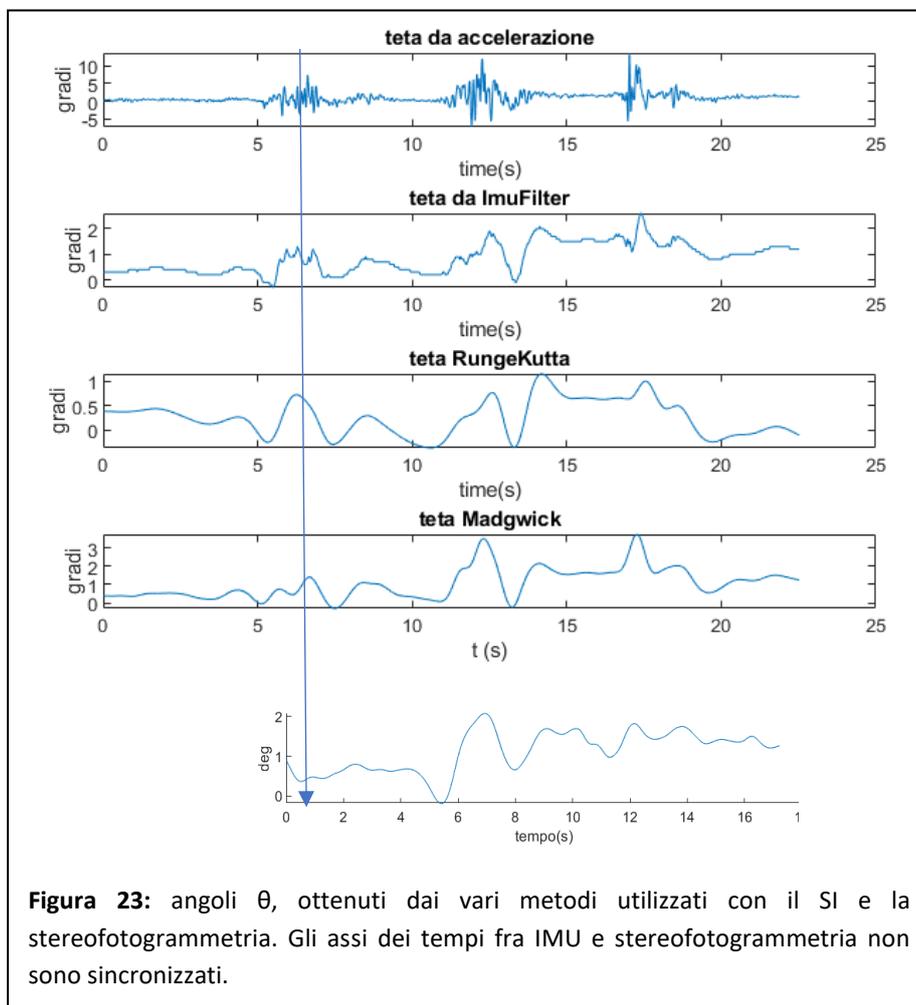
Nelle **figure 22, 23, 24** sono posti a confronto rispettivamente gli angoli  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  ottenuti utilizzando i metodi indicati, ovvero i dati forniti dall'accelerometro; il metodo di integrazione di Runge Kutta, basato sul quaternioni dell'orientamento senza altro mezzo di filtraggio a parte Butterworth del IV ordine per il noise; l'algoritmo di fusione ImuFilter che, applicato al segnale accelerometrico e giroscopico registrati, fornisce in output le componenti della velocità angolare p, q, ed r corrette dal segnale accelerometrico e con le quali sono stati calcolati gli angoli di Eulero integrando col sistema di ODE45; infine l'algoritmo gradient descent di Madgwick, algoritmo basato sull'uso del co\_quaternioni. I risultati ottenuti sono stati posti a confronto con quelli ottenuti mediante la

stereofotogrammetria, che ad oggi rappresenta il gold standard nello studio della cinematica del movimento.

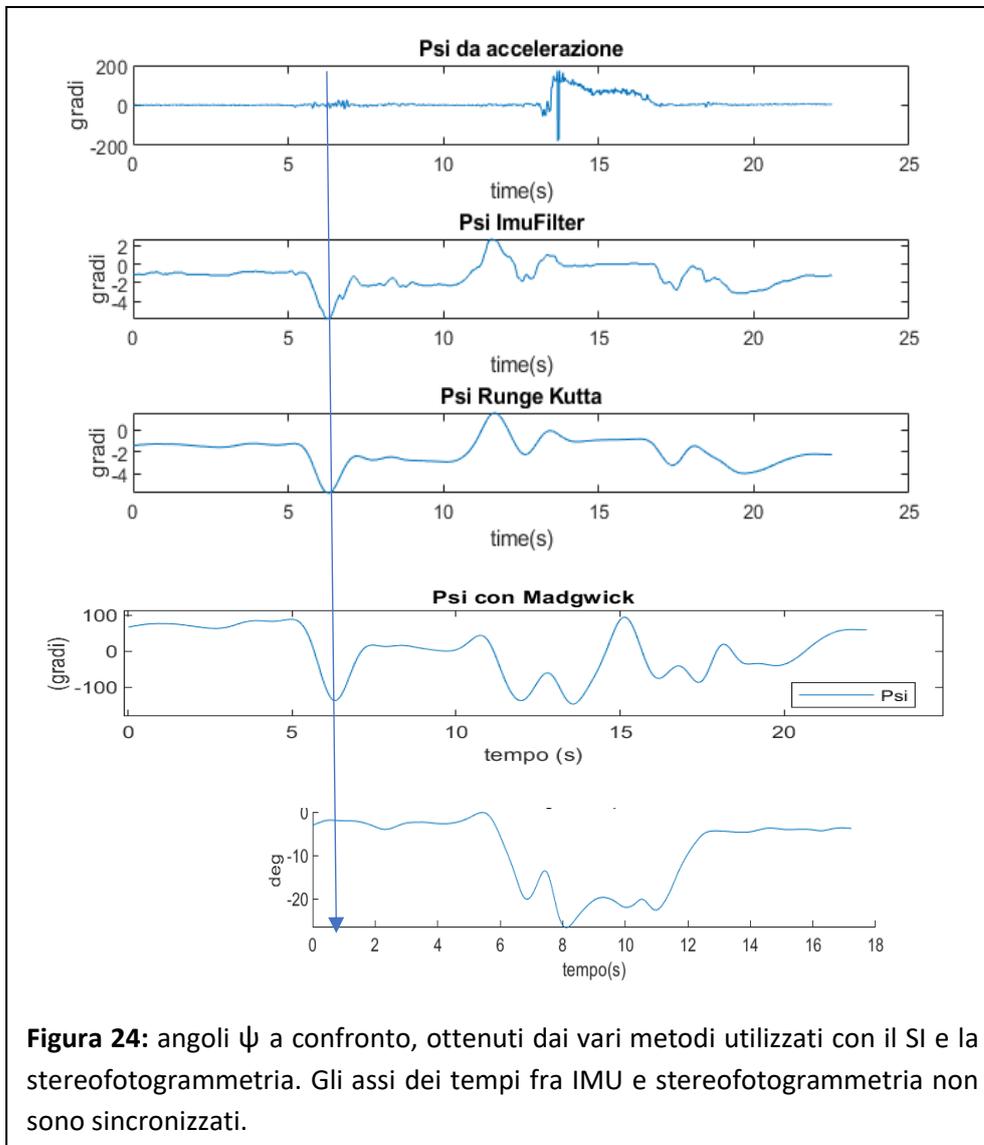


Nella **figura 22**, sono posti a confronto gli angoli  $\phi$ ; si può osservare la corrispondenza nel tempo degli stessi traslando in avanti di circa 6s il grafico dell'angolo ottenuto dalla stereofotogrammetria. Ricordiamo infatti che abbiamo eseguito, in fase iniziale del test, un sollevamento sugli avampiedi che rappresenta il segnale di allineamento tra i due sistemi, (si veda **Figura 21**: esecuzione task) indicato nei grafici dalla linea verticale posta a circa 6s. Risulta dunque evidente che esiste corrispondenza temporale tra i cinque segnali. Il quinto grafico della serie, rappresenta l'angolo  $\phi$  derivante dalla stereofotogrammetria, ovvero l'angolo ottenuto mediante gli assi del punto medio calcolato utilizzando i quattro marker passivi applicati sulla placca.

Nella **figura 23**, si pongono a confronto gli angoli  $\theta$ : nel nostro esperimento  $\theta$  rappresenta l'angolo di flessione laterale.



Nella **figura 24** si pongono a confronto gli angoli  $\psi$ : nel nostro esperimento  $\psi$  rappresenta la rotazione attorno all'asse verticale (twist).



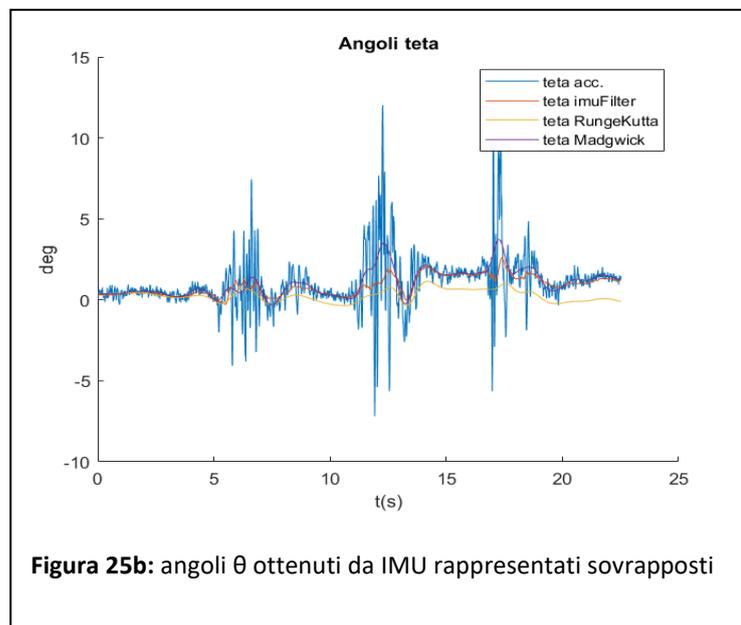
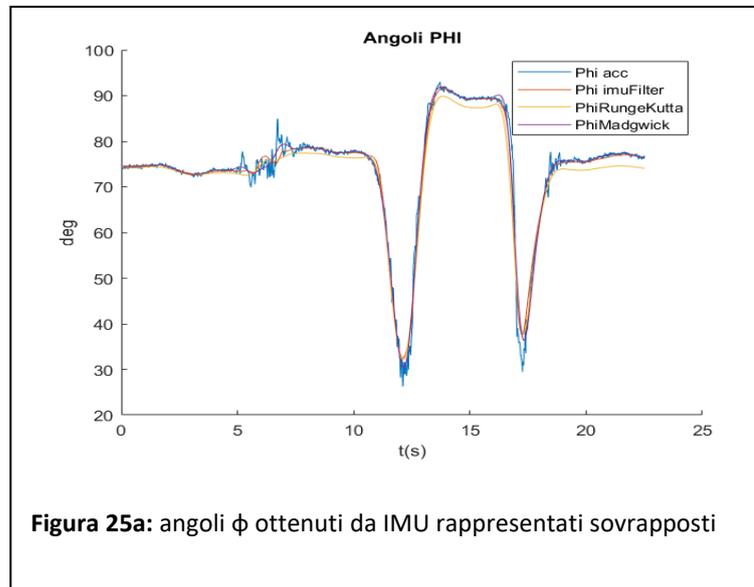
**Figura 24:** angoli  $\psi$  a confronto, ottenuti dai vari metodi utilizzati con il SI e la stereofotogrammetria. Gli assi dei tempi fra IMU e stereofotogrammetria non sono sincronizzati.

Si può osservare dai grafici nella figura 24, che gli angoli  $\psi$  hanno un andamento variabile rispetto a quanto osservato con gli angoli  $\phi$  e  $\theta$ , tanto che in letteratura gli angoli  $\psi$  vengono definiti “randomici”. Ciò risiede in parte nel fatto che l’accelerazione gravitazionale da sola e per di più parallela all’asse verticale in condizioni iniziali, non è in grado di fornire un’orientazione univoca del sensore e quindi dell’angolo che ruota attorno all’asse verticale  $\psi$ .

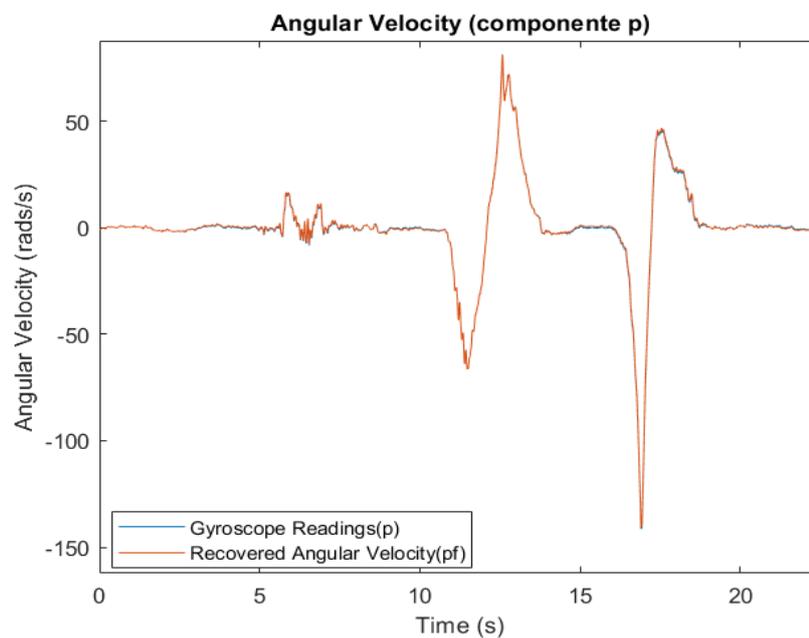
A conferma di ciò nelle **figure 22, 23, 24** sono riportati a confronto tra gli altri, anche gli angoli di Eulero ottenuti applicando al segnale una versione semplificata del filtro di Madgwick (versione open source 2011). Tale implementazione non utilizza le misure provenienti dal magnetometro (non presente nella IMU) per cui la stima delle rotazioni attorno all'asse verticale del sistema di riferimento body, viene ottenuta mediante integrazione della velocità angolare. La correzione della stima di posizione dovuta all'algoritmo di discesa del gradiente di Madgwick si effettua solamente sugli angoli di flessione  $\phi$  e di rotazione laterale  $\theta$  grazie alle misure di gravità dell'accelerometro. Si osserva infatti una buona corrispondenza per quanto riguarda l'angolo  $\phi$  e l'angolo  $\theta$ , mentre come evidente anche in questo caso, l'angolo  $\psi$  ha un comportamento randomico.

La velocità di convergenza dipende dal guadagno  $\beta$  utilizzato che nel nostro test è stato impostato su un valore pari a 0.5. Da sottolineare che la scelta di un valore  $\beta$  più elevato del necessario, anche col fine di aumentare la dinamica del filtro, causa tuttavia, raggiunta la stabilità, oscillazioni maggiori del segnale (*Hoang ML., 2021*).

Nelle **figure 25a e 25b**, si riportano a confronto gli angoli  $\phi$  e gli angoli  $\theta$  ottenuti dal sistema inerziale, qui raffigurati sovrapposti. Si può osservare, in entrambe i casi, il buon livello di sovrapposizione dei segnali ottenuti.

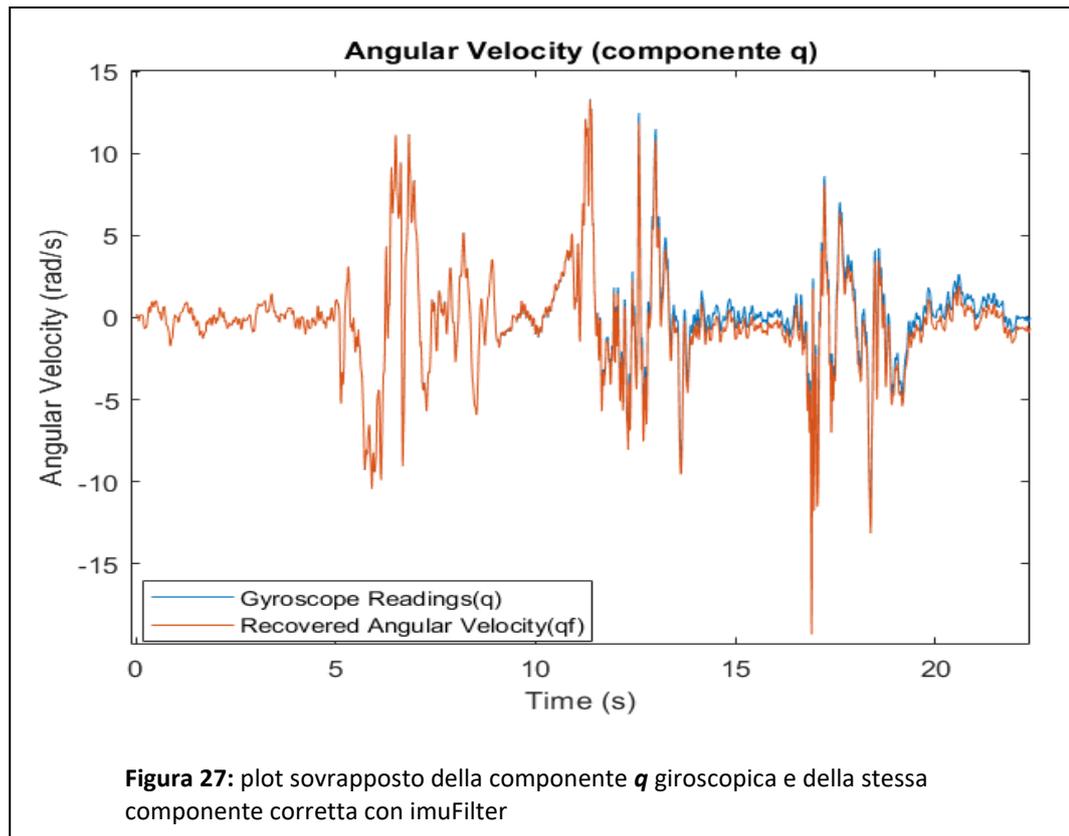


Nelle **figure 26, 27, 28**, si riportano a confronto le componenti  $p$ ,  $q$ ,  $r$  in uscita dal giroscopio e le stesse componenti dopo filtraggio con l'algoritmo di fusione IMU filter. L'IMU filter è implementato per una piattaforma priva di magnetometro. Fondendo il segnale accelerometrico e giroscopico dopo adeguata impostazione dei parametri del filtro, si ottengono valori di  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , corretti che mostrano un grado di convergenza maggiore rispetto al segnale giroscopico iniziale non filtrato. Risultati sovrapponibili si ottengono in tutte le otto prove.

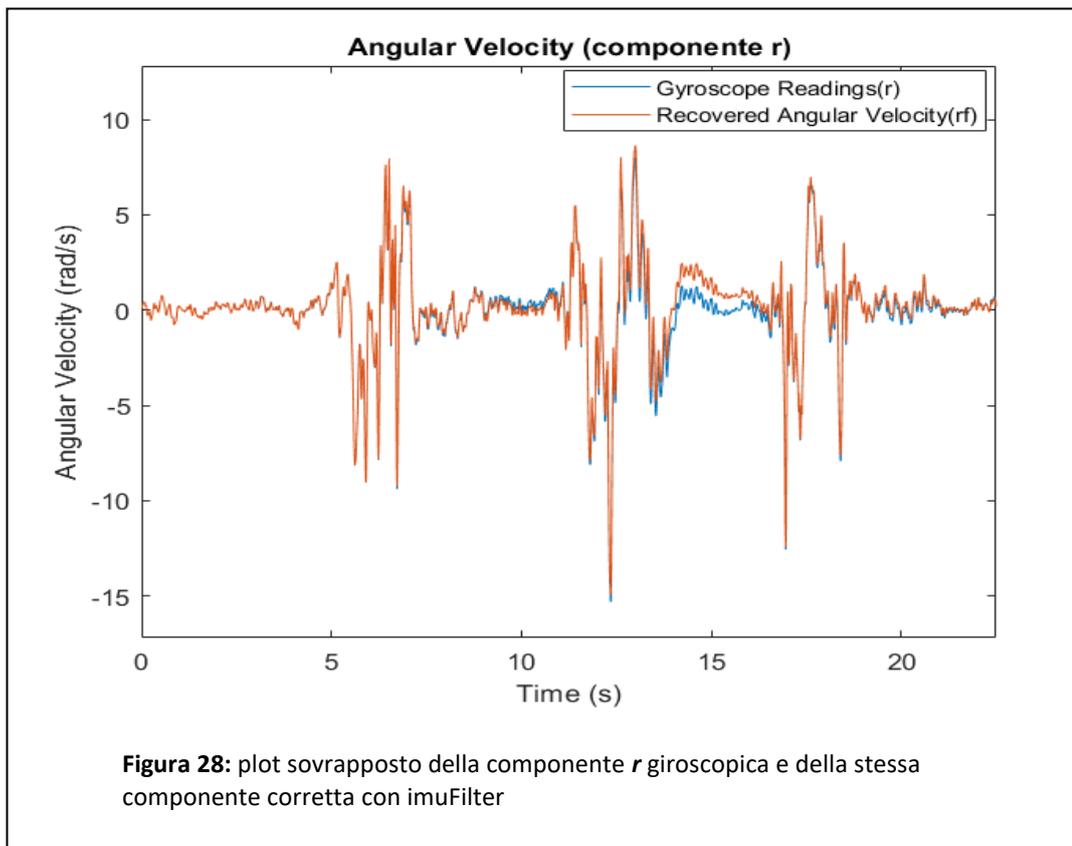


**Figura 26:** plot sovrapposto della componente  $p$  giroscopica e della stessa componente corretta con imuFilter

Il segnale corretto dall'algoritmo di fusione Imu Filter, è stato utilizzato per trovare gli angoli di Eulero mediante integrazione dello stesso col metodo di Runge Kutta.



**Figura 27:** plot sovrapposto della componente  $q$  giroscopica e della stessa componente corretta con imuFilter



**Figura 28:** plot sovrapposto della componente  $r$  giroscopica e della stessa componente corretta con imuFilter

Nella parte che segue sono riportati, in forma tabellare, i valori dei parametri spaziali, temporali e angolari che rappresentano i cardini nella valutazione clinica di un soggetto esaminato e che sono di estrema utilità nella valutazione oggettiva, misurata, del rischio di caduta di certi soggetti, come nella valutazione del grado di autonomia nelle attività di vita quotidiana. I dati ottenuti con i diversi metodi, sono riportati a confronto sulla stessa tabella.

Nella **tabella 11**, si pongono a confronto i principali **parametri temporali**:

**Tabella 11:** parametri temporali a confronto.

	<i>Accelerazione</i>			<i>RungeKutta</i>			<i>Madgwick</i>			<i>ImuFilter</i>			<i>Marker</i>		
<i>Durata(s)</i>	<i>mid</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>	<i>mid</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>	<i>mid</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>	<i>mid</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>	<i>mid</i>	<i>min</i>	<i>Max</i>
<i>Intero test</i>	9.15	7.8	11.0	8.84	7.6	9.8	8.94	7.6	10.4	8.30	7.3	9.2	8.24	7.5	9.1
<i>Stand to Sit</i>	3.33	3.0	4.07	3.00	1.9	4.0	3.26	2.9	3.7	2.89	2.6	3.2	2.79	2.6	3.1
<i>Sitting</i>	3.02	2.5	4.1	3.01	2.7	3.5	3.00	2.5	4.1	2.84	2.1	4.1	3.03	2.5	3.9
<i>Sit to Stand</i>	2.66	1.9	3.5	2.44	1.9	2.9	2.67	1.9	3.7	2.50	2.0	3.4	2.46	1.9	2.9

I parametri temporali riportati sono: la durata complessiva del test che va da inizio flessione dello stand to sit, a fine estensione del sit to stand, la fase di stand to sit, la fase di sitting e la fase di sit to stand. I risultati riportati (valore medio, valore minimo e valore massimo), sono stati ottenuti misurando la durata delle singole fasi in ognuna delle otto prove eseguite per ogni metodo applicato e indicato. Lo stesso è stato fatto per le otto prove il cui dato è stato misurato dal sistema stereofotogrammetrico. Lo stesso tipo di analisi temporale è stata eseguita sulle otto prove del test in cui si è utilizzando l'angolo  $\phi$  ottenuto col metodo definito "accelerazione", ovvero applicando la funzione  $atan2(g_y, g_z)$ .

Nella **tabella 12**, si riporta a confronto l'Errore Quadratico Medio (RMSE) dei parametri temporali esaminati nelle otto prove per ciascun metodo applicato, ipotizzando che i valori ottenuti dalla stereofotogrammetria rappresentino il valore migliore, la stima ottima del dato con il quale comparare tutti gli altri valori di durata stimati con gli altri metodi.

**Tabella 12:** si riportano a confronto gli RMSE inerenti la durata del segnale in base al metodo di elaborazione utilizzato.

<b><i>Durata(s)</i></b>	<b><i>RMSE per tipo di elaborazione del segnale</i></b>			
<b><i>RMSE</i></b>	<b><i>Accelerazione</i></b>	<b><i>imuFilter</i></b>	<b><i>Runge Kutta</i></b>	<b><i>Madgwick</i></b>
<b><i>Stand2Sit2Stand</i></b>	1.0547	0.2728	0.7319	0.8239
<b><i>Stand to sit</i></b>	0.5857	0.1878	0.6506	0.5067
<b><i>Sit to stand</i></b>	0.3501	0.2873	0.2333	0.4283
<b><i>Sitting</i></b>	0.0908	0.3590	0.3451	0.1654

Nella **tabella 13** si pongono a confronto i parametri spaziali (*displacement*) ottenuti dall'esecuzione delle otto prove in sequenza, i cui segnali sono stati registrati dal Sistema Inerziale e dal sistema Cinematico Stereofotogrammetrico con l'impiego dei marker passivi. La stima dei valori è stata distinta nelle componenti verticale, medio\_laterale e antero\_posteriore nelle due fasi del task, mettendo a confronto i dati dei due sistemi di rilevazione.

**Tabella 13:** si pongono a confronto i dati di *displacement* lungo le tre direzioni, ottenuti con i due metodi di registrazione del segnale.

<b>Displacement(m)</b>	<b>IMU</b>			<b>Stereofotogrammetria</b>		
	<b>ValorMedio</b>	<b>min</b>	<b>Max</b>	<b>ValorMedio</b>	<b>min</b>	<b>Max</b>
<b>Su otto prove</b>						
<b>Stand to Sit</b>						
Verticale	0.2517	0.1670	0.2867	0.2150	0.1900	0.2400
Medio Laterale	0.0031	0.0001	0.0044	9.5000e-04	0	0.0040
Antero Posteriore	0.1685	0.1389	0.2022	0.1813	0.1700	0.2050
<b>Sit to Stand</b>						
Verticale	0.2386	0.1569	0.2764	0.2275	0.1900	0.2500
Medio Laterale	0.0030	0.0002	0.0052	0.0023	1.000e-03	0.0060
Antero Posteriore	0.1641	0.1174	0.2200	0.1800	0.1700	0.1900

Dall'analisi dei dati, si può osservare un buon grado di corrispondenza, nonostante le piccole differenze osservabili nella componente verticale dello Stand to Sit che mostra valori maggiori rispetto al *displacement* verticale della stereofotogrammetria. Vale la pena ricordare che il dato stereofotogrammetrico, per quanto concerne lo spostamento, è una misura diretta mentre lo spostamento stimato dal sistema inerziale è frutto di un calcolo che implica una doppia integrazione del segnale accelerometrico. Inoltre poiché il segnale accelerometrico è somma delle varie forze agenti sull'accelerometro, in primo luogo l'accelerazione gravitazionale, è necessario eliminare tale

componente dal segnale accelerometrico col fine di rendere comparabili i risultati ottenuti dai due sistemi di registrazione. Tuttavia è necessario tenere presente che la componente di accelerazione dovuta alla gravità andrebbe tolta tenendo conto dell'inclinazione del tronco poichè l'influenza della gravità sugli assi dell'accelerometro dipende dall'inclinazione del soggetto. Non basta quindi togliere il valore di accelerazione di gravità misurato a  $t_0$  sulle tre componenti dell'accelerazione lineare fornita dall'accelerometro, poiché questa procedura sarebbe corretta solo se il soggetto, nel sedersi e nell'alzarsi, avesse il tronco sempre orientato nello stesso modo rispetto ad un riferimento esterno, ovvero se il tronco traslasse senza ruotare, cosa che invece non è, come mostrano gli angoli  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ .

Nella **tabella14** si riportano a confronto i valori di velocità angolare ( $\omega_x$ ) massima di flessione e di estensione nelle due fasi del task. Tali valori sono stati stimati facendo la media dei dati di ciascuna delle otto prove ponendo a confronto i risultati ottenuti con i due sistemi di registrazione.

**Tabella 14:** si pone a confronto la velocità angolare su otto prove IMU e otto prove Cinematica

Velocità angolare ( $\omega_x$ ) attorno all'asse di flesso estensione (medio laterale) (°/s)	Stand to sit	Sit to stand
<b>8 prove IMU</b>		
$\omega_{maxflex}$	-1.91	-3.22
$\omega_{maxext}$	2.35	1.72
<b>8 prove imuFilter</b>		
$\omega_{maxflex}$	-1.92	-3.25
$\omega_{maxext}$	2.37	1.75
<b>8 prove marker</b>		
$\omega_{maxflex}$	-1.75	-3.03
$\omega_{maxext}$	2.10	1.83

Nella **tabella 15** si pongono a confronto i valori medi di massima flessione, di massima estensione, ampiezza massima di flessione e ampiezza massima di estensione ottenuti dalle otto prove eseguite, per ciascuna delle due fasi del task, applicando i diversi metodi studiati.

Si può osservare che per tutti i metodi messi a confronto, esiste una differenza costante tra i valori riscontrati nello Stand to Sit rispetto a quelli osservati nel Sit to Stand. I motivi possono essere diversi, e tra questi, quello che si ritiene più probabile nel presente caso, è l'impiego di differenti strategie motorie nell'affrontare il movimento di seduta rispetto a quello di alzata.

**Tabella 15:** si pongono a confronto i parametri angolari studiati nelle otto prove per ciascuno dei metodi usati.

<i>Cinematica del tronco (Valori medi)</i>	<i>Da accelerazione</i>		<i>Runge Kutta</i>		<i>Madgwick</i>		<i>ImuFilter</i>		<i>Cinematica</i>	
	<i>Stand to Sit</i>	<i>Sit to Stand</i>	<i>Stand to Sit</i>	<i>Sit to Stand</i>	<i>Stand to Sit</i>	<i>Sit to Stand</i>	<i>Stand to Sit</i>	<i>Sit to Stand</i>	<i>Stand to Sit</i>	<i>Sit to Stand</i>
<i>flessione massima</i>	44.24	40.70	46.75	44.61	43.75	40.30	43.00	38.15	41.60	39.69
<i>Range di flessione</i>	47.26	53.82	50.03	57.03	46.86	53.63	43.55	50.20	42.82	51.47
<i>Estensione massima</i>	-13.76	0.76	-4.83	0.65	-13.90	0.61	-12.81	2.04	-12.22	3.22
<i>Range di estensione</i>	58.01	42.42	60.64	43.86	56.39	43.30	55.47	36.11	53.96	36.59

## ***4. Discussione e Conclusioni***

1. La necessità di uno strumento semplice, a basso costo e gestibile in ambiente domestico (*Pham MH.et al, 2018*) per la valutazione funzionale oggettiva di un individuo, ha stimolato la ricerca in ambito clinico riabilitativo portando all'utilizzo di un singolo sistema inerziale applicato al tronco anche considerando l'importanza dei parametri ottenibili dallo studio della cinematica del tronco (*Cardarelli S. et al, 2020*).
2. Per lo stesso motivo, specie negli ultimi dieci anni, la ricerca si è rivolta allo sviluppo di algoritmi sempre più ottimizzati e meno onerosi da un punto di vista computazionale col fine di limitare gli errori di calcolo che, unitamente ai problemi delle componenti la piattaforma IMU, possono rendere impreciso il risultato ottenuto dal Sistema Inerziale rispetto al gold standard rappresentato dal sistema stereofotogrammetrico, che tuttavia richiede ambienti e personale dedicati.
3. Sulla base di quanto sopra, abbiamo studiato il test dello Stand to Sit to Stand, che permette di esaminare una delle attività più impegnative di vita quotidiana di un soggetto, rappresentando un buon indice del grado di autonomia personale come pure della tendenza alle cadute. Tale test investiga la capacità di alzarsi da una posizione seduta e viceversa l'atto del sedersi, mediante lo studio dei parametri che da tale movimento possono essere ricavati.
4. Grazie a questo test e all'impiego di una singola IMU, composta da un accelerometro e da un giroscopio triassiali e posta a livello lombare grazie ad una cintura, abbiamo studiato la qualità del segnale ottenuto raffrontandolo con quanto ottenuto dal sistema stereofotogrammetrico, utilizzato come strumento di validazione del segnale IMU (figg. 22,23,24 cap. Risultati).

5. I segnali accelerometrico e giroscopico ottenuti dalla piattaforma IMU sono stati sottoposti a diversi algoritmi di filtraggio col fine di migliorarne la qualità e la precisione, riducendo le problematiche relative alle componenti IMU (*Woodman O.J., 2007*) e per ridurre il noise che sporca il segnale, aumentando l'imprecisione della misura, consentendo così una ottimizzazione del segnale registrato durante l'esecuzione del test dello Stand to Sit to Stand.
6. Per la ricerca degli angoli di Eulero necessari allo studio dell'orientamento della IMU nello spazio e quindi dei parametri angolari del tronco, sono stati utilizzati metodi di calcolo e algoritmi di filtraggio basati sull'utilizzo del quaternione dell'orientamento, poiché tale strumento matematico, introdotto per lo studio delle rotazioni nello spazio, evita le problematiche di singolarità ad esse correlate, fenomeno noto come gimbal lock che induce la perdita di un grado di libertà. L'utilizzo dei quaternioni a tal fine, si è mostrato adeguato, riducendo il numero di operazioni elementari da compiere sui dati; è per tale motivo che ormai da qualche anno i quaternioni sono largamente usati nella implementazione di filtri per i sensori inerziali.
7. Una riflessione scaturita da quanto sopra è che la stereoreofotogrammetria rappresenta sicuramente il gold-standard per lo studio della posizione di un punto nello spazio in quanto è l'unico dato che il metodo basato sul sistema dei marker passivi registra direttamente; al contrario, i sistemi inerziali misurano l'accelerazione lineare e la velocità angolare mentre calcolano tutto il resto. Quindi, la maggior parte dei dati da noi studiati e comparati, sono dati ottenuti per integrazione dell'accelerazione lineare e per derivazione della posizione dei marker. Tenendo conto che gli errori di calcolo si sommano e crescono in maniera non lineare conducendo nel tempo a grandi errori e tenendo ben presente che tale errore globale si propaga sui parametri di nostro interesse (tale valutazione viene eseguita mediante

procedure che vanno sotto il nome di propagazione della varianza, le quali permettono di avere una stima dell'entità dell'errore su grandezze derivate dai dati di posizione ma che esulano dall'ambito di questa trattazione), ancora una volta si pone l'accento sulla necessità di metodi semplici che riducano al minimo l'errore computazionale. E' opportuno ricordare inoltre che nel dato accelerometrico è contenuta l'accelerazione di gravità non presente nel segnale registrato dalla stereofotogrammetria: questo ha posto la necessità di rimuovere l'accelerazione gravitazionale dal segnale accelerometrico per rendere i parametri ottenuti dal segnale derivati dalla IMU, nello specifico il *displacement*, comparabili con quanto ottenuto con i marker passivi. Anche in questo caso si è utilizzata una procedura di calcolo semplice, non troppo onerosa da un punto di vista computazionale

8. E' per questi motivi che abbiamo sperimentato metodi di rappresentazione semplici, come il  $\sin \phi$  e gli angoli di flesso estensione trovati tramite la funzione  $\text{atan2}(gy, gz)$ , dove  $gy$  e  $gz$  rappresentano gli assi dell'accelerazione lineare in uscita dalla IMU; tali risultati sono stati messi a confronto con quanto ottenuto applicando metodi di filtraggio e di calcolo che utilizzano il quaternion e i sistemi di integrazione come il metodo di Runge Kutta e gli ODE solver, il tutto applicato ad un segnale di breve durata nel tempo, riducendo il crescere dell'errore globale sul risultato.
9. Sono inoltre stati impiegati sistemi di filtraggio quali *imuFilter*, algoritmo di fusione che corregge il segnale giroscopico grazie al dato accelerometrico, restituendo una velocità angolare corretta, le cui componenti  $p$ ,  $q$ ,  $r$  risultano più convergenti (figure 26,27,28 cap.Risultati). E' stato applicato il filtro di Madgwick, che utilizza l'algoritmo di *gradient descent*, filtro applicabile anche alla IMU, cioè sistema inerziale privo di magnetometro. I segnali così trattati sono stati utilizzati per determinare i parametri spazio temporali e

angolari importanti nello studio della cinematica del tronco. Si sottolinea che la breve durata del test consente l'uso di strumentazione priva di un correttivo (magnetometro) per il "soft iron" e "hard iron", in quanto l'hard iron (interferenze nel contesto dell'ambiente di lavoro), può essere corretto o rimosso dall'ambiente, il "soft iron" (campo magnetico terrestre), risulta di ben scarsa influenza su un segnale di breve durata come quello studiato.

**10.** I parametri ottenuti utilizzando i segnali elaborati con i diversi metodi, sono stati confrontati tra loro sia da un punto di vista grafico, sia sulla base di risultati numerici proposti in forma tabellare nel capitolo "Risultati", inclusa la valutazione dell'errore quadratico medio (RMSE) stimato nell'ipotesi che la stereofotogrammetria rappresenti il valore ottimo di riferimento per i parametri in esame. Dall'analisi dell'errore quadratico medio (RMSE) relativo ai parametri temporali, cioè la durata delle fasi del test esaminate, è evidente un elevato grado di concordanza; in questo caso è possibile affermare che se si ha a disposizione una IMU rispetto alla stereofotogrammetria possiamo sicuramente ritenere che la IMU ci dia risultati attendibili per quanto riguarda la temporizzazione del segnale, a costi, parametri e difficoltà molto più contenuti.

**11.** Oltre ad un buon grado di corrispondenza dei risultati ottenuti applicando i diversi metodi, appare interessante che, l'angolo  $\phi$  ottenuto con  $\text{atan2}(s,c)$ , quindi ad un costo computazionale estremamente basso rispetto agli altri metodi usati, è perfettamente sovrapponibile agli angoli corrispondenti ottenuti con i sistemi di filtraggio e di integrazione sicuramente più complessi.

**12.** Non è invece possibile determinare con esattezza l'angolo di rotazione attorno ad un asse parallelo al vettore usato come riferimento. Ad esempio, utilizzando solo il vettore accelerazione di gravità, risulta indeterminato proprio l'angolo di rotazione attorno all'asse

verticale. Per questo motivo nel filtro di Madgwick si utilizza per la determinazione dell'orientamento spaziale del sensore il vettore campo magnetico, purché questo non sia parallelo al vettore gravità. Desidero anche aggiungere che la IMU G-Walk\_BTS usata nel nostro esperimento, fornisce in uscita angoli di Roll, Pitch e Yaw che la piattaforma elabora autonomamente a partire dai dati accelerometrici e giroscopici registrati. Questo sicuramente è un valido ausilio nella ricerca dei parametri di interesse, tuttavia è importante essere certi che i dati siano affidabili poiché la IMU elabora i suoi angoli sulla base dei dati che ottiene dalla registrazione. Ecco l'importanza di test volti a validare la bontà dei dati registrati dalla IMU.

**13.** In aggiunta a quanto sopra, poiché nel presente studio sono state sperimentate diverse strategie volte ad ottenere la miglior qualità del segnale necessario per la stima ottima dei parametri utili allo studio clinico di un paziente, e tenendo conto anche della breve durata del test, si è applicato lo stesso metodo usato per determinare l'angolo  $\phi$  ( $\text{atan}^2(s,c)$ ), anche per la determinazione degli altri due angoli di rotazione. Il risultato è riportato nelle figure 22, 23, 24 e 25 del capitolo Risultati: dai grafici recanti a confronto gli angoli  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  si può osservare un buon grado di corrispondenza spazio temporale per gli angoli  $\phi$  e per gli angoli  $\theta$ , mentre l'angolo  $\psi$  risulta spesso "erratico". Infatti, in linea generale il "modo semplice" che utilizza il vettore gravità, genera degli angoli  $\psi$  che in letteratura vengono definiti "randomici", proprio a causa del fatto che l'accelerazione è parallela all'asse verticale per cui non riesce a garantire un orientamento preciso per l'angolo  $\psi$ .

**14.** La ricerca di un sistema numerico adeguato, l'uso di filtri e algoritmi ottimizzati per il filtraggio con lo scopo di ottenere la stima ottima del dato, hanno mostrato migliorare la qualità del segnale che nonostante sia un segnale registrato in condizioni controllate e di breve durata,

mostra tuttavia la presenza di valori non congrui in alcuni casi. Dalla analisi dei parametri angolari del tronco ottenuti con tutti i metodi di filtraggio, è riscontrabile una differenza costante tra le due fasi del test, cioè tra fase di Stand to Sit e la fase di Sit to Stand (tabella 15). La motivazione più semplice (e più probabile nel caso specifico) è che siano state applicate strategie diverse nell'affrontare i due movimenti del task. Tuttavia a questa motivazione, potrebbe essersi aggiunto il palesarsi di errori di round off e di troncamento che iniziano a farsi notare col crescere della durata del test.

**15.** Si ribadisce che a causa della breve durata del test (pochi secondi) è possibile trascurare la deriva (drift) del giroscopio, che in genere si palesa al crescere del tempo. E' per tale motivo che, nel caso dello studio di un test di maggior durata, risulta sicuramente utile l'impiego di algoritmi in grado di modificarsi al variare delle condizioni sperimentali e dell'errore da compensare. Di qui la necessità di implementare algoritmi correttivi adattativi (*William H. et al, 1992; Koray S.E et al, 2007*).

**16.** Per la correzione del rumore causato dal moto browniano (rumore elettronico), cioè quelle vibrazioni più o meno ampie che si innestano sul segnale sporcandolo, è stato impiegato un filtro passabasso di Butterworth del II ordine, che passato sul segnale due volte è in grado di eliminare il delay indotto sul segnale dal filtro stesso (rifasamento). L'efficacia di tale filtro dipende principalmente dalla frequenza di taglio, nell'ipotesi di segnale stazionario (*Koray S.E et al, 2007*). Tale filtro infatti è inefficace in caso di segnali non stazionari.

**17.** Per quanto riguarda i sistemi di calcolo più complessi, si è utilizzato il sistema degli ODEs e nello specifico ODE45 col metodo di Runge Kutta; poiché il metodo di Runge Kutta usato è un metodo esplicito del quarto ordine ad un passo, si presta bene all'implementazione di versioni adattative di algoritmi, già allo studio da tempo (*William H. et al, 1992*);

- 18.** I metodi di Runge Kutta guadagnano accuratezza conservando la struttura ad un passo, tuttavia perdono la linearità in cambio di un aumento del numero di valutazioni funzionali per ogni passo. In questo modo è facile modificare il passo di integrazione per i metodi Runge Kutta (*Shampine, L F., 1986*), ma si perde la possibilità di valutare in modo semplice l'errore locale con le tecniche proprie dei metodi Multi Step (*William H. et al, 1992; Dormand, JR,1996*).
- 19.** Inoltre secondo quanto riportato dalla letteratura di settore, si può affermare che il sistema degli ODE risulta efficiente anche quando la soluzione non viene ben approssimata con polinomi (*Brown P. N. et al, 1989*); richiedono non troppa memoria ed il tempo di calcolo dell'algoritmo non è elevato, sebbene non ottimale, quando il carico computazionale cresce: quindi per sistemi ODE che richiedano poche risorse di calcolo, il tempo complessivo di integrazione (CPU time) risulta non elevato (*William H. et al, 1992; Buzzi Ferraris G.,1998*).
- 20.** Di contro, questi sistemi non sono privi di errori: errore locale, errore globale, errore di round off, errori di troncamento, overflow (*De Marchi, S. 2019*). Inoltre, il numero di calcoli del sistema ODE è generalmente maggiore rispetto a quello di altre alternative quali ad esempio i metodi Multi Step, il che non favorisce la rapidità di calcolo (*Buzzi Ferraris G.,1998*). Da ciò ancora una volta, la necessità di strumenti computazionali agili e semplici che riducano il tempo e la complessità di elaborazione del dato riducendo anche la possibilità di errore.
- 21.** Per concludere, sulla base dell'osservazione dei risultati dello Stand to Sit to Stand test, seppur basata su una casistica estremamente limitata (un unico soggetto sano), tenendo conto della brevità del task tale da rendere influente la propagazione dell'errore e le interferenze magnetiche, consentendo al sensore un buon funzionamento senza la necessità di un correttivo, come il magnetometro; tenendo conto della semplicità del task, privo di

parametri complessi da valutare; considerando i risultati (grafici e numerici) incluso il valore dell'RMSE relativo alla *durata* delle fasi valutate con tutti i metodi di elaborazione utilizzati, ritengo di poter affermare, che nel caso dello Stand to Sit to Stand e sue varianti parziali e quindi più brevi (sit to stand o stand to sit):

- Come evidente dall'elevato grado di concordanza dei dati relativi alla durata (tabella 11) e dal basso valore dell'RMSE stimato (tabella 12), si può affermare che, nella temporizzazione di un segnale, un'unica IMU posta a livello lombare è in grado di fornire risultati attendibili al pari della stereofotogrammetria a costi, numero e complessità dei parametri e difficoltà molto più contenuti.
- Dai valori riportati in tabella 13, si può osservare una buona concordanza tra quanto stimato con il sistema inerziale e quanto ottenuto dal sistema stereofotogrammetrico anche per quanto riguarda il *displacement* lungo le tre direzioni.
- Dalla osservazione dai grafici in figura 22, 23, 24 nei quali sono posti a confronto gli angoli  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , è evidente un grado notevole di corrispondenza morfologica e temporale per quanto riguarda gli angoli  $\phi$  e  $\theta$  ottenuti sia dal sistema inerziale che dalla stereofotogrammetria, non riscontrabile invece per l'angolo  $\psi$ . Quindi, visti i dati incoraggianti ottenuti, una singola IMU applicata al tronco potrebbe rappresentare un valido strumento per la valutazione dei parametri angolari.
- Altro risultato incoraggiante è rappresentato dai valori di velocità angolare  $\omega_x$ , ovvero la velocità di rotazione attorno all'asse di flessione estensione, valutata sia con il sistema inerziale che stereofotogrammetrico.

- In conclusione, appare evidente come un test eseguito da un unico soggetto sano non possa rappresentare una casistica adeguata per trarre delle conclusioni definitive e complete, tuttavia, i risultati incoraggianti ottenuti mediante l'esecuzione di un test semplice, unitamente ai numerosi risultati riportati dalla letteratura scientifica riguardo a questo tipo di applicazione, ci spinge a ritenere che mediante l'impiego di un unico sistema inerziale a basso costo computazionale che utilizzi cioè algoritmi semplici, sia possibile ottenere una stima affidabile dei parametri utili alla valutazione clinico funzionale di un soggetto.

Certamente è necessario eseguire lo stesso test su un campione più numeroso di individui, eventualmente suddividendo i soggetti valutati in due o più popolazioni comprendenti soggetti sani e portatori di specifiche condizioni patologiche, in modo da mettere a confronto i risultati ottenuti e valutarne la qualità rispetto al gold standard stereofotogrammetrico, ponendo in evidenza quali parametri il sensore deve poter fornire per una valutazione funzionale di una popolazione eterogenea da un punto di vista clinico e con che grado di precisione.

Va anche sottolineato che in una popolazione in cui sia presente un ampio spettro di condizioni individuali, un test semplice, a basso costo computazionale, autosomministrabile in ambiente domestico, può sicuramente rappresentare un utile strumento di monitoraggio di condizioni pregresse come un valido test di screening di primo livello che potrebbe orientare, nel sospetto di condizioni particolari, verso test specifici per il singolo caso.

***Allegati***

**Allegato 1:** punteggio medio che esprime il rischio di cadute per età e sesso basato sul 30s sit to stand test. (CDC National Center for Injury Prevention and Control)

**ASSESSMENT**

# 30-Second Chair Stand

**Purpose:** To test leg strength and endurance

**Equipment:** A chair with a straight back without arm rests (seat 17” high), and a stopwatch.

**① Instruct the patient:**

1. Sit in the middle of the chair.
2. Place your hands on the opposite shoulder crossed, at the wrists.
3. Keep your feet flat on the floor.
4. Keep your back straight, and keep your arms against your chest.
5. On “Go,” rise to a full standing position, then sit back down again.
6. Repeat this for 30 seconds.

**NOTE:**  
Stand next to the patient for safety.



**② On the word “Go,” begin timing.**

If the patient must use his/her arms to stand, stop the test. Record “0” for the number and score.

**③ Count the number of times the patient comes to a full standing position in 30 seconds.**

If the patient is over halfway to a standing position when 30 seconds have elapsed, count it as a stand.

**④ Record the number of times the patient stands in 30 seconds.**

Number: \_\_\_\_\_ Score: \_\_\_\_\_

CDC’s STEADI tools and resources can help you screen, assess, and intervene to reduce your patient’s fall risk. For more information, visit [www.cdc.gov/steadi](http://www.cdc.gov/steadi)

Patient \_\_\_\_\_

Date \_\_\_\_\_

Time \_\_\_\_\_  AM  PM

**SCORING**

**Chair Stand Below Average Scores**

AGE	MEN	WOMEN
60-64	< 14	< 12
65-69	< 12	< 11
70-74	< 12	< 10
75-79	< 11	< 10
80-84	< 10	< 9
85-89	< 8	< 8
90-94	< 7	< 4

A below average score indicates a risk for falls.



**Centers for Disease Control and Prevention**  
National Center for Injury Prevention and Control

2017

**STEADI** Stopping Elderly Accidents, Deaths & Injuries

**Allegato 2:** dichiarazione di copyright degli autori Agostino De Marco e Domenico P. Coiro, Università degli Studi di Napoli Federico I, inerente la versione degli opuscoli\* di tali autori, impiegati nella compilazione della presente tesi di laurea:

La versione utilizzata è quella del marzo 2017 (2017a) (Copyright 2010–2017).

***Dichiarazione di Copyright degli autori:***

omissis....

*Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.*

*Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.*

....omissis

\*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 1: Terne di riferimento.

\*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 2: Orientamento del velivolo e trasformazione di assi.

\*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 3: Quaternione dell'orientamento di un velivolo.

## ***Bibliografia***

1. Alcazar J. et al. (2018): The sit-to-stand muscle power test: An easy, inexpensive and portable procedure to assess muscle power in older people. *Experimental Gerontology* 112 (2018) 38–43.
2. Brenan K.E, Campbell S.L, Petzold L.R. (1996): Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations.
3. Brown P.N, Byrne G.D, Hindmarsh A. (1989): VODE: A Variable-Coefficient ODE Solver *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 1989 10:5, 1038-1051.
4. Cailotto, M. (2006): Algebra e Geometria Lineari e Quadratiche, <http://www.math.unipd.it/>
5. Calvo, M., Montijano, J. I., & Rande, L. (1990): A fifth-order interpolant for the Dormand and Prince Runge-Kutta method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 29(1), 91-100.
6. Candilera M, Bertapelle A, (2011): Algebra lineare e primi elementi di Geometria, McGraw-Hill, Milano
7. Cappozzo A., Catani F., Della Croce U., Leardini A. (1995): Position and orientation in space of bones during movement: anatomical frame definition and determination. *Clinical Biomechanics* 10:171-78.
8. Cardarelli S., Mengarelli A., Strazza A., Di Nardo F., Fioretti S., Verdini F. (2020): Single IMU Displacement and Orientation Estimation of Human Center of Mass: A Magnetometer-Free Approach. *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT*; AUG. 2020; VOL. 69:NO. 8.
9. Cobo A., Mora EV, Pérez-Rodríguez R, et al. (2020): Automatic and Real-Time Computation of the 30-Seconds Chair-Stand Test without Professional Supervision for Community-Dwelling Older Adults *Sensors*: 2020:20:5813; doi:10.3390/s20205813.
10. De Marchi, S. (2019): Soluzione numerica di equazioni differenziali con codici in Matlab/Octave March Dispense online; Dip.di Mat. "Tullio Levi-Civita", Univ. di Padova.
11. \*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 1: Terne di riferimento.
12. \*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 2: Orientamento del velivolo e trasformazione di assi.
13. \*De Marco A, Coiro D.P (ver. 2017.a, Marzo 2017): Elementi di Dinamica e simulazione di volo: Quaderno 3: Quaternione dell'orientamento di un velivolo.
14. Dormand, J. R. (1996): *Numerical Methods for Differential Equations: A Computational Approach*, Boca Raton: CRC Press, pp. 82-84, ISBN 0-8493-9433-3.

15. Dormand, J. R., Prince, P. J. (1980): "A family of embedded Runge-Kutta formulae", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6 (1): 19–26, doi:10.1016/0771-050X(80)90013-3.
16. Ferraris G.B., Manca D. (1998): BzzOde: a new class for the solution of stiff and non-stiff ordinary differential equation systems. *Computers Chem. Engng* Vol. 22, No. 11, pp. 1595—1621, 1998 (1998 Elsevier Science Ltd All rights reserved). Printed in Great Britain PII: S0098-1354(98)00233-6 0098—1354/98
17. Ganea R. et al. (2011): Multi-parametric evaluation of sit-to-stand and stand-to-sit transitions in elderly people/*Medical Engineering & Physics* 33 1086-1093, doi:10.1016/j.medengphy.2011.04.015.
18. Hairer, E, Nørsett, S. P, Wanner G., (2008): *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems*, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-56670-0.
19. Hellmers S., Fudickar H., Lau S. et al. (2019): Measurement of the Chair Rise Performance of Older People Based on Force Plates and IMUs Sensors, 19, 1370; doi:10.3390/s19061370.
20. Hoang ML., Pietrosanto A. (2021): Yaw/Heading optimization by drift elimination on MEMS gyroscope. *Sensors and Actuators A* 325 (2021) 112691.
21. Howcroft et al. (2013): Review of fall risk assessment in geriatric populations using inertial sensors. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation* 10:91 Page 3 of 12 <http://www.jneuroengrehab.com/content/10/1/91>.
22. Kang, C.W., Park, C.G. (2011): Euler Angle Based Attitude Estimation Avoiding the Singularity Problem. 18th IFAC World Congress (IFAC'11) Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011.
23. Koray S.E. Adaptive usage of the Butterworth digital filter (2007): *Journal of Biomechanics* 40.2934–2943.
24. Lebel et al. (2017): Inertial measurement systems for segments and joints kinematics assessment: towards an understanding of the variations in sensors accuracy. *BioMed Eng OnLine*; 16:56 DOI 10.1186/s12938-017-0347-6.
25. Madgwick, S.O.H. (2010): An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. April 30, 2010.
26. Madgwick, S.O.H., Harrison, A.J.; Vaidyanathan, R. (2011): Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm. In *Proceedings of the Rehabilitation Robotics (ICORR) 2011 IEEE International Conference*, Zurich, Switzerland, 29 Jun–1 Jul 2011; pp. 1–7.
27. Madgwick S.O.H., Wilson S., Turk R., Burridge J., Kapatos C., Vaidyanathan R. (2016): An Extended Complementary Filter for Full-Body MARG Orientation Estimation, Member, IEEE

28. Mahony, R.; Hamel, T.; Pflimlin, J.M. (2005): Complementary filter design on the special orthogonal group SO (3). In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC-ECC'05), Seville, Spain, 15 December 2005; pp. 1477–1484.
29. Mazzà C, Donati M, McCamley J., Picerno P, Cappozzo A.(2012): An optimized Kalman filter for the estimate of trunk orientation from inertial sensors data during treadmill walking Laboratory of Locomotor Apparatus Bioengineering, Department of Human Movement and Sport Sciences, Università degli Studi di Roma “Foro Italico”. *Gait & Posture* 35 (2012) 138–142
30. Pham MH, Warmerdam E, Elshehabi M et al. (2018): Validation of a Lower Back “Wearable”-Based Sit-to-Stand and Stand-to-Sit Algorithm for Patients with Parkinson’s Disease and Older Adults in a Home-Like Environment. *Frontiers in Neurology* | www.frontiersin.org August 2018| Volume 9 | Article 652.
31. Regterschot R.H. et al. (2016): Accuracy and concurrent validity of a sensor-based analysis of sit-to-stand movements in older adults. *Gait\_&\_Posture* 45 198–203. <http://dx.doi.org/10.1016/j.gaitpost.2016.02.004> 0966-6362/ 2016 Elsevier B.V.
32. Rodosky, M.W., Andriacchi, T.P., Andersson, G.B.J., (1989): The influence of chair height on lower limb mechanics during rising. *J. Orthop. Res.* 7, 266– 271.
33. Shampine L.F, Lawrence F. (1986): "Some Practical Runge-Kutta Formulas", *Mathematics of Computation*, American Mathematical Society, 46 (173): 135–150, doi:10.2307/2008219, JSTOR 2008219.
34. Shampine L.F, Reichelt M.W.” THE MATLAB ODE SUITE“ (*allegato a Ode Suite*);
35. Valenti RG., Dryanovski I., Xiao J. (2015): Keeping a Good Attitude: A Quaternion-Based Orientation Filter for IMUs and MARGs. *Sensors* 2015, 15, 19302-19330; doi:10.3390/s150819302 OPEN ACCESS sensors ISSN 1424-8220 www.mdpi.com/journal/sensors
36. Van Lummel R.C., Ainsworth E., Lindemann U., et al. (2013): Automated approach for quantifying the repeated sit-to-stand using one body fixed sensor in young and older adults. *Gait & Posture* 38:2013: 153–156.
37. Walgaard S, Faber GS, van Lummel R.C. et al. (2016): The validity of assessing temporal events, sub-phases and trunk kinematics of the sit-to-walk movement in older adults using a single inertial sensor. *Journal of Biomechanics* 49:2016:1933–1937.
38. William H., Teukolsky SA, Vetterling WT, FlanneryBP, (1992): *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*. Second Edition. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (ISBN 0-521-43108-5) Copyright (C) 1988-1992 by Cambridge University Press.

39. Wilson, S.; Eberle, H.; Hayashi, Y.; Madgwick, S.O. et al. (2019): Formulation of a new gradient descent MARG orientation algorithm: Case study on robot teleoperation. *Mech. Syst. Signal Process.* 2019, 130, 183–200.
40. Winter, D.A. (1990): *Biomechanics and a motor control of Human Movement*, p. 277. John Wiley & Sons, Inc., New York.
41. Witchel HJ, Oberndorfer C, Needham R et al.; (2018): Thigh-Derived Inertial Sensor Metrics to Assess the Sit-to-Stand and Stand-to-Sit Transitions in the Timed Up and Go (TUG) Task for Quantifying Mobility Impairment in Multiple Sclerosis. *Front. Neurol.*, 14 September 2018 | <https://doi.org/10.3389/fneur.2018.00684>
42. Woodman O.J. (2007): *An introduction to inertial navigation: Technical reports published by the University of Cambridge Computer Laboratory are freely available via the Internet:* <http://www.cl.cam.ac.uk/techreports/> ISSN 1476-2986
43. Materiale MatLab R2021b: schedo, tutorial.
44. Software implementation  
in MATLAB: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>