



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea Magistrale o Specialistica in Scienze Economiche e Finanziarie

**Stress Test e Analisi di Scenario nel Risk
Management. Applicazioni alla Gestione di
Portafogli Finanziari.**

Stress Test and Scenario Analysis in Risk Management.
Implementation to Financial Portfolio Management.

Relatore: Chiar.mo
Prof. Marco Cucculelli

Tesi di Laurea di:
Riccardo Stizza

Correlatore: Chiar.mo
Prof. Valerio Sullo

Anno Accademico 2020 – 2021

A mia madre.

INDICE

Introduzione.....	
1. Il Rischio.....	
1.1. Il Rischio e le Sue Tipologie.....	
1.1.1. Il rischio e l'incertezza.....	
1.1.2. Il rischio finanziario.....	
1.2. Le Proprietà di una Misura di Rischio.....	
1.2.1. L'invarianza transizionale.....	
1.2.2. La sub-additività.....	
1.2.3. L'omogeneità positiva.....	
1.2.4. La monotonicità.....	
1.3. Le Misure di Rischio Coerenti.....	
1.4. L'Expected Shortfall.....	
1.5. La Varianza.....	
1.5.1. Il portafoglio.....	
1.5.2. L'approccio media-varianza.....	
1.5.3. Il portafoglio che minimizza l'ES.....	
2. Il Risk Management e i Suoi Strumenti.....	
2.1. Il Risk Management per un'Istituzione Finanziaria	
2.1.1. Attività, passività e stato patrimoniale.....	
2.1.2. I rischi affrontati da un'istituzione finanziaria.....	

2.1.3.	Il capitale.....
2.2.	Modellare il Valore e i suoi Cambiamenti.....
2.2.1.1.	La mappatura dei rischi.....
2.2.1.2.	I metodi di valutazione del valore.....
2.2.1.3.	La distribuzione della perdita.....
2.3.	Il Backtesting.....
2.3.1.	Backtesting sul VaR.....
2.3.2.	Backtesting sull'ES.....
3.	La Stress Test Analysis.....
3.1.	Stress Test e Analisi di Scenario.....
3.1.1.	Che cosa è e perché abbiamo bisogno dello stress test.....
3.1.2.	Analisi di scenario.....
3.2.	La Scalabilità dello Stress Test.....
3.3.	Gli Approcci alla Modellizzazione dello Stress Test.....
3.3.1.	La simulazione storica deterministica.....
3.3.2.	Le simulazioni storiche filtrate (FHS).....
3.3.3.	L'approccio macroeconomico.....
3.3.4.	L'approccio probabilistico.....
3.3.5.	Lo stress test Bayesiano.....
3.4.	L'Approccio Bayesiano Lineare.....
3.4.1.	L'approccio classico di Black-Litterman.....

3.4.1.1.	I rendimenti di equilibrio.....
3.4.1.2.	La formulazione del view.....
3.4.1.3.	La specificazione di Omega.....
3.4.1.4.	L'uso del teorema di Bayes per il modello di stima.....
3.4.2.	L'approccio Black-Litterman e l'analisi di stress test.....
3.4.3.	Il fattore Tau nel modello Black-Litterman.....
4.	Caso Applicato.....
4.1.	Il Dataset.....
4.1.1.	La costruzione del portafoglio di riferimento.....
4.1.2.	La selezione dei fattori di rischio.....
4.2.	L'Analisi Campionaria del Dataset.....
4.2.1.	L'analisi campionaria degli asset.....
4.2.2.	L'analisi campionaria dei fattori di rischio.....
4.3.	La Sensibilità tra Asset e Fattori di Rischio.....
4.4.	Il Modello di Previsione.....
4.4.1.	Introduzione ai modelli auto-regressivi vettoriali.....
4.4.2.	Il modello VAR.....
4.4.3.	Il check del modello VAR e le sue previsioni.....
4.4.4.	L'analisi delle previsioni del VAR.....
4.5.	L'Analisi di Scenario e l'Approccio Black-Litterman.....
4.6.	I Risultati dello Stress Test.....

4.6.1. I rendimenti degli asset.....	
4.6.2. Il portafoglio.....	
4.6.3. Il VaR e l'ES di portafoglio.....	
4.6.4. L'ottimizzazione di portafoglio.....	
Conclusione.....	
Bibliografia e Riferimenti.....	
Appendice o allegati.....	

INTRODUZIONE

La gestione del rischio in scenari di mercato avversi è da sempre oggetto di interesse per le istituzioni finanziarie che intendono agire e prendere decisioni al fine di salvaguardare il risultato aziendale. A seguito dei recenti avvenimenti relativi alla crisi pandemica, è apparsa evidente la necessità di sviluppare strumenti idonei a gestire scenari estremi di questo tipo. Il focus sull'analisi di stress test, inteso come tecnica efficiente per simulare tali scenari, è un tema che negli ultimi anni ha suscitato un crescente interesse in ambienti accademici, istituzioni finanziarie e autorità di regolamentazione. Vista la frequenza delle crisi verificatesi negli ultimi decenni (di cui quella pandemica è solo l'esempio più recente), sembra opportuno focalizzarsi sullo sviluppo di un *framework* coerente per gestire attraverso la statistica Bayesiana uno stress test, capace di analizzare scenari analoghi o paragonabili a Marzo 2020. Prima di affrontare l'argomento centrale dell'elaborato, viene introdotta la nozione generale di rischio e le sue differenti tipologie in ambito finanziario, definendo il concetto di misura di rischio e le proprietà necessarie affinché essa possa essere considerata "coerente". Si passa, successivamente, alla trattazione del *Risk Management* quale processo aziendale finalizzato alla gestione integrata dei rischi mediante attività sistematiche quali identificazione, misurazione, valutazione e politiche di mitigazione. Viene, poi, introdotta la funzione di distribuzione delle perdite, passaggio fondamentale per lo sviluppo delle misure di rischio maggiormente utilizzate, come ad esempio il *Value at Risk*

e l'*Expected Shortfall*. Si arriva, quindi, alla descrizione del processo di stress test e dell'analisi di scenario. Vengono prima illustrati differenti approcci alla modellizzazione di questi strumenti per poi approfondire lo stress test di tipo Bayesiano, proposto come estensione dell'originario modello Black-Litterman all'analisi di stress test ed applicato ad un portafoglio finanziario composto da ETF. Verrà mostrato come tale approccio sia in grado di gestire efficacemente la formulazione di scenari estremi probabilistici permettendo il calcolo di una serie di misure di rischio e rendimento ex ante ad essi riferiti. Lo scenario di stress ipotizzato ricalca le dinamiche osservate nei mercati finanziari di Marzo 2020, applicate al portafoglio di riferimento. Per prima cosa, si individua una selezione di sei fattori di rischio di mercato estremamente sensibili agli shock finanziari. Grazie ad un modello autoregressivo vettoriale è possibile ottenere delle previsioni su base storica delle variabili selezionate. A questo punto, l'approccio Bayesiano permette di integrare questo risultato con *view* private relative ai fattori prescelti che, nel caso in esame, come già detto ricalcano gli sviluppi della crisi Covid. In questo aspetto risiede il suo vero punto di forza del modello proposto. Infatti, il valore di una previsione dei rendimenti così generata in ultima istanza arricchito dall'apporto qualitativo delle opinioni inserite. si passa, quindi, alla determinazione del rendimento e della matrice di covarianza degli *asset* a seguito di questo scenario di stress sui fattori di rischio. Attraverso i pesi di portafoglio, inizialmente equidistribuiti, si ottengono le misure di performance e rischio del portafoglio sotto

lo scenario di stress ipotizzato. Successivamente, viene eseguita una ottimizzazione finalizzata alla determinazione dell'allocazione efficiente delle attività sotto quello specifico scenario considerato, consentendo così un confronto tra i risultati ottenuti nei due casi.

CAPITOLO 1

IL RISCHIO

In questo Capitolo, si introducono alcune problematiche inerenti al rischio. Nella Sezione 1.1, si inizia con il definire la natura del rischio e si discute delle sue relazioni con il concetto di casualità. Vengono inoltre esaminate le principali tipologie di rischio a cui risultano esposte le istituzioni finanziarie nello svolgimento della propria attività. Nelle Sezioni 1.2 e 1.3, viene spiegato cosa si intende per misura di rischio e di quali proprietà essa idealmente deve godere per essere definita “coerente”. Infine, le Sezioni 1.4 e 1.5 trattano nello specifico i concetti di Expected Shortfall e Varianza con uno sguardo all’ottimizzazione di portafoglio.

1.1 IL RISCHIO E LE SUE TIPOLOGIE

Il dizionario della lingua italiana definisce il rischio come “l’eventualità di subire una conseguenza, una perdita o un danno connessa a circostanze più o meno prevedibili”. Nelle discussioni riguardanti il rischio, infatti, gli argomenti tipicamente coinvolti sono la teoria delle probabilità e la teoria delle decisioni in condizioni d’incertezza. Di norma, l’attenzione si concentra sulle tecniche di riduzione del rischio. In certi casi, tuttavia, il rischio può rappresentare anche un’opportunità. Una gran parte dell’industria finanziaria oggi, infatti, non esisterebbe se non fosse per la presenza dei rischi finanziari e le conseguenti

occasioni che le istituzioni finanziarie sono in grado di cogliere, creando prodotti e servizi volti ad offrire ai propri clienti un'allocazione rischio/rendimento più efficiente. Ad oggi, tuttavia, non esiste una definizione di rischio finanziario che raccolga un consenso unanime presso accademici e investitori. A seconda del contesto, essa potrebbe essere “qualsiasi evento o azione che può negativamente impattare sull'abilità di un'organizzazione di far fronte alle sue necessità e di raggiungere i suoi obiettivi” o alternativamente “la probabilità quantificabile di perdita o di minor guadagno”.

È doveroso, tuttavia, specificare la differenza tra rischio e incertezza. Infatti, un fenomeno viene definito “rischioso” se si conoscono tutte le sue possibili manifestazioni e le relative probabilità di accadimento. Un contesto viene definito “incerto”, invece, se non si conoscono tutti i possibili esiti e, di conseguenza, le probabilità. Il paragrafo che segue approfondisce la relazione esistente tra questi due concetti differenti.

1.1.1 Il rischio e l'incertezza

A prescindere dal contesto, il concetto di rischio si relaziona inevitabilmente a quello di incertezza e, quindi, alla nozione di probabilità. Quest'ultima è rimasta per anni priva di una chiara definizione. Solo nel 1933, un matematico russo, A. N.

KOLMOGOROV, è riuscito a definire in modo assiomatico tale concetto¹. Questo ha costituito il punto di partenza per tutta la letteratura sul rischio sviluppata negli anni successivi. Nonostante i diversi tentativi di proporre alternative per la definizione in questione, il formalismo di Kolmogorov, seppure non sia l'unico approccio possibile, è ancora oggi alla base di numerosi modelli applicati grazie alla sua solida struttura di tipo assiomatico.

La definizione di probabilità fornita da Kolmogorov si basa sul concetto di spazio campionario, convenzionalmente indicato con Ω , che è definito come la collezione di tutti gli esiti possibili di un esperimento probabilistico. Uno specifico evento è un sottoinsieme misurabile di Ω . Se un evento corrisponde ad un singolo elemento di Ω allora esso è detto evento elementare. Altri importanti eventi sono l'evento certo, che coincide con lo spazio campionario ed ha probabilità 1, e l'evento impossibile, che è rappresentato da un insieme vuoto, ha probabilità 0 ed è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme. Utilizzando questi concetti, si può definire lo spazio degli eventi \mathcal{F} come la collezione di tutti i sottoinsiemi di Ω tali per cui valgano le seguenti proprietà:

- i) l'insieme Ω appartiene allo spazio degli eventi \mathcal{F} ;
- ii) se l'evento E appartiene allo spazio degli eventi \mathcal{F} , allora, anche il complementare di tale evento appartiene ad \mathcal{F} ;

¹Si veda KOLMOGOROV, *Foundation of the Theory of Probability*, 1933.

- iii) dati infiniti eventi ognuno dei quali appartenente ad \mathcal{F} , allora anche la loro unione appartiene ad \mathcal{F} , per cui si dice che lo spazio degli eventi è chiuso rispetto l'unione di infiniti eventi.

La coppia (Ω, \mathcal{F}) , così caratterizzata, è detta *spazio misurabile*.

Aggiungendo allo spazio misurabile una misura di probabilità P che rispetti gli assiomi di Kolmogorov, si ottiene il cosiddetto *spazio di probabilità*, che dunque risulta completamente identificato dalla terna (Ω, \mathcal{F}, P) . La frase “la probabilità che accada un evento A ” è definita è espressa come $P(A)$, dove A è un elemento di \mathcal{F} e P denota la misura di probabilità. Tale teoria si fonda su tre assiomi principali:

- La probabilità di un evento E qualsiasi ha sempre un valore compreso tra 0 e 1.

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

- La probabilità che si verifichi l'evento certo Ω è 1.

$$P(\Omega) = 1$$

- Dati due eventi incompatibili E_1 ed E_2 , l'evento unione deve avere una probabilità equivalente alla somma delle probabilità dei due eventi.

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Si ipotizzi di descrivere la posizione di un investitore che ha in portafoglio una azione di una certa società. Si noti come egli sia in possesso oggi di una attività finanziaria il cui valore futuro non è certo. Per modellare questo titolo rischioso, si

dovrebbe definirne il valore come funzione dello spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) : tale funzione prende il nome di *random variable*², o *variabile casuale*. Nello specifico si dovrebbe identificare la sua funzione di distribuzione $F_X(x) = P(X \leq x)$. Di conseguenza, N posizioni rischiose possono essere identificate da un vettore di variabili casuali (X_1, X_2, \dots, X_N) . Se si osserva la dinamica temporale di queste variabili, si introduce la nozione di *stochastic process*³, o processo aleatorio/stocastico, che indicheremo con X_t .

1.1.3 Il rischio finanziario

In questo paragrafo viene data una breve panoramica dei principali tipi di rischio che l'industria finanziaria si trova ad affrontare.

Il tipo di rischio più conosciuto è probabilmente il *rischio di mercato*. Esso è il rischio di una variazione nel valore di una certa posizione finanziaria o di un portafoglio titoli a causa di oscillazioni del valore delle componenti sottostanti (come azioni, obbligazioni, tasso di cambio, prezzo delle materie prime, ecc.).

² In matematica, e in particolare nella teoria della probabilità, una variabile casuale X , anche detta aleatoria o stocastica, è una funzione definita sullo spazio campionario che associa ad ogni elemento elementare un unico numero x_i (x_i è una determinazione della variabile casuale X). L'attributo 'casuale' rinvia al fatto che essa è generata da un esperimento (o meccanismo, o fenomeno) di cui non siamo in grado di prevedere l'esito con certezza.

³ Il processo stocastico è una funzione, in genere del tempo t , i cui valori $x(t)$ ad ogni istante di tempo t sono variabili aleatorie. A seconda del fatto che l'insieme dei tempi sia discreto o continuo si ha, rispettivamente, un processo stocastico a tempo discreto o un processo stocastico a tempo continuo. Se le variabili aleatorie del processo sono discrete si ha un processo stocastico discreto; nel caso in cui esse sono continue il processo stocastico si dice continuo. Per maggiori dettagli sui processi stocastici si veda S. SHREVE, "Stochastic Calculus and Finance", 1997.

Un'altra importante tipologia è costituita dal *rischio di credito*, che può essere definito come il rischio di non ricevere i flussi finanziari promessi su un investimento in essere, come un prestito o un'obbligazione, a causa dell'inadempienza del debitore. Negli ultimi anni inoltre è diventato sempre più rilevante il concetto di *rischio operativo*, che deriva dalla perdita potenziale risultante dall'inadeguatezza o dal fallimento di processi interni (a causa di persone o sistemi) o da eventi esterni. Le tre precedenti categorie di rischio sono le principali. Tuttavia, esse non formano una lista esaustiva dei rischi che possono interessare una istituzione finanziaria né hanno tra loro confini sempre ben definiti. Ad esempio, un peggioramento del merito creditizio di una società determina un innalzamento della probabilità d'insolvenza delle obbligazioni da questa emesse (*rischio di credito*): questo inoltre provoca una diminuzione del prezzo di tali obbligazioni, che scontano la ridotta capacità di ripagare capitale e interessi (rischio di mercato). Da questo semplice esempio si può capire come la gestione efficiente del rischio finanziario richieda un approccio olistico, che integri tutti i tipi di rischio e tenga in considerazione le loro eventuali interazioni.

Altre importanti nozioni sono il *rischio modello* e il *rischio di liquidità*. Il primo è associato all'uso di un modello inappropriato per la misurazione del rischio. Invece, quando si parla del secondo, generalmente, ci si riferisce alla impossibilità o difficoltà di liquidare attività finanziarie per prevenire o ridurre una perdita (*market liquidity risk*). Nel settore bancario, inoltre, esiste il concetto di *funding liquidity*

risk, che dipende dalla facilità con cui le istituzioni possono raccogliere fondi per effettuare pagamenti o soddisfare prelievi nel momento in cui essi sorgono. In periodi di stress finanziario il *market liquidity risk* e il *funding liquidity risk* possono interagire profondamente.

Una volta descritte le varie tipologie di rischio, nel prossimo paragrafo spiegheremo come esso possa essere misurato e quale proprietà deve possedere una misura di rischio.

1.2 PROPRIETÀ DI UNA MISURA DI RISCHIO

Il termine “prevedibile”, che compare nella definizione di rischio, si riferisce al fatto che esso può essere, almeno in parte, valutato e, perciò, non è del tutto sconosciuto. La parte quantificabile ha bisogno, inevitabilmente, di una metodologia o di uno strumento di misura. La necessità di mettere ordine tra le misure di rischio ha condotto gli accademici a individuare una serie di proprietà di cui deve godere ognuna di esse al fine di poterla considerare “buona”.

Negli ultimi trent’anni, riuscire a definire una misura di rischio opportuna è stato sempre un problema molto controverso negli ambienti accademici e finanziari. Una proposta, oggi accettata dall’accademia ma sul piano pratico non ancora completamente dagli operatori finanziari, proviene da P. ARTZNER e altri⁴. In una

⁴ Si veda PHILIPPE ARTZNER, FREDDY DELBAEN, JEAN-MARC EBER E DAVID HEATH, *Coherent Measures of Risk*, 1999

serie di articoli pubblicati alla fine degli anni '90, gli autori hanno delineato una teoria generale delle misure di rischio, riferendosi ad una generica variabile casuale. In ambito finanziario, l'oggetto di interesse è rappresentato nello specifico dalla variazione di prezzo di un titolo, che indicheremo con ΔS . In primo luogo, si definisce l'indice di rischiosità legato alla variazione di prezzo con il simbolo $\Psi(\Delta S)$, e si suppone che valga:

1. $\Psi(0) = 0$, ovvero che non investire comporti un rischio nullo;
2. $\Psi(\Delta S) > 0$, quando l'investimento comporta delle perdite;
3. $\Psi(\Delta S) < 0$, quando l'investimento comporta dei guadagni.

Gli autori sostengono che questo indice di rischiosità deve godere di alcune proprietà (formulate come assiomi), che verranno esaminate nei prossimi sottoparagrafi.

1.2.1 Invarianza transizionale

L'assioma dell'invarianza transizionale afferma che data una variazione di prezzo del titolo rischioso ΔS , la variazione di prezzo del titolo privo di rischio ΔG e una costante qualsiasi θ_G , deve valere:

$$\Psi(\Delta S + \theta_G \Delta G) = \Psi(\Delta S) - \theta_G$$

In altri termini, aggiungendo una componente non stocastica (titolo privo di rischio) a una variabile aleatoria, l'indice di rischiosità si riduce esattamente della proporzione di ricchezza investita nel titolo certo. Questa proprietà si presta anche

ad un'interessante interpretazione finanziaria: se si acquista una quantità di titolo privo di rischio pari esattamente al rischio che grava sul titolo S , allora il rischio complessivo dell'investimento deve essere nullo.

1.2.2 Sub-additività

L'assioma della sub-additività afferma che dati due rendimenti ΔS_1 e ΔS_2 deve valere:

$$\Psi(\Delta S_1 + \Delta S_2) \leq \Psi(\Delta S_1) + \Psi(\Delta S_2)$$

Infatti, tale proprietà richiede che la rischiosità di un portafoglio composto da due titoli sia sempre minore o al massimo uguale all'indice calcolato sulle singole attività finanziarie. Tale assioma dichiara formalmente che la diversificazione degli investimenti deve ridurre il rischio di portafoglio: aggiungendo titoli, la rischiosità non può aumentare più della somma degli indici di rischiosità dei nuovi titoli inseriti.

1.2.3 Omogeneità positiva

La proprietà dell'omogeneità positiva afferma che dato un rendimento ΔS e una costante non negativa λ deve valere

$$\Psi(\lambda \Delta S) = \lambda \Psi(\Delta S)$$

La validità di tale assioma comporta che, aumentando l'investimento nel titolo S , anche l'indice di rischiosità del proprio investimento aumenti. L'ipotesi di omogeneità positiva, in particolare, richiede che il rischio aumenti tanto quanto è

aumentato l'investimento. Ancora, esso acquisisce una valenza particolare rispetto alla proprietà della sub-additività, nel caso in cui λ assuma valori interi. Nel caso, ad esempio, di $\lambda = 2$ si dimostra che investire il proprio denaro, in misura uguale, su due variabili casuali perfettamente correlate (positivamente), raddoppia il rischio di portafoglio. In questo specifico caso, dunque, nell'assioma di sub-additività vale il segno di uguaglianza.

1.2.4 Monotonicità

L'ultima proprietà fondamentale per una misura di rischio è quella della monotonicità. Essa afferma che dati due rendimenti ΔS_1 e ΔS_2 , tali che $\Delta S_1 \geq \Delta S_2$ per ogni stato di natura possibile, deve valere

$$\Psi(\Delta S_1) \leq \Psi(\Delta S_2)$$

Se un certo titolo ha rendimenti sempre maggiori rispetto ad un altro, allora l'assioma richiede che investire nel primo titolo sia sempre “meglio” che investire nel secondo. In altri termini, la perdita nella quale si può incorrere investendo in S_1 deve essere minore rispetto alla perdita nella quale si può incorrere investendo in S_2 .

1.3 MISURE DI RISCHIO COERENTI

Dati gli Assiomi del paragrafo precedente, una misura di rischio è definita *coerente* se e solo se li soddisfa tutti. Pertanto, qualsiasi indicatore che cerchi di rappresentare

il rischio e non rispetti gli assiomi esposti non può considerarsi come una “misura di rischio coerente”. Uno dei casi più noti è quello della varianza; essa è, forse, il più conosciuto indicatore che viene in mente nell’ambito della valutazione della rischiosità di un’attività finanziaria. Tuttavia, la varianza non è una misura di rischio coerente in quanto non rispetta l’assioma della monotonicità. È lecito quindi domandarsi perché l’industria finanziaria sia così interessata alla varianza e alla sua radice quadrata, nota col nome di volatilità. La risposta si trova nella sua stessa definizione: la varianza è un indice di scostamento dalla media. Desiderare che i rendimenti di un portafoglio si allontanino il meno possibile dalla media può essere del tutto sensato dal punto di vista di un investitore ma questo non equivale ad affermare di aver minimizzato il rischio secondo gli assiomi di coerenza menzionati sopra. La fortuna di questo indice è probabilmente dovuta alla sua facile comprensione ed interpretazione. Quindi ci si è chiesto, se sia possibile individuare un’espressione formale la più generale possibile che un indice di rischiosità deve avere al fine di essere coerente. La risposta trovata consiste nel cd. *teorema di rappresentazione*. Il teorema afferma che una misura di rischio è coerente se e solo se esiste una famiglia di probabilità P (sugli stati di natura)⁵ tale che

$$\Psi(\Delta S) = -\inf_{P \in \mathcal{P}} \left\{ E^P \left[\frac{\Delta S}{\Delta G} \right] \right\}$$

⁵ Si fornisce tre possibili famiglie di probabilità per meglio comprenderne il significato: 1. Quella che attribuisce a uno stato di natura una probabilità nulla e tutti gli altri la stessa probabilità. 2. Quella che attribuisce a due stati di natura probabilità nulla e a tutti gli altri la stessa probabilità e 3. Quella che attribuisce probabilità 1 a un solo stato di natura.

In sintesi, esso afferma che, data una famiglia di probabilità, dobbiamo scegliere quella probabilità che minimizza un certo valore atteso. Utilizzando questo teorema è dunque possibile creare una misura di rischio che sia coerente a partire da una determinata variabile aleatoria e dalla sua legge di probabilità. Questo argomento non verrà approfondito ulteriormente in quanto non è rilevante ai fini dell'obiettivo dello studio⁶.

1.4 L'EXPECTED SHORTFALL

Quanto esposto in precedenza pone le basi per comprendere la “qualità” di una misura di rischio. In questo paragrafo, viene introdotta e descritta una particolare misura di rischio, definita come *Expected Shortfall*. Essa misura la media degli α risultati peggiori che si possono ottenere da un investimento, dove α è da intendersi come percentuale (o, meglio, il suo relativo quantile). Si supponga che il processo dei guadagni e delle perdite, indicato con ΔS , sia continuo rispetto al tempo e venga descritto dalla funzione di densità $f(\Delta S)$. Il primo passo è quello di definire la funzione di ripartizione di questa variabile come l'integrale da $-\infty$ a ΔS della funzione di densità. Ora, si definisce L la perdita tale per cui si ha una probabilità di avere risultati peggiori di essa pari ad α , allora vale che la funzione di ripartizione appena definita calcolata in L sarà proprio uguale ad α . Da ciò si deduce che

⁶ Per maggiori approfondimenti si rimanda a P. ARTZENER, F. DELBAEN, J. M. EBER E D. HEATH, “*Coherent Measures of Risk*”, 1999.

α rappresenta una massa di probabilità e, pertanto, può variare tra 0 e 1. Dato che la funzione di ripartizione di una variabile casuale è sempre non decrescente, allora, essa è anche invertibile⁷: $L = F^{-1}(\alpha) \Rightarrow L = F^{-1}(\alpha)$.

Per ottenere la media di tutte le perdite che si hanno, al massimo, con probabilità α , non resta che calcolare la media di tutti i valori di $F^{-1}(p)$ per p (probabilità) che va da 0 fino al valore α desiderato. In definitiva, si definisce l'*Expected Shortfall* ES_α come la media di tutte le perdite che si hanno con probabilità pari, al massimo, ad α . Indicando con F la funzione di ripartizione della variabile causale, si ottiene:

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(p) dp$$

È interessante notare che ES_α può anche essere visto come un valore atteso condizionato, nello specifico:

$$ES_\alpha = -E[\Delta S \mid \Delta S < L]$$

Da qui, attraverso una serie di semplificazioni e grazie al teorema di rappresentazione, è possibile dimostrare un risultato notevole: l'*Expected Shortfall* è una misura di rischio coerente.

In questo capitolo introduttivo ci si è limitati a descrivere l'*Expected Shortfall* in termini di misura di rischio senza dare una sua interpretazione in termini di gestione di portafoglio. Nel Capitolo successivo questo argomento verrà ripreso in relazione

⁷ Se anche la funzione F non fosse invertibile, si potrebbe comunque definire la perdita L_i nel seguente modo: $L_i = -\inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\}$. In forza di questo risultato, tutti i calcoli che seguono, quindi, rimangono dunque validi.

al Value at Risk e alla scelta del comitato di Basilea di introdurlo come misura del rischio di mercato.

1.5 LA VARIANZA

Come visto nei precedenti paragrafi la varianza è una misura di dispersione di una distribuzione. Dato un campione di N elementi $\{x_1, \dots, x_N\}$, si definisce la loro varianza come il valor medio degli scostamenti quadratici dalla loro media. Tuttavia, pur sapendo che essa non è una misura di rischio, MARKOVITZ⁸, in un pionieristico lavoro⁹ nel 1952 propone di misurare il rischio di un'attività finanziaria mediante, proprio, lo scarto quadratico medio¹⁰. In realtà, infatti, si sta soltanto trattando le oscillazioni del rendimento del portafoglio intorno alla sua media e non il rischio in sé. Ad ogni modo, l'importanza e la risonanza che ha avuto questo lavoro in ambito economico fa sì che meriti di essere approfondito in qualsiasi studio inerente al rischio finanziario.

1.5.1 Il portafoglio

Per esporre in modo chiaro e completo la teoria di Markowitz è necessario partire da alcune considerazioni relative al portafoglio. Esso è una combinazione lineare di

⁸ Vincitore, insieme a MERTON H. MILLER e WILLIAM F. SHARPE, del premio Nobel per l'economia nel 1990.

⁹ Articolo pubblicato nel 1952 sul *Journal of Finance* ed intitolato "Portfolio Selection".

¹⁰ Radice quadrata della varianza.

titoli. Chiamando $\theta(t)$ il vettore che contiene le quantità di ciascun titolo presente in portafoglio e $S(t)$ il vettore dei prezzi di quei titoli, il valore della ricchezza al tempo t è dato da: $R(t) = \theta(t)'S(t)$. In un contesto multi periodale diviene possibile, di istante in istante, modificare il vettore θ del portafoglio, di modo che anche θ diviene un processo stocastico. Differenziando l'espressione di $R(t)$ si ottiene:

$$dR(t) = d\theta(t)'S(t) + \theta(t)'dS(t) + d\theta(t)'ds(t)$$

Il valore del portafoglio, quindi, si modifica per due possibili cause:

1. perché si sono modificati i prezzi dei titoli che lo compongono (dS);
2. perché si è modificata la composizione stessa del portafoglio ($d\theta$).

Dato che si suppone che l'investitore non abbia nessun controllo sui prezzi di mercato dei titoli, l'unica variabile controllabile è la composizione θ del portafoglio. In linea teorica, essa si può modificare in ogni istante ma soggiacendo al ragionevole vincolo per cui non si può investire più di quanto si possiede¹¹. Quindi, la dinamica del valore del portafoglio deve rispettare la condizione di finanziamento¹². Nel caso più generale il differenziale della ricchezza si può scrivere come

¹¹ A meno che all'investitore non sia data la possibilità di prendere a prestito titoli.

¹² Avendo scelto di investire nel portafoglio $\theta(t)$ al tempo t , al tempo $t + dt$ il nuovo valore del portafoglio è dato da $\theta(t)'S(t + dt)$ e, tuttavia, adesso esso si può modificare investendo nel portafoglio $\theta(t + dt)$. A questo proposito si distinguono tre casi possibili: 1) non si riceve e non si preleva alcuna ricchezza dal portafoglio, allora la nuova composizione è scelta in modo tale che il valore del portafoglio resti invariato (auto finanziamento). 2) Se si decide di ritirare del denaro $c(t)$ dal portafoglio, allora il nuovo valore del portafoglio è un po' più piccolo rispetto al caso precedente.

$$dR(t) = \theta(t)'dS(t) - c(t)dt + \alpha y(t)dt$$

Con $c(t)$ quantità di denaro ritirata dal portafoglio. La suddetta equazione si definisce vincolo dinamico e deve valere contemporaneamente a quello statico. Per rendere più comprensibili le formule e più scorrevoli i calcoli, si prosegue senza considerare la possibilità di prelevare o aggiungere ricchezza al portafoglio. Si definisce θ_G e θ_S come, rispettivamente, la quantità del titolo privo di rischio e di titoli rischiosi; il vincolo statico diventa

$$R(t) = \theta_G(t)G(t) + \theta_S(t)'S(t)$$

e il vincolo dinamico

$$dR(t) = \theta_G(t)dG(t) + \theta_S(t)'dS(t)$$

Le equazioni sopra devono valere contemporaneamente e l'investitore sceglie le quote θ_G e θ_S . A questo punto le due equazioni possono essere unite andando a sostituire θ_G , ricavato dalla prima, nel secondo vincolo. Sostituendo anche dG ¹³ e

3) Se si ha a disposizione un reddito $y(t)$, si può decidere di risparmiare una percentuale da investire nel portafoglio e quindi il valore della nuova composizione può essere più elevato rispetto al primo punto.

¹³ Si ricordi che $dG(t)/G(t) = r(t)dt$, dove $r(t)$ è il rendimento del titolo privo di rischio al tempo t

dS ¹⁴ si ottiene che il valore di un portafoglio auto finanziato si evolve seguendo l'equazione differenziale¹⁵

$$dR = [Rr + \theta'_S I_S (\mu - r\mathbf{1})]dt + \theta'_S I_S \Sigma' dW$$

Si osservi che il guadagno atteso del portafoglio è dato dal rendimento del titolo privo di rischio a cui viene sommato un termine proporzionale alla composizione del portafoglio e alla differenza tra il rendimento della componente rischiosa e il rendimento del titolo privo di rischio¹⁶.

1.5.2 L'approccio media-varianza

L'approccio media-varianza proposto da Markowitz nel 1992 parte proprio dall'equazione differenziale della ricchezza esposta nel paragrafo precedente. Volendo seguire l'approccio originario del premio Nobel, anziché utilizzare il numero di titoli da detenere in portafoglio θ_S , è più opportuno riferirsi alla percentuale di ricchezza da investire in ogni titolo i -esimo, definita come $\omega \equiv \frac{1}{R} I_S \theta_S$. In questo senso l'equazione della ricchezza può essere riscritta come

$$\frac{dR}{R} = [r + \omega'(\mu - r\mathbf{1})]dt + \omega'\Sigma' dW$$

¹⁴ Si ricordi che $dS(t)/S(t)$ può essere scritto in forma matriciale per N titoli rischiosi e si scrive $I_S^{-1} dS(t) = \mu(t)dt + \Sigma(t)'dW(t)$, con I_S matrice $N \times N$ che ha per diagonale gli n prezzi dei titoli e resto zeri, $\mu(t)$ matrice $N \times 1$ contenente i rendimenti medi dei titoli, $\Sigma(t)$ matrice $N \times K$ dei termini di diffusione, $dW(t)$ vettore dei processi stocastici di Wiener delle fonti di rischio (assunti tra loro indipendenti). Per una definizione formale ed un'analisi più dettagliata dei processi stocastici si può fare riferimento a KARATZAS e SHREVE, 1991.

¹⁵ Nell'equazione si è indicato, con $\mathbf{1}$, un vettore che contiene soltanto valori unitari, per cui vale la relazione $I_S \mathbf{1} = S$.

¹⁶ La differenza tra il rendimento del titolo i -esimo ed il rendimento privo di rischio è chiamata premio per il rischio.

Da cui si ricava che il rendimento medio istantaneo del portafoglio è

$$E\left[\frac{dR}{R}\right] = [r + \omega'(\mu - r1)]dt$$

E la varianza istantanea è

$$V\left[\frac{dR}{R}\right] = \omega'\Sigma'\Sigma\omega dt$$

Ora, se si volesse annullare la volatilità del portafoglio banalmente basterebbe porre $\omega = 0$, ottenendo così non solo una volatilità pari a zero, ma anche un rendimento atteso pari al tasso privo di rischio. Un approccio più realistico appare essere quello di minimizzare la varianza ma sotto il vincolo di avere un predeterminato rendimento atteso. Significa risolvere il seguente problema di minimizzazione

$$\min_{\omega} \omega'\Sigma'\Sigma\omega$$

sotto i vincoli

$$r + \omega'(\mu - r1) = \mu_R$$

$$1 = \omega_G + \omega'1$$

Una volta impostato il problema di minimizzazione della varianza sul vincolo del rendimento atteso, esso si risolve attraverso il metodo di Lagrange. La risoluzione del sistema porta ad un ammontare ottimale di ricchezza da investire in ogni titolo rischioso che è uguale a:

$$\omega^* = \frac{\mu_R - r}{(\mu - r1)'(\Sigma'\Sigma)^{-1}(\mu - r1)} (\Sigma'\Sigma)^{-1}(\mu - r1)$$

È ovvio che, nel caso in cui un investitore non sia interessato ad un rendimento atteso maggiore di quello privo di rischio, la quantità di ricchezza investita in titoli rischiosi è zero. All'aumentare del rendimento desiderato aumenta anche la quantità di investimento nei titoli rischiosi. La quota di portafoglio del titolo privo di rischio è data dal vincolo di bilancio¹⁷ secondo cui la percentuale di ricchezza investita in tutti i titoli a disposizione deve essere pari a 1 (cioè, in termini percentuali, al 100%).

Per calcolare la volatilità del portafoglio che risolve il problema descritto, è sufficiente sostituire il valore ottimo ω^* nella funzione obiettivo per ottenere quella che viene definita “funzione valore” e che corrisponde alla varianza minima¹⁸ dato un certo rendimento μ_R , in formula:

$$\sigma_R = \frac{|\mu_R - r|}{\sqrt{(\mu - r1)(\Sigma'\Sigma)^{-1}(\mu - r1)}}$$

La frontiera efficiente evidenzia una relazione lineare¹⁹ tra il rendimento medio del portafoglio ottimo (nel senso media-varianza) e il suo scarto quadratico medio. Ad ogni livello di rendimento atteso μ_R corrisponde uno scarto quadratico medio minimo sulla frontiera efficiente. Su quale punto di essa posizionarsi dipende dal

¹⁷ Il vincolo di bilancio è $1 = \omega_G + \omega'1$

¹⁸ Il valore assoluto può essere anche eliminato in quanto non è pensabile immaginare che un investitore voglia ottenere un rendimento medio più basso di quello di un titolo certo. Il caso con $\mu_R < r$ è dunque da non considerare o meglio esso va a formare la frontiera detta inefficiente.

¹⁹ La frontiera efficiente è data da $\mu_R = r + \sigma_R \sqrt{(\mu - r1)(\Sigma'\Sigma)^{-1}(\mu - r1)}$

singolo investitore che è chiamato a scegliere un rendimento atteso desiderato in base alle sue preferenze.

1.5.3 Il portafoglio che minimizza l'ES

Poiché la varianza non è una misura di rischio coerente, una semplice evoluzione dell'approccio media-varianza sembra essere quello che minimizza un indice di rischio coerente, quale l'*Expected Shortfall*, mantenendo il vincolo di un certo livello di rendimento atteso. ROCKAFELLAR e URYASEV²⁰ dimostrano che il problema di minimizzazione dell'*Expected Shortfall*, con e senza titolo privo di rischio, si può ricondurre ad un problema di programmazione lineare. L'idea principale è quella di scrivere questa misura di rischio come il risultato di un'ottimizzazione. A questo scopo si definisce la seguente funzione

$$H_{\alpha}(v) = -v + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^v (v - x)f(x)dx$$

dove x è una variabile aleatoria²¹, $f(x)$ la sua funzione di densità e α è un parametro positivo compreso tra 0 e 1 che misura una probabilità e, in particolare, il livello di confidenza dell'ES. È possibile dimostrare che la funzione appena definita è sempre

²⁰ Si veda l'articolo *Optimization of Conditional Value-at-Risk* R. TYRELL ROCKFELLAR, STANISLAV URYASEV, 2000

²¹ Nel caso in esame si è supposto che x sia definita sulla retta dei numeri reali. Se x avesse un dominio più ristretto, allora l'estremo inferiore dell'integrale nella formula precedente non sarebbe $-\infty$, ma coinciderebbe con l'estremo inferiore del dominio di x .

convessa, il che implica che, annullando la derivata prima, si ottiene un punto di minimo assoluto. Il valore v^* che annulla la derivata prima è tale da soddisfare

$$-1 + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{v^*} f(x) dx = 0$$

L'integrale nella formula corrisponde alla funzione di ripartizione della variabile x nel punto v^* e, ipotizzando che tale funzione F sia invertibile, si può scrivere

$$-1 + \frac{1}{\alpha} F(v^*) = 0 \Leftrightarrow v^* = F^{-1}(\alpha)$$

Quindi, sostituendo v^* nella funzione obiettivo e considerando che $F(v^*) = \alpha$, si può concludere

$$H_{\alpha}(v^*) = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{v^*} xf(x) dx$$

che è esattamente l' ES_{α} , per cui vale:

$$ES_{\alpha} = \min_v H_{\alpha}(v)$$

A questo punto, per calcolare il portafoglio ottimo, non resta che sostituire i rendimenti del portafoglio al posto della generica variabile aleatoria x . I rendimenti del portafoglio sono funzioni, ovviamente, dei pesi percentuali ω che, quindi, diventeranno variabile di controllo del nuovo problema di minimo. Supponiamo che nel portafoglio vi siano N titoli rischiosi; per ognuno di questi titoli bisogna conoscere K rendimenti passati che devono essere inseriti in una matrice²²

²² Un titolo su ogni colonna e, su ogni colonna, la storia dei rendimenti passati.

$M \in R^{K \times n}$. Il vettore $x \in R^K$ può essere rappresentato come $x_{k \times 1} = M_{k \times n} \omega_{n \times 1}$. A questo punto il problema di ottimizzazione diventa risolvibile. Tuttavia, il problema di programmazione lineare non ha soluzione in forma algebrica (come invece accade per i problemi quadratici, come quello della minimizzazione della varianza) ed occorre fare ricorso a metodi numerici avanzati.

Nel prossimo Capitolo, dunque, verranno approfonditi aspetti caratteristici delle misure di rischio maggiormente conosciute ed utilizzate nelle istituzioni finanziarie descrivendo attentamente tutto il processo di *Risk Management*.

CAPITOLO 2

IL RISK MANAGEMENT E I SUOI STRUMENTI

Il *Risk Management* è un processo aziendale finalizzato alla gestione integrata dei rischi cui è esposta un'istituzione finanziaria, mediante attività sistematiche quali identificazione, misurazione, valutazione e politiche di mitigazione. In questo capitolo vengono illustrate le metodologie di protezione ed incremento del valore societario basate sull'applicazione di una efficiente attività di gestione del rischio. La Sezione 2.1 propone una rapida esemplificazione della struttura dello stato patrimoniale di un'istituzione finanziaria, passando a discutere dei rischi che essa si trova a fronteggiare. Viene inoltre evidenziata la necessità di avere capitale sufficiente per resistere a shock imprevisti, rimanendo allo stesso tempo solvibile. Successivamente, la Sezione 2.2 presenta una generalizzazione matematica finalizzata a descrivere i cambiamenti di valore ai quali un portafoglio finanziario può essere soggetto, definendo, in relazione a tali variazioni, una distribuzione delle perdite, passaggio fondamentale per lo sviluppo delle misure di rischio maggiormente utilizzate nell'ambito del *Risk Management*. La Sezione 2.3 è dedicata alle misure usate per determinare rischi e requisiti patrimoniali. Vengono introdotti differenti approcci quantitativi per tale misurazione con particolare attenzione a quelle statistiche calcolate a partire dalla distribuzione delle perdite, come il *Value-at-Risk* e l'*Expected Shortfall*. Infine, con la Sezione 2.4 si descrive l'attività del *Backtesting*, come ideale conclusione di un efficiente processo di

gestione del rischio, focalizzandosi sulla verifica dell'affidabilità che le misurazioni del rischio hanno prodotto.

2.1 IL RISK MANAGEMENT DI UN'ISTITUZIONE FINANZIARIA

Il *Risk Management* viene definito come quell'insieme di azioni intraprese dalle aziende nel tentativo di alterare e controllare il livello di rischio associato ad una linea di business o, in generale, all'impresa nel suo complesso. La valenza gestionale di questa definizione è quella di identificare i rischi associati a determinate scelte strategico-operative dell'impresa e di assumere decisioni sulle modalità con cui trattare tali rischi. In questo paragrafo si evidenzia quali siano i rischi e i requisiti patrimoniali a cui un'istituzione finanziaria risulta essere esposta.

2.1.1 Attività, passività e stato patrimoniale

Un buon modo per comprendere i rischi fronteggiati da un'istituzione finanziaria è osservarne lo stato patrimoniale. Questo, infatti, è uno dei documenti obbligatori per la redazione di un bilancio. Esso mostra in due differenti colonne le attività e le passività appartenenti ad un determinato ente. In altri termini, le attività descrivono gli investimenti dell'istituzione finanziaria mentre le passività si riferiscono al modo in cui i fondi sono stati ottenuti e le obbligazioni che derivano da questa raccolta. Tipicamente, una banca raccoglie fondi tramite i depositi dei clienti, emettendo obbligazioni o prendendo a prestito soldi da altre banche o dalla banca

centrale. Queste categorie insieme formano il capitale di debito della banca, che viene investito in diversi modi. Principalmente è usato per erogare prestiti ad aziende o clienti autonomi ma può essere anche utilizzato per acquistare titoli scambiabili sui mercati regolamentati, prestato ad altre banche o investito in altre proprietà/società. Infine, una piccola quantità è detenuta sotto forma di denaro liquido, anche detto “cassa”. Un’ultima voce presente nello stato patrimoniale è quella relativa al patrimonio netto, fondi extra apportati dai soci e di cruciale importanza grazie alla mancanza di obblighi tra le parti. In conclusione:

$$\text{value of asset} = \text{value of liabilities} = \text{debt} + \text{equity}$$

Nella Tabella 2.1 si mostra uno stato patrimoniale semplificato della Banca A in cui le attività e le passività sono valutate ad una certa data.

Banca A			
ATTIVITÀ (mln di €)		PASSIVITÀ (mln di €)	
Cassa	10	Depositi	80
Titoli	50	Obbligazioni emesse	40
- Obbligazioni		- Obbligazioni Senior	
- Azioni		- Obbligazioni subordinate	
- Derivati			
Prestiti e Mutui	100	Debiti a breve termine	30
- Aziendali		Riserve	20
- Retail e Piccoli clienti		(per perdite su prestiti)	
- Governativi			
Altre Attività	20	Capitale di debito	170
- Proprietà		(somma delle precedenti)	
- Investimenti in controllate		Patrimonio Netto	30
Crediti a breve termine	20		
TOTALE	200	TOTALE	200

Tabella 2.1: “Stato patrimoniale semplificato”

Fonte: “Quantitative Risk Management, concepts, techniques and tools”,
ALEXANDER F. MCNEIL, RÜDIGER FREY AND PAUL EMBRECHTS.

Come si può intuire, assegnare un valore ad ogni elemento dello stato patrimoniale non è un compito banale. In questo senso, si possono distinguere due differenti approcci. La pratica della contabilizzazione al *fair value* il quale viene definito come *“il corrispettivo al quale un’attività potrebbe essere scambiata, o una passività estinta, in una libera transazione tra parti consapevoli e disponibili”*.²³

Questo approccio risulta facile e trasparente per posizioni come i titoli scambiati su mercati molto liquidi, in quanto essi sono semplicemente valutati attraverso una media del loro prezzo di mercato. Diverso è applicare questa logica ad attività o passività non scambiate o illiquide. La pratica più tradizionale ed ancora applicata ad alcuni tipi di attività e passività finanziarie è la contabilizzazione al costo ammortizzato. Secondo questa prassi, alla posizione considerata viene assegnato un valore contabile iniziale e questo viene riportato nel tempo. In alcuni casi il valore viene progressivamente ridotto o svalutato per tenere conto dell’invecchiamento della posizione o dell’effetto di eventi avversi. Il valore contabile, tipicamente, è una stima del valore attuale degli interessi o pagamenti futuri attesi al netto di un accantonamento per perdite a causa di default.

²³ La definizione data dai principi contabili internazionali IAS/IFRS. principi contabili internazionali che prevedono l’uso del *fair value* quale regola di valutazione sono, ad esempio, lo IAS 18 "Ricavi", lo IAS 19 "Benefici per i dipendenti", lo IAS 39 "Strumenti finanziari: rilevazione e valutazione", lo IAS 40 "Investimenti Immobiliari", lo IAS 41 "Agricoltura", e l’IFRS 2 "Pagamenti basati su azioni"

In generale, nell'industria finanziaria la tendenza dei principi contabili internazionali è quella di prediligere la contabilizzazione al *fair value*, nonostante la crisi finanziaria del 2007-2009 abbia dimostrato che questo approccio non è privo di criticità durante i periodi in cui le attività di negoziazione e la liquidità del mercato svaniscono improvvisamente. Nel Paragrafo 2.2 peraltro il tema della contabilizzazione al *fair value* per i prodotti finanziari verrà ripreso e approfondito.

2.1.2 I rischi affrontati da un'istituzione finanziaria

Un ovvio fattore di rischio per una banca è una diminuzione nel valore dei suoi investimenti (parte delle attività dello stato patrimoniale). Questa eventualità solitamente ricade nell'ambito del rischio di mercato (come nel caso di una perdita derivante da un titolo detenuto) o in quello di rischio di credito. Un altro importante rischio è collegato all'approvvigionamento di risorse e, in senso più generale, al cosiddetto *maturity mismatch*²⁴. Per una banca tradizionale, la maggior parte delle attività consistono in investimenti a lungo termine e relativamente illiquidi come, ad esempio, i mutui o le proprietà possedute. L'altro lato dello stato patrimoniale, invece, è costituito da passività di breve termine, come i fondi presi in prestito dal mercato e i depositi della maggior parte dei clienti. Ciò può portare a delle

²⁴ Il *maturity mismatch* è un termine usato per descrivere situazioni in cui non c'è una adeguata corrispondenza tra i flussi generati dalle attività e dalle passività a breve e lungo termine di un'azienda.

instabilità quando il costo di rifinanziamento a breve termine aumenta a causa di un rialzo dei tassi di interesse di breve periodo, proprio a causa della difficoltà delle banche di smobilizzare una parte del loro attivo per raccogliere fondi. In casi estremi, questo può portare anche al default di una istituzione finanziaria. Dovrebbe risultare chiaro da questa discussione, che un approccio efficace al *Risk Management* non può prescindere da una attenta osservazione di entrambi i lati dello stato patrimoniale.

2.1.3 Il capitale

Al concetto di capitale di una banca sono attribuite diverse definizioni nel panorama della letteratura finanziaria. Tra di esse possono essere distinte tre tipologie di capitale: il capitale netto, il capitale regolamentare e il capitale economico. Ognuna di esse si riferisce agli elementi lato passività dello stato patrimoniale che non comportano (se non in modo molto limitato) obbligazioni tra la banca e i creditori esterni (soci), il che, quindi, è utile nel fungere da cuscinetto per le perdite.

Il capitale netto è, per gli azionisti, una misura del valore dell'azienda. Solitamente, lo stato patrimoniale garantisce una scomposizione più dettagliata del capitale netto, suddividendolo in posizioni separate per capitale sociale, utili trattenuti e altri elementi di minore importanza. Il capitale sociale rappresenta la quota di capitale iniziale investita nella società dagli acquirenti di azioni. Per aziende finanziate da una singola emissione azionaria, esso è dato dal numero di azioni distribuite

moltiplicate per il loro prezzo registrato in tale data. Il capitale sociale, dunque, non coincide con la capitalizzazione di mercato, la quale è definita come il prodotto tra il numero di azioni emesse e il loro prezzo corrente. Gli utili trattenuti, invece, sono gli utili accumulati che non sono stati distribuiti ai soci in forma di dividendi. In linea di principio, questa riserva può essere negativa nel caso in cui la società abbia fatto registrare delle perdite.

Il capitale regolamentare consiste nell'ammontare di capitale che una società dovrebbe detenere in ottemperanza della specifica legislazione di riferimento. Per una banca, la normativa vigente è predisposta dal quadro regolamentare di Basilea²⁵. In generale, il *framework* relativo al capitale regolamentare specifica e stabilisce la quantità di capitale obbligatorio affinché l'istituzione finanziaria possa garantire la sua tipica operatività. Tale valutazione prende in considerazione la portata e la rischiosità di ogni sua singola posizione. Inoltre, esso specifica la qualità del capitale e quindi la composizione che dovrebbe avere nello stato patrimoniale. Proprio in relazione a questo, si è soliti distinguere in livelli di capitale numerati e differenti, chiamati "Tiers". Per esempio, secondo gli accordi di Basilea, il Tier 1 è la somma del capitale sociale e della riserva di utili, ovvero le due voci principali del patrimonio netto. Questa quota di capitale può essere utilizzata in pieno per

²⁵ Il concetto di capitale regolamentare nell'industria finanziaria è affrontato da numerosi documenti prodotti dal Comitato di Basilea. In particolare, le implicazioni per il capitale delle banche provenienti da Basilea II e Basilea III possono essere approfondite, rispettivamente, in *Basel Committee on Banking Supervision*, Comitato di Basilea, 2006 e 2011.

coprire eventuali perdite senza nessuna ripercussione. Il Tier 2 include altre voci di stato patrimoniale, in particolare il debito subordinato. I detentori di questa tipologia di debito, infatti, sono gli ultimi (prima degli azionisti) ad essere liquidati nell'eventualità di cessazione dell'attività. In questo senso, il debito subordinato può essere considerato come un altro livello di protezione per i depositanti e i detentori di debito senior. Nell'esempio precedente la Banca A ha un Tier 1 di €30mln (assumendo che la voce di patrimonio netto sia composta esclusivamente da capitale sociale e utili non distribuiti) e un Tier 2 pari a €45mln.

Infine, il capitale economico è una stima dell'ammontare di capitale di cui una istituzione finanziaria necessita al fine di tenere sotto controllo la probabilità di diventare insolvente, tipicamente su un orizzonte temporale pari ad un anno. Esso è il risultato di una valutazione interna del capitale di rischio guidata da principi economici di modello. In particolare, tale struttura del capitale economico offre una visione totale sulla rischiosità dell'istituzione finanziaria, ponendo l'attenzione simultaneamente sulle attività e sulle passività. Essa opera, dove possibile, con elementi dello stato patrimoniale valutati al *fair value* o ad un valore coerente di mercato, sebbene, nella storia passata, le autorità di controllo abbiano imposto regole relativamente semplici, consentendo di fatto una contabilizzazione delle voci al valore contabile. È interessante notare come capitale economico e capitale regolamentare stiano procedendo gradualmente verso una crescente convergenza di concetto.

2.3 MODELLARE IL VALORE E I SUOI CAMBIAMENTI

Si è visto nella Sezione 2.1 che l'analisi del rischio che un'istituzione finanziaria è chiamata ad effettuare richiede l'analisi del valore delle sue attività e passività e di come esse variano nel tempo. In questo paragrafo si introduce un quadro generale finalizzato modellare il cambiamento di valore nel tempo cui esso può essere soggetto a causa di eventi interni o esterni. Dopo aver specificato il processo di mappatura dei fattori di rischio e dopo aver proposto alcuni metodi per la modellazione del valore, si conclude la sezione fornendo alcune proposte per la derivazione della distribuzione delle perdite, fondamento delle misurazioni del rischio.

2.3.1 La mappatura dei rischi

Nel modello generale scelto per descrivere i rischi finanziari si rappresenta l'incertezza degli eventi futuri tramite lo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , già ampiamente descritto nella Sezione 1.1.1. Si consideri un portafoglio formato da un certo numero di attività finanziarie attività ma che, in alcuni casi, possa contenere anche delle passività. Nello specifico, esso potrebbe essere un insieme di azioni, di obbligazioni, di derivati o di posizioni debitorie. Si indichi il valore del portafoglio al tempo t come V_t e si assuma che la variabile casuale V_t sia nota o che possa essere conosciuta tramite informazioni disponibili nell'istante t . La valutazione di alcune

di queste posizioni può presentare non poche difficoltà nella pratica; il paragrafo successivo (Sezione 2.3.2) fornisce una dettagliata argomentazione a riguardo.

Si prenda in considerazione un orizzonte temporale Δt che può essere, per esempio, uno o dieci giorni se si sta considerando il rischio di mercato o un anno nel caso del rischio di credito. Sul piano organizzativo, è il dipartimento di *Risk Management* che deve individuare l'intervallo di tempo più idoneo a seconda della tipologia di rischio considerata. A questo punto, al fine di poter formalizzare matematicamente l'evoluzione del valore del portafoglio, si formulano due ipotesi semplificatrici:

- La composizione del portafoglio rimane fissa sull'orizzonte temporale scelto.
- Non ci sono pagamenti di dividendi durante il periodo selezionato.

Se da un lato tali ipotesi trovano spesso un riscontro nella pratica per orizzonti brevi, come uno o dieci giorni, diverso è il caso di intervalli più lunghi, come un anno. In questo secondo caso, è possibile allentare queste restrizioni specificando semplici regole di ribilanciamento del portafoglio o prendendo in considerazione la distribuzione degli utili e delle perdite nei periodi intermedi.

È dunque possibile scrivere il valore del portafoglio alla fine del periodo considerato come V_{t+1} e la sua variazione come $\Delta V_{t+1} = V_{t+1} - V_t$. Si definisce, inoltre, la perdita come $L_{t+1} = -\Delta V_{t+1}$. La quantità L_{t+1} è tipicamente una variabile aleatoria quando valutata al tempo t e la sua distribuzione è chiamata “*loss distribution*” o “distribuzione della perdita”.

Il valore V_t è generalmente modellato come una funzione del tempo e di un vettore dei fattori di rischio d-dimensionale Z_t , cioè:

$$V_t = f(t, Z_t)$$

dove $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Solitamente si assume che i fattori di rischio siano osservabili, cioè che il vettore casuale Z_t sia formato da valori realizzati noti al tempo t e quindi V_t è calcolabile e pari a $f(t, z_t)$. Ne segue dunque che la definizione dei fattori di rischio e della funzione f è una scelta modellistica e dipende dal portafoglio selezionato, dalle proprietà empiriche e statistiche dei dati disponibili e dal livello di precisione desiderato. Una rappresentazione del valore del portafoglio tramite la funzione appena definita è chiamata “mappatura del rischio”.

2.3.2 I metodi di valutazione del valore

In questo paragrafo vengono presentati i diversi metodi usati nella determinazione del *fair value* delle attività finanziarie, già introdotta nella Sezione 2.1.1, e viene mostrato come la valutazione neutrale al rischio può essere intesa come un caso particolare di questa procedura. In termini generali il *fair value* è definito come il prezzo che si percepirebbe per la vendita di un'attività ovvero che si pagherebbe per il trasferimento di una passività in una regolare operazione tra operatori di mercato equamente informati alla data di valutazione. Tuttavia, solo una minoranza delle voci di stato patrimoniale è negoziata direttamente in mercati liquidi. La contabilità

ha quindi sviluppato un ordine gerarchico a tre stadi di metodi che seguono l'approccio del *fair value*, estendendo così il suo utilizzo anche a attività finanziarie non scambiate su mercati regolamentati. Tale ordine, codificato negli Stati Uniti dal principio contabile 157 e dal 2009, globalmente, grazie all'IFRS 7, è caratterizzato dai seguenti livelli. Livello Uno: il *fair value* di un elemento è determinato dalla quotazione in un mercato attivo per lo stesso elemento senza alcuna modifica. Livello Due: il *fair value* di un elemento è determinato usando la quotazione in un mercato attivo per contratti simili, ma non identici, o utilizzando tecniche di valutazione, come i modelli di *pricing* per i derivati, per i quali tutti gli input significativi sono basati su dati di mercato osservabili. Livello Tre: il *fair value* di un elemento è stimato usando una tecnica di valutazione per i quali gli input chiave non sono estraibili da dati di mercato osservabili. Qualche volta, nel linguaggio adottato dal *Risk Management* questi livelli sono definiti, rispettivamente, come “*mark-to-market*”, “*mark-to-model* con input oggettivi” e “*mark-to-model* con input soggettivi”.

Riguardo alla valutazione neutrale al rischio, essa è un caso particolare di contabilizzazione al *fair value* che è largamente usato in caso di prodotti finanziari come i titoli derivati. Secondo questa metodologia, i valori degli strumenti finanziari sono calcolati come l'attualizzazione dei flussi di cassa attesi, in cui le aspettative sono prese in relazione ad una misura di probabilità Q, chiamata misura dei prezzi neutrale al rischio. Tale misura Q ha la caratteristica di convertire i flussi

scontati dei titoli scambiati in una martingala²⁶ e, per questo, è anche conosciuta come *misura equivalente di martingala*. Opportune procedure di calibrazione assicurano che i prezzi ottenuti in questo modo siano consistenti con le quotazioni dei prezzi di mercato.

2.3.3 La distribuzione della perdita

Nella Sezione 2.3.1 si è discusso di come effettuare una mappatura del rischio associato ad un portafoglio. In questo paragrafo si considera come derivare la distribuzione delle perdite al fine di utilizzarla in applicazioni di gestione del rischio come anche la determinazione del capitale regolamentare, introdotto nel primo paragrafo di questo Capitolo. Assumendo di essere in t e ragionando su un intervallo temporale $[t, t + 1]$, la formula della perdita diventa:

$$L_{t+1} = -\Delta V_{t+1} = -(f(t + 1, z_t + X_{t+1}) - f(t, z_t))$$

Si osservi come per determinare la distribuzione della perdita, cioè la distribuzione di L_{t+1} , occorre fare due cose:

- specificare un modello per le variazioni dei fattori di rischio X_{t+1}
- determinare la distribuzione della variabile casuale $f(t + 1, z_t + X_{t+1})$.

²⁶ In teoria delle probabilità, una martingala è un processo stocastico X_t , dipendente da un parametro t che solitamente è il tempo, con la seguente proprietà: per ogni $s \leq t$, il valore atteso di X_t condizionato ai valori di X_r , con $r \leq s$, è uguale ad X_s . Il più noto esempio di martingala, in cui il parametro s è continuo, è il moto browniano.

Si noti inoltre come, effettivamente, due tipologie di modelli entrano a far parte del processo. Quelli usati per X_{t+1} sono “modelli di proiezione” necessari per modellare il comportamento nel futuro dei fattori di rischio e, solitamente, sono stimati a partire da dati empirici che descrivono i cambiamenti passati dei fattori di rischio $(X_s)_{s < t}$. A seconda della complessità delle posizioni in portafoglio, la funzione di mappatura f , sopra riportata, rappresenta tipicamente anche i modelli di valutazione.

In generale, ci sono tre metodologie che possono essere applicate per il raggiungimento di questi obiettivi: un metodo analitico, un metodo basato su simulazioni storiche e un approccio per simulazione meglio conosciuto come metodo Monte Carlo.

Nel metodo analitico si tenta di scegliere un modello per X_{t+1} e una funzione di mappatura f affinché la distribuzione di L_{t+1} possa essere determinata analiticamente. Un esempio di questo approccio è il cosiddetto metodo varianza-covarianza²⁷ per la gestione del rischio di mercato. L’assunzione alla base di questo approccio è che i cambiamenti dei fattori di rischio seguono una distribuzione normale multivariata $X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$, dove μ è il vettore delle medie e Σ è la matrice di covarianza. Ciò è coerente con l’Ipotesi secondo la quale i fattori di rischio Z_t evolvono in tempo continuo seguendo un moto Browniano multivariato. Si assume

²⁷ Il metodo varianza-covarianza risale ai primi lavori del RiskMetrics Group (JPMorgan) del 1996.

inoltre che la perdita linearizzata in termini di fattori di rischio sia un'approssimazione sufficientemente accurata della perdita effettiva e si semplifica il problema considerando la distribuzione di L_{t+1}^{Δ} , dove

$$L_{t+1}^{\Delta} = -(c_t + b_t' X_{t+1})$$

dove c_t è una costante e b_t un vettore di costanti, i quali sono conoscibili nell'istante t . Dato che X_{t+1} è distribuita come una normale multivariata, è noto dalle proprietà di questa variabile casuale che una funzione lineare in X_{t+1} si distribuisce essa stessa come una normale. Allora, dalle regole generali per calcolare media e varianza di combinazioni lineari di un vettore distribuito secondo una gaussiana, si ottiene che

$$L_{t+1}^{\Delta} \sim N(-c_t - b_t' \mu, b_t' \Sigma b_t)$$

Il metodo varianza-covarianza offre una soluzione semplice al problema di misurazione del rischio ma questa comodità è raggiunta solo al prezzo di due assunzioni semplificatrici e non necessariamente realistiche *ex post*. In primo luogo, la linearizzazione potrebbe non essere una buona stima della relazione tra la distribuzione di perdita e i cambiamenti dei fattori di rischio. In secondo luogo, l'assunto della normalità è quantomeno poco realistico per la distribuzione delle variazioni dei suddetti fattori. Questo è tanto più vero quanto più alta è la frequenza di campionamento (in particolare, quella giornaliera). Empiricamente, in finanza,

si osserva che le distribuzioni dei rendimenti sono leptocurtiche²⁸ e, quindi, caratterizzate da code più “grasse” rispetto alla distribuzione Gaussiana.

Il secondo metodo, quello della simulazione storica, invece di stimare la distribuzione di L_{t+1} facendo uso di un modello parametrico per X_{t+1} utilizza la distribuzione empirica delle variazioni dei fattori di rischio. Si supponga di raccogliere i dati storici relativi ad X_{t+1} per n periodi di tempo

$$X_{t-n+1}, \dots, X_t$$

Si costruisca, quindi, il seguente campione di utili e perdite potenziali:

$$\{\tilde{L}_s = -(f(t+1, z_t + X_s) - f(t, z_t)): s = t-n+1, \dots, t\}$$

I valori \tilde{L}_s mostrano che cosa accadrebbe al portafoglio se le variazioni dei fattori di rischio nel periodo s dovessero ripresentarsi. Se si assume che il processo delle variazioni di questi fattori sia stazionario con una funzione di ripartizione F_X , allora la funzione cumulativa empirica delle perdite simulate con questo metodo è uno stimatore consistente²⁹ per la distribuzione delle perdite. Perdita attesa, varianza della perdita o VaR³⁰ possono essere calcolati a partire da tale stima. Ad esempio, la perdita attesa può essere stimata tramite la formula seguente: $E(L_{t+1}) \approx n^{-1} \sum_{s=t-n+1}^t \tilde{L}_s$.

²⁸ Nel Capitolo 4 si approfondisce la questione relativa alla leptocurtosi e al “fitting” dei dati empirici ad una distribuzione normale.

²⁹ In statistica, la consistenza è una proprietà desiderabile degli stimatori. In sostanza uno stimatore è consistente se, all'aumentare della numerosità del campione (in questo caso n), la sua distribuzione di probabilità si concentra in corrispondenza del valore del parametro da stimare.

³⁰ Si veda la Sezione 2.4.1 per una definizione

Il metodo della simulazione storica è facile da implementare e riduce la questione del calcolo della distribuzione della perdita ad un problema mono-dimensionale. Nella pratica il successo dell'approccio dipende strettamente dalla capacità di raccogliere una quantità sufficiente di dati storici sincroni tra tutti i fattori di rischio. In quanto tale, esso è usato principalmente per la gestione del rischio di mercato nelle banche, dove il problema della disponibilità di dati è meno presente.

Infine, l'ultimo approccio alla misurazione del rischio include la simulazione di un modello parametrico esplicito per le variazioni dei fattori di rischio ed è conosciuto come metodo Monte Carlo. Esso non risolve il problema di trovare un modello multivariato per X_{t+1} e la qualità dei risultati ottenuti dipende da come viene utilizzato. Per portafogli di grandi dimensioni il costo computazionale dell'approccio Monte Carlo può essere considerevole, soprattutto perché come ogni simulazione richiede la totale rivalutazione del portafoglio con i valori simulati. Le tecniche di simulazione vengono frequentemente utilizzate nella gestione del rischio di credito dei portafogli. Anche i cosiddetti modelli di generazione di scenari economici, spesso utilizzati nell'ambito assicurativo, sono largamente riconducibili ai metodi Monte Carlo. Si tratta di modelli economicamente fondati, tipicamente dinamici, focalizzati sulla valutazione e interazione di differenti fattori di rischio.

Dopo aver descritto le metodologie di determinazione del valore di un portafoglio e delle variazioni a cui questo è soggetto in funzione dei suoi fattori di rischio, nella prossima sezione verranno discusse alcune stime di rischio obbligatorie per le

istituzioni finanziarie in ottemperanza alle normative introdotte dal comitato di Basilea in ambito *Risk Management*.

2.4 LE MISURAZIONI DEL RISCHIO

In termini molto generali una misura di rischio associa ad una posizione finanziaria con perdita L un numero che ne rispecchi la rischiosità. Nella pratica, le misure di rischio sono usate per una grande varietà di scopi. Innanzitutto, sono usate per determinare l'ammontare di capitale di cui un'istituzione finanziaria ha bisogno per contrastare future perdite inattese sul suo portafoglio e soddisfare così i requisiti di regolamentazione sulla solvibilità a cui essa è sottoposta. Inoltre, esse sono spesso utilizzate dal management come strumento per limitare l'ammontare di rischio che una unità di business all'interno della società può assumersi. L'esempio più comune è rappresentato dai trader di una banca che possono essere vincolati nella loro operatività dal Valore a Rischio (VaR) giornaliero, calcolato sul proprio portafoglio con un predeterminato livello di confidenza.

Nella Sezione 2.4.1 viene data una visione di insieme su differenti approcci alla misurazione del rischio, per concentrare in seguito l'attenzione su quelli che sono dedotti a partire dalle distribuzioni della perdita. Successivamente, nelle Sezioni 2.4.2 e 2.4.3 si introduce, rispettivamente, le largamente utilizzate misure del Valore a Rischio (VaR) e dell'*Expected Shortfall* (ES).

2.4.1 Gli approcci alla misurazione del rischio

Gli approcci esistenti per misurare il rischio di una posizione finanziaria possono essere raggruppati in tre categorie: l'approccio dell'importo nozionale, l'approccio basato sulle distribuzioni della perdita e l'approccio basato sugli scenari.

Il metodo dell'importo nozionale rappresenta la più antica tecnica per quantificare il rischio di un portafoglio costituito da attività rischiose. In questo ambito il rischio è definito come la somma dei valori nozionali dei singoli titoli contenuti nel portafoglio. Ogni valore, quindi, può essere ponderato per un fattore che rappresenta una valutazione della rischiosità della generica classe di attività alla quale il titolo appartiene. Il vantaggio di questo approccio è la sua evidente semplicità. Tuttavia, presenta dei difetti da un punto di vista economico. Innanzitutto, esso non crea distinzioni tra posizioni a breve e a lungo termine e fra di esse non è prevista alcuna compensazione. Inoltre, l'approccio del valore nozionale non riflette i benefici portati dalla diversificazione sul rischio complessivo di portafoglio. Infatti, il rischio di un portafoglio di crediti ben diversificato formato da prestiti verso un gran numero di società appare identico al rischio nel caso in cui l'intero ammontare di debiti fossero riferiti ad una singola azienda. Infine, esso ha dei problemi nel rapportarsi a portafogli contenenti titoli derivati, in cui il valore nozionale del sottostante e il valore economico della posizione in derivato può differire in maniera anche significativa.

Le più moderne misure di rischio di portafoglio, invece, sono stime statistiche che descrivono la distribuzione delle perdite su un prestabilito orizzonte temporale Δt . Esempi di misure appartenenti a questa categoria sono la varianza, il VaR e l'ES, di cui si discuterà dettagliatamente nel corso del paragrafo. Il vantaggio di tale approccio è che il concetto di distribuzione delle perdite è rilevante per ogni posizionamento di portafoglio che un'istituzione finanziaria può assumere. Inoltre, se stimata correttamente, la misura di rischio è in grado di riflettere gli effetti sia della compensazione delle posizioni che della diversificazione del portafoglio. Due temi emergono con forza quando si opera con la distribuzione delle perdite. In primo luogo, qualsiasi stima è basata su dati passati. Se le leggi che governano i mercati finanziari evolvono e cambiano, queste conoscenze passate sono di utilità limitata nel prevedere il rischio futuro. Secondo, anche in condizioni di stazionarietà, è difficoltoso stimare accuratamente la distribuzione delle perdite e, in particolare, ciò vale per portafogli di grandi dimensioni. Molti sistemi apparentemente sofisticati utilizzati nel *Risk Management* si basano su modelli statistici relativamente semplici, assumendo ad esempio fragili ipotesi di normalità. Questi argomenti spingono a continui miglioramenti nel modo in cui si cerca di effettuare la stima e, ovviamente, a grande prudenza nelle applicazioni pratiche così come nell'utilizzo dei risultati. In particolare, queste misure dovrebbero essere implementate con informazioni, di origine quantitativa o qualitativa, ricavate da scenari probabilistici. Gli elementi prospettici che riflettono le aspettative degli

agenti dovrebbero essere usati congiuntamente alle stime statistiche (necessariamente basate su eventi passati) nella calibrazione di un modello basato sulla distribuzione delle perdite.

Infine, nell'approccio basato sugli scenari, si considera un certo numero di possibili variazioni future dei fattori di rischi. Ad esempio, essi possono essere l'innalzamento del 10% dei principali tassi di cambio, un simultaneo calo del 20% dei maggiori indici azionari o una contemporanea crescita dei tassi di interesse chiave nel mondo. Il rischio di un portafoglio è quindi misurato come la massima perdita ottenibile sotto tali circostanze. Gli scenari possono, inoltre, essere ponderati per dei fattori di plausibilità. Questo approccio al *Risk Management* è tipicamente adottato nell'attività di Stress Test, che in questo elaborato viene affrontata nel Capitolo 4, fornendo un caso studio applicato nel Capitolo 4. Tale metodologia di misurazione del rischio è molto utile nel *Risk Management*, specialmente per portafogli esposti ad un limitato set di fattori di rischio. Con questo approccio, è possibile fornire utili informazioni, caratterizzando la distribuzione delle perdite condizionatamente ai vari scenari ipotizzati. Come si può intuire, la principale difficoltà risiede appunto nella corretta e appropriata formulazione degli scenari e della loro attendibilità.

Nei prossimi sotto paragrafi, viene data una definizione di Valore a Rischio e di *Expected Shortfall*, concetti già brevemente introdotti nella Sezione 1.4.

2.4.2 Il Value at Risk

Il Valore a Rischio, dall'inglese *Value at Risk* (VaR), è con tutta probabilità la misura di rischio più largamente utilizzata nelle istituzioni finanziarie. La sua popolarità è dovuta soprattutto al ruolo centrale affidatogli dal quadro regolamentare di Basilea nella gestione del capitale e dei requisiti patrimoniali bancari.

Si consideri un portafoglio costituito da attività rischiose e un determinato orizzonte temporale Δt e si indichi con $F_L(l) = P(L \leq l)$ la funzione di ripartizione corrispondente ad una certa distribuzione della perdita L . Si vuole definire una statistica basata su F_L che misuri l'entità del rischio associato alla detenzione di tale portafoglio nel periodo di tempo Δt . Un ovvio candidato è rappresentato dalla massima perdita possibile. Tuttavia, per come sono costruite molte distribuzioni di probabilità, la massima perdita può essere di fatto infinita. Inoltre, in questo modo si trascura ogni informazione riguardante la probabilità presente in F_L . L'idea nella definizione del VaR è di sostituire “la perdita massima” con “la perdita massima che non viene superata con un prefissato livello di probabilità”. Infatti, dato un certo livello di confidenza $\alpha \in (0,1)$, il VaR di un portafoglio con perdita L al livello di confidenza α è definito come il più piccolo valore l tale per cui la probabilità che si verifichi una perdita peggiore non sia maggiore di $1 - \alpha$. Formalmente:

$$VaR_\alpha = VaR_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(L) \geq \alpha\}$$

In termini probabilistici, il VaR è semplicemente un quantile della distribuzione della perdita, con i valori di α tipicamente compresi fra 0,90 e 0,99. Nella gestione del rischio di mercato, l'orizzonte temporale Δt è solitamente uno o dieci giorni, mentre nel rischio di credito e nel rischio operativo, Δt è generalmente un anno. Si noti, tuttavia, che per sua stessa definizione il VaR non dà alcuna informazione riguardo l'entità della perdita che si verifica con probabilità $1 - \alpha$. Questo è probabilmente l'aspetto più negativo del VaR come misura di rischio.

2.4.3 La scelta dei parametri del VaR

La scelta dei parametri Δt e α è un passaggio obbligato e di fondamentale importanza per chiunque decidesse di voler operare con il VaR. Non esiste un singolo valore ottimale per questi parametri, ma ci sono alcune considerazioni che hanno influenzato le scelte dei regolatori e degli sviluppatori di modelli interni. In particolare, l'orizzonte temporale Δt dovrebbe riflettere il periodo durante il quale una istituzione finanziaria assume di detenere il portafoglio, cosa che spesso dipende da vincoli legali e contrattuali così come da considerazioni inerenti la liquidità. In certi casi un'istituzione finanziaria può essere obbligata a mantenere una posizione in perdita se il mercato di quella specifica attività non è molto liquido, perciò un orizzonte relativamente lungo può rappresentare una scelta congrua per le attività illiquide. Ci sono poi altre considerazioni, più pratiche, che suggeriscono

che Δt dovrebbe essere, invece, relativamente breve. Infatti, l'assunzione che la composizione del portafoglio possa rimanere invariata per un lungo periodo non è molto sostenibile. Inoltre, la calibrazione e la verifica dei modelli statistici per le variazioni storiche dei fattori di rischio (X_t) risultano migliori quando Δt è piccolo, dal momento che ciò significa avere una maggior quantità di dati osservati a disposizione in relazione all'orizzonte temporale.

Per quanto riguarda il livello di confidenza α , valori differenti spesso sono associati a scopi diversi. Tipicamente, ad esempio, per fissare dei limiti all'attività dei trader, una banca considera un VaR di orizzonte un giorno e α 95%. Invece, per scopi di adeguatezza patrimoniale sono solitamente utilizzati intervalli di confidenza più alti. A questo proposito, i requisiti patrimoniali indicati dagli accordi di Basilea per il rischio di mercato nel portafoglio di negoziazione di una banca si basano su un VaR al 99% con un orizzonte temporale di dieci giorni.

Nella pratica, talvolta i risultati del VaR tendono a ricevere una interpretazione rigida. La dichiarazione che il VaR giornaliero al livello di confidenza del 99% per un certo portafoglio è uguale a l è intesa come “la probabilità di ottenere una perdita superiore ad l è esattamente l'1%”. Questa affermazione è tuttavia fuorviante, in quanto vengono trascurati elementi importanti come l'errore di stima, il rischio modello e rischio di liquidità del mercato. Si ricordi che il rischio modello corrisponde al rischio che il nostro modello per la distribuzione della perdita possa essere erroneamente specificato. Ad esempio, si potrebbe lavorare con una

distribuzione normale per le perdite quando invece essa, nella realtà, è caratterizzata da code grasse; ancora, si potrebbe non aver identificato altre problematiche, seppur presenti, nella modellizzazione della distribuzione dei cambiamenti dei fattori di rischio sottostanti le perdite. Certamente, questi problemi sono più evidenti se si tenta di stimare il VaR a livelli di confidenza molto alti. Il rischio di liquidità, invece, si riferisce al fatto che qualsiasi tentativo di liquidare una grande posizione in perdita spinge il prezzo di quell'attività ancora più in basso, aggravando la situazione.

2.4.4 L'Expected Shortfall

In questo paragrafo, riprendendo quanto già specificato nella Sezione 1.4, viene trattata un'altra misura di rischio basata sulla distribuzione delle perdite: l'*Expected Shortfall* o ES.

L'*Expected Shortfall* è una statistica strettamente connessa al VaR e da anni si è acceso un vivace dibattito nell'ambito della gestione del rischio riguardo i punti di forza e di debolezza di entrambe le misure di rischio. Data una distribuzione della perdita L con valore atteso $E(|L|) < \infty$ e funzione di ripartizione F_L , l'ES al livello di confidenza $\alpha \in (0,1)$ è definita come: $ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(F_u) du$

dove $q_u(F_u) = F_L^{-1}(u)$ è la funzione quantile³¹ di F_L . La condizione imposta sul valore medio della perdita garantisce che l'integrale nella funzione dell'ES sia correttamente definito. L'ES è connesso al VaR attraverso la seguente:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du$$

In altri termini l'ES con confidenza α è la media di tutti i VaR con confidenza $u \geq \alpha$. Si sta, di fatto, esaminando ulteriormente nella coda della distribuzione della perdita. Ovviamente, l' ES_α dipende solamente dalla distribuzione di L e, in valore assoluto³², vale $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$. Quando si considerano distribuzioni continue per la perdita, si può derivare una espressione ancora più intuitiva, che ha il pregio di esprimere l'ES come la perdita attesa in cui si incorre nel caso in cui si superi il VaR. Infatti, per una perdita L integrabile con funzione di ripartizione F_L continua e per ogni $\alpha \in (0,1)$, vale il seguente lemma:

$$ES_\alpha = \frac{E(L; L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = E(L|L \geq VaR_\alpha)$$

³¹ In statistica il quantile di ordine α o α -quantili, con α numero reale nell'intervallo $(0,1)$, è un valore q_α che divide la popolazione in due parti, proporzionali a α e $(1-\alpha)$ e caratterizzate da valori rispettivamente minori e maggiori di q_α . Definita la modalità di una variabile come una delle sue possibili realizzazioni (per variabili quantitative si usa spesso anche il termine valore), l' α -quantile è la più piccola modalità q_α per cui la frequenza cumulata relativa, calcolata fino a q_α inclusa, raggiunge o supera α , ossia tale che la somma delle frequenze relative fino a quella modalità (inclusa) sia almeno α .

³² In questo caso si sta considerando il VaR_α come valore "positivo" e quindi vale $ES_\alpha \geq VaR_\alpha$. Tuttavia, non è insolito determinare il VaR_α nella coda sinistra della distribuzione e, quindi, considerare la perdita come rendimento negativo. A questo punto, sarebbe vero il contrario, cioè: $ES_\alpha \leq VaR_\alpha$. In generale, però, è possibile affermare che il valore assoluto dell' ES_α è sempre maggiore di quello del VaR_α .

Dove la notazione $E(X; A) = E(XI_A)$ è usata per una generica variabile casuale X e un insieme generico A appartenente allo spazio degli eventi \mathcal{F} .

La Figura 2.2 mostra un esempio di una distribuzione della perdita, con densità di probabilità nell'asse delle ordinate e la perdita nell'asse delle ascisse, in cui è calcolato un VaR al 95% contrassegnato da una linea verticale continua; la retta punteggiata, invece, si riferisce alla perdita media mentre l'ES al 95% è evidenziato dalla riga tratteggiata.

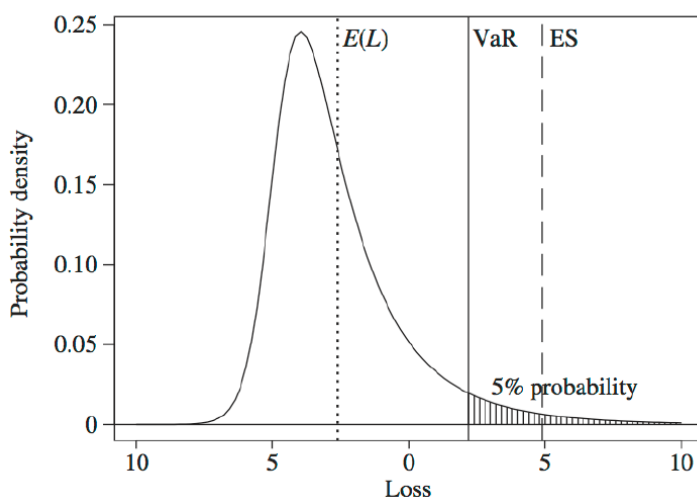


Figura 2.2: “Distribuzione della perdita L , $VaR_{0,95}$ e $ES_{0,95}$ ”
Fonte: “*Quantitative Risk Management, concepts, techniques and tools*”, ALEXANDER F. MCNEIL, RÜDIGER FREY AND PAUL EMBRECHTS.

2.5 IL BACKTESTING

Il *backtesting* è una pratica di valutazione delle procedure che il *Risk Management* esegue come ultima fase della sua attività. Tale misurazione avviene comparando

le stime fuori campione, anche dette “out-of-sample”, delle misure di rischio con i guadagni o le perdite effettivamente realizzate. Il *backtesting* permette di verificare se un certo modello di previsione abbia prodotto una stima della misura di rischio affidabile. Il comitato di Basilea, nei suoi regolamenti, accoglie questa forma di test e fornisce un’indicazione di come deve essere sviluppata. Ad esempio, per il VaR, il *backtesting* proposto prende in considerazione 250 giorni, cioè il numero di giorni che compongono in un anno finanziario, e confronta la perdita subita in ogni giorno con la previsione rappresentata dal VaR giornaliero calcolato sul giorno precedente. Ripetendo questa procedura è ripetuta per molti periodi di tempo, è possibile monitorare la performance delle varie metodologie impiegate e di comparare la loro relativa efficacia.

Nelle Sezioni 2.5.1 e 2.5.2, si discute il *backtesting* delle stime delle misure di rischio che si sono affrontate nei paragrafi precedenti: il VaR e l’ES.

2.5.1 Backtesting sul VaR

Si consideri, per ogni istante di tempo t , il VaR_{α}^t come l’ α -quantile di una distribuzione delle perdite L . Si fa riferimento, inoltre, alla “violazione del VaR” come l’evento

$$\{L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t\}$$

e si definisca la variabile indicatrice dell'evento come $I_{t+1} = I_{\{L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t\}}$.

Assumendo una distribuzione di perdita continua, si ottiene, per definizione di quantile, che:

$$E(I_{t+1}) = P(L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t) = 1 - \alpha$$

Dalla precedente si deduce che I_{t+1} è distribuita come una variabile Bernoulliana con probabilità $1 - \alpha$. Inoltre, è dimostrabile come la sequenza degli indicatori di violazione del VaR (I_t) formino un processo di Bernoulli, cioè un processo di variabili casuali bernoulliane indipendenti e identicamente distribuite con probabilità $1 - \alpha$. Ci sono due importanti conseguenze di questo comportamento per le violazioni. Primo, se si sommano questi indicatori di violazione un certo numero di volte, si ottengono variabili distribuite secondo una Binomiale. Ad esempio:

$$M = \sum_{t=1}^m I_{t+1} \sim B(m, 1 - \alpha)$$

Secondo, gli intervalli tra violazioni consecutive sono indipendenti e geometricamente distribuiti. Supposto che l'evento $\{L_{t+1} > VaR_{\alpha}^t\}$ si verifichi per un certo numero di volte $t \in \{T_1, \dots, T_M\}$ e sia $T_0 = 0$. Allora, gli intervalli $S_j = T_j - T_{j-1}$ sono variabili casuali geometriche indipendenti aventi media $1/(1 - \alpha)$, di modo che la probabilità che un possibile intervallo S_j risulta uguale a k , dove $k \in \mathbb{N}$ è dato da:

$$P(S_j = k) = \alpha^{k-1}(1 - \alpha)$$

Entrambe queste proprietà possono essere testate su dati empirici.

Ora, si supponga di stimare il VaR_α^t sulla base delle informazioni disponibili fino al tempo t e si chiami tale stima \widehat{VaR}_α^t . Perciò, la variabile indicatrice della violazione empirica diventa:

$$\hat{I}_{t+1} = I_{\{L_{t+1} > \widehat{VaR}_\alpha^t\}}$$

e rappresenta un passaggio unico, cioè una comparazione *out of sample*, in cui si paragona il valore L_{t+1} effettivamente realizzato con il valore del VaR stimato al tempo t . Sotto l'ipotesi nulla che il modello considerato sia corretto, nel senso che $E(\hat{I}_{t+1}) = 1 - \alpha$ nei vari istanti $t = 1, \dots, m$, la sequenza delle variabili $(\hat{I}_{t+1})_{1 \leq t \leq m}$ rappresenterà quindi la realizzazione di un processo bernoulliano con probabilità $1 - \alpha$. Questa ipotesi, allora, può essere facilmente verificata attraverso un test binomiale³³. Il rifiuto, dall'altro lato, suggerirebbe o una sottostima da parte del sistema o una sovrastima del VaR.

³³ Il test binomiale per le violazioni del VaR e il test per una distribuzione geometrica per gli intervalli tra le violazioni possono essere approfondite in KUPIEC (2015). In entrambi i casi, è raccomandato un test del rapporto di verosimiglianza. In particolare, il test dello score sembra dare un risultato attorno al giusto livello per probabilità del VaR pari a 0,99 e 0,95 in campioni di grandezza $m = 250$ o $m = 500$ (cioè un test con il giusto errore di prima specie di rifiutare l'ipotesi nulla quando essa è vera per il comportamento di una distribuzione binomiale). Ulteriori articoli sul testing delle violazioni del VaR per distribuzioni bernoulliane indipendenti includono CHRISTOFFERSEN, HANN E INOUE (2011) e CHRISTOFFERSEN E PELLETIER (2014).

2.5.2 Backtesting sull'ES

In questo paragrafo si discute di come è anche possibile usufruire delle informazioni sull'entità delle violazioni del VaR per eseguire il *backtest* sulle stime dell'*Expected Shortfall*. Si indichi con ES_α^t l'*Expected Shortfall* della distribuzione delle perdite L_{t+1} e si definisca un residuo della violazione come:

$$K_{t+1} = \left(\frac{L_{t+1} - ES_\alpha^t}{ES_\alpha^t - \mu_{t+1}} \right) I_{\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}}$$

dove $\mu_{t+1} = E(L_{t+1})$. Nel caso in cui si registri una violazione $\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}$, il residuo della violazione K_{t+1} confronta la dimensione effettiva della violazione L_{t+1} con quella prevista in base alle informazioni possedute fino all'istante di tempo t , data da ES_α^t . Se dunque non ci fosse una violazione del VaR, il residuo della violazione sarebbe zero. La ragione per cui si ridimensiona il residuo della violazione attraverso $(ES_\alpha^t - \mu_{t+1})$ è una diretta conseguenza del lemma che afferma che, per una distribuzione delle perdite continua, l'uguaglianza

$$E(K_{t+1}) = 0$$

è sempre rispettata, così che le serie dei residui delle violazioni (K_t) seguono un processo aleatorio con valore atteso nullo. È possibile, allora, usare ciò come base per un *backtest* sulle stime dell'*Expected Shortfall* sotto determinate ipotesi. Si assume, infatti, che il processo sottostante la generazione delle perdite L_t soddisfi, per ogni t , le equazioni dalla forma $L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$ dove μ_t è il termine della media, σ_t è la volatilità e Z_t è una variabile *white noise* con media 0 e varianza 1. Sotto tali

ipotesi $ES_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}ES_\alpha(Z)$ dove $ES_\alpha(Z)$ denota l'*Expected Shortfall* della distribuzione Z_t . Allora, è possibile calcolare il residuo della violazione come

$$K_{t+1} = \left(\frac{Z_{t+1} - ES_\alpha(Z)}{ES_\alpha(Z)} \right) I_{\{Z_{t+1} > q_\alpha(Z)\}}$$

in modo che la sequenza dei residui delle violazioni formi un processo di variabili indipendentemente e identicamente distribuite (i.i.d.) con media zero. Inoltre, i residui empirici sono modellati, calcolando la seguente:

$$\hat{K}_{t+1} = \left(\frac{L_{t+1} - \widehat{ES}_\alpha^t}{\widehat{ES}_\alpha^t - \hat{\mu}_{t+1}} \right) \hat{I}_{t+1}$$

dove \widehat{ES}_α^t individua il valore stimato dell' ES_α^t nell'istante t , \hat{I}_{t+1} è l'indicatore della violazione del VaR e $\hat{\mu}_{t+1}$ è una stima della media. Nella pratica, la media μ_{t+1} non viene sempre stimata e quando ciò avviene essa risulta spesso prossima a zero. Per questa ragione al fine di semplificare i calcoli si assume che $\hat{\mu}_{t+1} = 0$. Infine, ci si aspetta che i residui delle violazioni empiriche si comportino come realizzazioni di variabili i.i.d. estratte da una distribuzione con media 0. È possibile testare le ipotesi che tali residui non nulli hanno media pari a zero e l'approccio più semplice è usare un t-test.

CAPITOLO 3

LA STRESS TEST ANALYSIS

I precedenti Capitoli 1 e 2 hanno il ruolo, in questo elaborato, di introdurre con concetti generali il processo aziendale del *Risk Management* nella sua piena operatività. Dal concetto iniziale basato su una definizione intuitiva di rischio, introducendo formali strumenti di teoria delle probabilità, si è passati alla presentazione di alcune metodologie utilizzate dalle istituzioni finanziarie per poter misurare, gestire e, all'occorrenza, ridurre il rischio. La Sezione 3.1 illustra le ragioni per cui un'istituzione finanziaria dovrebbe usare parte delle sue risorse per lo sviluppo di un processo di analisi di stress test. La possibilità di costruire un *framework* del genere in modo modulare, venendo cioè suddiviso in diverse parti e/o fasi, lo rende altamente scalabile a livello aziendale. La Sezione 3.2 ne fornisce una approfondita descrizione. Infine, la Sezione 3.3 pone l'attenzione su una tipologia specifica di stress test in cui dati storici e prospettive “*user-defined*”, grazie alla statistica Bayesiana, riescono ad interagire tra loro garantendo risultati di una notevole coerenza logica.

3.1 STRESS TEST E ANALISI DI SCENARIO

Già nel 1996, il Comitato di Basilea propone alle banche di condurre regolarmente programmi di stress test per il rischio di mercato. L'idea sottostante è di identificare eventi che potrebbero generare perdite extra-ordinarie, in modo da capire quanto

una banca possa essere vulnerabile a tale circostanza. L'uso dello stress test è incrementato con l'attuazione dell'accordo di Basilea II, che istituisce tale attività il fulcro della supervisione del Pillar 2³⁴. Come conseguenza, i programmi di stress test sono stati estesi a tutto il settore finanziario nel suo insieme, conferendo loro una sempre maggiore notorietà. Ad esempio, lo FSAP (*Financial Sector Assessment Program*) condotto dal Fondo Monetario Internazionale e dalla Banca Mondiale misura la resilienza del settore finanziario di un certo paese o regione. In Europa, l'Autorità Bancaria Europea e la BCE hanno il compito dello stress test europeo. Dalla crisi finanziaria del 2008, essi hanno condotto sei programmi di stress test. Negli Stati Uniti, la Federal Reserve esegue ogni anno un'analisi di stress test che comprende le 30 banche più significative. Questa valutazione annuale include due programmi correlati: il CCAR (*Comprehensive Capital Analysis and Review*) e il DFAST (*Dodd-Frank Act Stress Testing*). Quest'ultimo ha l'obiettivo di stimare l'impatto di condizioni di mercato economiche e finanziarie stressanti sulla capitalizzazione delle banche. Recentemente, il Comitato di Basilea sulla

³⁴ Per *Pillar 2 Requirement* (P2R, o “requisito di secondo pilastro”) si intende un requisito patrimoniale aggiuntivo specifico di ogni banca, che si applica per fronteggiare i rischi sottostimati o non compresi nell'ambito del requisito patrimoniale minimo, noto come “requisito di primo pilastro”. Il P2R è vincolante e la sua violazione può comportare conseguenze legali dirette per le banche. È determinato attraverso il processo di revisione e valutazione prudenziale (*Supervisory Review and Evaluation Process*, SREP). Il livello di capitale richiesto dalla BCE sulla base dello SREP include anche un altro elemento: gli orientamenti di capitale di secondo pilastro (*Pillar 2 Guidance*, P2G), che indicano alla banca il livello adeguato di capitale da mantenere per disporre di riserve sufficienti a superare situazioni di stress. A differenza del P2R, i P2G non sono giuridicamente vincolanti. Per ulteriori dettagli si veda *SSM Supervisory Manual*, European Central Bank – Banking Supervision, Marzo 2018.

supervisione bancaria ha pubblicato un documento consultivo sui principi dello stress test. Per molto tempo, lo stress test si è occupato principalmente di rischio di mercato e, più tardi, di rischio di credito. Ora, esso è stato esteso ad altre tipologie di rischi come, ad esempio, il rischio di liquidità. In conclusione, come si può intuire da questa breve introduzione alla storia dello stress test, è lecito aspettarsi che questo tipo di procedura di controllo del rischio venga sempre più implementata nell'industria finanziaria negli anni a venire, non solo per scopi regolamentari, ma anche come strumento operativo a disposizione delle istituzioni finanziarie per rendere il proprio business meno vulnerabile al verificarsi di eventi estremi.

3.1.1 Che cosa è perché abbiamo bisogno dello stress test

Lo stress test consiste in una o più verifiche dell'attività di un'istituzione finanziaria in condizioni di mercato critiche. Esso ha ad oggetto la valutazione dei portafogli in scenari estremi, ma plausibili, che potrebbero non essere pienamente considerati dai modelli tradizionalmente utilizzati per la stima di VaR ed ES. I crolli che i mercati finanziari hanno fatto registrare in periodi come la crisi finanziaria del 2008 o il Marzo 2020 fanno sorgere una domanda spontanea: questa maggiore rischiosità era in qualche modo prevedibile? La risposta più immediata è negativa ma è possibile convenire che una corretta attitudine alla gestione del rischio debba quanto meno preservare e proteggere la performance del portafoglio soprattutto in condizioni molto avverse. Per perseguire questo obiettivo, il *Risk Management* è

sufficiente oppure sono necessari ulteriori strumenti? In generale, è possibile affermare che un processo di *Risk Management* sviluppato correttamente ha poche responsabilità in caso di eventi estremamente negativi e con risvolti drammatici come quelli rappresentati dalle crisi citate in precedenza. Infatti, esso fornisce una serie di misure di rischio in grado, potenzialmente, di indirizzare la politica di copertura da attuare. Si tenga presente, tuttavia, che banche e società di gestione hanno un grande numero di portafogli, la cui composizione è spesso molto articolata e differenziata. Da ciò è possibile ricavare due importanti implicazioni. In primo luogo, a livello aziendale, controllare la rischiosità dei capitali gestiti nel complesso da una banca può essere molto difficile, nonostante l'utilizzo di software moderni e una struttura organizzativa efficiente. In secondo luogo, dal punto di vista dei regolatori, quello che può mettere in serio pericolo la stabilità dei mercati finanziari³⁵ sono i movimenti avversi e imprevedibili di alcuni fattori di mercato fondamentali, che di fatto impattano su tutti i portafogli e mandati di gestione delle istituzioni finanziarie. Il *Risk Management*, così come si è visto nel Capitolo 2, fornisce una serie di informazioni su specifici portafogli. Questi dati possono essere utili per i gestori di fondi o per l'investitore finale ma le istituzioni finanziarie e,

³⁵ Anche in questo caso sono dovute le necessarie eccezioni. Si ricordi il caso della Long-Term Capital Management (LTCM), fondo speculativo che nel 1998 a causa di alcuni errori commessi dal board unitamente alla crisi della Russia e all'eccessivo utilizzo della leva finanziaria aveva portato ad un suo drammatico collasso richiedendo l'intervento diretto della Federal Reserve come sostegno al fine di evitare il peggio. Ciò per ricordare che è vero che i singoli portafogli, generalmente, non mettono a repentaglio l'integrità dei mercati finanziari ma tutto dipende, poi, dalla dimensione di queste singolarità.

ancor di più, le autorità governative sono molto più attente alla solidità dei mercati finanziari rispetto alle dinamiche potenzialmente estreme che alcuni fattori di rischio potrebbero manifestare. A questo punto, è legittimo chiedersi cosa potrebbe accadere allo stato patrimoniale di una banca o ai mercati se questi fattori di rischio congiuntamente registrassero la peggiore realizzazione di sempre. Questo è soltanto uno dei possibili scenari che l'analisi di stress test può utilizzare per stimare il suo impatto su uno specifico portafoglio.

3.1.2 Analisi di scenario

La crisi del 2007-2008 ha indotto le autorità di vigilanza a dare più enfasi allo stress test e ad essere sempre più coinvolte nella definizione delle modalità di verifica a cui le banche devono sottoporsi per dimostrare di avere i mezzi necessari al fine di superare gli scenari avversi.

In questo ambito, il metodo più diffuso per la stima di VaR ed ES è quello della simulazione storica, già trattata nella Sezione 2.3.3. Questo metodo si basa sull'ipotesi che i rendimenti registrati negli anni passati siano una buona stima di quello che potrà succedere in un certo orizzonte futuro, la cui estensione deve essere determinata in base alle varie tipologie di analisi del rischio. Tuttavia, è evidente che, se un certo evento non si è verificato nel periodo coperto dai dati storici, esso non potrà influenzare le stime ottenute. In realtà, sono possibili alcune estensioni di questa forma base di determinazione della distribuzione delle perdite come, ad

esempio, l'*Extreme Value Theory*³⁶ o il calcolo del cosiddetto *stressed VaR* e *stressed ES*³⁷. Ad ogni modo, la natura delle stime ottenute con il metodo delle simulazioni storiche è inevitabilmente “*backward looking*”, ovvero, dipendente da quanto accaduto in passato. Gli eventi che potrebbero verificarsi, ma che sono del tutto diversi da quelli che si sono verificati nel periodo coperto dalle serie storiche a disposizione, non vengono presi in considerazione. Lo stress test rappresenta il tentativo di superare questo punto debole di VaR ed ES quando vengono calcolati secondo gli approcci tradizionali di *Risk Management*.

È chiaro, a questo punto, come l'aspetto chiave dello stress test sia la formulazione degli scenari e l'analisi che le istituzioni finanziarie effettuano per stabilirli. A tal fine sono percorribili diverse strade.

Uno dei metodi possibili è quello di utilizzare scenari in cui si osserva una variazione estrema in una sola variabile di mercato, mentre le altre restano invariate. Alcuni esempi possono essere lo spostamento della curva dei tassi di rendimento, la variazione di un indice azionario o la variazione del tasso di cambio rispetto ad una delle valute più importanti. Tuttavia, solitamente, le variazioni estreme non si verificano isolatamente, ma interessano più variabili di mercato. Pertanto, gli stress test vengono spesso effettuati facendo variare simultaneamente una molteplicità di

³⁶ La *Extreme Value Theory* (EVT) consente di spianare ed ampliare le code della distribuzione delle perdite ottenuta sulla base delle serie storiche.

³⁷ *Stressed VaR* e *stressed ES* consentono di tener conto dei periodi particolarmente critici osservati in passato.

fattori. Una prassi diffusa è quella di generare scenari sulla base delle variazioni estreme effettivamente riscontrate in passato o di amplificare ciò che è già avvenuto. Alcuni scenari si basano su shock che si sono manifestati in un solo giorno, altri, in particolare quelli rilevanti per il rischio di liquidità e il rischio di credito, si basano su intervalli temporali più lunghi come settimane o anche mesi. Ci sono scenari che tengono conto delle variazioni estreme dei prezzi delle merci o quelli che considerano l'effetto congiunto di fenomeni come "fuga verso la liquidità", scarsità di liquidità e aumento degli spread di credito.

Un ulteriore criterio di differenziazione ha origine dai soggetti che sviluppano le previsioni. Infatti, sotto diversi aspetti, gli scenari più utili per le prove di stress sono quelli definiti dal *senior management*. I piani alti della dirigenza possono sviluppare scenari plausibili, al verificarsi dei quali la banca subirebbe forti perdite, giudicando le evoluzioni dei mercati, della politica internazionale, della congiuntura economica. Un metodo impiegato, in questo senso, è quello che prevede l'effettuazione di riunioni periodiche in cui il top management è chiamato a rispondere a una specifica domanda: "cosa può andare storto?". Ricerche³⁸ volte alla comprensione della composizione ottimale di questo organo hanno prodotto le seguenti conclusioni. In primo luogo, lo *stress testing committee* dovrebbe essere composto da 3-5 membri. In secondo luogo, il bagaglio culturale dei membri

³⁸ Si veda R. CLEMENS, R. WINKLER, *Combining Probability Distributions from Experts in Risk Analysis*, Risk Analysis, Aprile 1999.

dovrebbe essere diverso. Infine, lo scambio di vedute dovrebbe essere franco e aperto. Uno dei vantaggi del coinvolgimento del *senior management* nella generazione degli scenari è proprio quello di indurli a far propria l'idea che lo stress test sia importante. Su di loro, infatti, grava la responsabilità di prendere decisioni strategiche basate sulle indicazioni provenienti dagli scenari ipotizzati.

Gli scenari, comunque essi vengano generati, dovrebbero essere attentamente esaminati per accertarsi di avere considerato tutte le conseguenze avverse cui possono dar origine. Gli scenari dovrebbero includere non solo l'effetto immediato di uno shock delle variabili di mercato sul portafoglio ma anche gli eventuali effetti di natura sistemica dovuti al fatto che tutta l'industria finanziaria viene colpita allo stesso modo, creando potenzialmente conseguenze a catena. In conclusione, quindi, gli scenari dovrebbero essere il più possibile flessibili, per tenere conto degli effetti non solo di breve ma anche di lungo termine, e dinamici, perché l'evoluzione di una crisi presenta caratteristiche differenti a seconda dello stadio in cui si trova³⁹.

3.2 LA SCALABILITÀ DELLO STRESS TEST

Identificato un portafoglio sul quale si vuole testare uno scenario avverso, lo stress test può essere considerato come un processo scomponibile in quattro fasi, ognuna delle quali è implementabile separatamente dalle altre.

³⁹ Ad esempio, il superamento di una crisi o l'entità dei suoi effetti è influenzato dall'intervento, in uno specifico momento, delle Autorità di governo

Il primo passo è l'identificazione dei fattori di rischio in grado di influenzare la performance di portafoglio. Maggiore è la sensibilità degli *asset* ad un determinato fattore di rischio, più la loro inclusione nella procedura di stress test diventa importante. Alcuni esempi di possibili variabili sono i tassi di interesse, l'inflazione, una misura dell'attività reale, i tassi di cambio o la probabilità di fallimento delle imprese. Nella pratica, sono necessari pochi fattori per caratterizzare le dinamiche della performance della maggior parte dei portafogli. Nel caso di stress test regolamentari, le autorità governative giungono all'identificazione dei fattori con l'obiettivo di definire specifici scenari da testare. Si passa, poi, alla definizione del legame tra il portafoglio ed i fattori selezionati. Una delle metodologie più comuni è quella di effettuare una serie di regressioni tra i fattori individuati e ciascuna attività di portafoglio. Quindi, ponderando le sensibilità di ogni *asset* alle variabili utilizzate per i pesi che tali *asset* hanno nell'allocazione, è possibile stimare la sensibilità esistente tra i fattori e l'intero portafoglio. Il terzo passo consiste nella simulazione della distribuzione congiunta dei fattori di rischio su un orizzonte temporale predefinito. In questo caso, molto dipende dall'approccio utilizzato per la modellizzazione dello stress test e, per questo, si rimanda al paragrafo 3.3. Infine, definito il modello di previsione, è possibile stimare il rendimento atteso di portafoglio nel caso in cui si registri una realizzazione estremamente negativa dei fattori. In questo modo, lo scenario ipotizzato è attuato e ciò apre le porte ad utili valutazioni in termini di reattività del portafoglio.

Il fatto che questo processo possa essere suddiviso in attività indipendenti tra loro ha semplificato molto l'adozione⁴⁰ di questo strumento da parte delle istituzioni finanziarie. La definizione delle fasi di sviluppo di questo rigoroso e omnicomprensivo programma di stress, oltre che preferibile, è reso anche necessario per ragioni di grandi numeri, di masse e di volumi di dati crescenti in contrapposizione alla limitatezza del tempo disponibile. C'è bisogno, quindi, di centralizzare ed organizzare efficientemente il lavoro senza perdere il controllo su ciò che viene generato in termini di risultati, nell'ottica di un'efficace comunicazione a beneficio di operatori interni o esterni. L'analisi di stress test, come si è visto, possiede queste peculiarità, cosa che rende questo processo altamente scalabile a livello aziendale. Chiarite le modalità con cui questa attività viene sviluppata, nel prossimo paragrafo si propongono alcuni approcci possibili per la definizione del modello sottostante lo stress test.

3.3 GLI APPROCCI ALLA MODELLIZZAZIONE DELLO STRESS TEST

Differenti approcci possono essere applicati alla costruzione di scenari necessari all'analisi di stress test, tenendo presente che l'obiettivo principale della simulazione è valutare la frequenza e gli impatti con i quali circostanze avverse

⁴⁰ Imposta dal Comitato di Basilea.

influenzerebbero le istituzioni finanziarie. Perciò, è opportuno introdurre alcuni dei metodi più rilevanti che possono essere utilizzati.

3.3.1 La simulazione storica deterministica

In un modello di simulazione storica si ipotizza che le potenziali variazioni dei fattori di mercato siano ben rappresentate dalla loro distribuzione empirica storica, cioè dalle variazioni registrate in un periodo passato. In altri termini, si ipotizza che il loro comportamento passato (in particolare, la frequenza con cui si sono verificati eventi estremi) rappresenti un'indicazione affidabile per prevedere i loro possibili movimenti futuri. Una volta calcolate le variazioni di valore del portafoglio corrispondenti a ciascuna delle variazioni storiche dei fattori, queste vengono ordinate dalla massima perdita al massimo profitto. In questo modo si ottiene una distribuzione empirica di probabilità delle variazioni di valore del portafoglio.

La simulazione storica deterministica in caso di stress test consiste in una "meccanica" applicazione dei rendimenti dei fattori di rischio, riferiti ad un periodo di crisi, al portafoglio. Sebbene le sue fondamenta statistiche non siano molto robuste, questo approccio è ancora oggi largamente utilizzato dalle istituzioni finanziarie. L'ipotesi sottostante è che i rendimenti registrati nei periodi turbolenti di mercato possano ripetersi nello stesso identico modo. Il problema evidente è che alcuni eventi nella storia dei mercati possono riproporsi in modo simile ma mai precisamente con le stesse caratteristiche. Pertanto, un approccio più efficace

consiste nello stimare il processo di generazione dei dati (*Data Generating Process* o DGP) durante periodi di crisi e in seguito applicare tali stime al periodo corrente, tentando dunque di ricreare in senso probabilistico le condizioni di mercato che in passato hanno visto il verificarsi di quelle stesse crisi. Questo è molto differente dall'applicare nel presente la specifica riduzione registrata dai fattori di rischio durante le fasi di elevata turbolenza, dato che essa sul piano statistico rappresenta pur sempre una delle possibili realizzazioni del processo aleatoria che l'ha generata, e non è affatto detto che, per quanto grande sia stato il calo, tale processo non sia in grado di dare luce ad esiti perfino peggiori. Di conseguenza, affidarsi precisamente e unicamente alla storia sperimentata dai mercati in condizioni estreme potrebbe di fatto escludere scenari ancora più negativi e dunque a limitare il raggio d'azione dell'analisi di stress test.

3.3.2 Le simulazioni storiche filtrate (FHS)

La *Filtered Historical Simulation*, FHS, è una tecnica di generazione di scenari per i rendimenti dei fattori di rischio di un portafoglio. A differenza di alcune altre tecniche in cui gli scenari sono generati ad hoc, la FHS utilizza una combinazione di modelli econometrici non lineari e rendimenti passati per costruire la distribuzione di probabilità dei possibili rendimenti futuri dei fattori di rischio.

Il limitato insieme di risultati possibili e la mancata risposta ai cambiamenti nella volatilità dei mercati sono due limiti della simulazione storica che la FHS riesce a

superare. Il modello econometrico sottostante riesce a risolvere problemi come la correlazione seriale e il verificarsi di periodi di elevata volatilità concentrati in sedute successive (cd. *volatility cluster*). La prima si presenta quando, nelle serie storiche, il valore di un rendimento è influenzato dal valore dei precedenti. La seconda, invece, si riferisce al fenomeno secondo il quale i fattori di mercato presentano spesso fasi di maggiore volatilità che possono anche persistere per periodi prolungati.

Una prima proposta in questa direzione viene da HULL E WHITE (1998), i quali suggeriscono di aggiustare i dati storici sulla base delle condizioni attuali (o previste) della volatilità dei fattori di rischio. Tale approccio, detto *volatility weighted*, consente di ottenere stime del VaR diverse da quelle implicite nel campione storico di riferimento e, aspetto importante, maggiormente sensibili alle condizioni correnti del mercato. In pratica, in presenza di un incremento della volatilità, i rendimenti storici vengono corretti al rialzo conducendo così a stime del VaR superiori a quelle implicite nella distribuzione storica. Solo BARONE-ADESI E GIANNOPOULOS (1996)⁴¹, però, sono riusciti a proporre una strategia alternativa concretamente⁴² utilizzabile e denominata, appunto, *simulazione storica filtrata*. Questo approccio si basa su due idee di fondo:

⁴¹ Si vedano anche BARONE-ADESI, BORGOIN E GIANNOPOULOS (1998) e BARONE-ADESI, GIANNOPOULOS E VOSPER (1998).

⁴² Infatti, le simulazioni storiche filtrate sono ancora oggi utilizzate nella pratica per il controllo del rischio presso la London Clearing House, la cassa di compensazione del mercato future di Londra (LIFFE).

- l'utilizzo di modelli GARCH⁴³ per filtrare i dati e rendere i residui indipendenti e identicamente distribuiti (i.i.d.);
- l'utilizzo di tali residui filtrati per generare scenari: in questo modo, si cerca di tenere in considerazione sia la non normalità dei rendimenti dei fattori di rischio, sia la loro eteroschedasticità⁴⁴.

Il primo passaggio parte dalla considerazione che, se la volatilità dei rendimenti dei fattori di rischio non è costante ma stocastica, è necessario cercare di modellarla in qualche modo. A tal fine, si assume che la volatilità segua un processo GARCH e se ne stima i parametri utilizzando i dati storici. È possibile ipotizzare, per esempio, che i rendimenti seguano un semplice modello GARCH(1,1), ovvero che la loro volatilità dipenda nel tempo dall'errore di previsione e dalla varianza registrati al periodo precedente:

$$r_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

La prima equazione afferma che il valore atteso di r_t è 0 e che quindi esso coincide con il termine ε_t , che misura lo scostamento rispetto alla media. Se anche i

⁴³ I modelli GARCH, *Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*, sono modelli che consentono di prevedere la volatilità futura utilizzando una regressione basata sui valori passati della stessa volatilità, generando una stima che cambia nel tempo (*time-varying volatility*)

⁴⁴ Eteroschedasticità significa varianza che muta nel tempo e si contrappone all'ipotesi di varianza costante. Una serie storica che presenta eteroschedasticità è infatti caratterizzata da periodi di elevata volatilità intervallati da periodi di relativa tranquillità (il già citato *volatility clustering*). Tale fenomeno risulta particolarmente evidente nelle serie storiche di natura finanziaria, soprattutto se rilevate a intervalli di tempo ristretti, ossia con elevata frequenza (giornaliera o settimanale).

rendimenti seguissero un modello più complesso di quello indicato (ad esempio, se fossero serialmente correlati), si potrebbe comunque eliminare, attraverso una regressione, la parte deterministica e concentrarsi sui residui stocastici.

Dopo aver stimato i coefficienti delle equazioni viste sopra, diventa possibile standardizzare (*filtrare*) i rendimenti storici dividendoli per la stima della volatilità condizionata relativa al corrispondente periodo.

$$e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$$

Se il modello è corretto, questi rendimenti standardizzati sono *IID* ed è dunque possibile utilizzarli per la simulazione storica.

Il secondo passaggio introduce la tecnica del *bootstrapping*, metodo statistico per generare dati casuali partendo da un campione storico. Si utilizza, infatti, il *bootstrapping* per estrarre casualmente (con re-inserimento) un elevato numero N di valori. Il campione di partenza, tuttavia, non sarà quello dei rendimenti storici, ma dei rendimenti filtrati, da cui *bootstrapping filtrato*⁴⁵.

Ognuno degli e_t (con $i = 1, \dots, N$) generati attraverso estrazioni casuali viene quindi moltiplicato per la stima della volatilità condizionata relativa al periodo $t + 1, t + 1, \dots, t + K$, in modo da costruire la distribuzione dei rendimenti simulati all'orizzonte prescelto per il calcolo delle misure di rischio. In questo modo, viene stimata

⁴⁵ Applicando il *bootstrapping* nel modo descritto si ipotizza implicitamente che i residui abbiano un'identica probabilità di essere estratti. Una maggiore sensibilità alle attuali condizioni di mercato può essere ottenuta attribuendo un peso maggiore alle osservazioni recenti e facendo decrescere quest'ultimo in modo esponenziale a mano a mano che le osservazioni "invecchiano".

un'intera distribuzione per i rendimenti del fattore di rischio, coerente con la storia passata ma anche con la condizioni di volatilità correnti.

Così, se il primo residuo estratto è e_1 , il primo shock che viene simulato per il tempo $t + 1$ è ottenuto calcolando:

$$r_1 = \varepsilon_1 = e_1 \hat{\sigma}_{t+1}$$

dove $\hat{\sigma}_{t+1}$ rappresenta la previsione della volatilità condizionata ottenuta sulla base del modello GARCH.

Analogamente, vengono generati i valori di r_2, r_3, \dots, r_N . A partire da ognuno di essi, il portafoglio viene rivalutato, così da ottenere una distribuzione di N possibili valori futuri. Tagliando tale distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato si ottiene il VaR.

La simulazione storica “non-condizionata” o “non-filtrata” descritta precedentemente è un caso particolare di simulazione storica filtrata, che si verifica quando i rendimenti sono i.i.d. Uno dei principali vantaggi delle FHS rispetto alla simulazione storica tradizionale è che il processo di filtraggio aumenta la gamma di risultati oltre quelli storici registrati attraverso un cambiamento di scala. In altre parole, la FHS fornisce un approccio sistematico per generare eventi estremi non presenti nel passato, aumentando le code della distribuzione. La simulazione storica filtrata richiede, quindi, meno osservazioni rispetto alla simulazione storica per simulare le code della distribuzione dei rendimenti.

3.3.3 L'approccio macroeconomico

L'approccio macroeconomico consiste nello sviluppare un modello macroeconomico e considerare uno shock esogeno al fine di generare scenari avversi stressanti. I vantaggi di questa metodologia sono svariati. In primo luogo, il modello macroeconomico prende in considerazione il contesto economico attuale. Gli scenari di stress derivati da quest'ultimo, quindi, sono più plausibili rispetto a quelli generati da un approccio storico. Infatti, l'origine di una crisi finanziaria è ogni volta differente. Ciò è tanto vero per il mercato azionario quanto per le altre classi di attivo. La modellazione macroeconomica può poi aiutare a sviluppare e precisare le relazioni tra i fattori di rischio, nonché modellare l'interconnessione tra le categorie di *asset* per le crisi future. Questo è il motivo principale per cui tale approccio, pur non essendo necessariamente migliore di quello storico nel definire uno stress test a un singolo fattore, è probabilmente più adatto per la costruzione di analisi di stress multifattoriali. Un secondo vantaggio risiede nella capacità di descrivere la sequenzialità della crisi e le dinamiche tra i fattori di rischio. Bisogna tuttavia essere consapevoli anche dei limiti di questo approccio. Lo stress test porta con sé sempre una parte di incertezza. Nel caso della simulazione storica questo risulta ovvio, in quanto non c'è possibilità che la prossima crisi si presenti in modo identico alla precedente. Nel caso del metodo macroeconomico, generalmente ci si aspetta di predire i futuri eventi critici ma riuscire a farlo senza commettere errori non è possibile. Un modello di stress test macroeconomico non è soltanto un

modello macro-econometrico. Modellare l'attività reale (PIL, tasso di disoccupazione, etc.), i tassi di interesse (a 3 mesi o a 10 anni) e l'inflazione è il primo passo del processo globale. Si deve anche indicare l'impatto del regime economico sui parametri di rischio di credito (tassi di default, spread, etc.) e sulle variabili fondamentali (utili, dividendi, etc.). Infine, è necessario definire gli shock sui prezzi delle attività finanziarie (azioni, obbligazioni, materie prime, etc.). Ad esempio, il Dodd-Frank Act Stress Test (DFAST)⁴⁶ definisce 16 variabili economiche nazionali (US) e 12 internazionali:

- Variabili domestiche: crescita del PIL reale, crescita del PIL nominale, crescita del reddito disponibile reale, crescita del reddito disponibile nominale, tasso di disoccupazione, tasso di inflazione, rendimento del Treasury a 3 mesi, rendimento del Treasury a 5 anni, rendimento del Treasury a 10 anni, rendimento obbligazioni aziendali BBB, tasso ipotecario, tasso di interesse primario, livello del Dow Jones Total Stock Market Index, livello dell'indice sul prezzo delle case, livello dell'indice sul prezzo degli immobili commerciali e livello dell'indice di volatilità del mercato.

⁴⁶ Lo stress test del Dodd-Frank Act è un esercizio lungimirante imposto dalla Federal Reserve alle banche americane al fine di valutare l'impatto sui livelli di capitale che deriverebbe da shock finanziari immediati e da nove trimestri di condizioni economiche avverse.

- Variabili internazionali: crescita del PIL reale dell'area Euro, inflazione dell'area Euro, tasso di cambio dollaro-euro, crescita del PIL reale asiatico in via di sviluppo, inflazione dell'Asia in via di sviluppo, tasso di cambio yuan-dollaro, crescita del PIL reale giapponese, inflazione giapponese, tasso di cambio yen-dollaro, crescita del PIL reale inglese, inflazione inglese e tasso di cambio dollaro-sterlina.

Queste variabili comprendono attività, tassi di interesse, inflazione ma anche i prezzi di prodotti finanziari. Ogni scenario, dunque, è individuato tramite le variabili che meglio identificano ed intercettano le caratteristiche della categoria di attività su cui si intende elaborare l'analisi.

3.3.4 L'approccio probabilistico

Fino ad ora, si è presentato il risultato di uno scenario di stress come una circostanza di perdita estrema. Tuttavia, il termine "estremo" deve essere meglio precisato. È ovvio che, ad esempio, una diminuzione del PIL pari al 10% rappresenta una situazione più estrema di una flessione del 5% del PIL. La natura estrema dello scenario di stress può, quindi, essere misurata dalla sua severità. Ad ogni modo, ci si potrebbe chiedere se, invece, un crollo del PIL del 50% sia concepibile. C'è poi da considerare che esiste un *trade-off* tra la severità di uno scenario e la sua probabilità di accadimento. Ad una prima approssimazione, uno scenario di stress può essere visto come un quantile estremo o un certo *VaR*. Si considerino Y , X_1 e

X_2 come tre variabili casuali che si intende stressare. Queste variabili potrebbero essere fattori macroeconomici, fattori di rischio di mercato o parametri dei modelli di rischio. Indichiamo, dunque, con $S(Y)$, $S(X_1)$ e $S(X_2)$ i corrispondenti valori stressati. Valutare la probabilità di uno scenario di stress consiste nel calcolare la sua probabilità di accadimento. Il calcolo dipende dalla relazione tra la perdita di portafoglio L e la variabile casuale da stressare. Ad esempio, se la relazione tra L e X_1 è decrescente, la probabilità dello stress $S(X_1)$ è equivalente a:

$$\alpha_1 = \Pr\{X_1 \leq S(X_1)\} = F_1(S(X_1))$$

Se, invece, al contrario la relazione tra L e X_2 è crescente, si ha:

$$\alpha_2 = \Pr\{X_2 \geq S(X_2)\} = 1 - F_2(S(X_2))$$

α_1 e α_2 misurano la probabilità degli scenari di stress uni-variati $S(X_1)$ e $S(X_2)$. Allo stesso modo, si potrebbe calcolare le probabilità congiunta dello scenario di stress $(S(X_1), S(X_2))$:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \Pr\{X_1 \leq S(X_1), X_2 \geq S(X_2)\} \\ &= \Pr\{X_1 \leq S(X_1)\} - \Pr\{X_1 \leq S(X_1), X_2 \leq S(X_2)\} \\ &= F_1(S(X_1)) - C_{1,2}(F_1(S(X_1)), F_2(S(X_2))) \end{aligned}$$

Mentre gli scenari di stress uni-variati dipendono dalla funzione di ripartizione F_1 e F_2 , lo scenario bi-variato dipende anche da una funzione $C_{1,2}$, chiamata *copula*, tra X_1 e X_2 . Le funzioni copula sono uno strumento statistico che, nel caso in esame,

può risolvere il problema dell'aggregazione del rischio⁴⁷ di due o più variabili casuali. Una funzione copula non è altro che la distribuzione congiunta di un vettore formato da variabili casuali uniformi. Dato che è sempre possibile rappresentare un qualsiasi vettore casuale nei termini di un vettore di variabili aleatorie uniformemente distribuite, si è in grado di separare le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie dalla loro struttura di dipendenza. Pertanto, una funzione copula rappresenta la dipendenza statistica tra variabili aleatorie e generalizza il concetto di correlazione quando il vettore casuale non è Gaussiano.

Se si assume, allora, che X_1 e X_2 sono indipendenti, si ottiene che:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1 - \alpha_1(1 - \alpha_2)$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1\alpha_2$$

Se si assume che X_1 e X_2 sono perfettamente dipendenti negativamente, si ha:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1 - \min(\alpha_1, 1 - \alpha_2)$$

$$\alpha_{1,2} = 0$$

Il risultato è logico perché X_1 e X_2 impattano su L in un modo opposto. Se invece la dipendenza fosse positiva:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_1 - \max(0, \alpha_1 - \alpha_2)$$

⁴⁷ È possibile mettere da parte il problema assumendo che le variabili casuali che modellano i rischi individuali sono indipendenti o sono solo dipendenti per mezzo di un fattore di rischio comune. La questione diventa molto più impegnativa quando si vuole modellare variabili casuali totalmente dipendenti. Ancora, una soluzione classica è assumere che il vettore dei rischi individuali segua una distribuzione normale multivariata. Tuttavia, non tutti i rischi possono essere ben descritti da un vettore casuale Gaussiano e la distribuzione normale potrebbe non riuscire a cogliere alcune peculiarità della dipendenza tra i rischi individuali.

$$\alpha_{1,2} = \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

Si deduce che la probabilità dello scenario di stress bi-variato è inferiore alla probabilità degli scenari di stress uni-variati:

$$0 \leq \alpha_{1,2} \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

Se ora si considera che lo scenario di stress $S(Y)$ è dedotto da $S(X_1)$ e $S(X_2)$, la probabilità condizionale dello scenario $S(Y)$ è data da:

$$\alpha = \Pr\{Y \leq S(Y) \mid (X_1, X_2) = (S(X_1), S(X_2))\}$$

Di qui segue che α dipende dalla distribuzione condizionale di Y dato X_1 e X_2 .

L'accento alla probabilità condizionale riportata sopra permette di introdurre l'ultimo approccio, fondato sul Teorema di Bayes, per la modellizzazione dello stress test riportato in questo elaborato: lo stress test di tipo Bayesiano. Il paragrafo che segue introduce i concetti generali caratterizzanti questo modello, successivamente approfonditi e messi in pratica.

3.3.5 Lo stress test Bayesiano

Gli approcci allo stress test differiscono a seconda della natura del problema in esame e del modo in cui gli scenari vengono generati. Come visto in precedenza, gli scenari stressanti possono essere costruiti sulla base di eventi storici o accadimenti che possono essere giudicati possibili nel futuro a causa di variazioni di fattori politici, socioeconomici o macroeconomici.

Uno dei problemi più rilevante nell'analisi di stress test è la simulazione di scenari coerenti in grado di integrare informazioni storiche e private, preservando la struttura di correlazione dei dati. In questo senso, un *framework* appropriato è rintracciabile nell'approccio Black e Litterman, che può efficacemente essere adattato all'attività di stress test. L'idea generale di questo approccio è che i rendimenti delle attività in portafoglio dipendano da un certo numero di fattori finanziari o macroeconomici "chiave" che agiscono come dei *driver* di performance dei portafogli sotto esame. Quindi, è possibile stressare questi rendimenti ipotizzando variazioni negative ("shocks") sulle variabili selezionate. La presenza di movimenti estremi nel mercato è modellata introducendo l'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti, il che permette di determinare, grazie al Teorema di Bayes, i momenti condizionali della distribuzione, che risultano dalla combinazione (*blend*) degli shock sui fattori e le informazioni di mercato a priori. Come verrà chiarito in seguito, la scelta nel presente lavoro è di concentrarsi sull'approccio appena esposto, con l'obiettivo di introdurre nell'analisi valutazioni soggettive nella definizione degli eventi estremi. Tale componente qualitativa serve ad integrare le evidenze di tipo quantitativo generate dai modelli statistici, al fine di ottenere un risultato più ricco e, dunque, meglio attrezzato per valutare la vulnerabilità agli scenari di stress di un portafoglio o di un'istituzione finanziaria nel suo complesso. Nella prossima Sezione si analizza nel dettaglio il

modello Black-Litterman, fondamento strutturale di questo approccio, prima di approfondire il suo ruolo nell'analisi di stress test.

3.4 L'APPROCCIO BAYESIANO LINEARE

Uno dei problemi principali che le istituzioni finanziarie incontrano nell'effettuare l'analisi di stress test consiste, come già detto, nella simulazione di scenari coerenti, in grado di integrare informazioni storiche e soggettive, preservando la struttura di correlazione presente nei dati e tenendo in considerazione sia gli effetti diretti dei movimenti nei fattori di rischio sia quelli indiretti sul portafoglio. Un *framework* appropriato a questo scopo è fornito dall'approccio di Black e Litterman⁴⁸ (BL, da qui in avanti) il quale, con opportune modifiche, può essere applicato allo stress test.

Nelle due Sezioni che seguono viene fornita la descrizione del modello BL classico

3.4.1 Il modello classico di Black e Litterman

Il modello BL è stato introdotto fondamentalmente per rispondere a due problemi di *asset allocation*. Il primo consiste nel bisogno di gestire l'aspetto critico, soprattutto a causa degli errori di valutazione, della stima del rendimento atteso. Il

⁴⁸ Si veda *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal, Settembre 1992.

secondo è rappresentato dalla necessità di integrare informazioni soggettive, cioè l'opinione degli esperti, con le informazioni di mercato.

Il modello BL fornisce un *framework* quantitativo per specificare le opinioni dell'investitore e un modo trasparente di combinare quelle *view* con i rendimenti di mercato, chiamati "*prior returns*", al fine di giungere ad una nuova distribuzione combinata.

Si inizia con lo specificare l'ipotesi di normalità distributiva dei rendimenti attesi r :

$$r \sim N(\mu, \Sigma)$$

L'obiettivo fondamentale del modello BL è proprio modellare questi rendimenti attesi, assunti essere distribuiti come una normale con media μ e matrice di covarianza Σ .

Si definisce inoltre μ , il vettore dei rendimenti attesi degli *asset*, come una variabile casuale distribuita come una Normale multivariata:

$$\mu \sim N(\pi, \Sigma_\pi)$$

in cui π è una stima della media di μ e Σ_π è la varianza di tale media μ rispetto alle stime effettuate. Un altro modo di vedere questa semplice relazione lineare è mostrato nella formula che segue

$$\mu = \pi + \varepsilon$$

I rendimenti a priori μ , che nel modello BL sono identificati nei rendimenti di equilibrio di mercato oggetto del seguente paragrafo, sono distribuiti normalmente

intorno alla media π con un valore ε di scostamento. ε si distribuisce come una normale con media 0 e varianza Σ_π ed è assunta essere indipendente da μ . È possibile, dunque, completare il modello di riferimento definendo Σ_r come la varianza dei rendimenti rispetto alla stima di π . Dalla formula precedente e dall'assunzione di indipendenza tra ε e μ , il calcolo di Σ_r è riassumibile in

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi$$

Da cui si deduce la seguente relazione tra le varianze: $\Sigma_r \geq \Sigma, \Sigma_\pi$. È possibile verificare che, in assenza di errore di stima, cioè $\varepsilon \equiv 0$, allora $\Sigma_r = \Sigma$. All'aumentare dell'incertezza in relazione alle stime di rendimento, ovvero all'aumentare di Σ_π , Σ_r aumenta di conseguenza.

Il modello di riferimento canonico per i rendimenti attesi del modello Black-Litterman è

$$r \sim N(\mu, \Sigma_r)$$

Un malinteso comune sul modello di riferimento canonico di Black-Litterman è che la prima formula introdotta in questa Sezione sia il modello di riferimento e che μ sia una stima puntuale. Questo approccio, invece, è considerato come il modello di riferimento alternativo. Diversi autori affrontano il problema da questo punto di vista e questo non rende la questione trascurabile; tuttavia, si tratta di un modello fondamentalmente diverso. È importante, dunque, capire quale modello di riferimento viene utilizzato per capire come i vari parametri influenzeranno i risultati.

3.4.1.1 *I rendimenti di equilibrio*

Il modello BL inizia con un portafoglio di equilibrio per la stima dei rendimenti. Esso si basa sull'ipotesi di Equilibrio Generale⁴⁹. Questo implica che, se il portafoglio aggregato è in equilibrio, anche ogni sotto-portafoglio deve essere in equilibrio.

Si introduce, allora, il concetto di funzione di utilità⁵⁰ quale funzione che associa ad ogni paniere di scelta e/o beni un indice di soddisfazione o un valore numerico.

Nel contesto precedentemente riportato è possibile utilizzare una qualsiasi funzione di utilità il che lo rende molto flessibile. Nella pratica, solitamente viene utilizzata la funzione di utilità quadratica, assumendo inoltre l'esistenza di una attività priva di rischio. Dato il contesto teorico così delineato, il modello di equilibrio di riferimento diventa il *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Il portafoglio neutrale in questo specifico caso corrisponde al portafoglio di mercato derivante dal CAPM. Una volta formulate queste ipotesi, la distribuzione a priori per il modello BL è determinata da rendimento medio estrapolato dal portafoglio di mercato del CAPM e dalla sua varianza. Per giungere a questo risultato, è sufficiente notare che il CAPM è basato sul concetto secondo il quale c'è una relazione lineare tra rischio

⁴⁹ “Teoria macroeconomica secondo la quale domanda, offerta e prezzi di diversi prodotti sono interrelati e determinati simultaneamente in un esito denominato appunto di “equilibrio generale” per effetto delle forze di mercato.” Fonte: Wikipedia.

⁵⁰ La funzione di utilità è applicata in economia per calcolare l'indice di soddisfazione delle scelte, associando un valore numerico ad ogni paniere di scelta del consumatore. I panieri con indice numerico superiore forniscono una utilità maggiore all'agente.

(misurato come deviazione standard dei rendimenti) e i ritorni. Inoltre, esso richiede che i rendimenti siano distribuiti normalmente. La forma del modello è:

$$E(r) = r_f + \beta r_m + \alpha$$

dove:

- r_f è il tasso privo di rischio.
- r_m è il premio di rendimento del portafoglio di mercato.
- β è un coefficiente di regressione calcolabile come $\rho \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$
- α è il residuo, o il premio specifico dell'attività.

Nell'ambito del modello CAPM il rischio idiosincratico associato a un'attività non è correlato a quello di altri *asset* e può essere ridotto attraverso la diversificazione. L'investitore viene ricompensato per l'assunzione di un rischio sistemico associato al portafoglio di mercato e misurato dal β , ma non viene ricompensato per l'assunzione del rischio idiosincratico. Nel mondo del CAPM, tutti gli investitori dovrebbero detenere lo stesso portafoglio rischioso, il portafoglio di mercato. Proprio perché tutti gli investitori detengono attività rischiose solo nel portafoglio di mercato, in condizioni di equilibrio la capitalizzazione di mercato delle varie attività determina i loro pesi nel portafoglio di mercato. L'investitore può anche investire in un titolo privo di rischio. Questo *asset* ha essenzialmente un rendimento positivo fisso per il periodo di tempo di interesse.

Si noti che il portafoglio di mercato dato dal CAPM contiene tutte le attività investibili, il che rende molto difficile definirlo nella pratica. La condizione di equilibrio del mercato permette di ottimizzare in maniera inversa (cd. *reverse engineering*) i rendimenti a partire dalla capitalizzazione di mercato e dalla matrice di covarianza (di solito, stimata su base storica). L'ottimizzazione classica volta a identificare il portafoglio ottimale degli investitori all'interno del CAPM, invece, è problematica in quanto non si dispone delle informazioni necessarie a ricostruire l'intero portafoglio di mercato.

Si introduce, ora, la "Capital Market Line". Essa è la linea che unisce il rendimento privo di rischio e il portafoglio di mercato del CAPM. Il "Teorema di Separazione dei due fondi", alla base del CAPM, afferma che tutti gli investitori dovrebbero detenere portafogli sulla Capital Market Line. Ogni portafoglio su tale linea domina tutti gli altri portafogli della Frontiera Efficiente e il portafoglio di mercato del CAPM è l'unico punto in comune tra la Frontiera Efficiente e la Capital Market Line. A seconda della propria attitudine al rischio, un investitore può scegliere di detenere differenti frazioni della propria ricchezza nel titolo non rischioso e nel portafoglio di mercato. La Figura 3.1 che segue illustra la relazione tra Frontiera Efficiente e la Capital Market Line.

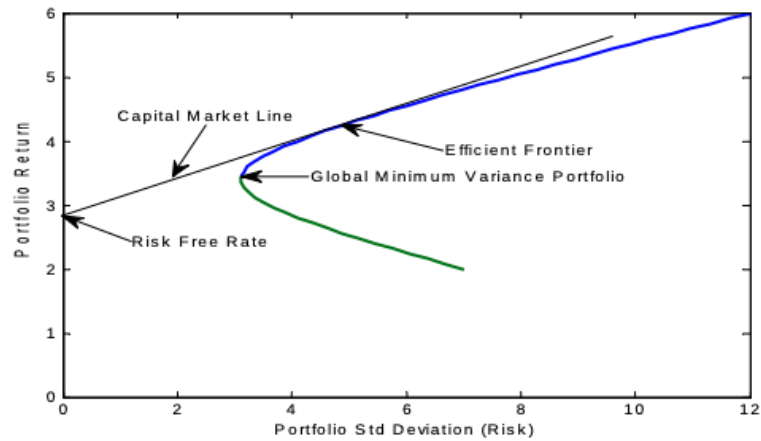


Figura 3.1: Frontiera Efficiente e Capital Market Line

Fonte: "The Black-Litterman Model in Detail", J. WALTERS, 20 giugno 2007

Se a questo punto si assume che la matrice di covarianza dei rendimenti Σ sia nota, si applica la strategia delle *reverse engineering optimization* in modo da giungere all'espressione dei pesi di equilibrio delle varie attività impliciti nel modello CAPM. Per fare questo, si comincia facendo uso della funzione di utilità quadratica U :

$$U = w' \Pi - \left(\frac{\delta}{2} \right) w' \Sigma w$$

dove

- U rappresenta l'utilità degli investitori, funzione obiettivo dell'ottimizzazione media-varianza.
- w è il vettore dei pesi (percentuali) del portafoglio di mercato individuato grazie alle condizioni di equilibrio.

- Π è il vettore dei rendimenti di equilibrio per ogni attività.
- δ è un parametro di avversione al rischio.
- Σ è la matrice di covarianza dei rendimenti per gli *asset*.

U è una funzione convessa, perciò presenta un unico massimo assoluto. Se si massimizza l'utilità senza alcun vincolo, esiste una soluzione in forma chiusa per w . Essa è ottenibile considerando la derivata prima della funzione sopra riportata calcolata rispetto ai pesi w e ponendola uguale a zero.

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0$$

Il che, risolvendo per Π , dà come risultato:

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

A fini di utilizzo pratico di questa formula, è necessario disporre di una stima di per δ , coefficiente di avversione al rischio dell'investitore rappresentativo del mercato. Un modo è quello di moltiplicare entrambi i lati dell'equazione per w' sostituendo i termini vettoriali con degli scalari:

$$(r - r_f) = \delta \sigma^2$$

da cui si deduce che, in equilibrio, il premio di rendimento del portafoglio è uguale all'avversione al rischio moltiplicato per la varianza di portafoglio

$$\delta = (r - r_f) / \sigma^2$$

dove si ricorda che:

- r è il rendimento totale del portafoglio di mercato ($r = w'\Pi + r_f$).
- r_f è il rendimento privo di rischio.
- σ^2 è la varianza del portafoglio di mercato ($\sigma^2 = w'\Sigma w$)

Dato un certo *Sharpe Ratio*⁵¹ è possibile anche riscrivere la formula per δ come

$$\delta = \frac{SR}{\sigma_m}$$

Una volta che si ha un valore per δ , è possibile sostituirlo insieme a w e Σ , entrambi noti, per ottenere l'insieme di rendimenti di equilibrio delle attività.

L'unico pezzo mancante, a questo punto, è la varianza dei rendimenti attesi, cioè Σ_π . Black e Litterman elaborano un'assunzione semplificatrice secondo la quale la struttura della matrice di covarianza della stima è proporzionale alla covarianza dei rendimenti Σ . Essi ipotizzano un parametro, τ , come una costante di proporzionalità. Data questa assunzione, quindi $\Sigma_\pi = \tau\Sigma$, allora la distribuzione a priori $P(A)$ dei rendimenti medi di equilibrio è data da:

$$P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma), \quad r_A \sim N(P(A), \Sigma)$$

Questa è proprio la distribuzione a priori per il modello BL. Essa rappresenta la stima della media, che è espressa come una distribuzione della media attuale sconosciuta sulla stima. Dalla precedente formula possiamo riscrivere che:

$$r_A \sim N(\Pi, (1 + \tau)\Sigma)$$

⁵¹ Lo *Sharpe Ratio* è calcolabile come il premio in termini di rendimento associato ad un portafoglio di titoli rischiosi diviso il maggior rischio associato, o $(r - r_f)/\sigma$.

È dimostrabile⁵² come, a causa dell'incertezza nelle stime, l'investitore distribuisca la sua ricchezza per una quota pari a $1/(1 + \tau)$ nel portafoglio neutrale e la restante parte $\tau/(1 + \tau)$ nel titolo privo di rischio.

3.4.1.2 La formulazione delle view

In questa parte si descrive il processo di specificazione delle opinioni dell'investitore sui rendimenti stimati. In senso Bayesiano, le opinioni costituiscono la distribuzione dei rendimenti condizionata alle *prior* derivate dai rendimenti di equilibrio del mercato. In primo luogo, per costruzione si richiede che ogni *view* sia unica e non correlata con le altre. Questo garantisce alla distribuzione condizionale la proprietà che la matrice di covarianza sia diagonale (tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale sono uguali a zero). Tale vincolo aiuta a migliorare la stabilità dei risultati e a semplificare il problema. La stima delle covarianze delle *view* sarebbe ancora più complicata e soggetta ad errori rispetto alla stima delle varianze. In secondo luogo, si richiede che le opinioni espresse siano coinvolte in pieno. Infatti, o si esprime una *view* e le si attribuisce peso uno o nel caso in cui non si avesse alcuna opinione, peso zero. Non si richiede una opinione su ogni *asset*. Tuttavia, è effettivamente possibile che più *view* siano in conflitto tra loro. Il processo di amalgama, quindi, unisce quanto espresso in base alla fiducia che si

⁵² Se $\Pi = \delta\Sigma w$, allora $w = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi$. I pesi stimati sono dati da $\hat{w} = ((1 + \tau)\delta\Sigma)^{-1}\Pi$ che è uguale a $\hat{w} = \frac{1}{1+\tau}(\delta\Sigma)^{-1}\Pi$ e quindi, in conclusione, $\hat{w} = \frac{1}{1+\tau}w$

riversa nelle *view* e quella che l'investitore ripone nelle *prior*, cioè nei rendimenti di equilibrio stimati:

Le K opinioni dell'investitore su N *asset* vengono espresse tramite le seguenti matrici.

- P : una matrice $K \times N$ dei pesi relativi all'attività per ogni *view*. Per una *view* relativa il peso è 0 mentre per una *view* assoluta il peso è 1.
- Q : un vettore $K \times 1$ contenente i rendimenti associati ad ogni opinione.
- Ω : una matrice $K \times K$ di covarianza delle *view*. Essa è una matrice diagonale in quanto le *view* sono, per ipotesi, indipendenti e non-correlate; l'inversa di questa matrice, indicata con Ω^{-1} , è conosciuta come la fiducia nelle opinioni espresse dall'investitore; i singoli elementi diagonali di Ω sono indicati con ω_i .

Inoltre, la matrice Ω è simmetrica e ha tutti gli elementi extra diagonali pari a 0. In linea meramente teorica, Essa potrebbe anche valere 0 in uno dei suoi elementi diagonali nel caso in cui una determinata *view* sia certa, il che comporterebbe la non invertibilità di Ω . A livello pratico, tuttavia, è possibile richiedere che $\omega > 0$ così da garantire che sia sempre invertibile.

Una volta specificate le *view*, dunque, è possibile rappresentare la distribuzione condizionale come:

$$P(B|A) \sim N(Q, \Omega)$$

Dove

- A è l'evento che descrive le *prior*, tale per cui $P(A)$ rappresenta la distribuzione a priori dei rendimenti medi di equilibrio.
- B è l'evento che descrive i rendimenti associati alle opinioni espresse, tale per cui $P(B|A)$ rappresenta la distribuzione condizionale delle *view* una volta che si è determinata la distribuzione a priori.

Generalmente, non è possibile convertire ciò in una espressione utile nell'ambito delle attività a causa della natura della matrice P . Nel caso volessimo esprimere le *view* nello spazio degli asset, la formula sarebbe:

$$P(B|A) \sim N(P^{-1}Q, [P'\Omega P]^{-1})$$

Questa rappresentazione, tuttavia, non ha alcuna utilità pratica. Le *view* su una selezione limitata di *asset* rendono la varianza della distribuzione non invertibile. P , infatti, potrebbe non essere invertibile e anche se lo fosse, probabilmente $[P'\Omega P]$ non lo è. Ciò rende questa espressione impossibile. Fortunatamente, per lavorare con il modello BL non è necessario valutare la suddetta formula, il che permette di non considerare questo problema.

3.4.1.3 La specificazione di Omega

La matrice Ω è inversamente proporzionale alla fiducia che l'investitore ripone nelle *view* stesse. Ad ogni modo, il modello base di Black-Litterman non fornisce un modo intuitivo per quantificare questa relazione. Sta all'investitore il compito di

quantificare la varianza delle sue opinioni circa il rendimento futuro degli *asset*.

Esistono differenti modi per determinare Ω , come:

- Proporzionalmente alla varianza delle *prior*.
- Usare un intervallo di confidenza.
- Usare la varianza dei residui in un modello fattoriale.

Nel primo caso, si può solo supporre che la varianza delle *view* sia proporzionale alla varianza dei rendimenti degli *asset*, proprio come per la distribuzione a priori.

Black e Litterman usano questo metodo e definiscono la varianza delle *view* nel modo seguente:

$$\omega_{ij} = p(\tau\Sigma)p' \quad \forall i = j$$

$$\omega_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

o

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')$$

Questa specificazione della varianza, o incertezza, delle *view* essenzialmente pesa in egual misura le opinioni dell'investitore e i rendimenti di equilibrio di mercato. Includendo τ nell'espressione, la stima a posteriori dei rendimenti diventa anch'essa indipendente da τ . Questo tende ad essere il metodo più utilizzato in letteratura.

Nel secondo caso, l'investitore può specificare la varianza utilizzando un intervallo di confidenza intorno al rendimento medio stimato. Ad esempio, l'attività ha un rendimento medio stimato del 3% con l'aspettativa che è probabile che il 68% rientri

nell'intervallo (2,0%,4,0%). Sapendo che il 68% della distribuzione normale è contenuto in una deviazione standard dalla media, è possibile tradurre questo in una varianza per la *view* pari a (1%)². Si noti che Ω rappresenta l'incertezza in relazione alla stima della media: non stiamo dunque specificando la varianza dei rendimenti intorno al valore medio. Questa formulazione della varianza della *view* è coerente con il modello canonico di riferimento.

Il terzo modo di determinare Ω prevede l'utilizzo di un modello fattoriale per la formulazione delle *view*. A questo punto, è possibile determinare la varianza dei rendimenti stimati tramite la varianza dei residui del modello. L'espressione generale dei rendimenti per un modello fattoriale è:

$$r = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i + \varepsilon$$

Dove

- r è il rendimento dell'asset.
- β_i è il fattore di carico per la variabile i -esima.
- f_i è il rendimento della variabile i -esima.
- ε è il residuo indipendente e normalmente distribuito.

Da cui deriva che l'espressione generale per la varianza del rendimento generato dal modello fattoriale è:

$$V(r) = BV(F)B' + V(\varepsilon)$$

dove:

- B matrice delle sensitività ai fattori (cd. *factor loadings*);
- F vettore dei rendimenti dei fattori selezionati

Data la formula del rendimento nel modello fattoriale e l'assunzione secondo la quale il disturbo ε sia indipendente e normalmente distribuita, è possibile calcolare la varianza di ε direttamente come parte della regressione. Per quanto la regressione di norma generi una matrice di covarianza completa, l'unione dei risultati appare fornire un risultato più robusto nel caso in cui vengano utilizzati solo gli elementi diagonali.

3.4.1.4 L'uso del teorema di Bayes per il modello di stima

In Appendice è riportata una breve introduzione a come il Teorema di Bayes viene usato nel derivare la formula finale del modello di Black Litterman.

Nel modello BL, la distribuzione a priori (specificata nella Sezione 3.4.1.1) è basata sui rendimenti di equilibrio impliciti. Una delle più significative assunzioni effettuate dal modello BL è che la matrice di covarianza della stima a priori sia proporzionale alla matrice di covarianza dei rendimenti storici. Il parametro τ serve come costante di proporzionalità.

La distribuzione condizionale (trattata nella Sezione 3.4.1.2) è basata sulle *view* dell'investitore. Esse sono specificate come rendimenti di attività di portafogli ed ogni opinione possiede una data incertezza che impatta sul processo di *blending* complessivo.

La distribuzione a posteriori può essere vista come la media ponderata della stima a priori e della stima condizionale. È possibile applicare la teoria di Bayes al problema di unione delle distribuzioni a priori e condizionale per creare una distribuzione a posteriori dei rendimenti delle attività. Date la distribuzione a priori $P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$ e la distribuzione condizionale $P(B|A) \sim N(Q, \Omega)$, si può dunque applicare il Teorema di Bayes, ottenendo la seguente formula per la distribuzione a posteriori:

$$P(A|B) \sim N([\tau\Sigma]^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q)[\tau\Sigma]^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}, [\tau\Sigma]^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1})$$

Una rappresentazione alternativa per i rendimenti medi e per la matrice di covarianza a posteriori è:

$$\Pi_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'[(P\tau\Sigma P') + \Omega]^{-1}[Q - P\Pi]$$

$$\Sigma_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P)^{-1}$$

La derivazione completa della formula è mostrata nell'Appendice. Occorre ricordare che la varianza a posteriori, qui definita, rappresenta la varianza della stima del valore medio a posteriori rispetto alla media effettiva. Essa è l'incertezza associata alla stima della media a posteriori e non la varianza dei rendimenti. Il calcolo della matrice di covarianza a posteriori dei rendimenti richiede l'aggiunta della varianza della stima della media alla varianza della distribuzione sulla stima:

$$\Sigma_p = \Sigma + \Sigma_{BL} = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

che in assenza di *view* si riduce a:

$$\Sigma_p = \Sigma + \tau\Sigma = (1 + \tau)\Sigma$$

Pertanto, quando si applica il modello BL in assenza di *view*, la varianza dei rendimenti stimati è più grande della varianza della distribuzione a priori⁵³.

È possibile, inoltre, verificare che il comportamento delle precedenti formule in condizioni “limite” risulta conforme a quanto suggerito dalla logica. Si ipotizzi, quindi, di essere in possesso di opinioni certe tali per cui $\Omega \rightarrow 0$. In questo caso i rendimenti a posteriori sarebbero espressi da:

$$\Pi_{BL} = \Pi + \Sigma P' [P \Sigma P']^{-1} [Q - P \Pi]$$

Come si vede la certezza delle *view* rende il rendimento stimato insensibile al valore di τ usato. Inoltre, se P è invertibile significa che si ha un'opinione su tutti gli *asset*, di modo che:

$$\Pi_{BL} = P^{-1} Q$$

che corrisponde proprio al valore delle *view* espresse.

Se, al contrario, l'investitore non è molto incerto delle proprie opinioni, quindi $\Omega \rightarrow \infty$, la formula si riduce, banalmente, a:

$$\Pi_{BL} = \Pi$$

Come si vede, il modello risponde adeguatamente ai casi limite proposti in termini di rendimenti attesi a posteriori. Trovare, invece, un modo trattabile analiticamente per esprimere la varianza a posteriori con opinioni certe è un problema non da poco.

⁵³ L'impatto di questa formula è visionabile nei risultati mostrati da BLACK E LITTERMAN (1999).

3.4.2 Il modello Black e Litterman e analisi di stress test

Per eseguire un esercizio di stress test, il dipartimento di *Risk Management* di un'istituzione finanziaria si concentra sull'individuazione dei fattori che determinano la performance dei portafogli e successivamente formula scenari nei quali essi vengono stressati. La connessione con il portafoglio, poi, è stabilita tramite le sensitività tra i fattori e ogni *asset* contenuto in esso. Il *framework* di BL applicato allo stress test risolve uno dei problemi principali in questo ambito, cioè la predisposizione di scenari coerenti capaci di integrare informazioni storiche e private, preservando la struttura di correlazione presente nei dati. Esso consente di rappresentare i movimenti congiunti dei fattori sotto gli scenari ipotizzati, valutandone gli effetti “a valle” sulle attività del portafoglio.

Iniziando dal classico modello BL illustrato nel precedente paragrafo, si considerino K fattori in grado di influenzare la performance di portafoglio e si assuma che i loro rendimenti siano normalmente distribuiti. Prima di procedere oltre, tuttavia, è importante evidenziare in che modo l'approccio Bayesiano allo stress test si differenzi, nel suo sviluppo, dal modello classico di Black-Litterman. Infatti, se il modello BL parte da una distribuzione a priori dei rendimenti di equilibrio sotto ipotesi di equilibrio neutro di mercato, nell'applicazione all'analisi di stress test tale distribuzione viene sostituita dai rendimenti previsti di un modello quantitativo previsionale. Nella simbologia fin qui utilizzata, la distribuzione a priori è data da:

$$P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma),$$

dove Π e Σ sono, rispettivamente, i rendimenti medi e la matrice di covarianza stimati dal modello quantitativo. τ rappresenta un parametro di affidabilità del modello selezionato, di cui si discuterà in dettaglio nel paragrafo che segue. A questo punto, si ipotizzi di avere una *view* soltanto su due dei K fattori selezionati. Queste opinioni, corrispondenti a ipotesi di rendimento formulate dall'investitore o dal *portfolio manager*, sono raccolte nel vettore Q e la loro incertezza è presentata nella matrice di covarianza Ω :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{c_1} - 1\right) p_1 \tau \Sigma_{t+1} p_1' & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{c_2} - 1\right) p_2 \tau \Sigma_{t+1} p_2' \end{bmatrix}$$

dove c_i è il livello di confidenza, compreso tra 0 e 1, dell' i -esima *view* e p_i rappresenta l' i -esima riga della matrice di selezione delle *view* P . È possibile, quindi, formulare la distribuzione condizionale come:

$$P(B|A) \sim N(P^{-1}Q, [P'\Omega P]^{-1})$$

Sotto tali ipotesi, dunque, è possibile applicare il Teorema di Bayes e i relativi risultati enunciati nel paragrafo precedente, ottenendo Π_{BL} e Σ_{BL} , che in questo caso, tuttavia, si riferiscono agli specifici fattori di rischio prescelti.

In poche parole, i rendimenti complessivi dei fattori finali sono un mix tra rendimenti attesi quantitativi e le informazioni private che si ritengono rilevanti ai fini della previsione. La fiducia che si ripone nell'opinione espressa funge da peso: più è alta, più il risultato finale, relativamente a quel fattore, si avvicinerà ad essa. Di nuovo, è importante sottolineare come non sia necessario formulare ipotesi su ogni fattore e questo è importante, poiché così all'investitore viene data la possibilità di concentrarsi solo sui fattori di rischio in relazione ai quali l'investitore ritiene di avere una specifica esperienza. Infine, nonostante si manifesti una certa *view* su uno specifico fattore, ciò influisce tramite le correlazioni storiche (stimate dal modello quantitativo) anche sui rendimenti attesi di tutte gli altri. Questa implicazione ha un valore pratico importantissimo: infatti, così facendo, viene preservata la coerenza logica tra visioni qualitative ed evidenze empiriche. Questo meccanismo autocorrettivo impedisce di esprimere opinioni che potrebbero condurre alla generazione di scenari tra loro incoerenti.

A questo punto, prima di affrontare nel Capitolo 4 la descrizione dell'approccio esposto in questo paragrafo attraverso un caso pratico, si cerca di chiarire uno degli aspetti più controversi del modello: il fattore τ .

3.4.3 Il fattore Tau nel modello BL

In questo paragrafo si tenta di fare chiarezza su uno dei temi più dibattuti del modello BL, ovvero il metodo di quantificazione del fattore τ .

Nel modello di riferimento Black-Litterman canonico, già affrontato nel paragrafo 3.4.1, si è visto che τ è un parametro che agisce come costante di proporzionalità tra la varianza dei rendimenti attesi Σ e la varianza della stima di questi ritorni Σ_π , ossia:

$$\Sigma_\pi = \tau \Sigma$$

Ora, se si effettuasse un bootstrap⁵⁴ su una distribuzione normale usando il campionamento con re-immissione e si calcolassero m medie campionarie utilizzando per ciascuna di esse campioni di ampiezza n , il teorema centrale del limite consente di affermare che, se m tende ad infinito, allora Σ_π tende a Σ/n . Quindi, la varianza campionaria è

$$\Sigma_\pi = \frac{\Sigma}{n}$$

Si ricordi che, per semplicità, Σ e Σ_π sono assunte essere indipendenti e incorrelate.

Quindi la varianza della distribuzione dei rendimenti Σ_r è:

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi$$

Si noti che in assenza di errore di stima ($\Sigma_\pi \equiv 0$) allora $\Sigma_r = \Sigma$. Al peggior della precisione della stima, Σ_π aumenta e di conseguenza anche Σ_r cresce. Questo comportamento è consistente con l'idea che le stime della varianza di una distribuzione di serie storiche finanziarie possono nella migliore delle ipotesi

⁵⁴ Il *bootstrap* è un metodo statistico per stimare la distribuzione di campionamento di uno stimatore, sostituendo dei dati nel campione originale, spesso con lo scopo di ottenere stime robuste degli errori standard e degli intervalli di confidenza dei parametri di una popolazione.

tendere ad un limite inferiore rappresentato dalla varianza della distribuzione della popolazione. Non si può insomma andare sotto quel valore. Ora, se si combinano le prime due formule citate nel paragrafo, è possibile definire un legame tra τ e n :

$$\Sigma_{\pi} = \tau \Sigma = \frac{\Sigma}{n}$$

$$\tau = \frac{1}{n}$$

Se si disponesse di un metodo statistico per formulare le stime a priori, allora si avrebbe anche un modo per calibrare τ . In questo caso, si potrebbe infatti utilizzare il numero di osservazioni generate per il calcolo della varianza della stima della media o, in alternativa, se è possibile si determina direttamente τ come un'incertezza di queste stime.

È importante ricordare che τ è una misura della fiducia che si ripone nelle stime ottenute dalle informazioni storiche di mercato e, come tale, può non essere esente da una certa soggettività quando si tratta di definirne il valore specifico.

Un metodo alternativo a quello sopra riportato passa attraverso l'utilizzo di intervalli di confidenza. Questo ha una connessione più diretta con il modello e la sua stima. A partire dalla distribuzione della stima dei rendimenti medi è possibile definire un intervallo di confidenza ed osservare come, al variare del valore di τ , tale intervallo si modifichi. Una controindicazione di questo metodo è che, se gli intervalli sono molto ampi, all'aumentare della confidenza (ad esempio, 95% o 99%) i risultati ottenuti diventano poco significativi.

Ad ogni modo, la determinazione del parametro τ resta, ancora oggi, un tema aperto e controverso. Il suo carattere qualitativo intrinseco lo rende per sua stessa natura difficilmente definibile in modo chiaro e oggettivo.

Nel Capitolo successivo viene proposto un caso studio in cui si è cercato di applicare il processo di stress test Bayesiano ad un portafoglio composto da ETF, mettendo in pratica quanto esposto fino ad ora. L'ostacolo presentatosi al momento della determinazione di τ ha reso necessaria la presenza di questo paragrafo esplicativo riguardo la sua ambiguità.

CAPITOLO 4

CASO APPLICATO

In questo Capitolo viene mostrato come le argomentazioni precedenti possono essere tradotte in un *framework* di analisi di stress test coerente e robusto. A questo proposito si osservi che, una volta effettuata la scelta relativa alla modellizzazione dei rendimenti attesi, l'attività di stress test può essere scomposta in diverse fasi. Nel caso specifico, ci si è chiesti se un modello quantitativo, in grado di produrre previsioni su determinate *asset class*, potesse essere sufficiente. In effetti, un crescente numero di società di gestione del risparmio⁵⁵ basa il processo di investimento su approcci puramente quantitativi, assegnando una minor importanza alla valutazione qualitativa dei mercati finanziari, basata sulla conoscenza empirica, accumulata negli anni, delle loro dinamiche. Questo potrebbe determinare conflitti tra le indicazioni prodotte dal modello quantitativo e conclusioni cui invece si potrebbe giungere sulla base dell'esperienza qualitativa. Una soluzione a questo problema è proposta da Fisher Black e Robert Litterman⁵⁶, nella quale gli autori promuovono un approccio di tipo Bayesiano. Come già dettagliatamente descritto nella Sezione 3.3, attraverso un'opportuna applicazione del teorema di Bayes, le previsioni di tipo quantitativo, generate da un modello statistico, possono essere

⁵⁵ Una delle più famose è Renaissance Technology, [Renaissance Institutional \(rentec.com\)](http://Renaissance Institutional (rentec.com)), società di hedge fund fondata dal matematico Jim Simmons.

⁵⁶F. BLACK E R. LITTERMAN, Global Portfolio Optimization, articolo pubblicato nel Financial Analysts Journal nel Settembre 1992

amalgamate con *view* qualitative espresse dai membri del Comitato Investimenti della società di gestione. Le previsioni risultanti dalla miscelazione (*blending*) tra le previsioni quantitative e le valutazioni discrezionali forniscono un rendimento detto *a posteriori* (*posterior* o *blend return*) che, sotto ipotesi ben definite, rappresenta la media di una distribuzione statistica nota. La logica stringente sottostante il modello ha alimentato la diffusione di questo approccio nell'industria del risparmio gestito.

La parte deterministica è sviluppata tramite un modello *Vector Auto Regressive* (VAR) in Python mediante l'utilizzo del pacchetto "statsmodel". Le *view* qualitative, invece, sono ottenute tramite un'analisi di scenario finalizzata a replicare la dinamica dei prezzi che i fattori selezionati hanno fatto registrare durante il crollo dei mercati finanziari di Marzo 2020 conseguente all'espansione del virus covid-19 in Europa. A questo punto, la statistica Bayesiana ha permesso l'unione dei risultati ottenuti da queste due sorgenti eterogenee, delineando un contesto caratterizzato da un valore informativo più elevato.

Nei paragrafi che seguono si riprendono tutte le fasi di sviluppo del processo. La Sezione 4.1 approfondisce la parte inerente alla formazione del *dataset* sottostante al modello. Essa chiarisce come è stato definito il portafoglio di riferimento e il modo in cui sono stati selezionati i fattori di rischio in grado di influenzarlo maggiormente. Su tali dati, quindi, è stata condotta una analisi campionaria, i cui

risultati vengono descritti nella Sezione 4.2. Successivamente, la Sezione 4.3 si occupa di stimare la sensibilità esistente tra portafoglio e fattori prima di procedere allo sviluppo del modello di previsione (Sezione 4.4). Infine, l'analisi di scenario e le *view* che ne conseguono vengono analizzate nella Sezione 4.5 dove, grazie all'approccio Bayesiano, è possibile ottenere un rendimento atteso finale dei fattori nell'orizzonte temporale considerato. Gli effetti sul portafoglio derivanti dall'adozione di questo processo vengono raccolti e commentati nella Sezione 4.6, che conclude l'esercizio di stress test.

4.1 IL DATASET

La raccolta dei dati necessari allo sviluppo del modello è il primo passo da attuare nell'analisi di stress test. La selezione del portafoglio di riferimento e, quindi, dei fattori di rischio in grado di influenzarlo viene descritta nei paragrafi che seguono.

4.1.1 La costruzione del portafoglio di riferimento

Il portafoglio considerato è formato da dieci *asset* riferiti al mercato globale. Ogni attività corrisponde a fondi di investimento passivi (Exchange Traded Fund, ETF) ognuno dei quali replica l'andamento di indici azionari, obbligazionari o di materie prime. Nello specifico, gli ETF⁵⁷ che formano il portafoglio di riferimento sono:

⁵⁷ Per maggiori dettagli sugli *asset* selezionati si consulti le tabelle informative presenti in Appendice 4A.

1. ISHARES Core MSCI World: ETF rappresentativo del mercato azionario globale, esso è costituito da 1559 titoli. Il Fondo mira a replicare l'andamento MSCI World Index; l'Indice misura i risultati di società a grande e media capitalizzazione in paesi con mercati sviluppati di tutto il mondo.
2. XTRACKER Global Government Bond: ETF con l'obiettivo di replicare la performance dell'indice FTSE World Government Bond Developed Markets. I componenti di tale indice sono titoli di debito sovrano a tasso fisso, in valuta locale e *investment grade* emessi da governi di paesi sviluppati. Per essere incluso nell'indice, il debito deve essere: i) emesso da governi in paesi sviluppati; ii) essere considerato *investment grade* dalle principali agenzie di rating, ovvero il cui merito di credito sia almeno pari o superiore alla BBB (seguendo il *ranking* di merito creditizio di Standard&Poors) o alla Baa2 (seguendo quello di Moody's). Possono essere presi in considerazione anche alcuni altri criteri di selezione come la dimensione minima dell'emissione, il tempo fino alla scadenza e le dimensioni del mercato.
3. ISHARES Global Corporate: ETF che mira a replicare la performance dell'indice Bloomberg Barclays Global Aggregate Corporate Bond. È gestito in modo passivo e ha l'obiettivo di investire nei titoli a reddito fisso che compongono l'Indice di riferimento e soddisfano i requisiti di

rating creditizio. Se il rating creditizio dei titoli venisse declassato, l'ETF potrà continuare a detenere tali titoli fino a quando non faranno più parte dell'Indice e sarà possibile vendere la posizione. L'Indice misura i risultati del mercato delle obbligazioni societarie globali. Esso comprende obbligazioni emesse da società in mercati emergenti e sviluppati di tutto il mondo, con una vita residua minima di almeno un anno e che soddisfano i limiti minimi dimensionali stabiliti dal fornitore dell'Indice.

4. ISHARES Global High Yield Corporate: ETF avente come scopo la replica della performance dell'indice Markit iBoxx Global Developed Markets Liquid High Yield Capped. Esso è gestito in modo passivo e mira a investire nei titoli a reddito che compongono l'Indice e soddisfano i requisiti di rating creditizio. L'Indice misura i risultati del mercato del debito societario ad alto rendimento dei paesi sviluppati di tutto il mondo. Tutte le obbligazioni devono avere una durata minima di 1 anno per essere incluse e rimanere nell'Indice e avere un rating assegnato da almeno una delle agenzie di rating seguenti: Fitch Ratings, Moody's Investors Service e Standard & Poor's Rating Services. L'Indice comprende attualmente anche obbligazioni societarie con rating inferiore a *investment grade*.

5. XTRACKERS Global Inflation-linked: ETF che mira a replicare il rendimento del Bloomberg World Government Inflation-Linked Bond Index. L'indice è composto da titoli di debito (obbligazioni) negoziabili legati all'inflazione emessi da governi di paesi sviluppati. Affinché possano essere incluse nell'indice, le obbligazioni devono: i) essere emesse da governi di paesi sviluppati nelle seguenti aree geografiche: America, Europa e Asia Pacifico e ii) essere considerate *investment grade* dalle principali agenzie di rating. È possibile prendere in considerazione anche altri criteri di selezione, ad esempio capitalizzazione dell'emissione, scadenza residua e dimensione del mercato. L'indice è gestito da Bloomberg Index Services Limited ed è rivisto e ri-bilanciato con cadenza mensile.
6. AMUNDI Global Emerging Market Bond Markit Iboxx:ETF avente l'obiettivo di replicare il rendimento dell'Indice Markit iBoxx USD Liquid Emerging Markets Sovereigns e minimizzare il *tracking error*, che non deve essere superiore all'1%. L'Indice è composto da obbligazioni denominate in dollari statunitensi emesse da governi o banche centrali dei paesi emergenti.
7. SPDR Global Convertible: il Fondo mira a riprodurre il più fedelmente possibile il rendimento dell'Indice Refinitiv Qualified Global Convertible Index. Nell'indice sono compresi titoli del mercato

mondiale delle obbligazioni convertibili (incluse obbligazioni a conversione obbligatoria e obbligazioni perpetue convertibili). I titoli a reddito fisso idonei possono essere *investment grade*, *non-investment grade* o privi di rating; essi possono essere emessi a tassi fissi o variabili e devono soddisfare requisiti minimi di dimensione nella loro valuta locale.

8. LYXOR REFINITIV Core Commodity: ETF che ha l'obiettivo di replicare l'andamento dell'indice Thomson Reuters/Core Commodity CRB Total Return denominato in dollari statunitensi e convertito in euro, che rappresenta il mercato delle materie prime.
9. SPDR Global Real Estate: ETF che punta a riprodurre il più fedelmente possibile il rendimento dell'Indice Dow Jones Global Select Real Estate Securities Index (RESI). Esso investe nei titoli inclusi nell'indice sottostante. Questi titoli includono fondi comuni azionari di investimento immobiliare (*Real Estate Investment Trust* o REIT) e società operanti nel settore immobiliare (*Real Estate Operating Company* o REOC) dei mercati sviluppati ed emergenti di tutto il mondo. I titoli vengono valutati in base alla liquidità, alla dimensione e al reddito, quindi ponderati in base alla capitalizzazione di mercato. L'indice registra il rendimento di titoli immobiliari quotati in borsa e

intende fungere da indicatore per gli investimenti diretti in proprietà immobiliari.

10. ISHARES Global Infrastructure: ETF che ha l'obiettivo di rispecchiare l'andamento del FTSE Global Core Infrastructure Index. Esso è gestito in modo passivo e mira a investire nei titoli (ad es. azioni) che compongono l'Indice; tale benchmark misura i risultati di società internazionali, sia nei paesi sviluppati che emergenti, in grado di soddisfare i requisiti di idoneità in tre settori di infrastrutture essenziali: trasporti, energia e telecomunicazioni. Affinché queste società possano essere inserite nell'Indice, almeno il 65% delle loro entrate deve essere attribuibile ad attività collegate a infrastrutture.

In una prima analisi, si è scelto di investire l'ammontare totale di ricchezza in modo equo tra le attività selezionate (cosiddetto *naive portfolio*), considerando un peso di portafoglio pari al 10% per ogni *asset*. Successivamente, però, il portafoglio è stato soggetto ad un'ottimizzazione volta all'ottenimento dell'allocatione efficiente nello scenario ipotizzato, generando un risultato che, come era lecito aspettarsi, si è distanziato dall'equi-ponderazione. I relativi risultati sono esposti nell'ultimo paragrafo di questo Capitolo (Sezione 4.6).

4.1.2 La selezione dei fattori di rischio

I fattori di rischio sono stati selezionati in modo tale da poter intercettare le variabili che verosimilmente determinano l'andamento dei mercati finanziari e dell'economia reale. Si è visto nel paragrafo precedente che il portafoglio oggetto di studio è formata da attività quali fondi azionari, obbligazionari o di materie prime di carattere globale, geograficamente esposti dunque sia a paesi sviluppati sia emergenti- Si osservi che alcuni di questi fattori si riferiscono al mercato americano, storicamente trainante l'economia mondiale.

Le variabili oggetto delle successive valutazioni sono:

- Il rendimento del Titolo di Stato americano a 10 anni (*10-years Treasury*).
- Il *credit spread*, ovvero il differenziale tra rendimento delle obbligazioni decennali emesse da società US e il rendimento del 10-years Treasury
- L'Inflazione *break-even*, ovvero il tasso di inflazione implicito nelle quotazioni dei titoli indicizzati all'inflazione di pari vita residua.
- Il prezzo dell'Oro, le cui fluttuazioni solitamente sono influenzate dall'avversione al rischio presente nei mercati in conseguenza di shock macro-finanziari inattesi.
- Il prezzo del Rame e del Petrolio, che sono le due materie prime maggiormente dipendenti dallo stato di salute dell'economia reale.

La motivazione di tale scelta risiede nel fatto che, osservando l'andamento storico dei rispettivi indici, si deduce che questi fattori di rischio sono estremamente

sensibili alle fasi di crisi, cioè a quelle situazioni di stress che rappresentano l'oggetto della presente analisi. In questo gruppo di variabili, ce ne sono alcune in particolare, come ad esempio lo US Treasury, che intercettano la maggior parte delle turbolenze registrate nei mercati finanziari. Infatti, quelli selezionati sono fattori di mercato che possiedono la caratteristica di essere particolarmente sensibili alle fasi di stress dei mercati stessi. A dimostrazione di questo, la Figura 4.1 mostra l'andamento storico dei fattori di rischio sopra menzionati nell'intervallo temporale che va dal 31-12-2007 al 31-03-2021, periodo considerato poi per le successive analisi.

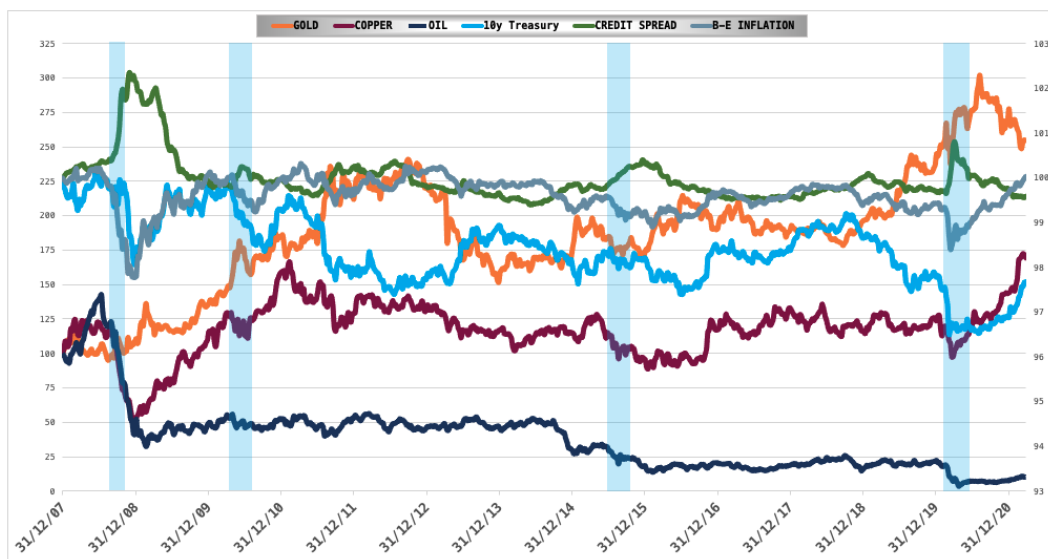


Figura 4.1: “Serie storiche dei sei fattori di rischio e maggiori periodi di crisi del periodo considerato”

Fonte: Stime del candidato

La Figura 4.1 nello specifico mostra i quattro periodi di crisi più rilevanti osservati nell'orizzonte considerato. Essi sono, nell'ordine, il fallimento della banca d'investimenti americana Lehman Brothers (dal 15-09-2008 al 09-10-2008), la crisi del debito sovrano in Europa (dal 26-04-2010 al 02-07-2010), il crollo del Mercato cinese (dal 14-08-2015 al 25-08-2015) e il più recente scoppio della crisi pandemica (dal 19-02-2020 al 30-03-2020). Le evidenze empiriche supportano chiaramente l'ipotesi che tali fattori siano estremamente sensibili alle turbolenze di mercato.

La crisi Lehman è, forse, il caso più eclatante. La procedura di fallimento annunciata dalla banca statunitense a metà di settembre del 2008 aveva avuto l'effetto di scuotere pesantemente i mercati finanziari, già duramente messi alla prova dalla drammatica crisi dei mutui sub-prime e del mercato immobiliare americano scoppiata qualche mese prima. I fattori di rischio, di cui si sta trattando, sono rimasti tutt'altro che insensibili a tale avvenimento. A questo proposito, si osservi come l'incertezza sulla stabilità dei mercati abbia fatto crollare il rendimento del Treasury, considerato il titolo in assoluto più liquido e affidabile al mondo. La crescente domanda, infatti, ha fatto aumentare il prezzo dell'obbligazione US con la conseguente diminuzione del rendimento (-1,58% negli ultimi tre mesi del 2008). Per le stesse ragioni, il *credit spread* ha registrato un aumento storico in quel periodo: il fallimento, infatti, di una delle più grandi banche al mondo e la conseguente aspettativa di stretta creditizia ha fatto schizzare in alto (+1,73% nel periodo considerato) il premio atteso per la detenzione di

obbligazioni aziendali. Anche il prezzo dell'oro ha osservato un aumento molto significativo (circa +10% nel periodo considerato) a testimonianza della paura che si era diffusa rapidamente tra gli investitori, preoccupati dalla natura "sistemica" della crisi. In ultimo, i prezzi delle due materie prime selezionate, rame e petrolio, hanno registrato ingenti e repentini crolli (rispettivamente -59% e -65% negli ultimi tre mesi del 2008), sintomo di aspettative estremamente pessimistiche sulle prospettive di breve e medio termine dell'economia reale.

L'esempio di Lehman è solo il più netto dei quattro mostrati nella Figura 4.1. Come si può notare, infatti, anche in tutti gli altri casi le variabili hanno riconosciuto il periodo di shock che i mercati stavano vivendo. È importante ricordare però che non è necessario che questi fattori di rischio reagiscano sempre allo stesso modo o con la stessa intensità ad un periodo di stress. Infatti, al di là di alcuni tratti ricorrenti, di base la natura di ogni crisi è unica nel suo genere e la dinamica delle variabili di mercato coinvolte dipende strettamente dalle caratteristiche specifiche dello shock. Questo, tuttavia, non è un punto di debolezza della metodologia descritta nel presente Capitolo. Infatti, aspetto centrale nella selezione dei fattori di rischio per l'analisi di stress test è il fatto che essi sono sensibili agli eventi estremi, non il modo specifico in cui ogni volta reagiscono.

4.2 L'ANALISI CAMPIONARIA DEL DATASET

In questa Sezione si descrive il procedimento di raccolta del campione alla base dello sviluppo di tutto il processo di stress test. Viene, inoltre, eseguita l'analisi campionaria svolta sull'intero *dataset*, sia per gli *asset* di portafoglio (Paragrafo 4.2.1) sia per i fattori di rischio (Paragrafo 4.2.2).

4.2.1 Analisi campionaria degli asset

Le serie storiche di tutti gli ETF del portafoglio di riferimento sono state estratte dal sito internet Yahoo Finance (finance.yahoo.it) con campionamento a frequenza settimanale. L'orizzonte temporale definito è pari a 13 anni e 3 mesi, ovvero dal 31-12-2007 al 31-03-2021. Questa finestra storica ha permesso di considerare diversi cicli economici, intercettando diversi periodi di stress significativi dei mercati come, ad esempio, quelli mostrati nella Figura X di cui sopra. Tuttavia, non tutte le attività selezionate sono disponibili dalla prima data dell'intervallo di tempo scelto. Ogni *asset*, dunque, presenta un periodo di osservazioni differente dagli altri. L'ETF con il numero di dati storici minore è l'ISHARES Global High Yield Corporate, con osservazioni che hanno inizio solamente il 10-08-2015. È proprio a partire da questa data comune a tutti gli *asset* che si sono rappresentate le serie storiche, mostrate nell'Immagine riportata in Appendice 4.B.

Prima di occuparsi della stima della sensibilità esistente tra tali *asset* e i fattori di rischio si è proceduto ad effettuare un'analisi descrittiva del suddetto campione, i cui risultati sono mostrati nella Tabella 4.2.

Statistica	ISHARES CORE MSCI WORLD	X GLOBAL GOV BOND	ISHARES GLOBAL CORP	ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	LYXOR REFINITIV CORE COMM	SPDR GLOBAL REAL ESTATE	ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE
Media	0,20	0,04	0,01	-0,01	0,05	0,05	0,15	-0,01	0,02	0,09
Errore standard	0,15	0,04	0,06	0,08	0,05	0,09	0,09	0,15	0,17	0,14
Mediana	0,50	0,04	0,11	0,13	0,10	0,13	0,19	0,13	0,12	0,15
Deviazione standard	2,51	0,75	0,99	1,45	0,89	1,61	1,62	2,53	2,83	2,36
Varianza campionaria	6,29	0,56	0,97	2,11	0,80	2,60	2,63	6,38	8,03	5,55
Curtosi	6,60	0,82	10,40	20,05	21,04	8,77	12,72	4,51	15,79	13,06
Asimmetria	-0,85	0,06	-1,47	-2,69	-1,55	-1,50	-1,39	-0,82	-1,24	-0,04
Intervallo	25,94	5,43	10,83	17,45	12,88	16,43	19,62	21,73	36,45	29,24
Minimo	-13,35	-2,74	-7,26	-12,27	-7,57	-10,53	-11,82	-12,86	-19,75	-12,34
Massimo	12,59	2,69	3,58	5,18	5,31	5,90	7,80	8,87	16,70	16,90
Somma	59,80	11,20	2,28	-4,21	15,11	15,90	44,90	-2,91	6,34	26,97
Conteggio	295	295	295	295	295	295	295	295	295	295

Tabella 4.2: “Analisi campionaria degli asset di portafoglio”

Fonte: *Stime del candidato*

La Tabella 4.2 riporta alcune delle statistiche base fondamentali come la Media del rendimento settimanale delle attività e la Varianza campionaria sempre relativa alla frequenza delle osservazioni scelta. Inoltre, sono presenti l'*indice di asimmetria* e l'*indice di curtosi*, utili allo scopo di riassumere la forma della distribuzione dei dati selezionati. Si ricordi che una distribuzione di frequenze $f(x)$ si dice simmetrica rispetto ad un asse di simmetria x_0 se sussiste la seguente relazione:

$$f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$$

per ogni valore di h . La distribuzione Normale è caratterizzata da un'asimmetria nulla. La curtosi indica anch'essa un allontanamento dalla normalità distributiva, per cui si parla di distribuzione platicurtica (in caso di code più fini della

distribuzione gaussiana) o leptocurtica (in caso di code più spesse della gaussiana). In concreto indica la maggiore o minore frequenza di valori posti nelle code della distribuzione. La distribuzione Normale viene presa a riferimento e, com'è noto, la sua curtosi è pari a 3, ragion per cui l'indice viene convenzionalmente interpretato in relazione a tale valore. Quindi, la serie sarà detta leptocurtica se la curtosi è maggiore di 3 e platicurtica se l'indice è minore di 3.

Come è lecito attendersi da serie storiche finanziarie l'ipotesi di normalità distributiva sembra non essere rispettata. Infatti, gli *asset* presentano una probabilità di accadimento degli eventi di coda maggiore rispetto a quanto ipotizzato dalla Gaussiana e, quindi, distribuzioni con code più spesse (leptocurtosi).

A questo punto, l'attenzione viene rivolta al campione composto dai fattori di mercato, sui quali si basa il modello quantitativo di previsione. L'analisi delle serie storiche delle variabili selezionate è presentata al paragrafo che segue.

4.2.2 Analisi campionaria dei fattori di rischio

Una volta completata la selezione delle variabili di stress si passa alla raccolta dei dati ovvero allo scaricamento delle serie storiche per l'orizzonte temporale prescelto (dal 31-12-2007 al 31-03-2021). Per coerenza con i fattori di rischio introdotti in precedenza, anche in questo caso i dati sono stati campionati a frequenza settimanale. La serie storica di ogni variabile è stata estratta utilizzando ogni volta il canale migliore a disposizione in termini di accessibilità delle risorse

e completezza dei dati. Per le prime 2 variabili (il Treasury a 10 anni e il Credit Spread), si è utilizzato *Nasdaq Data Link* (data.nasdaq.com) piattaforma online progettata per fornire dati finanziari, economici e alternativi.⁵⁸ Nello specifico, per quanto riguarda il *credit spread*, la serie storica utilizzata è stata quella relativa al rendimento delle obbligazioni corporate americane a dieci anni a cui poi è stato sottratto il rendimento considerato privo di rischio, ovvero il Treasury, riferito alla medesima scadenza. Per quanto riguarda l'inflazione *break-even* si è utilizzato il database online messo a disposizione dalla Federal Reserve, *FRED* (Federal Reserve Economic Data), in grado di fornire dati sin dal 1990. Anche in questo caso è stata selezionata la scadenza decennale, al fine di mantenere la coerenza con gli altri dati utilizzati. Infine, per le variabili quali Oro, Rame e Petrolio, le loro serie storiche sono state scaricate dal sito *investing.com*.

Nell'Appendice 4.C sono riportate le serie storiche dei rendimenti dei fattori di rischio in formato grafico.

Ogni serie storica è stata salvata in un database in formato Excel, dove si è proceduto ad effettuare la relativa analisi campionaria.

L'analisi descrittiva del campione contiene oltre a statistiche come la media, l'errore standard, la mediana, la deviazione standard e la varianza campionaria,

⁵⁸ Originariamente la piattaforma si chiamava *Quandl*. Ha cambiato nome e indirizzo web da quando è stata acquisita da Nasdaq alla fine del 2018.

anche l'indice di asimmetria e l'indice di curtosi. La Tabella 4.3 mostra i risultati ottenuti.

Statistica	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL
Media	0,00	0,00	0,00	0,16	0,13	-0,16
Errore standard	0,00	0,00	0,00	0,09	0,12	0,21
Mediana	-0,01	0,00	0,00	0,16	0,19	0,04
Deviazione standard	0,12	0,06	0,09	2,30	3,13	5,62
Varianza campionaria	0,01	0,00	0,01	5,29	9,80	31,60
Curtosi	6,10	24,19	8,91	7,19	4,90	12,98
Asimmetria	-0,01	1,93	-0,55	-0,05	-0,02	-0,33
Intervallo	1,15	0,91	0,99	24,64	26,34	69,60
Minimo	-0,62	-0,31	-0,54	-14,72	-11,93	-37,16
Massimo	0,52	0,60	0,45	9,92	14,41	32,44
Somma	-2,32	-0,42	0,03	111,68	86,69	-113,16
Conteggio	691,00	691,00	691,00	691,00	691,00	691,00
Livello di confidenza (95,0%) della media	0,01	0,00	0,01	0,17	0,23	0,42

Tabella 4.3: “Analisi campionaria dei fattori di rischio”

Fonte: *Stime del candidato*

I valori evidenziati nella Tabella 4.3 tendono a rigettare l'ipotesi di normalità dei rendimenti dei fattori di rischio su cui, si è visto nel Capitolo 3, si basa tutto il modello Black-Litterman, in quanto le distribuzioni sembrano essere caratterizzate da valori significativi di curtosi. Questo perché nella realtà le fluttuazioni di grande ampiezza nelle serie finanziarie si verificano con maggior frequenza di quanto previsto dalla distribuzione gaussiana.

Tuttavia, si noti come il valore atteso e la matrice di covarianza della distribuzione multivariata a posteriori del modello Black-Litterman (accuratamente descritta nel Capitolo 3 e uno degli oggetti d'interesse di questo caso applicato) dipendono dalle *view* di stress e dalle *confidence* assegnate. Avendo lo scopo di valutare il portafoglio sotto scenari estremi, il valore medio, in tali circostanze, si colloca

talmente a sinistra della distribuzione che la massa di probabilità è in grado di intercettare la maggior parte dei casi stressanti che si sono formulati. Quello che si perde in questo modo è l'evento ancora più estremo e distante dal valore atteso (già molto negativo) che potrebbe verificarsi nella coda lontanissima di questa distribuzione già molto spostata sul semiasse negativo delle possibili realizzazioni empiriche. È in questo senso che la non normalità di partenza non inficia i risultati e l'utilità dell'analisi. Infatti, attraverso l'espressione delle *view soggettive* si sposta l'attenzione sulla parte interessata. Se si volesse modellare in maniera corretta la coda di questa distribuzione, già collocata in modo prevalente nella regione dei rendimenti negativi, sarebbe necessario effettuare stime specifiche per distribuzioni non normali. In effetti, pare lecito chiedersi se gli sforzi computazionali necessari al raggiungimento di una modellazione statistica più sofisticata di eventi che hanno probabilità molto prossima allo zero di verificarsi siano davvero utili.

Il paragrafo che segue illustra la tecnica utilizzata per determinare il legame, o meglio la sensibilità, esistente tra le attività del portafoglio di riferimento e i fattori di rischio selezionati.

4.3 LA SENSIBILITÀ TRA ASSET E FATTORI DI RISCHIO

Una volta composto e analizzato il *dataset* di riferimento delle successive valutazioni, si è proceduto con la stima della sensibilità esistente tra gli *asset* di portafoglio ed i fattori di rischio. A tal fine, sono state effettuate dieci regressioni lineari multiple, una per ogni attività considerata, nei confronti dei fattori selezionati. In questo modo si è cercato di studiare quali potessero essere i movimenti dei rendimenti del portafoglio sotto certe dinamiche delle variabili. I risultati ottenuti sono mostrati nella Tabella 4.4 sottostante.

Asset Name	Intercept	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL	Mean Squared Error	R-squared	Jarque-Bera Test	Ljung-Box Serial Correl. Test	Box-Pierce Test
ISHARES CORE MSCI WORLD	0,23 (0,002)	2,83 (0,002)	2,14 (0,201)	9,21 (0)	0,03 (0,495)	0,26 (0)	0,05 (0,001)	3,23	38%	524,53 (0)	10,56 (0,06)	10,48 (0,063)
X GLOBAL GOV BOND	0,05 (0,184)	-1,36 (0,012)	0,53 (0,52)	-1,46 (0,051)	0,15 (0)	0,02 (0,323)	0,003 (0,714)	0,54	19%	87,13 (0)	5,30 (0,38)	5,25 (0,396)
ISHARES GLOBAL CORP	0,01 (0,751)	-2,01 (0,001)	0,43 (0,659)	1,36 (0,099)	0,15 (0)	0,08 (0)	0,01 (0,101)	0,78	20%	261,61 (0)	5,1 (0,404)	5,02 (0,413)
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	-0,06 (0,401)	-0,66 (0,567)	-1,33 (0,378)	7,33 (0)	0,18 (0)	0,03 (0,374)	0,02 (0,086)	1,64	22%	519,57 (0)	12,10 (0,033)	11,9 (0,036)
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	0,05 (0,037)	-4,88 (0)	-0,86 (0,049)	3,95 (0)	0,03 (0,007)	-0,01 (0,601)	0,001 (0,882)	0,44	42%	2484,61 (0)	39,01 (0)	38,80 (0)
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	0,1 (0,119)	-4,95 (0)	0,47 (0,736)	4,53 (0)	0,15 (0)	0,11 (0)	0,07 (0)	2,00	25%	120,89 (0)	6,04 (0,302)	6 (0,306)
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	0,09 (0,282)	-2,6 (0,041)	-5,17 (0,003)	7,12 (0)	0,09 (0,125)	0,14 (0)	-0,01 (0,667)	2,19	18%	300,18 (0)	22,3 (0)	21,95 (0)
LYXOR REFINITIV CORE COMM	-0,03 (0,497)	0,57 (0,217)	-0,98 (0,209)	1,94 (0,002)	0,11 (0)	0,19 (0)	0,29 (0)	1,42	74%	18,56 (0)	16,01 (0,007)	15,88 (0,007)
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	0,04 (0,76)	-4,94 (0,002)	-6,92 (0,009)	11,87 (0)	0,07 (0,373)	0,15 (0,005)	-0,01 (0,56)	5,87	14%	1377,84 (0)	12,04 (0,03)	11,92 (0,036)
ISHARES GBL INFRASTRUCTURE	0,04 (0,655)	-0,26 (0,735)	1,82 (0,169)	6,64 (0)	0,03 (0,437)	0,15 (0)	0,04 (0,01)	4,08	18%	1689,30 (0)	5,02 (0,413)	4,98 (0,419)

Tabella 4.4: “Tabella riassuntiva delle regressioni multiple tra asset di portafoglio e fattori di rischio”

Fonte: *Stime del candidato*

Essa può essere divisa in tre parti individuabili cromaticamente. Nella prima, sono presentati i coefficienti derivanti dalla regressione, intercetta inclusa. Di ognuno si è calcolato il *p-value* e si sono evidenziati quei coefficienti che sono risultati essere significativi ad un livello superiore all’85%. La seconda parte della Tabella 4.4

contiene i valori delle statistiche utilizzate per valutare la bontà delle regressioni nel loro complesso. Esse sono l'errore standard di regressione e l'*R-squared*. L'errore standard della regressione, noto anche come errore standard della stima, rappresenta la deviazione standard dei residui. In sostanza, è una misura di quanto è sbagliato in media il modello di regressione usando le specifiche variabili esplicative selezionate. I valori più piccoli sono migliori perché indicano che le osservazioni sono più vicine alla linea di regressione. L'*R-squared*, invece, è una misura della bontà di adattamento per i modelli di regressione lineare. Questa statistica indica la percentuale della varianza nella variabile dipendente (uno degli *asset* di portafoglio) che le variabili indipendenti (i fattori di rischio) spiegano collettivamente. Questo indicatore, dunque, misura il potere esplicativo delle variabili indipendenti utilizzate nella regressione su una scala da 0% a 100%.

Infine, la terza parte della Tabella contiene l'analisi dei residui della regressione, finalizzata alla verifica dell'ipotesi di normalità distributiva e della presenza di correlazione seriale. Tale valutazione è realizzata per mezzo del Jarque Bera test, il Ljung-Box test ed il Box-Pierce test.

Lo script Python utilizzato per i suddetti scopi è riportato in Appendice 4.E mentre la rappresentazione delle regressioni è illustrata all'Appendice 4.F.

4.4 IL MODELLO DI PREVISIONE

In questo paragrafo viene spiegato cosa è un modello autoregressivo vettoriale perché è stato usato in questo studio e come interpretare le previsioni da esso generate.

4.4.1 Introduzione ai modelli auto-regressivi vettoriali

Quello dei modelli VAR, dall'inglese *Vector Autoregressive*, rappresenta probabilmente l'approccio statistico più naturale quando lo scopo è l'analisi congiunta di una molteplicità di serie storiche. Il termine "AutoRegressive" sta ad indicare che ogni serie viene modellata come una combinazione lineare dei suoi valori passati e di quelli delle altre variabili. Il numero di valori passati che determina tale combinazione è il cosiddetto *ordine di ritardo del modello VAR*, in letteratura spesso indicato con la lettera p . Il VAR è di fatto la versione multivariata del più semplice modello univariato AR (*AutoRegressive*), in cui l'andamento della specifica serie storica è ipotizzata dipendere unicamente da un predeterminato numero di suoi valori passati. Formalmente, la dinamica che caratterizza tipicamente un modello AR(p) è descritta dalla seguente equazione:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \dots + \beta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

dove:

- α è l'intercetta;
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ sono i coefficienti dei ritardi di Y fino all'ordine p ;

- ε_t è una variabile aleatoria distribuita come $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e rappresenta l'innovazione del processo autoregressivo.

Nel caso specifico di questo elaborato, il sistema è formato da sei equazioni (una per ogni variabile scelta come fattore di rischio del modello). Per comprendere meglio come opera un modello VAR(1), cioè caratterizzato da un solo ritardo, si ipotizzi di avere due sole serie storiche, Y_1 e Y_2 . Per ottenere una previsione di questi fattori al tempo t , il modello utilizza sia i valori passati di Y_1 sia quelli di Y_2 , tanto per predire $Y_{1,t}$ quanto per $Y_{2,t}$. In formule:

$$Y_{1,t} = \alpha_1 + \beta_{11,1}Y_{1,t-1} + \beta_{12,1}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$Y_{2,t} = \alpha_2 + \beta_{21,1}Y_{1,t-1} + \beta_{22,2}Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

dove, $Y_{1,t-1}$ e $Y_{2,t-1}$ sono rispettivamente il primo ritardo delle serie Y_1 e Y_2 . Come si vede, le due serie sono riferite ad un modello VAR(1), perché ogni equazione è di ordine uno, cioè contiene al massimo un ritardo di ogni variabile. Incrementando il numero di ritardi, il numero di termini delle due equazioni aumenta, rendendo il modello più complesso, ma non necessariamente migliore in termini di qualità previsiva. I parametri del modello possono essere stimati efficientemente dal metodo dei minimi quadrati ordinari, *Ordinary Least Squares* (OLS), anche separatamente per ogni equazione e valutandone la significatività attraverso le statistiche test usuali.

Un approfondimento sui modelli VAR è proposto in Appendice 4.G, in cui vengono descritte le ipotesi di base e le condizioni necessarie per sviluppare correttamente un approccio vettoriale auto-regressivo.

4.4.2 Il modello VAR⁵⁹

Come accennato in precedenza, il meccanismo appena esposto può diventare molto articolato all'aumentare del numero delle variabili inserite nel sistema e al crescere del numero dei ritardi selezionati.

Nello specifico, in questo elaborato si è utilizzato come fonte di previsione storica un modello autoregressivo vettoriale costituito dai sei fattori di rischio introdotti precedentemente nella Sezione 4.1.

Tuttavia, è necessario precisare che, prima di procedere alla stima del modello, è opportuno effettuare alcune valutazioni sulla natura delle serie storiche delle variabili selezionate, come descritto in dettaglio nell'Appendice 4.D. In primo luogo, si è svolto un test di ipotesi finalizzato alla determinazione della stazionarietà delle serie dei rendimenti. I risultati di tale test, noto come *Augmented Dickey-Fuller test*, sono riportati in sei tabelle, una per ogni fattore di rischio, nell'Appendice 4.I. In queste tabelle è possibile osservare come tutte le serie storiche siano stazionarie ad un livello di confidenza del 95%.

⁵⁹ Lo script relativo al modello VAR è mostrato nelle immagini in Appendice 4.H.

Dunque, è possibile procedere alla stima del modello VAR sul set scelto. A questo proposito è stata utilizzata la libreria Python “statsmodels v0.12.2”, che fornisce un vasto numero di metodi utili per ottenere rapidamente la stima e l’analisi di inferenza sul modello VAR. Ad esempio, la funzione “select_order” è in grado di definire il numero di ritardi ottimale (da zero ad un numero massimo indicato dall’utente) per il modello VAR attraverso gli score relativi a determinati *criteri informativi*, quali *Akaike Information Criterion (AIC)*, *Bayesian Information Criterion (BIC)*, *Final Prediction Error (FPE)* e *Hannan-Quinn Information Criterion (HQIC)*. Nel caso in esame si è scelto l’HQIC come parametro decisivo in quanto restituisce un ordine intermedio tra gli altri. In questo modo, il numero di ritardi stimati per il modello è risultato essere pari a uno. Successivamente, attraverso il metodo “summary” si è ottenuto una panoramica del VAR(1) definito sul *dataset* delle sei variabili. I parametri della regressione, le statistiche test e i rispettivi *p-value* sono definiti attraverso il metodo dei minimi quadrati ordinari (OLS) e vengono riportati, per ognuno dei sei fattori di rischio, nella Appendice 4.J insieme alla matrice di correlazione dei residui.

Prima di procedere alla previsione dei rendimenti attesi delle variabili alla base del modello, è opportuno eseguire qualche controllo sul modello stimato. Il prossimo paragrafo illustra gli accertamenti necessari conseguiti e le previsioni successivamente generate.

4.4.2 La stima del modello VAR e la verifica delle sue previsioni

Le procedure per verificare se il modello VAR adottato rappresenta adeguatamente il processo di generazione dei dati delle variabili spaziano da test formali delle ipotesi sottostanti a procedure come l'ispezione di grafici di residui e autocorrelazioni. Nel caso specifico, i test attuati sono due: una verifica della correlazione dei residui e il test di causalità.

In primo luogo, si è cercato di verificare la presenza di correlazione tra i residui del modello e, a questo scopo, si è utilizzato la statistica di Durbin-Watson. Se è presente correlazione tra i residui, significa che il modello non è stato perfettamente specificato e potrebbe essere necessario aumentare il numero di ritardi del VAR. In sostanza, testare la correlazione seriale vuol dire assicurarsi che il modello interpreti correttamente la dinamica delle serie storiche in esame. La statistica di Durbin-Watson può variare tra zero e quattro: più il punteggio si avvicina al valore due, meno correlazione seriale c'è tra i residui. Quando è pari a zero, la correlazione è positiva mentre quando è uguale a quattro è negativa. I valori delle statistiche test ottenuto nel nostro caso (compresi tra 1,98 e 2,10) permettono di affermare, con un buon livello di confidenza, l'assenza di correlazione tra i residui. Il dettaglio dei risultati è riportato nell'immagine in Appendice 4.K.

In secondo luogo, al fine di indagare i nessi di causa ed effetto potenzialmente esistenti tra le serie storiche, si è eseguito il test di causalità di Granger a un livello

di significatività del 95%. Tale test verifica l'ipotesi nulla secondo la quale i coefficienti associati ai ritardi delle variabili considerate nel VAR siano uguali a zero. In altri termini, la *Granger-causality* mira a determinare se le osservazioni passate di una certa variabile sono di una qualche utilità nel predirne un'altra. I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella in Appendice 4.L.

Una volta verificata la qualità della specificazione del modello VAR, è possibile affrontare il tema della generazione delle previsioni. Attraverso il metodo "forecast", il pacchetto Python scelto ci permette di ottenere quanto desiderato. Tale funzione riceve come input il numero di osservazioni future (chiamate "step" o "passi in avanti") da prevedere. Si ricordi che, nel caso specifico, le serie storiche utilizzate hanno frequenza settimanale. Questo significa che ogni *step* equivale ad una settimana in più di previsione. L'orizzonte *out-of-sample* considerato è pari a quattro settimane, che cumulativamente equivale a un mese lavorativo. Inoltre, "forecast" ordina i risultati in forma matriciale $S \times K$, dove per riga si ha il numero di periodi dell'orizzonte previsivo S e per colonna i K fattori di rischio per cui si desidera avere una previsione. Questo tipo di organizzazione dei risultati agevola i successivi utilizzi di questo output. Nella Tabella 4.5 si riporta la previsione mensile generata dal modello VAR(1) mentre la matrice di covarianza è mostrata nell'Appendice 4.M.

Fattori di rischio	Rendimento
10y Treasury	-0,02
CREDIT SPREAD	0,01
B-E INFLATION	-0,01
GOLD	0,65
COPPER	0,13
OIL	-0,42

Tabella 4.5: “Rendimenti attesi dei fattori di rischio generati dal modello VAR”

Fonte: *Stime del candidato*

Al fine di stabilire l’affidabilità delle previsioni, nel prossimo paragrafo si discute l’analisi che è stata effettuata sul modello in questione. Si è cercato, dunque, di misurare, attraverso metriche appropriate, l’attendibilità e l’errore commesso nell’effettuare tali previsioni.

4.4.3 L’analisi delle previsioni del VAR

Esiste una pluralità di metodi che tentano di valutare le previsioni generate da un modello quantitativo. Prima però è importante sottolineare che il punto di partenza per questo tipo di analisi è la suddivisione del campione in due sottogruppi, detti “*train*” e “*test*”. La parte delle serie storiche utilizzate dal modello VAR per generare le sue equazioni di regressione è detta “*train*” e solitamente contiene il maggior numero di osservazioni disponibili. La parte “*test*”, invece, contiene i valori relativi allo stesso orizzonte temporale della previsione generata dal “*train*”

ed è utilizzata proprio per confrontare i risultati prodotti dal modello con quelli effettivamente registrati. Solo dopo è possibile procedere al calcolo di alcuni indicatori come, ad esempio, il MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), il ME (*Mean Error*), il MAE (*Mean Absolute Error*), il MPE (*Mean Percentage Error*) e l'RMSE (*Root Mean Squared Error*).

Generalmente, si suddivide il campione una sola volta e sui risultati ottenuti si fanno le dovute considerazioni. Invece, nel caso in esame, è stata eseguita un'analisi "rolling" sul VAR con l'obiettivo di raccogliere un'evidenza empirica più robusta circa le sue capacità previsive. Con questa metodologia i sottogruppi del campione sono, come dice il termine, "mobili". Dato che le serie storiche delle variabili in considerazione sono abbastanza lunghe (13 anni e 3 mesi), inizialmente il *set train* va dal 07/01/2008 (inizio delle osservazioni) al 28/12/2015 mentre la parte *test* ha sempre l'orizzonte out-of-sample scelto di quattro settimane (in prima istanza: 04/01/2016 – 25/01/2016). Una volta eseguita la previsione su questa base dati, sia i rendimenti generati sia i rendimenti effettivi vengono cumulati sull'orizzonte prestabilito di quattro settimane. Si ripete, dunque, tale procedimento allargando il campione *train* di quattro valori e facendo scorrere allo stesso modo il campione di *test* (che si incrementa dunque di quattro nuove osservazioni). Si ottiene così una nuova previsione e il relativo valore effettivo mensili. L'esercizio si interrompe alla fine delle osservazioni disponibili (29/03/2021). Il risultato consiste in una serie di 68 rendimenti attesi da confrontarsi con i rispettivi valori reali, il che genera un

nuovo campione relativo ad un orizzonte temporale di circa 5 anni e mezzo a frequenza mensile. In Appendice 4.N vengono riportate le immagini relative allo script utilizzato per la creazione di queste due nuove serie di dati.

In termini di misurazioni si sono scelti due metriche per valutare la bontà delle previsioni: RMSE e *R-squared*. L'RMSE misura la deviazione standard campionaria delle differenze tra i valori previsti e quelli osservati. Esso risulta essere più penalizzante degli altri indicatori all'aumentare del valore dei residui e, quindi, favorito in ottica di valutazione prudenziale. L'altro indicatore utilizzato è l'*R-Squared*, calcolato come rapporto tra le deviazioni standard delle previsioni e delle osservazioni reali. Il suo valore varia tra 0 e 1. La Tabella 4.6 mostra i risultati ottenuti dall'analisi svolta.

Fattori di rischio	RMSE	R2
10y Treasury	0,03	13%
CREDIT SPREAD	0,05	33%
B-E INFLATION	0,03	19%
GOLD	0,83	12%
COPPER	0,94	15%
OIL	1,47	8%

Tabella 4.6: "Analisi inferenziale sulle previsioni del VAR"

Fonte: *Stime del candidato*

È importante, a questo punto, verificare criticamente i numeri riportati nella Tabella 4.6. Infatti, caratteristica peculiare dei modelli di serie storiche (VAR, ARMA) è proprio quella di non riuscire ad ottenere valori esplicativi molto alti. Ad esempio, un *R-squared* pari all'8% sul fattore "Oil" è abbastanza scontato, dato che il petrolio è caratterizzato da una varianza idiosincronica molto elevata e questo rende molto

difficile spiegare la sua performance in senso storico. D'altronde, pretendere indici di *fitting* elevati significherebbe che si è in possesso di un modello quantitativo in grado di prevedere (quasi) perfettamente, tramite le osservazioni passate, le dinamiche future dei fattori in esame. Tale scenario, seppure ipotizzabile in linea di principio, appare alquanto improbabile nella realtà.

Anche per le ragioni appena esposte, tali stime possono essere completate e corrette da informazioni private di carattere qualitativo sui fattori di rischio prescelti. Nel caso in esame, queste informazioni sono state dedotte da una analisi di scenario, descritta nel paragrafo seguente.

4.5 L'ANALISI DI SCENARIO E L'ESTENSIONE DELL'APPROCCIO BLACK LITTERMAN

Come esposto all'inizio del Capitolo, in questo studio si tenta di valutare un portafoglio finanziario in condizioni critiche di mercato. L'approccio scelto è quello di stampo Bayesiano caratterizzato dall'inserimento di opinioni qualitative capaci di integrare e migliorare i risultati ottenuti dal modello VAR appena descritto. A tal fine, è stato ipotizzato di utilizzare come scenario di stress i movimenti critici che i fattori di rischio selezionati hanno fatto registrare tra il 20 febbraio 2020 e il 31 marzo 2020, ossia in corrispondenza della crisi conseguente allo scoppio dell'epidemia da SARS-CoV-2.

I risultati del VAR mostrati nella Tabella 4.5 sopra si riferiscono alla situazione corrente al 29 marzo 2021 (data relativa all'ultima osservazione delle serie storiche del *dataset*). Essi incorporano la crisi avvenuta a Marzo 2020 come anche la storia finanziaria precedente e successiva a tale avvenimento. Da queste previsioni è possibile riscontrare una fase di sostanziale stabilità del mercato, in cui si osserva una situazione non eccessivamente distante dalle medie storiche. Ad esempio, immaginando di stimare il modello VAR il 10 febbraio 2020, dunque nel periodo subito precedente allo scoppio della crisi, è probabile che il modello non sarebbe stato in grado di prevedere l'imminente crollo dei mercati. È in questa ottica che lo stress test Bayesiano acquisisce un ruolo centrale. In quanto modello di serie storiche il VAR impiega del tempo prima di "accorgersi" del cambiamento di tendenza. Pur essendo vero che il *trend* in diminuzione delle variabili registrato nella prima settimana di crisi viene subito incorporato nelle previsioni del modello tramite i ritardi, le regressioni utilizzano i dati di tutto il campione fino alla data corrente. Di conseguenza, i coefficienti stimati, possono attenuare le brusche variazioni che caratterizzano le osservazioni più recenti, che sono generate dall'inizio della crisi. Questa insufficiente reattività del modello di serie storiche al rapido insorgere di tensioni sui mercati può rendere le relative previsioni poco utili nel nuovo contesto in via di definizione. Il punto di forza dello stress test Bayesiano risiede proprio nella capacità di colmare questo "gap" dei modelli puramente quantitativi. Dove, per ragioni strutturali, non arriva il VAR può, invece, riuscire

l'operatore che grazie alle sue opinioni incorpora, con il giusto peso (*confidence*) e la necessaria tempestività, le informazioni rilevanti. Il VAR da solo impiegherebbe un tempo troppo lungo per leggere correttamente l'evoluzione della crisi e incorporarla in modo efficiente nelle sue previsioni.

Come detto in precedenza, l'analisi di scenario effettuata ai fini di questo elaborato ripropone i movimenti dei fattori di rischio registrati durante il recentissimo periodo pandemico di Marzo 2020. Si osserva, nello specifico, una diminuzione consistente del rendimento del titolo di stato americano a dieci anni (10y Treasury) che segna un -0,84%. Tale diminuzione è attribuibile al cosiddetto "*flight to quality*", ovvero al tipico fenomeno che ha luogo in periodi turbolenti e che vede gli investitori ricercare titoli altamente liquidi e sicuri. In questo senso, il titolo di stato decennale americano è probabilmente la miglior soluzione presente sul mercato, cosa che ha causato un aumento della domanda, spingendone in alto il prezzo con conseguente diminuzione del rendimento. Lato imprese, invece, a causa di aspettative di stringenti misure di prevenzione dei contagi (*lockdown*), di incertezza del ciclo economico e di probabile diminuzione della produzione globale, è normale attendersi un incremento del premio atteso derivante dalla detenzione di debito aziendale, fenomeno che si traduce in un aumento del *credit spread* pari a +1,03%. Inoltre, la domanda aggregata in calo e l'incertezza degli scambi internazionali, insieme alle circostanze sopracitate, inducono gli investitori ad attendersi una fase deflazionistica. Ne deriva che l'inflazione estrapolata dai titoli di stato indicizzati

all'inflazione registra un significativo -0,71% nel periodo considerato. Inoltre, Date le premesse, sarebbe entro certi limiti logico attendersi una decisa impennata del prezzo dell'oro, bene rifugio per eccellenza. Tuttavia, seppur in aumento (+2,17%), le imminenti rassicurazioni di governanti e banchieri centrali hanno scongiurato la possibilità di una crisi sistemica, frenando le pressioni di acquisto del metallo prezioso che invece in altri periodi di forte stress ha toccato picchi di oltre il +20% (come nel caso della crisi Lehman Brothers, 2008). Per quanto riguarda le due materie prime selezionate tra i fattori di rischio, essendo strettamente legate all'attività reale sono quelle che hanno risentito maggiormente la crisi Covid-19. L'intensità del movimento, -16,66% per il rame e -60,44% per il petrolio, è amplificata dalla elevata volatilità tipica delle *commodity* e dei mercati *future* su cui vengono prevalentemente scambiate.

L'obiettivo, dunque, è quello di andare ad osservare come questo particolare scenario può impattare sul portafoglio nel caso in cui dovesse riproporsi. La fiducia rispetto ad un tale accadimento è fissata all'80% per ogni variabile, un livello abbastanza elevato da rendere lo scenario capace di influenzare i rendimenti a posteriori ma che comunque lascia un margine di incertezza non trascurabile. Queste *view* di stress, quindi, vengono unite alle previsioni del VAR tramite le formule definite nel Capitolo IV, che vengono riportate qui di seguito per comodità di lettura:

$$\Pi_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Dove:

- K è il numero delle *view* (in questo caso pari a sei).
- Ω^{60} è la matrice $K \times K$ di covarianza delle *view*.
- Q è il vettore $K \times 1$ contenente le osservazioni dedotte dall'analisi di scenario condotta relativamente a Marzo 2020.
- P è la matrice $K \times N$ di selezione.

Si ricordi inoltre che:

- τ è il fattore di affidabilità del modello quantitativo ed è considerato equivalente al reciproco della numerosità campionaria delle serie storiche (nel caso in esame, esso è pari a $1/691$), in accordo con quanto discusso nel Capitolo 3 paragrafo 4.3.
- Π corrisponde, qui, al vettore dei rendimenti dei fattori di rischio⁶¹ generati dal modello VAR e riportati nella Tabella X.
- Σ è la matrice di covarianza dei fattori stimata dal modello ed ottenibile tramite il metodo “VAR(fattori).fit(ordine_ritardi).sigma_u” fornito dalla libreria Python “statsmodel”. Essa, riferendosi ad un campione a

⁶⁰ Per maggiori dettagli sull'ottenimento di Ω si veda il Capitolo 3 Paragrafo 4.2

⁶¹ Π nel modello Black-Litterman classico rappresentava il vettore dei rendimenti di equilibrio dedotti dal CAPM, come discusso nel Capitolo IV. In questo riadattamento, la distribuzione a priori dei rendimenti è affidata al modello quantitativo, stimato attraverso un VAR.

frequenza settimanale necessita di essere, però, corretta per l'orizzonte mensile prescelto e, data l'ipotesi di omoschedasticità dei residui sulla base dei quali viene stimata, ciò è ottenibile semplicemente moltiplicando per quattro l'intera matrice.

Le immagini riportate in Appendice 4.O contengono lo *script* utilizzato in questa parte del programma. Si ottiene, così, un vettore dei rendimenti e una matrice di covarianza Bayesiana, in cui cioè le *view* espresse sui fattori di rischio sono state integrate. La matrice di covarianza della distribuzione a posteriori è riportata in Appendice 4.P. La Tabella 4.7 mostra, invece, i rendimenti a posteriori generati dal *framework* previsivo utilizzato

Fattori di rischio	Rendimenti
10y Treasury	-0,78
CREDIT SPREAD	0,84
B-E INFLATION	-0,68
GOLD	2,08
COPPER	-16,39
OIL	-50,92

Tabella 4.7: “Rendimenti attesi dei fattori di rischio sotto lo scenario ipotizzato”

Fonte: *Stime del candidato*

Osservando i risultati è chiaro come la fase di stabilità di mercato stimata dal modello VAR venga negata dallo scenario di stress ipotizzato. Grazie al livello di confidenza piuttosto elevato, infatti, i rendimenti attesi delle variabili ricalcano in modo abbastanza fedele quelle registrate durante la crisi Covid-19 di Marzo 2020. Nel paragrafo seguente si mostra come, tramite le regressioni tra i fattori di rischio e gli *asset* di cui si è discusso nella Sezione V.3, le dinamiche dei rendimenti sopra

riportate abbiano un risvolto sulla performance di portafoglio. Si presentano, inoltre, i risultati ottenuti, specificando il loro utilizzo sul piano strategico-decisionale.

4.6 I RISULTATI DELLO STRESS TEST

In questo ultimo paragrafo del Capitolo vengono proposti i risultati ottenuti in termini di performance di portafoglio sotto lo scenario di stress ipotizzato al paragrafo 4.5.

4.6.1 I rendimenti degli asset

Data la distribuzione a posteriori dei fattori di rischio determinata nel paragrafo precedente, è possibile giungere al vettore dei rendimenti attesi e alla matrice di covarianza (sotto le ipotesi di stress) degli *asset* di portafoglio grazie ai parametri delle regressioni lineari ottenuti al paragrafo 4.3. I calcoli matriciali necessari a tale fine sono mostrati nello script utilizzato in questa parte del programma in Appendice 4.Q mentre la Tabella 4.8 riporta i rendimenti attesi degli *asset* di portafoglio sotto stress.

Asset	Rendimenti attesi mensili
ISHARES CORE MSCI WORLD	-13,15
X GLOBAL GOV BOND	2,46
ISHARES GLOBAL CORP	-0,66
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	-6,81
X GLBL INFLTION LNKD 1C EUR	0,57
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	-3,60
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	-8,73
LYXOR REFINITIV CORE COMM	-19,98
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	-11,55
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	-7,18

Tabella 4.8: “Rendimenti attesi degli asset sotto stress”

Fonte: *Stime del candidato*

Si noti come gli ETF azionari siano quelli che risentono maggiormente degli shock che colpiscono il mercato finanziario, coerentemente con l'evidenza empirica dei mercati finanziari. La dura stretta sull'economia reale, rispecchiata nei crolli del prezzo di rame e petrolio, viene rivelata dall'indice delle commodity che segna il peggior risultato tra le attività di portafoglio (-19,98% su orizzonte mensile). Dati questi risultati, si è passati alla loro scomposizione tra le variabili del modello. Questa analisi ha lo scopo di identificare quale fattore di rischio è maggiormente responsabile dei rendimenti degli *asset*, informazione utili soprattutto ai fini della gestione del portafoglio. La Tabella che riassume questa suddivisione è mostrata in Appendice 4.R. La matrice di covarianza degli *asset* sotto stress, invece, è riportata in Appendice 4.S.

4.6.2 Il portafoglio

Una volta ottenuti i singoli rendimenti degli *asset* è possibile determinare la performance attesa di portafoglio attraverso i pesi assegnati a ciascuno di essi. Si ipotizzi che le attività di portafoglio siano allocate in modo equi-ponderato e, quindi, avendo selezionato 10 *asset*, il peso di ognuno di essi sul totale sia pari al 10%. È lecito, tuttavia, chiedersi se questa scelta, semplicistica ma ampiamente diffusa nell'industria finanziaria, sia la migliore in termini di allocazione del patrimonio. Come vedremo in seguito, un buon modo per rispondere a questa domanda consiste nell'effettuare una ottimizzazione di portafoglio. Ad ogni modo,

i risultati che seguono si riferiscono per il momento al solo portafoglio equi-ponderato.

I pesi attribuiti agli *asset*, dunque, permettono di determinare il rendimento e la varianza dell'intero portafoglio. Come è legittimo attendersi da una situazione di stress, la performance mensile risulta negativa e pari a -6,86% (-82,37% annualizzata) con una deviazione standard mensile pari a 1,62% (19,49% annualizzata).

Si procede, dunque, alla scomposizione del rendimento come proposta per i rendimenti dei singoli *asset* al portafoglio totale nella Sezione 4.6.1. Tale analisi ha il pregio di ripartire la performance attesa tra i diversi fattori di rischio. La Tabella 4.9 illustra la valutazione appena esposta e mostra con colori tendenti al blu gli apporti positivi al rendimento di portafoglio mentre in tonalità rossa si evidenziano i contributi negativi.

	Pesi	Intercept	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL	Contributo al rendimento di portafoglio dagli asset
ISHARES CORE MSCI WORLD	10%	0,02	-0,22	0,18	-0,62	0,01	-0,42	-0,26	-1,32
X GLOBAL GOV BOND	10%	0,01	0,11	0,04	0,10	0,03	-0,03	-0,01	0,25
ISHARES GLOBAL CORP	10%	0,00	0,16	0,04	-0,09	0,03	-0,13	-0,07	-0,07
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	10%	-0,01	0,05	-0,11	-0,50	0,04	-0,05	-0,11	-0,68
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	10%	0,01	0,38	-0,07	-0,27	0,01	0,01	0,00	0,06
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	10%	0,01	0,38	0,04	-0,31	0,03	-0,18	-0,34	-0,36
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	10%	0,01	0,20	-0,43	-0,48	0,02	-0,22	0,03	-0,87
LYXOR REFINITIV CORE COMM	10%	0,00	-0,04	-0,08	-0,13	0,02	-0,31	-1,45	-2,00
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	10%	0,00	0,38	-0,58	-0,80	0,01	-0,24	0,07	-1,15
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	10%	0,00	0,02	0,15	-0,45	0,01	-0,25	-0,21	-0,72
Contributo al rendimento di portafoglio dalle variabili	100%	0,05	1,42	-0,83	-3,55	0,20	-1,81	-2,35	-6,86

Tabella 4.9: "Scomposizione del rendimento atteso di portafoglio tra asset e fattori di rischio"

Fonte: *Stime del candidato*

Si noti, inoltre, come il totale di colonna rappresenta il contributo alla performance attesa dello specifico fattore di rischio, mentre il totale di ogni riga rappresenta l'apporto dei vari asset. In entrambi i casi, la somma dei totali restituisce proprio il ritorno medio precedentemente espresso, come è lecito attendersi.

Lo script relativo a questa parte del programma è riportato in Appendice 4.T

4.6.3 Il VaR e l'ES di portafoglio

A questo punto, si procede con la determinazione delle due misure di rischio di cui si è maggiormente discusso nel Capitolo 2: il *Value-at-Risk* e l'*Expected Shortfall*. Sotto ipotesi di normalità del portafoglio di riferimento, infatti, il VaR può essere determinato attraverso la seguente formula

$$VaR_{T,\alpha} = \mu_T - \Phi_\alpha \sigma_T$$

Dove:

- α è il livello di probabilità scelto.
- T è l'orizzonte temporale.
- μ_T è la media della distribuzione (nel caso in esame è il rendimento medio di portafoglio sotto stress, riferito all'orizzonte previsivo T).
- Φ_α è il quantile della distribuzione normale che lascia una probabilità pari ad α alla sua sinistra.

- σ_T è la deviazione standard della distribuzione (nel caso in esame è la volatilità del portafoglio di riferimento sotto stress, riferita all'orizzonte previsivo T).

Attraverso la suddetta equazione è stato possibile ottenere il VaR su orizzonte mensile al 99% del portafoglio, risultato essere pari a -10,65%.

L'ES, invece, è stato calcolato attraverso la seguente formula:

$$ES_{T,\alpha} = \mu_T - \frac{F(\Phi_\alpha)}{(1-\alpha)} \sigma_T$$

dove con $F(\Phi_\alpha)$ funzione di ripartizione calcolata in Φ_α . L'ES di portafoglio su orizzonte mensile al 99% è risultato essere pari a -11,16%.

Un'altra statistica interessante è la probabilità di ottenere dal portafoglio un rendimento non negativo nello scenario di stress delineato in precedenza. A seguito delle *view* espresse e del livello di confidenza ad esse associato, la probabilità di una performance positiva o nulla è di appena lo 0,001%. Tali metriche non stupiscono in quanto le ipotesi utilizzate sono volutamente estreme e, senza porsi il problema dell'allocazione efficiente degli *asset* nel portafoglio, è del tutto normale ottenere risultati del genere.

Infine, si è cercato di capire come le attività selezionate impattassero sulle misure di rischio che sono state considerate. A tale fine si è effettuato una scomposizione del rischio, inteso come deviazione standard di portafoglio, del VaR e dell'ES. Per ogni misura è stata determinata la *Marginal Contribution To Risk* (MCTR), la *Total*

Contribution To Risk (TCTR) e la *Percentage Contribution To Risk* (PCTR). La contribuzione marginale al rischio (MCTR) è stata calcolata attraverso la seguente formula

$$MCTR = \frac{\partial Risk}{\partial w}$$

La contribuzione totale al rischio (TCTR) e la contribuzione percentuale al rischio (PCTR) sono, rispettivamente

$$TCTR = MCTR * w \quad e \quad PCTR = \frac{TCTR}{\sigma}$$

Lo script utilizzato per l'ottenimento di questi risultati è mostrato in Appendice 4.U mentre le scomposizioni sono riportate in Appendice 4.V.

4.6.4 Ottimizzazione di portafoglio

I risultati sopra riportati, come già detto, si riferiscono ad un portafoglio in cui i pesi degli *asset* sono assegnati in modo equo, senza alcuna distinzione. In questo ultimo paragrafo si illustra come si è cercato di ottenere una soluzione di *asset allocation* ottimale per il portafoglio in esame sotto lo scenario di stress proposto.

Ottimizzare, in altri termini, consiste nel risolvere un problema di massimizzazione o minimizzazione di una certa variabile che sia indicativa della performance o della rischiosità del portafoglio considerato, liberamente o sotto determinati vincoli.

I due problemi di ottimizzazione più ricorrenti in relazione a un portafoglio finanziario sono quelli della massimizzazione del suo rendimento e della

minimizzazione della varianza o deviazione standard. In questo contesto particolare, però, tali scelte sembrano di poca utilità. Nel primo caso, infatti, la ricerca del rendimento massimo derivante dalla selezione delle attività di portafoglio in presenza di uno scenario così negativo si conclude con una radicale allocazione delle risorse negli *asset* caratterizzati dalla migliore performance attesa. Non di rado questo porta ad un rischio di concentrazione non trascurabile. Inoltre, in scenari così negativi è più utile ragionare sui rischi che si corrono piuttosto che sulle eventuali opportunità. Tuttavia, anche il secondo caso è da escludere. Infatti, sotto ipotesi di condizioni estreme di mercato la minimizzazione dell'oscillazione intorno ad un valore medio, che con ogni probabilità è significativamente negativo, risulta essere una scelta poco logica.

Le valutazioni sopra riportate hanno portato, quindi, alla scelta del VaR quale oggetto del problema di ottimizzazione. Minimizzare il VaR, infatti, rappresenta un'opzione più coerente con le dinamiche di stress proposte, anche in termini operativi. Ancora, il suddetto problema è sottoposto anche ad alcuni vincoli. Infatti, si assume che nessun titolo può essere venduto allo scoperto e che quindi i singoli pesi debbano essere positivi ($w_i \geq 0$). Un altro vincolo considerato è che i pesi per ogni asset non debbano superare il 20% ($w_i \leq 0,2$). Tale scelta deriva da aspetti normativi imposti da autorità finanziarie, come Consob, al fine di evitare rischi di concentrazione che possono affliggere portafogli troppo sbilanciati verso l'azionario o l'obbligazionario. Infine, si ipotizza che la somma dei pesi sia pari al

100% della ricchezza disponibile (cosiddetto portafoglio *fully invested*). Lo script utilizzato in questa parte del programma è riportato in Appendice 4.W.

La Tabella 4.10 mostra l’allocazione ottima ottenuta dalla minimizzazione del VaR mensile al 99% confrontandola con quella del portafoglio equi-ponderato.

	PESI	PESI OTTIMI
ISHARES CORE MSCI WORLD	10%	0%
X GLOBAL GOV BOND	10%	20%
ISHARES GLOBAL CORP	10%	20%
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	10%	12%
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	10%	20%
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	10%	20%
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	10%	0%
LYXOR REFINITIV CORE COMM	10%	0%
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	10%	0%
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	10%	8%
	100%	100%

Tabella 4.10: “Allocazione delle attività nel portafoglio nei due casi considerati”

Fonte: *Stime del candidato*

A questo punto, si ripropongono i risultati ottenuti precedentemente nel caso del portafoglio ottimizzato. La Tabella 4.11 riporta il confronto tra i due portafogli in termini di rendimento medio, varianza e deviazione standard di portafoglio, VaR ed ES mensili al 99% e, infine, la probabilità di registrare una perdita o un guadagno nello scenario estremo ipotizzato.

	Portafoglio Base	Portafoglio Ottimizzato
Rendimento (%)	-6,86	-1,64
Varianza	2,64	1,31
Deviazione Standard	1,62	1,14
VaR (%)	-10,65	-4,30
ES (%)	-11,16	-4,66
Probabilità di profitto (%)	0,001	7,584
Probabilità di perdita (%)	99,999	92,416

Tabella 4.11: “Tabella riassuntiva dei principali risultati ottenuti nei due casi considerati”

Fonte: *Stime del candidato*

Si osservi come gli *asset* maggiormente colpiti dallo scenario ipotizzato vengono esclusi dal portafoglio ottimo, il che porta a un beneficio in termini di rendimento atteso (+5,22% su orizzonte mensile). La completa eliminazione delle attività corrispondenti ad indici azionari ed indici di materie prime, caratterizzati da una elevata volatilità, favorisce la varianza del portafoglio ottimo, che diminuisce di circa il 50%. Anche il Valore a Rischio del portafoglio migliora, con solo l'1% di probabilità di registrare una perdita superiore al 4,30%. Infine, si noti come nel portafoglio equiponderato la probabilità di non subire perdite nello scenario di stress proposto è praticamente nulla, mentre grazie all'allocazione ottima si ottiene un profitto nel 7,65% dei casi.

CONCLUSIONE

I crolli che i mercati finanziari hanno fatto registrare in periodi come la crisi finanziaria del 2008 o di Marzo 2020 hanno spinto investitori ed accademici a domandarsi se questa maggiore rischiosità fosse in qualche modo prevedibile. Viene infatti naturale chiedersi se i tradizionali presidi di gestione del rischio previsti dalle istituzioni finanziarie fossero sufficienti o se vi fosse invece la necessità di strumenti alternativi. Come si è visto, un processo di *Risk Management*, per quanto sviluppato in modo corretto, può rivelarsi inadeguato in caso di eventi estremamente negativi, per cui appare legittimo tentare di comprendere cosa potrebbe accadere ad un portafoglio finanziario, allo stato patrimoniale di una banca o alla stabilità generale dei mercati quando tali scenari estremi si verificano. Il presente studio si è posto dunque l'obiettivo di sviluppare un processo coerente di stress test applicandolo ad un portafoglio finanziario composto da ETF. La metodologia prescelta si è focalizzata su un'estensione del modello Black-Litterman all'analisi di stress test, in cui grazie alla statistica Bayesiana si è potuto valutare la performance di portafoglio in presenza di scenari analoghi o paragonabili a Marzo 2020. Il modello è stato sviluppato a partire da sei fattori di rischio estremamente sensibili agli shock finanziari e in grado di influenzare gli *asset* di portafoglio. Il *framework* quantitativo è stato sviluppato nei termini di un modello autoregressivo vettoriale in grado di generare previsioni in base all'andamento storico delle sei variabili selezionate. A questo punto, i risultati

ottenuti sono stati integrati con delle *view* qualitative che hanno replicato le dinamiche dei fattori registrate durante la recente crisi da Covid-19. Si è giunti in questo modo ad una stima dei rendimenti attesi risultante dal *blending* di una parte storico-deterministica, rappresentata dal modello VAR, e da una componente qualitativa, derivante dalle opinioni di scenario inserite. Dalle sensibilità stimate tra fattori e *asset* di portafoglio si sono quindi determinati i rendimenti delle attività e quindi la performance del portafoglio equiponderato. Come è lecito attendersi da uno scenario estremo, il rendimento atteso del portafoglio è risultato essere significativamente negativo. La performance di portafoglio è stata inoltre sottoposta ad una scomposizione con lo scopo di evidenziare quali fattori e quali attività impattano maggiormente sulla perdita attesa e quali invece la attenuano. Successivamente si è proceduto al calcolo delle due misure di rischio maggiormente trattate all'interno dell'elaborato: *Value at Risk* ed *Expected Shortfall* di portafoglio, entrambi su un orizzonte temporale mensile e ad un livello di confidenza pari al 99%. Anche in questo caso si è proceduto alla scomposizione di queste metriche tra le attività di portafoglio al fine di esaminare l'intensità con cui esse influenzano il risultato aggregato. Infine, il portafoglio finanziario di riferimento è stato oggetto di una ottimizzazione vincolata volta alla determinazione di un'allocazione più efficiente degli *asset* rispetto a quella "agnostica" dell'equidistribuzione. Si è proceduto, quindi, alla minimizzazione del VaR mensile di portafoglio al 99% sotto il vincolo per cui il valore dei singoli pesi dovesse essere compreso tra 0 e il 20%

del patrimonio totale a disposizione (100%). Tale scelta deriva da recenti orientamenti normativi delle Autorità di regolamentazione, il cui scopo consiste nell'evitare rischi di concentrazione che possono affliggere portafogli poco equilibrati. La nuova allocazione apporta dei benefici significativi alla performance attesa del portafoglio, pur restando negativo il rendimento atteso. Il portafoglio ottimo risulta essere, infatti, meno volatile grazie alla minor presenza della componente azionaria e di materie prime rispetto al caso equiponderato. VaR ed ES migliorano ed aumenta anche la probabilità di ottenere un profitto sotto lo scenario estremo ipotizzato.

Lo stress test appare, dunque, un ottimo strumento di valutazione di un portafoglio di mercato in condizioni estreme, ma comunque plausibili, di mercato. Come si è visto la sua utilità non è limitata alla determinazione di un risultato sullo scenario ipotizzato ma permette anche di mettere in pratica accorgimenti in termini di *asset allocation*, grazie al fatto di evidenziare posizioni eccessivamente sensibili alla realizzazione di determinati eventi. In particolare, l'approccio Bayesiano si distingue per una maggior tempestività nel reagire all'eventuale shock rispetto ad altre tipologie di stress test, grazie alla possibilità di incorporare le *view* immesse dall'agente, che potrebbe essere in possesso di informazioni capaci di gestire meglio o anche di anticipare certe dinamiche avverse dei mercati. È lecito, dunque, aspettarsi che questo tipo di procedura di controllo del rischio venga sempre più implementata nell'industria finanziaria negli anni a venire, non solo per scopi

regolamentari come di fatto avviene oggi, ma anche come strumento operativo a disposizione delle istituzioni finanziarie per rendere il proprio business meno vulnerabile al verificarsi di eventi estremi.

BIBLIOGRAFIA

- A.F. MCNEIL, R. FREY, P. EMBRECHTS, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton e Oxford, 2015, 699.
- A. RESTI, A. SIRONI, *Rischio e valore nelle banche. Misura, regolamentazione, gestione*. EGEA, 2021, 1000.
- F. MENONCIN, *Analisi e gestione dei rischi di mercato, di credito e operativo*, Academia Universa Press, Milano, 2011, 592.
- J.C. HULL, *Risk Management e Istituzioni Finanziarie*, Luiss University Press, Roma, 2020, 821.
- T. RONCALLI, *Handbook of Financial Risk Management*, Chapman e Hall/CRC, Londra, 2020, 1176.
- G. BARONE-ADESI, K. GIANNOPOULOS, *Non-parametric VaR Techniques. Myths and Realities*, “Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA”, 2001, 15.
- G. BARONE-ADESI, K. GIANNOPOULOS, L. VOSPER, *VaR Without Correlations for Nonlinear Portfolios*, 1998, 24.
- R. GIACOMETTI, D. MIGNACCA, *Using Black & Litterman framework for stress testing analysis in asset management*, “Dipartimento di matematica, statistica, informatica e applicazioni “Lorenzo Mascheroni””, Università degli studi di Bergamo, 2009, 16.

J. WALTERS, *The Factor Tau in the Black-Litterman Model*, SSRN, 2013, 14.

S. SHREVE, *Stochastic Calculus and Finance*, Steven E. Shreve, 1997, 348.

RIFERIMENTI

H. LUETKEPOHL, *Vector Autoregressive Models*, “Department of Economics, European University Institute”, Firenze, 2011, 33.

J. WALTERS, *The Black-Litterman Model in Detail*, 2014, 65.

APPENDICE O ALLEGATI

APPENDICE 3.A – Teorema di Bayes e derivazione formule Black-Litterman

In questa parte si fornisce una rapida panoramica del ruolo rilevante del Teorema di Bayes al fine di creare un vocabolario comune che può essere usato per analizzare il modello Black Litterman da un punto di vista Bayesiano.

Una rapida introduzione alla Teoria di Bayes

La Teoria di Bayes afferma che

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Dove

- $P(A|B)$ rappresenta la probabilità condizionale di A dato B; essa è anche conosciuta come la distribuzione a posteriori (come viene chiamata da qui in avanti in questo elaborato).
- $P(B|A)$ è la probabilità condizionale di B dato A. È anche conosciuta come la distribuzione di campionamento. Da questo punto in avanti viene chiamata distribuzione condizionale.
- $P(A)$ è la probabilità di A, anche detta distribuzione a priori.
- $P(B)$ rappresenta la probabilità di B ed è conosciuta come costante normalizzante.

In realtà, quando si applica questa formula e si risolve per la distribuzione a posteriori, $P(B)$ scompare nelle costanti di integrazione; da qui in avanti, quindi, questa componente viene ignorata. Un problema generale nell'usare la Teoria di Bayes è identificare una distribuzione a priori intuitiva e trattabile. Una delle assunzioni cardine del modello BL è che i rendimenti delle attività sono distribuiti come una Normale. Per queste ragioni ci si confina al caso di distribuzioni condizionali e a priori normalmente distribuite. Una volta che gli inputs del modello sono normalmente distribuiti, allora segue che anche i risultati si distribuiscono nello stesso modo. Quando le distribuzioni a priori e a posteriori hanno la stessa struttura, quella a priori è nota come “*conjugate prior*”, o “*prior coniugata*”.

Un'altra assunzione chiave del modello BL è che la varianza delle distribuzioni a priori e di quella condizionale è nota, mentre la media non lo è. Questo caso, conosciuto come “*Media Sconosciuta e Varianza Nota*” è ben documentato nella letteratura Bayesiana.

A questo punto, si definisce le citate significanti distribuzioni:

La distribuzione a priori

$$P(A) \sim N(x, S/n)$$

Dove S è la varianza campionaria della distribuzione con una numerosità campionaria pari ad n. S/n, quindi, è la varianza della stima di x.

La distribuzione condizionale

$$P(B|A) \sim N(\mu, \Omega)$$

Ω è l'incertezza nella stima μ della media; essa non è la varianza della distribuzione intorno alla media.

La distribuzione a posteriori è specificata da:

$$P(A|B) \sim N([\Omega^{-1}\mu + nS^{-1}x]^{-1}, (\Omega^{-1} + nS^{-1})^{-1})$$

Il termine che indica la varianza nella formula appena descritta rappresenta la varianza della media stimata intorno alla media attuale.

Nella statistica Bayesiana l'inverso della varianza è conosciuto come la precisione. È possibile descrivere la media a posteriori come una media ponderata tra la media a priori e quella condizionale, dove i pesi sono le rispettive precisioni. Inoltre, la precisione a posteriori è la somma della precisione a priori e di quella condizionale. È necessario che le precisioni a priori e condizionale non siano infinito e che la loro somma non sia zero. Una precisione infinita

corrisponderebbe ad una varianza pari a 0, cioè una confidenza assoluta. Una precisione nulla, dall'altro lato, porterebbe ad una varianza infinita, cioè una totale incertezza.

Quando $P(A) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$ e $P(B|A) \sim N(Q, \Omega)$, come descritto nel Paragrafo IV.4.1 allora tramite Teorema di Bayes si arriva a definire una distribuzione a posteriori $P(A|B)$ distribuita come una normale ed in cui media e varianza corrispondono proprio a Π_{BL} e Σ_{BL} , cioè i risultati del modello Black-Litterman.

APPENDICE 3.B – Derivazione formula alternativa dei rendimenti Black-Litterman

In questa Appendice si presenta una derivazione della formulazione alternativa per i rendimenti attesi a posteriori proposti dal modello Black-Litterman.

Si parte, appunto, da

$$\Pi_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Quindi si separa le parti del secondo termine

$$\Pi_{BL} = \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}\Pi\} + \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

Si sostituisce la precisione nel primo termine con la forma alternativa ottenuta tramite l'Identità matriciale di Woodbury¹, e cioè:

$$\Sigma_{BL} = \tau\Sigma - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma$$

Ottenendo quindi:

$$\Pi_{BL} = \{[\tau\Sigma - \tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\tau\Sigma](\tau\Sigma)^{-1}\Pi\} + \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{(\tau\Sigma)(\tau\Sigma)^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{(\tau\Sigma)[I_n + P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{(\tau\Sigma)[I_n + P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma]^{-1}(P'\Omega^{-1}Q)\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{(\tau\Sigma)[I_n + P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma]^{-1}(\Omega(P')^{-1})^{-1}Q\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{\tau\Sigma[\Omega(P')^{-1} + P\tau\Sigma]^{-1}Q\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{\tau\Sigma P'(P')^{-1}[\Omega(P')^{-1} + P\tau\Sigma]^{-1}Q\}$$

$$\Pi_{BL} = \{\Pi - [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}P\Pi]\} + \{\tau\Sigma P'[\Omega + P\tau\Sigma P']^{-1}Q\}$$

Da cui si ottiene la forma alternativa di Black-Litterman per il rendimento atteso

$$\Pi_{BL} = \Pi + [\tau\Sigma P'(P\tau\Sigma P' + \Omega)^{-1}](Q - P\Pi).$$

¹ In matematica, particolarmente in algebra lineare, l'identica matriciale di Woodbury per matrici di aspetto nxn è data dalla seguente formula:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

Dove A e UCV sono matrici nxn, mentre C è una matrice quadrata che può avere aspetto diverso rxr, conseguentemente U ha aspetto nxr e v aspetto rxn.

APPENDICE 4.A - Schede informative degli ETF inclusi nell'universo investibile di riferimento.

ISHARES CORE MSCI WORLD

Valuta di base	USD	Gestore	BlackRock Asset Management Ireland Limited
Asset Class	Azionario	Società emittente	iShares III plc
Rendimento da prestito titoli	0,02	Amministratore	State Street Fund Services (Ireland) Limited
Data di lancio	25/09/2009	Depositario	State Street Custodial Services (Ireland) Limited
Total Expense Ratio	0,20	Prezzo di creazione	-
Lancio del fondo	25/09/2009	Utilizzo dei rendimenti	Ad Accumulazione
Indice benchmark	MSCI World Index(SM)	Prezzo di risoluzione	-
Frequenza di distribuzione	Nessuna	Attività nette del Fondo	USD 43.857.301.189,16
Domicilio	Irlanda	Asset netti	USD 42.057.213.415,16
Metodologia	Ottimizzazione	Valuta della serie	USD
Struttura del prodotto	Fisico	Azioni in circolazione	487.764.660,00
Frequenza di ribilanciamento	Trimestrale	Livello dell'indice benchmark	9.460,14
Conformità UCITS	Si	Scadenza media ponderata	0,00
Conformità ISA	Si	Cedola media ponderata	0,02
SIPP disponibile	Si	Duration modificata	0,00
ISIN	IE00B4L5Y983	Duration effettiva	0,00
Qualifica di distributore/di rendicontazione nel Regno Unito	Nein/Ja	Convessità media	-
Ticker Bloomberg	SWDA IM	Rendimento alla scadenza medio ponderato	0,00
Numero di partecipazioni	1.559,00	Spread corretto sulla base dell'opzione	0,00

X GLOBAL GOV BOND

Numero Contratti	12,00	Prezzo di riferimento	254,43 - 08/30/21
Controvalore	102.534,78	Max Anno	256,97 - 08/19/21
Volume totale	404,00	Min Anno	243,01 - 05/19/21
Tipo strumento	ETF	Performance 1 mese	-0,28%
Classe	Class 1 Bond Index ETF	Performance 6 mesi	2,50%
Codice Alfanumerico	XG7S	Performance da inizio anno	-0,05%
Codice Isin	LU0908508731	Performance 1 anno	-0,66%
Lotto Minimo	1,00	Emittente	Xtrackers II
Commissioni totali annue	0,00	Segmento	Index ETFs
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Benchmark	FTSE WORLD GOV BOND UNHEDGED
Valuta di Denominazione	EUR	Stile Benchmark	Obbligazionario
Reuters Ric Strumento	XG7S.MI	Area Benchmark	TITOLI DI STATO - MONDO
INAV - Reuters Ric	XG7SNAV=DBFT	EMS	7,90
Bloomberg Ticker Strumento	XG7S IM	Obblighi di quotazione (Max spread)	1,50%
INAV - Bloomberg Ticker		Dividendi	

ISHARES GLOBAL CORP

Valuta di base	USD	Qualifica di distributore/di rendicontazione nel Regno Unito	Nein/Ja
Data di lancio	24/09/2012	Ticker Bloomberg	CORP IM
Lancio del fondo	24/09/2012	Numero di partecipazioni	9.990,00
Attività nette del Fondo	USD 3.308.173.672,95	Gestore	BlackRock Asset Management Ireland Limited
Asset netti	USD 1.296.799.548,03	Società emittente	iShares plc
Valuta della serie	USD	Amministratore	State Street Fund Services (Ireland) Limited
Asset Class	Reddito Fisso	Depositario	State Street Custodial Services (Ireland) Limited
Rendimento da prestito titoli	0,01	Prezzo di creazione	-
Total Expense Ratio	0,20	Utilizzo dei rendimenti	Distribuzione
Indice benchmark	Bloomberg Global Aggregate Corporate Bond Index	Prezzo di risoluzione	-
Frequenza di distribuzione	Semestrale	Azioni in circolazione	12.126.038,00
Domicilio	Irlanda	Livello dell'indice benchmark	293,21
Metodologia	Campionamento	Scadenza media ponderata	9,69
Struttura del prodotto	Fisico	Cedola media ponderata	3,04
Frequenza di ribilanciamento	Mensile	Duration modificata	7,36
Conformità UCITS	Si	Duration effettiva	7,25
Conformità ISA	Si	Convessità media	0,74
SIPP disponibile	Si	Rendimento alla scadenza medio ponderato	1,57
ISIN	IE00B7J7TB45	Spread corretto sulla base dell'opzione	88,86

ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR

Valuta di base	USD	Gestore	BlackRock Asset Management Ireland Limited
Asset Class	Reddito Fisso	Società emittente	iShares plc
Rendimento da prestito titoli	0,05	Amministratore	State Street Fund Services (Ireland) Limited
Data di lancio	13/11/2012	Depositario	State Street Custodial Services (Ireland) Limited
Total Expense Ratio	0,50	Prezzo di creazione	-
Indice benchmark	Markit iBoxx Global Developed Markets Liquid High Yield Capped Index	Utilizzo dei rendimenti	Distribuzione
Frequenza di distribuzione	Semestrale	Prezzo di risoluzione	-
Domicilio	Irlanda	Asset netti	USD 981.579.802,58
Metodologia	Campionamento	Azioni in circolazione	9.911.157,00
Struttura del prodotto	Fisico	Livello dell'indice benchmark	171,76
Frequenza di ribilanciamento	Mensile	Scadenza media ponderata	3,82
Conformità UCITS	Si	Cedola media ponderata	4,36
Conformità ISA	Si	Duration modificata	4,30
SIPP disponibile	Si	Duration effettiva	1,39
ISIN	IE00B74DQ490	Convessità media	-0,02
Qualifica di distributore/di rendicontazione nel Regno Unito	Nein/Ja	Rendimento alla scadenza medio ponderato	3,17
Ticker Bloomberg	HYLD IM	Spread corretto sulla base dell'opzione	265,54
Numero di partecipazioni	2.006,00		

X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR

Bloomberg Ticker Strumento	XGIN IM	Prezzo di riferimento	263,90 - 30/08/21
iNAV - Bloomberg Ticker	XGIN IM Equity	Max Anno	264,27 - 30/08/21
Numero Contratti	55,00	Min Anno	241,11 - 30/08/21
Controvalore	503,433.04	Performance 1 mese	0,00
Volume totale	1,87	Performance 6 mesi	0,08
Tipo strumento	ETF	Performance da inizio anno	0,04
Classe	Class 1 Bond Index ETF	Performance 1 anno	0,06
Codice Alfanumerico	XGIN	Emittente	Xtrackers II
Codice Isin	LU0290357929	Segmento	Index ETFs
Lotto Minimo	1,00	Benchmark	BLOOMBERG WORLD GOVERNMENT INFLATION-LINKED BOND
Commissioni totali annue	0,00	Stile Benchmark	Obbligazionario
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Area Benchmark	INFLAZIONE
Valuta di Denominazione	EUR	EMS	8,00
Reuters Ric Strumento	XGIN.MI	Obblighi di quotazione (Max spread)	0,01
iNAV - Reuters Ric	XGINEURINAV=SOLA	Dividendi	

AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF

Bloomberg Ticker Strumento	AGEB IM	Prezzo di riferimento	126,70 - 30/08/21
iNAV - Bloomberg Ticker	IEGEB	Max Anno	127,46 - 20/08/21
Numero Contratti	4,00	Min Anno	116,01 - 09/03/21
Controvalore	577.607,08	Performance 1 mese	0,01
Volume totale	4.559,00	Performance 6 mesi	0,08
Tipo strumento	ETF	Performance da inizio anno	0,03
Classe	Classe 1 Ind Obbligazionario	Performance 1 anno	0,05
Codice Alfanumerico	AGEB	Emittente	Amundi Index Solutions
Codice Isin	LU1681041205	Segmento	ETF Indicizzati
Lotto Minimo	1,00	Benchmark	MARKIT IBOXX \$ LIQUID EMERGING MARKETS SOVEREIGNS
Commissioni totali annue	0,00	Stile Benchmark	Obbligazionario
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Area Benchmark	TITOLI DI STATO - EMERGENTI
Valuta di Denominazione	USD	EMS	16.400,00
Reuters Ric Strumento	AGEB.MI	Obblighi di quotazione (Max spread)	0,02
iNAV - Reuters Ric	IEGEBINAV.PA	Dividendi	

SPDR GLOBAL CONVERTIBLE

Bloomberg Ticker Strumento	CONV IM	Prezzo di riferimento	45,615 - 30/08/21
iNAV - Bloomberg Ticker	INZPRCE	Max Anno	47,60 - 16/02/21
Numero Contratti	9,00	Min Anno	41,845 - 14/05/21
Controvalore	83.954,03	Performance 1 mese	0,02
Volume totale	1.846,00	Performance 6 mesi	0,02
Tipo strumento	ETF	Performance da inizio anno	0,07
Classe	Classe 1 Ind Obbligazionario	Performance 1 anno	0,18
Codice Alfanumerico	CONV	Emittente	SSgA SPDR ETFs Europe II plc
Codice Isin	IE00BNH72088	Segmento	ETF Indicizzati
Lotto Minimo	1,00	Benchmark	THOMSON REUTERS QUALIFIED GLOBAL CONVERTIBLE TRN
Commissioni totali annue	0,01	Stile Benchmark	Obbligazionario
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Area Benchmark	OBBLIGAZIONARIO CORPORATE - MONDO
Valuta di Denominazione	USD	EMS	44.700,00
Reuters Ric Strumento	CONV.MI	Obblighi di quotazione (Max spread)	0,02
iNAV - Reuters Ric	.INZPRCE	Dividendi	Semestrale

LYXOR REFINITIV CORE COMM

Bloomberg Ticker Strumento	CRB IM	Prezzo di riferimento	17,516 - 30/08/21
iNAV - Bloomberg Ticker	CRBEURIV	Max Anno	17,658 - 27/07/21
Numero Contratti	44,00	Min Anno	12,956 - 04/01/21
Controvalore	189.549,45	Performance 1 mese	0,01
Volume totale	10.755,00	Performance 6 mesi	0,17
Tipo strumento	ETF	Performance da inizio anno	0,36
Classe	Classe 2 Ind Azionario	Performance 1 anno	0,43
Codice Alfanumerico	CRB	Emittente	Multi Units Luxembourg
Codice Isin	LU1829218749	Segmento	ETF Indicizzati
Lotto Minimo	1,00	Benchmark	REFINITIV/CORECOMMODITY CRB NON-ENERGY TOTAL RETUR
Commissioni totali annue	0,00	Stile Benchmark	Altro
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Area Benchmark	COMMODITIES
Valuta di Denominazione	EUR	EMS	148.500,00
Reuters Ric Strumento	CRB.MI	Obblighi di quotazione (Max spread)	0,03
iNAV - Reuters Ric	CRBEURINAV=SOA	Dividendi	

SPDR GLOBAL REAL ESTATE

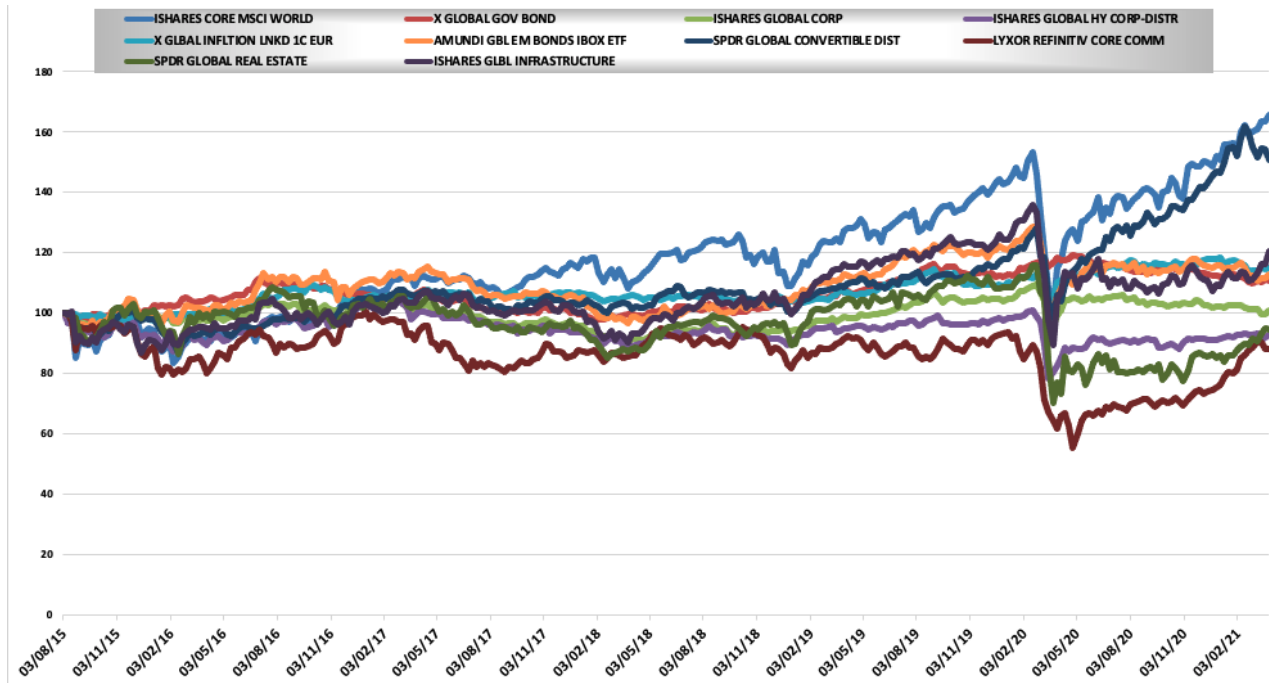
Bloomberg Ticker Strumento	GLRE IM	Prezzo di riferimento	35,005 - 30/08/21
iNAV - Bloomberg Ticker	INZPRE	Max Anno	35,035 - 06/08/21
Numero Contratti	11,00	Min Anno	26,91 - 13/01/21
Controvalore	55.184,54	Performance 1 mese	0,01
Volume totale	1.580,00	Performance 6 mesi	0,21
Tipo strumento	ETF	Performance da inizio anno	0,27
Classe	Classe 2 Ind Azionario	Performance 1 anno	
Codice Alfanumerico	GLRE	Emittente	SSGA SPDR ETFS EUROPE I
Codice Isin	IE00B8GF1M35	Segmento	ETF Indicizzati
Lotto Minimo	1,00	Benchmark	DJ GLOBAL SELECT REAL ESTATE SECURITIES TRN
Commissioni totali annue	0,00	Stile Benchmark	Altro
Commissioni entrata uscita Performance	NO	Area Benchmark	REAL ESTATE
Valuta di Denominazione	USD	EMS	72.300,00
Reuters Ric Strumento	GLRE.MI	Obblighi di quotazione (Max spread)	0,02
iNAV - Reuters Ric	.INZPRE	Dividendi	Trimestrale

ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE

Valuta di base	USD	Gestore	BlackRock Asset Management Ireland Limited
Asset Class	Azionario	Società emittente	iShares II plc
Rendimento da prestito titoli	0,05	Amministratore	State Street Fund Services (Ireland) Limited
Data di lancio	20/10/2006	Depositario	State Street Custodial Services (Ireland) Limited
Total Expense Ratio	0,65	Prezzo di creazione	-
Indice benchmark	FTSE Global Core Infrastructure Index	Utilizzo dei rendimenti	Distribuzione
Frequenza di distribuzione	Trimestrale	Prezzo di risoluzione	-
Domicilio	Irlanda	Asset netti	USD 1.426.586.688,28
Metodologia	Replica	Azioni in circolazione	43.777.690,00
Struttura del prodotto	Fisico	Livello dell'indice benchmark	3.462,95
Frequenza di ribilanciamento	Trimestrale	Scadenza media ponderata	0,00
Conformità UCITS	Si	Cedola media ponderata	0,13
Conformità ISA	Si	Duration modificata	0,00
SIIP disponibile	Si	Duration effettiva	0,00
ISIN	IE00B1FZ5467	Convessità media	-
Qualifica di distributore/di rendicontazione nel Regno Unito	Si/Si	Rendimento alla scadenza medio ponderato	0,00
Ticker Bloomberg	INFR IM	Spread corretto sulla base dell'opzione	0,00
Numero di partecipazioni	238,00		

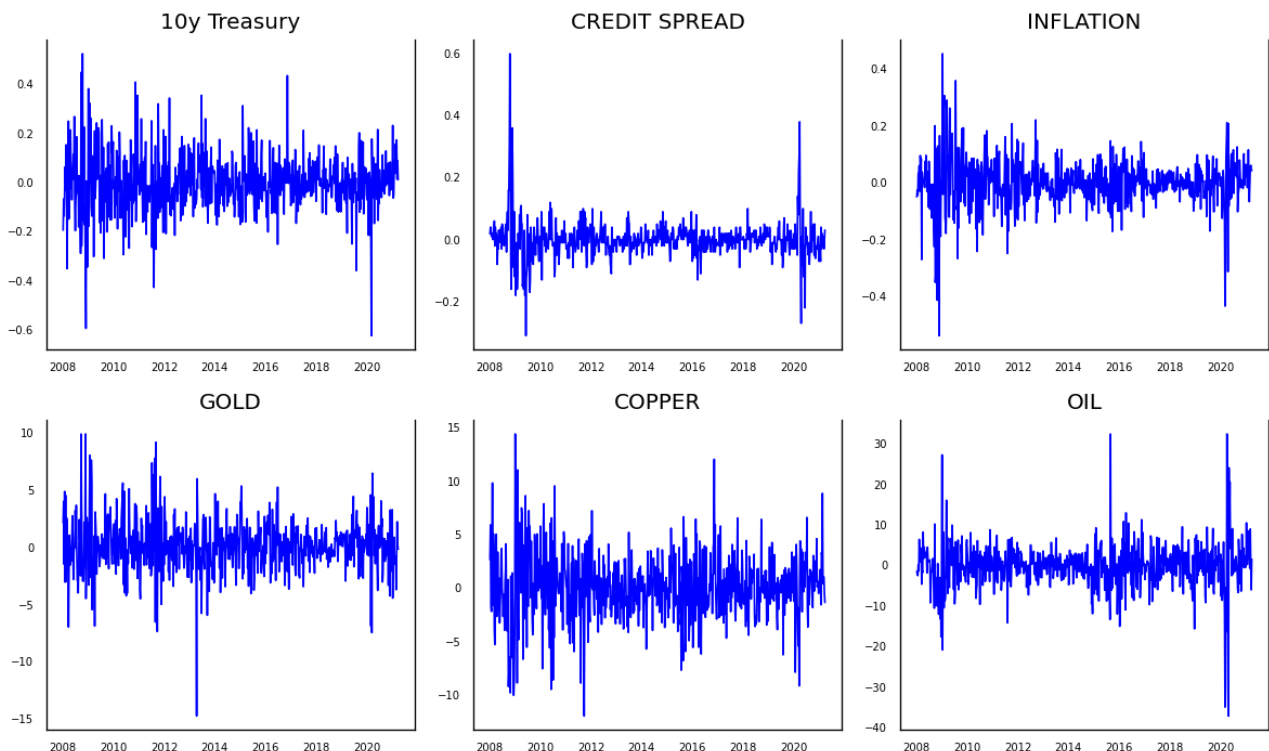
APPENDICE 4.B – Serie storiche ETF ribasate

In questa parte dell'Appendice vengono riportate le serie storiche degli ETF utilizzati a partire dal 10-08-2015, data di inizio delle osservazioni dell'attività con profondità di dati inferiore. Le serie storiche sono state ribasate a 100 per rendere più confrontabili le loro variazioni nel tempo. Tale scelta ha anticipato di una settimana (03-08-2015) la data di inizio del grafico.



APPENDICE 4.C – Serie storiche fattori di rischio in rendimenti

In questa Appendice si mostrano le serie storiche dei rendimenti dei fattori di rischio del modello. L'intervallo temporale è di 13 anni e 3 mesi e la frequenza di campionamento è settimanale.



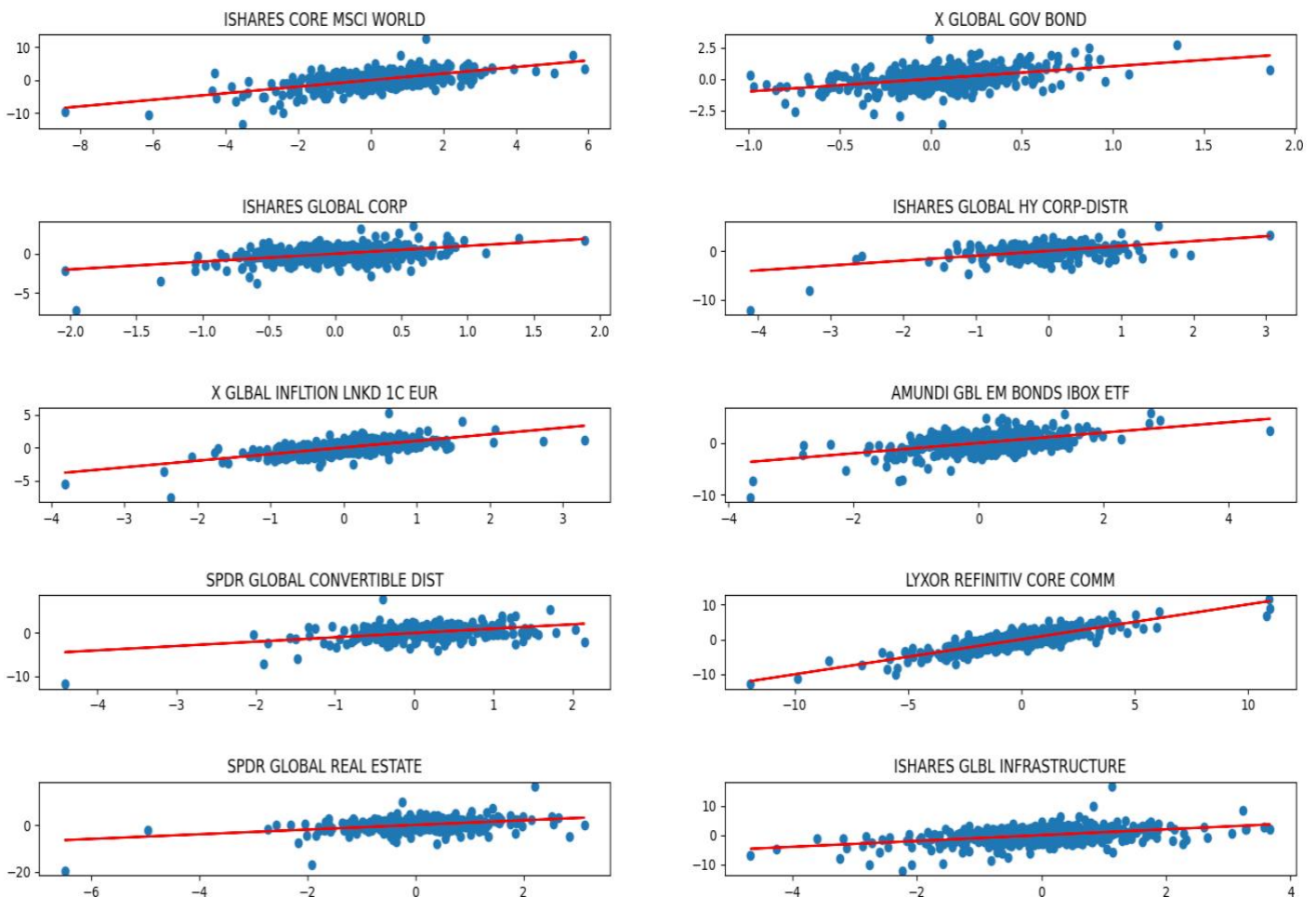
APPENDICE 4.D – Matrice di Correlazione di fattori di rischio ed ETF

	ISHARES CORE MSCI WORLD	X GLOBAL GOV BOND	ISHARES GLOBAL CORP	ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	X GLOBAL INFILTON LIND 1C EUR	AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	LYXOR REFINITIV CORE COMM	SPDR GLOBAL REAL ESTATE	ISHARES GBL INFRASTRUCTURE	3m Bill	10y Treasury	CREDIT SPREAD	INFLATION	USD/EUR	GOLD	COPPER	OIL
ISHARES CORE MSCI WORLD	1																	
X GLOBAL GOV BOND	0.08	1																
ISHARES GLOBAL CORP	0.56	0.49	1															
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	0.49	0.34	0.68	1														
X GLOBAL INFILTON LIND 1C EUR	0.12	0.33	0.49	0.38	1													
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	0.69	0.34	0.79	0.59	0.42	1												
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	0.55	0.13	0.45	0.36	0.30	0.42	1											
LYXOR REFINITIV CORE COMM	0.54	-0.01	0.29	0.34	-0.01	0.49	0.27	1										
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	0.43	0.11	0.44	0.32	0.38	0.40	0.69	0.20	1									
ISHARES GBL INFRASTRUCTURE	0.83	0.24	0.65	0.47	0.35	0.70	0.54	0.38	0.59	1								
3m Bill	0.29	-0.16	0.16	0.33	0.06	0.22	0.17	0.29	0.22	0.25	1							
10y Treasury	0.33	-0.46	-0.25	0.05	-0.50	-0.10	0.06	0.34	-0.01	0.07	0.43	1						
CREDIT SPREAD	-0.10	-0.08	-0.15	-0.14	0.01	-0.16	-0.18	-0.23	-0.14	-0.04	-0.16	0.00	1					
INFLATION	0.45	-0.27	0.00	0.30	0.12	0.20	0.28	0.38	0.27	0.30	0.39	0.56	-0.01	1				
USD/EUR	0.30	0.38	0.55	0.30	-0.12	0.46	-0.02	0.31	-0.13	0.22	0.03	0.02	-0.14	-0.22	1			
GOLD	-0.24	-0.06	-0.23	-0.08	0.40	-0.16	0.10	-0.24	0.18	-0.07	-0.09	-0.30	0.11	0.19	-0.75	1		
COPPER	0.19	-0.33	-0.23	-0.04	0.00	-0.12	0.24	0.18	0.24	0.09	0.10	0.25	-0.05	0.40	-0.53	0.37	1	
OIL	0.28	-0.19	-0.04	0.17	-0.01	0.22	0.13	0.78	0.13	0.15	0.29	0.33	-0.09	0.45	-0.11	0.05	0.31	1

APPENDICE 4.E – Script delle regressioni lineari multiple

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import seaborn as sns
4 import pandas as pd
5 from sklearn.linear_model import LinearRegression
6 from sklearn.model_selection import train_test_split
7 from sklearn.metrics import mean_squared_error
8 from sklearn.metrics import r2_score
9 from scipy import stats
10 import statsmodels.api as sm
11
12 df_finale = pd.DataFrame()
13 mse_r2 = pd.DataFrame()
14 JB_LB_Test = pd.DataFrame()
15 coefficienti = pd.DataFrame()
16 coefficienti.insert(0, column = 'Variables', value = ['Intercept', '3m Bill', '10y Treasury', 'CREDIT SPREAD', 'INFLATION','USD/EUR', 'GOLD', 'COPPER', 'OIL'])
17 matrice_diagonale_covarianza_residui = np.zeros((10, 10))
18
19 etf = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/etf_weekly.xlsx', index_col='Dates')
20 v_w_eur = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/rend_w_eur.xlsx', index_col='Dates')
21 v_w_usd = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/rend_w_usd.xlsx', index_col='Dates')
22
23
24 # vettori dei nomi degli ETF e delle date di inizio delle regressioni per ogni ETF
25 etf_name = ['ISHARES CORE MSCI WORLD', 'X GLOBAL GOV BOND', 'ISHARES GLOBAL CORP', 'ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR', 'X GLOBAL INFLATION LNKD 1C EUR',
26            'AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF', 'SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST', 'LYXOR REFINITIV CORE COMM', 'SPDR GLOBAL REAL ESTATE', 'ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE']
27 start = ['2010-1-25', '2013-10-28', '2013-5-27', '2015-08-10', '2008-1-7', '2011-3-28', '2015-5-4', '2008-1-7', '2013-5-13', '2008-1-7']
28 end = '2021-3-29'
29
30 # il Bill e l'inflazione hanno deviazioni standard consistenti rispetto alle altre variabili
31 plt.subplot(4,3,1)
32 sns.boxplot(data=v_w_eur)
33
34 # Creazione dell' algoritmo per la regressione lineare
35 i = 0
36 while i<10:
37
38     X = v_w_eur.loc[start[i] : end]
39     Y = etf.loc[start[i] : end, etf_name[i]]
40
41     lreg = LinearRegression()
42     lreg.fit(X, Y)
43     Y_pred = lreg.predict(X)
44     params = np.append(lreg.intercept_, lreg.coef_)
45     beta_contribution = np.zeros(9)
46     beta_contribution[0] = params[0]
47     coeff_riga = pd.DataFrame()
48     coeff_riga.insert(0, column = 'Variables', value = ['Intercept', '3m Bill', '10y Treasury', 'CREDIT SPREAD', 'INFLATION','USD/EUR', 'GOLD', 'COPPER', 'OIL'])
49     coeff_riga.insert(1, column = etf_name[i], value = params)
50
51     if i == 0:
52         coefficienti.insert(0, column = etf_name[i], value = params)
53     else:
54         coefficienti = pd.merge(coefficienti, coeff_riga, on = 'Variables')
55     score = lreg.score(X, Y)
56     mse_and_r2 = np.append(mean_squared_error(Y, Y_pred), r2_score(Y, Y_pred))
57     residui = Y - Y_pred
58     residui_array = residui.to_numpy()
59     matrice_diagonale_covarianza_residui[i,i] = np.var(residui_array)
60     JB_LB = np.append(stats.jarque_bera(residui), sm.stats.acorr_ljungbox(residui, boxpierce=True, lags=[5], return_df=False))
61     JB_LB_Test[etf_name[i]] = JB_LB
62
63     mse_r2['MSE - R-squared %s' % etf_name[i]] = mse_and_r2
64
65     # calcolo il p-value
66     newX = np.append(np.ones((len(X),1)), X, axis=1)
67     MSE = (sum((Y-Y_pred)**2))/(len(newX)-len(newX[0]))
68     # funzione .dot calcola il prodotto scalare tra due vettori
69     var = MSE*(np.linalg.inv(np.dot(newX.T,newX)).diagonal())
70     sd = np.sqrt(var)
71     ts = params / sd
72
73     p_values = [2*(1-stats.t.cdf(np.abs(r), len(newX)-len(newX[0]))) for r in ts]
74
75     sd = np.round(sd,3)
76     ts = np.round(ts,3)
77     p_values = np.round(p_values,3)
78     params = np.round(params,3)
79
80     df_finale["Coefficients %s" % etf_name[i], df_finale["Standard Error %s" % etf_name[i]] = [params, sd]
81     df_finale["t ratio %s" % etf_name[i], df_finale["P-value %s" % etf_name[i]] = [ts, p_values]
82
83     plt.subplot(4,3,i+2)
84     plt.scatter(Y_pred, Y)
85     plt.plot(Y_pred, Y_pred, color = 'red')
86     i += 1
87
88 matrice_diagonale_covarianza_residui_df = pd.DataFrame(matrice_diagonale_covarianza_residui)
89 matrice_diagonale_covarianza_residui_df.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/mat_diag_cov_res.xlsx')
90 coefficienti.set_index('Variables', inplace = True)
91 coefficienti.transpose().to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/parametri_reg.xlsx')
```

APPENDICE 4.F – Rappresentazione delle regressioni lineari multiple tra asset e fattori di rischio



APPENDICE 4.G – Modello vettoriale autoregressivo

In questa Appendice si espone nel dettaglio le caratteristiche, la stima e l'analisi del modello vettoriale autoregressivo (VAR)².

Il modello vettoriale autoregressivo

Si supponga di essere interessati ad un insieme formato da K serie storiche di variabili raccolte nel vettore:

$$y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})$$

Tale vettore K-dimensionale viene detto *integrato di ordine d* ($I(d)$) se, essendo le singole serie non stazionarie in covarianza, tale non stazionarietà possa essere rimossa differenziando le variabili d volte. Un insieme di variabili $I(d)$ è detto *cointegrato* se esiste una combinazione lineare di un ordine di integrazione inferiore. In tal caso, le variabili hanno una componente di andamento comune. Per facilità di esposizione, si assume che tutte le variabili possono essere o $I(0)$ (cioè, assenti da andamenti stocastici) o $I(1)$ (ovvero, presentano andamenti stocastici).

² Fonte: H. LUETKEPOHL, “*Vector Autoregressive Models*”, European University Institute, Firenze, 2011.

Data l'importanza di distinguere tra componente stocastica e deterministica, è conveniente separare le due parti del vettore y_t assumendo che:

$$y_t = \mu_t + x_t$$

dove

- μ_t è la componente deterministica;
- x_t rappresenta un processo puramente stocastico con media zero.

Il termine deterministico μ_t è descritto al massimo da una funzione lineare del tempo ($\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t$), potrebbe essere zero ($\mu_t = 0$) o solamente una costante ($\mu_t = \mu_0$). La parte stocastica, x_t , potrebbe essere $I(1)$ e, quindi, includere trend stocastici e relazioni di cointegrazione. Le proprietà di y_t sono determinate da quelle di μ_t e x_t . In particolare, l'ordine delle relazioni di integrazione e cointegrazione è determinato da x_t .

Si supponga che la componente stocastica x_t sia un processo VAR di ordine p (VAR(p)) della forma:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + u_t$$

Dove:

- A_i per ($i = 1, \dots, p$) sono le matrici dei parametri ($K \times K$);
- $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})$ è un processo K -dimensionale *white noise*³ e dunque indipendentemente ed identicamente distribuito, ossia $u_t \sim IID(0, \Sigma_u)$

Attraverso l'operatore di ritardo L , che sposta indietro di un periodo l'indice temporale di una variabile⁴, è possibile definire le matrici A_i come:

$$A(L) = I_K - A_1 L - \dots - A_p L^p$$

dove I_K è una matrice identità $K \times K$. Allora il processo può essere riscritto in modo equivalente come:

$$A(L)x_t = u_t$$

Il processo VAR è *stazionario*

$$\det A(z) = \det(I_K - A_1 z - \dots - A_p z^p) \neq 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1.$$

dove \mathbb{C} rappresenta l'insieme dei numeri complessi. In tal caso, $x_t \in I(0)$; esso ha media, varianze e covarianze costanti per questo motivo è appunto definito *stazionario*. In caso contrario, solo alcune o al limite anche tutte le variabili sono integrate. In tal caso il processo è non-stazionario e le variabili potrebbero essere tra loro cointegrate.

Si ricordi che x_t è la parte stocastica (potenzialmente non osservata) mentre y_t rappresenta il vettore delle variabili osservate. Premoltiplicando per $A(L)$, considerando $A(L)y_t = A(L)\mu_t + u_t$, si mostra come y_t eredita la rappresentazione del VAR(p) da x_t . Inoltre, se $\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t$, allora $A(L)y_t = v_0 + v_1 t + u_t$

$$y_t = v_0 + v_1 t + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$$

dove:

- $v_0 = (I_K - \sum_{j=1}^p A_j)\mu_0 + (\sum_{j=1}^p j A_j)\mu_1$;
- $v_1 = (I_K - \sum_{j=1}^p A_j)\mu_1$.

Se i parametri v_i , $i = 0, 1$, non sono soggetti a restrizioni, le variabili potrebbero avere trend quadratici qualora $y_t \sim I(1)$. Quindi, lo schema additivo iniziale del modello proposto ($y_t = \mu_t + x_t$) impone restrizioni su questi parametri deterministici. Generalmente questo tipo di approccio rende necessario valutare i termini suddetti all'inizio dell'analisi, impiegando l'ordine polinomiale appropriato. Generalmente l'impostazione additiva rende necessario pensare ai termini deterministici all'inizio dell'analisi e considerare l'ordine polinomiale appropriato. A volte gli aggiustamenti di tendenza

³ Un processo stocastico u_t è chiamato *white noise* se le variabili del processo sono IID con valore atteso nullo e matrice di covarianza $\Sigma_u = E(u_t u_t')$.

⁴ Ad esempio, per una variabile y_t , $L y_t = y_{t-1}$.

vengono eseguiti prima di un'analisi VAR. Il motivo è che la parte stocastica delle variabili è spesso di principale interesse nell'analisi econometrica perché è vista come la descrizione delle relazioni comportamentali. In tal caso potrebbe non esserci alcun termine deterministico nella forma dei livelli VAR.

Usando la terminologia della letteratura sulle equazioni simultanee, il modello appena formulato è detto in *forma ridotta* perché tutte le variabili del lato destro sono ritardate o predeterminate. Le relazioni istantanee tra le variabili sono riassunte nella matrice di covarianza dei residui.

La stima del VAR

Il VAR in *forma ridotta* può essere stimato con i metodi standard. Metodi come i classici minimi quadrati e massima verosimiglianza sono discussi in questo paragrafo.

Si consideri un modello VAR(p) scritto in forma compatta:

$$y_t = [v_0, v_1, A_1, \dots, A_p]Z_{t-1} + u_t$$

dove $Z_{t-1} = (1, t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$.

Il termine deterministico può essere aggiustato a seconda del fatto che ci sia o una o nessuna costante nel modello. Dati un campione di dimensione T , (y_1, \dots, y_T) , e p vettori di osservazioni precedenti al campione, (y_{-p+1}, \dots, y_0) , i parametri possono essere stimati efficientemente con il metodo dei minimi quadrati ordinari, *Ordinary Least Squares* (OLS), separatamente per ogni equazione. Lo stimatore è semplicemente:

$$[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p] = \left(\sum_{t=1}^T y_t Z_{t-1}' \right) \left(\sum_{t=1}^T Z_t Z_{t-1}' \right)^{-1}$$

Tale stimatore è identico a quello dei minimi quadrati generalizzati, *Generalized Least Squares* (GLS), se non sono imposte restrizioni sui parametri. Per un processo y_t distribuito normalmente, dove $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$, questo stimatore è anche equivalente allo stimatore della massima verosimiglianza. Quindi, lo stimatore possiede le usuali proprietà asintotiche desiderabili degli stimatori corretti. Esso è asintoticamente distribuito normalmente con la più piccola matrice di covarianza asintotica possibile (raggiunge cioè il limite di Cramer-Rao) e le usuali procedure di inferenza sono applicabili se il processo è stabile. In questo caso le statistiche test possono essere utilizzate per verificare la significatività dei singoli coefficienti, così come per definire intervalli di confidenza. Inoltre, gli F-test possono essere utilizzati per testare ipotesi statistiche per insiemi di parametri. Naturalmente, queste procedure sono valide solo asintoticamente e non in piccoli campioni. Se venissero imposte restrizioni ai parametri, la stima OLS potrebbe essere inefficiente e sarebbe più opportuno utilizzare la stima GLS.

Checking del modello

Le procedure per verificare se il modello VAR rappresenta adeguatamente il *Data Generating Process* (DGP) delle variabili vanno da test formali delle ipotesi sottostanti a procedure informali come l'ispezione di grafici di residui e autocorrelazioni. Se uno specifico modello in forma ridotta non è una rappresentazione adeguata del DGP, qualsiasi forma strutturale basata su di esso non può rappresentare bene il DGP. Test formali per l'autocorrelazione residua, la non normalità e l'eteroschedasticità condizionale sono tipici per valutare un modello VAR in forma ridotta. Per maggiori dettagli si veda, ad esempio, H. LUETKEPOHL (2004).

APPENDICE 4.H - Script del modello VAR

```
1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from statsmodels.tsa.api import VAR
5 from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
6 from statsmodels.tools.eval_measures import rmse, aic
7 from statsmodels.tsa.stattools import grangercausalitytests
8 from statsmodels.tsa.vector_ar.vecm import coint_johansen
9 from statsmodels.stats.stattools import durbin_watson
10
11 # Importo i dati
12 df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/rend_w_eur.xlsx', index_col='Dates')
13 df.dropna(inplace=True)
14
15 fig, axes = plt.subplots(nrows=2, ncols=4, dpi=120, figsize=(10,6))
16 for i, ax in enumerate(axes.flatten()):
17     data = df[df.columns[i]]
18     ax.plot(data, color='red', linewidth=1)
19
20     ax.set_title(df.columns[i])
21     ax.xaxis.set_ticks_position('none')
22     ax.yaxis.set_ticks_position('none')
23     ax.spines["top"].set_alpha(0)
24     ax.tick_params(labelsize=6)
25
26 plt.tight_layout()
27
28 # Testo la causalità attraverso il Granger-causality test
29 maxlag = 5
30 test = 'ssr_chi2test'
31 def grangers_causation_matrix(data, variables, test='ssr_chi2test', verbose=False):
32     df = pd.DataFrame(np.zeros((len(variables), len(variables))), columns=variables, index=variables)
33     for c in df.columns:
34         for r in df.index:
35             test_result = grangercausalitytests(data[[r, c]], maxlag=maxlag, verbose=False)
36             p_values = [round(test_result[i+1][0][test][1],4) for i in range(maxlag)]
37             if verbose: print(f'Y = {r}, X = {c}, P Values = {p_values}')
38             min_p_value = np.min(p_values)
39             df.loc[r, c] = min_p_value
40     df.columns = [var + '_x' for var in variables]
41     df.index = [var + '_y' for var in variables]
42     return df
43
44 grangers_causation_matrix(df, variables = df.columns).to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/granger.xlsx')
45
46 # Controllo la stazionarietà o non stazionarietà della serie storiche
47 def adfuller_test(series, signif=0.05, name='', verbose=False):
48     r = adfuller(series, autolag='AIC')
49     output = {'test_statistic':round(r[0], 4), 'pvalue':round(r[1], 4), 'n_lags':round(r[2], 4), 'n_obs':r[3]}
50     p_value = output['pvalue']
51     def adjust(val, length= 6): return str(val).ljust(length)
52
53     print(f' Augmented Dickey-Fuller Test on "{name}"', "\n ", '-'*47)
54     print(f' Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.')
55     print(f' Significance Level = {signif}')
56     print(f' Test Statistic = {output["test_statistic"]}')
57     print(f' No. Lags Chosen = {output["n_lags"]}')
58
59     for key,val in r[4].items():
60         print(f' Critical value {adjust(key)} = {round(val, 3)}')
61
62     if p_value <= signif:
63         print(f" => P-Value = {p_value}. Rejecting Null Hypothesis.")
64         print(f" => Series is Stationary.")
65     else:
66         print(f" => P-Value = {p_value}. Weak evidence to reject the Null Hypothesis.")
67         print(f" => Series is Non-Stationary.")
68
69 # Posiziono l'ADF Test su ogni colonna
70 for name, column in df.iteritems():
71     adfuller_test(column, name=column.name)
72     print('\n')
73
74 # Il minimo AIC è per un lag order pari a 10
75 model = VAR(df)
76 x = model.select_order(maxlags=5)
77 x.summary()
78
79 # Eseguo il modello a 2 ritardi (lag)
80 model_fitted = model.fit(1)
81 model_fitted.summary()
82 sigma_u_df = model_fitted.sigma_u
83
84 sigma_u = sigma_u_df.to_numpy()
```

```

85 sigma_u_mod_annualized = np.zeros((8,8))
86
87 for i in np.arange(8):
88     for j in np.arange(8):
89         if i == j:
90             sigma_u_mod_annualized[i,i] = np.sqrt(sigma_u[i,i]*52)
91         else:
92             sigma_u_mod_annualized[i,j] = sigma_u[i,j]/(np.sqrt(sigma_u[i,i])*np.sqrt(sigma_u[j,j]))
93
94 sigma_df = pd.DataFrame(sigma_u_mod_annualized, columns=sigma_u_df.columns, index=sigma_u_df.index)
95
96 # Test statistico di Durbin Watson rilevare la presenza di autocorrelazione dei residui
97 out = durbin_watson(model_fitted.resid)
98 for col, val in zip(df.columns, out):
99     print(col, ':', round(val, 2))
100
101 lag_order = model_fitted.k_ar
102
103 # Input data per le previsioni
104 forecast_input = df.values[-lag_order:]
105
106 #Orizzonte temporale
107 horizon = 4
108
109 #Previsione
110 fc = model_fitted.forecast(y=forecast_input, steps=horizon)
111 df_forecast = pd.DataFrame(fc, columns=df.columns)
112 df_forecast.insert(0, column='Dates', value=['2021-4-7', '2021-4-14', '2021-4-21', '2021-4-28'])
113
114
115 #Definisco la funzione che mi da il rendimento cumulato (n = numero di settimane, nel nostro caso può essere 1,2,3 o 4 settimane)
116 def variab_result(previsione, n):
117     df = pd.DataFrame(previsione, columns=previsione.columns)
118     if n==1:
119         result = pd.DataFrame(df.iloc[0], columns=df.columns)
120     else:
121         mat_somma = pd.DataFrame(columns = ['Dates', '10y Treasury', 'CREDIT SPREAD', 'B-E INFLATION'])
122         prodotto = pd.DataFrame(columns = ['Dates', 'GOLD', 'COPPER', 'OIL'])
123         somma1 = df['10y Treasury'].iloc[0:n].sum()
124         somma2 = df['CREDIT SPREAD'].iloc[0:n].sum()
125         somma3 = df['B-E INFLATION'].iloc[0:n].sum()
126         mat_somma['Dates'] = previsione['Dates'].iloc[[n-1]]
127         mat_somma['10y Treasury'] = somma1
128         mat_somma['CREDIT SPREAD'] = somma2
129         mat_somma['B-E INFLATION'] = somma3
130
131         df[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] /= 100
132         df[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] += 1
133
134         prodotto2 = df['GOLD'].iloc[0:n].prod()
135         prodotto3 = df['COPPER'].iloc[0:n].prod()
136         prodotto4 = df['OIL'].iloc[0:n].prod()
137         prodotto['Dates'] = previsione['Dates'].iloc[[n-1]]
138         prodotto['GOLD'] = prodotto2
139         prodotto['COPPER'] = prodotto3
140         prodotto['OIL'] = prodotto4
141
142         prodotto[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] -= 1
143         prodotto[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] *= 100
144
145         result = pd.merge(left=mat_somma, right=prodotto, on='Dates')
146     return result
147
148 # scegliere il numero di settimane che si vuole
149 numero = input('Inserire il numero di settimane (da 1 a 4) di cui avere la previsione: ')
150 n = int(numero)
151 for_cum = variab_result(df_forecast, n)
152
153 #Esporto il rendimento cumulato in Excel
154 for_cum.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/for_month.xlsx')
155

```

APPENDICE 4.I – Augmented Dickey Fuller test

Augmented Dickey-Fuller Test on "10y Treasury"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-7,233
No. Lags Chosen	11,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

Augmented Dickey-Fuller Test on "GOLD"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-27,113
No. Lags Chosen	0,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

Augmented Dickey-Fuller Test on "CREDIT SPREAD"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-50,827
No. Lags Chosen	20,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

Augmented Dickey-Fuller Test on "COPPER"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-5,484
No. Lags Chosen	19,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

Augmented Dickey-Fuller Test on "INFLATION"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-9,483
No. Lags Chosen	5,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

Augmented Dickey-Fuller Test on "OIL"

Null Hypothesis: Data has unit root. Non-Stationary.	
Significance Level	0,050
Test Statistic	-8,112
No. Lags Chosen	6,000
Critical value 1%	-3,440
Critical value 5%	-2,866
Critical value 10%	-2,569
=> P-Value	0,000
=> Series is Stationary.	Rejecting Null Hypothesis.

APPENDICE 4.J – Risultati regressioni modello VAR

In questa Appendice si fornisce in formato tabulare un riepilogo del modello VAR stimato.

Summary of Regression Results	
Model:	VAR
Method:	OLS
Date:	Sat, 28, Aug, 2021
Time:	14:43:25

No. of Equations	6,00000	BIC:	-8,03318
Nobs:	690,000	HQIC:	-8,20251
Log likelihood:	-2965,69	FPE:	0,00025
AIC:	-8,30933	Det(Omega_mle):	0,00023

Results for equation 10y Treasury				
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value
const	-0,0030	0,0050	-0,6990	0,4850
L1. 10y Treasury	-0,1143	0,0457	-2,5040	0,0120
L1. CREDIT SPREAD	-0,1520	0,0777	-1,9530	0,0510
L1. B-E INFLATION	0,0209	0,0609	0,3440	0,7310
L1. GOLD	-0,0019	0,0021	-0,9020	0,3670
L1. COPPER	0,0012	0,0016	0,7560	0,4500
L1. OIL	0,0013	0,0009	1,4400	0,1500

Results for equation BREAK-EVEN INFLATION				
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value
const	-0,0002	0,0033	-0,0700	0,9440
L1. 10y Treasury	0,0095	0,0329	0,2880	0,7730
L1. CREDIT SPREAD	-0,1196	0,0561	-2,1320	0,0330
L1. B-E INFLATION	-0,0800	0,0439	-1,8200	0,0690
L1. GOLD	-0,0007	0,0015	-0,4460	0,6560
L1. COPPER	0,0043	0,0012	3,6410	0,0000
L1. OIL	0,0008	0,0007	1,2380	0,2160

Results for equation GOLD				
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value
const	0,1540	0,0877	1,7550	0,0790
L1. 10y Treasury	-0,9903	0,8763	-1,1300	0,2580
L1. CREDIT SPREAD	1,6209	1,4914	1,0870	0,2770
L1. B-E INFLATION	2,3183	1,1685	1,9840	0,0470
L1. GOLD	-0,0467	0,0399	-1,1690	0,2430
L1. COPPER	0,0583	0,0314	1,8560	0,0630
L1. OIL	-0,0156	0,0176	-0,8850	0,3760

Results for equation CREDIT SPREAD					
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value	
const	-0,0005	0,0020	-0,2240	0,8220	
L1. 10y Treasury	0,0473	0,0203	2,3280	0,0200	
L1. CREDIT SPREAD	0,3485	0,0346	10,0800	0,0000	
L1. B-E INFLATION	-0,1094	0,0271	-4,0400	0,0000	
L1. GOLD	0,0020	0,0009	2,2000	0,0280	
L1. COPPER	-0,0025	0,0007	-3,4840	0,0000	
L1. OIL	-0,0012	0,0004	-2,9050	0,0040	

Results for equation COPPER					
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value	
const	0,1058	0,1189	0,8900	0,3730	
L1. 10y Treasury	0,1550	1,1879	0,1310	0,8960	
L1. CREDIT SPREAD	-6,0508	2,0218	-2,9930	0,0030	
L1. B-E INFLATION	1,3439	1,5840	0,8480	0,3960	
L1. GOLD	0,0210	0,0541	0,3880	0,6980	
L1. COPPER	0,0548	0,0426	1,2870	0,1980	
L1. OIL	-0,0125	0,0239	-0,5210	0,6020	

Results for equation OIL					
	Coefficient	std. error	t-stat	p-value	
const	-0,1519	0,2147	-0,7070	0,4790	
L1. 10y Treasury	-1,4795	2,1446	-0,6900	0,4900	
L1. CREDIT SPREAD	-2,1599	3,6500	-0,5920	0,5540	
L1. B-E INFLATION	7,2322	2,8597	2,5290	0,0110	
L1. GOLD	-0,0503	0,0977	-0,5150	0,6070	
L1. COPPER	-0,0398	0,0768	-0,5180	0,6040	
L1. OIL	0,0176	0,0432	0,4070	0,6840	

Correlation matrix of residuals						
	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL
10y Treasury	1	-0,0831	0,4373	-0,2566	0,3006	0,3247
CREDIT SPREAD	-0,0831	1	-0,1908	0,0104	-0,0881	-0,0595
B-E INFLATION	0,4373	-0,1908	1	-0,0232	0,2898	0,3358
GOLD	-0,2566	0,0104	-0,0232	1	0,0542	0,0362
COPPER	0,3006	-0,0881	0,2898	0,0542	1	0,3829
OIL	0,3247	-0,0595	0,3358	0,0362	0,3829	1

APPENDICE 4.K – Test di Durbin-Watson
 Tabella dei risultati del test di Durbin-Watson.

Statistica di Durbin Watson	
10y Treasury :	1,98
CREDIT SPREAD :	2,10
B-E INFLATION :	2,00
GOLD :	2,02
COPPER :	2,01
OIL :	2,00

APPENDICE 4.L – Granger-causality test

Tabella dei risultati del test di causalità di Granger.

	10y Treasury_x	CREDIT SPREAD_x	INFLATION_x	GOLD_x	COPPER_x	OIL_x
10y Treasury_y	1,00	0,01	0,08	0,49	0,12	0,02
CREDIT SPREAD_y	0,01	1,00	0,00	0,10	0,00	0,00
INFLATION_y	0,00	0,00	1,00	0,30	0,00	0,01
GOLD_y	0,00	0,47	0,07	1,00	0,07	0,00
COPPER_y	0,01	0,00	0,00	0,19	1,00	0,11
OIL_y	0,00	0,00	0,01	0,19	0,27	1,00

APPENDICE 4.M – Matrice di covarianza modificata dei rendimenti del modello VAR

In questa Appendice si riporta la matrice di covarianza modificata generata dal modello VAR su orizzonte mensile. Il termine “modificata” sta a significare che la suddetta matrice non riporta al di fuori della diagonale, come di consueto, i valori della covarianza tra due variabili bensì la loro correlazione, mentre la diagonale principale è occupata dalle deviazioni standard. Questa scelta ha il mero scopo di facilitare la comprensione della relazione che lega due delle variabili del set. Questa matrice particolare è stata sviluppata con il solo obiettivo di essere utilizzata nella reportistica del lavoro e non è stata mai usata all’interno del modello.

	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL
10y Treasury	0,12	-0,08	0,44	-0,26	0,30	0,32
CREDIT SPREAD	-0,08	0,05	-0,19	0,01	-0,09	-0,06
B-E INFLATION	0,44	-0,19	0,09	-0,02	0,29	0,34
GOLD	-0,26	0,01	-0,02	2,29	0,05	0,04
COPPER	0,30	-0,09	0,29	0,05	3,11	0,38
OIL	0,32	-0,06	0,34	0,04	0,38	5,61

APPENDICE 4.N – Script Analisi Previsioni VAR

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from statsmodels.tsa.api import VAR
5
6 # Importo i dati
7 df = pd.read_excel(r'Users/riccardostizza/Desktop/rend_w_eur.xlsx', index_col='Dates')
8 df.dropna(inplace=True)
9
10 def variab_result(previsione, n):
11     df = pd.DataFrame(previsione, columns=previsione.columns)
12     if n==1:
13         result = pd.DataFrame(df.iloc[0], columns=df.columns)
14     else:
15         mat_somma = pd.DataFrame(columns = ['Dates', '10y Treasury', 'CREDIT SPREAD', 'INFLATION'])
16         prodotto = pd.DataFrame(columns = ['Dates', 'GOLD', 'COPPER', 'OIL'])
17         somma2 = df['10y Treasury'].iloc[0:n].sum()
18         somma3 = df['CREDIT SPREAD'].iloc[0:n].sum()
19         somma4 = df['INFLATION'].iloc[0:n].sum()
20         mat_somma['Dates'] = previsione['Dates'].iloc[[n-1]]
21         mat_somma['10y Treasury'] = somma2
22         mat_somma['CREDIT SPREAD'] = somma3
23         mat_somma['INFLATION'] = somma4
24
25         df[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] /= 100
26         df[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] += 1
27
28         prodotto2 = df[['GOLD']].iloc[0:n].prod()
29         prodotto3 = df[['COPPER']].iloc[0:n].prod()
30         prodotto4 = df[['OIL']].iloc[0:n].prod()
31         prodotto['Dates'] = previsione['Dates'].iloc[[n-1]]
32         prodotto['GOLD'] = prodotto2
33         prodotto['COPPER'] = prodotto3
34         prodotto['OIL'] = prodotto4
35
36         prodotto[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] -= 1
37         prodotto[['GOLD', 'COPPER', 'OIL']] *= 100

```



```

38         result = pd.merge(left=mat_somma, right=prodotto, on='Dates')
39         return result
40
41
42
43 act_month = pd.DataFrame()
44 for_month = pd.DataFrame()
45
46 nobs = 4
47 while nobs<274:
48     df_train, df_test = df[0:-nobs], df[-nobs:]
49     model = VAR(df_train)
50     model_fitted = model.fit(maxlags=5, ic='hqic')
51     lag_order = model_fitted.k_ar
52     input_data = df_train.values[-lag_order:]
53     fc = model_fitted.forecast(y=input_data, steps=4)
54     df_forecast = pd.DataFrame(fc, columns=df.columns)
55     df_test.reset_index(inplace=True)
56     df_forecast.insert(0, column='Dates', value=df_test['Dates'])
57     if nobs == 4:
58         act_month = act_month.append(variab_result(df_test, 4))
59         for_month = for_month.append(variab_result(df_forecast, 4))
60     else:
61         act_month = act_month.append(variab_result(df_test[0:4], 4))
62         for_month = for_month.append(variab_result(df_forecast, 4))
63     nobs+=4
64
65 act_month.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/act.xlsx')
66 for_month.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/for.xlsx')

```

APPENDICE 4.O - Script relativo alla formula di Bayes

```

1
2 import numpy as np
3 import pandas as pd
4
5 forecast = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/for_month.xlsx')
6 forecast.drop(['Unnamed: 0', 'Dates'], axis = 'columns', inplace = True)
7 exp_return_hor = forecast.to_numpy()
8 print(forecast)
9 # sigma u = matrice di covarianza (NxN) stimata dal modello quantitativo
10 sigma_u_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/sigma_u.xlsx')
11 sigma_u_df.drop(['Unnamed: 0'], axis = 'columns', inplace = True)
12 sigma_u = sigma_u_df.to_numpy()
13 sigma_u_hor = sigma_u * 4
14
15 # Q = vettore contenente le view qualitative (Kx1)
16 Q_riga = np.matrix([-0.84, 1.03, -0.71, 2.17, -16.66, -60.44])
17 Q = Q_riga.T
18
19 # C vettore delle confidence Kx1
20 C = np.array([0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.80, 0.80])
21
22 # P è la matrice di selezione delle view (KxN) che è usata per scegliere l'asset class specifica su cui vorremmo esprimere la view qualitativa
23 # praticamente è una matrice di 0 e 1
24 P = np.zeros((len(Q), 6))
25 P[0][0] = 1
26 P[1][1] = 1
27 P[2][2] = 1
28 P[3][3] = 1
29 P[4][4] = 1
30 P[5][5] = 1
31
32 # t (tau) = coefficiente di affidabilità assegnato alla previsione quantitativa, minore tau maggiore l'affidabilità
33 tau = 1/691
34
35 #omega, matrice di covarianza delle view (KxK)
36 omega = np.zeros((len(Q), len(Q)))
37
38 for i in np.arange(len(Q)):
39     omega_parte1 = (1/C[i]-1)*np.dot(P[i:i+1, 0:], tau*sigma_u_hor)
40     omega[i,i] = np.dot(omega_parte1, P[i:i+1, 0:].T)
41

```

```

42 #FORMULA BAYES
43 Pt_inv_omega = np.dot(P.T, np.linalg.inv(omega))
44 Pt_inv_omega_P = np.dot(Pt_inv_omega, P)
45 parte_prima = np.linalg.inv(np.linalg.inv(tau*sigma_u_hor)+Pt_inv_omega_P)
46
47 tau_inv_sigma_exp_ret = np.dot(np.linalg.inv(tau*sigma_u_hor), exp_return_hor.T)
48 Pt_inv_omega_Q = np.dot(Pt_inv_omega, Q)
49 parte_seconda = tau_inv_sigma_exp_ret + Pt_inv_omega_Q
50
51 # posteriori expected return
52 exp_ret_hor_BL = np.dot(parte_prima, parte_seconda)
53
54 # covariance matrix
55 sigma_hor_BL = sigma_u_hor + parte_prima
56
57 exp_ret_hor_BL_df = pd.DataFrame(exp_ret_hor_BL)
58 sigma_hor_BL_df = pd.DataFrame(sigma_hor_BL)
59
60 sigma_BL_hor_mod = np.zeros((8,8))
61
62 for i in np.arange(8):
63     for j in np.arange(8):
64         if i == j:
65             sigma_BL_hor_mod[i,i] = np.sqrt(sigma_hor_BL[i,i])
66         else:
67             sigma_BL_hor_mod[i,j] = sigma_hor_BL[i,j]/(np.sqrt(sigma_hor_BL[i,i])*np.sqrt(sigma_hor_BL[j,j]))
68
69 #hor si riferisce alle quattro settimane
70 exp_ret_hor_BL_df.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/rend_BL.xlsx')
71 sigma_hor_BL_df.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/sigma_BL.xlsx')
72

```

APPENDICE 4.P – Matrice di covarianza dei rendimenti dei fattori nello scenario considerato

In questa Appendice si riporta la matrice di covarianza della distribuzione a posteriori su orizzonte mensile, ottenuta dal *blending* dei rendimenti generati dal modello quantitativo (VAR) con le *view* private, in questo caso derivate dall'analisi di scenario ipotizzata. Anche in questo caso per agevolare la lettura dei risultati si riporta la matrice di covarianza modificata come già fatto per l'Appendice 5.M.

	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL
10y Treasury	0,24	-0,08	0,44	-0,26	0,30	0,32
CREDIT SPREAD	-0,08	0,11	-0,19	0,01	-0,09	-0,06
B-E INFLATION	0,44	-0,19	0,17	-0,02	0,29	0,34
GOLD	-0,26	0,01	-0,02	4,59	0,05	0,04
COPPER	0,30	-0,09	0,29	0,05	6,22	0,38
OIL	0,32	-0,06	0,34	0,04	0,38	11,23

APPENDICE 4.Q - Script contenente l'ottenimento del vettore dei rendimenti e della matrice di covarianza degli asset sotto stress

```

1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3 from scipy.stats import norm
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 fig, ax = plt.subplots(1, 1)
7
8 parametri_reg_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/parametri_reg.xlsx', index_col = 'Unnamed: 0')
9 matrice_diagonale_covarianza_residui_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/mat_diag_cov_res.xlsx', index_col = 'Unnamed: 0')
10
11 # vettore intercette = Nx1
12 intercette_df = pd.DataFrame()
13 intercette_df['Intercept'] = parametri_reg_df['Intercept']
14
15 # matrice dei beta = NxK
16 parametri_reg_df.drop(['Intercept'], axis = 'columns', inplace = True)
17
18 # rendimenti fattori con views = Kx1
19 rend_fattori_BL_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/rend_BL.xlsx')
20 rend_fattori_BL_df.drop(['Unnamed: 0'], axis = 'columns', inplace = True)
21
22 # matrice di covarianza con views = KxK
23 sigma_fattori_BL_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/sigma_BL.xlsx')
24 sigma_fattori_BL_df.drop(['Unnamed: 0'], axis = 'columns', inplace = True)
25
26 intercette = intercette_df.to_numpy()
27 betas = parametri_reg_df.to_numpy()
28 matrice_diagonale_covarianza_residui = matrice_diagonale_covarianza_residui_df.to_numpy()
29 rend_fattori_BL = rend_fattori_BL_df.to_numpy()
30 sigma_fattori_BL = sigma_fattori_BL_df.to_numpy()
31
32 # vettore rendimento atteso degli etf dopo lo stress
33 rendimento_atteso_st = intercette + np.dot(betas, rend_fattori_BL)
34 rend_asset_df = pd.DataFrame(rendimento_atteso_st)
35
36 # matrice di covarianza con view di stress
37 betas_sigmaBL = np.dot(betas, sigma_fattori_BL)
38 matrice_covarianza_st = np.dot(betas_sigmaBL, betas.T) + matrice_diagonale_covarianza_residui
39
40

```

APPENDICE 4.R – Tabella scomposizione rendimento degli asset tra i fattori di rischio

In questa Appendice si mostra la Tabella contenente la scomposizione del rendimento delle attività di portafoglio tra le diverse variabili selezionate per il modello. I valori evidenziati in blu forniscono un apporto positivo al rendimento totale del singolo asset mentre quelli in rosso un apporto negativo. I restanti colori si riferiscono a casi intermedi.

	Intercept	10y Treasury	CREDIT SPREAD	B-E INFLATION	GOLD	COPPER	OIL	Totale
ISHARES CORE MSCI WORLD	0,23	-2,20	1,79	-6,22	0,05	-4,24	-2,57	-13,15
X GLOBAL GOV BOND	0,05	1,06	0,44	0,99	0,31	-0,26	-0,13	2,46
ISHARES GLOBAL CORP	0,01	1,56	0,36	-0,92	0,30	-1,30	-0,68	-0,66
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	-0,06	0,51	-1,11	-4,95	0,37	-0,46	-1,11	-6,81
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	0,05	3,79	-0,72	-2,67	0,07	0,08	-0,04	0,57
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	0,10	3,85	0,39	-3,06	0,31	-1,77	-3,41	-3,60
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	0,09	2,02	-4,32	-4,81	0,18	-2,21	0,32	-8,73
LYXOR REFINITIV CORE COMM	-0,03	-0,44	-0,82	-1,31	0,22	-3,10	-14,50	-19,98
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	0,04	3,84	-5,79	-8,02	0,14	-2,42	0,66	-11,55
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	0,03	0,20	1,52	-4,48	0,06	-2,45	-2,06	-7,18

APPENDICE 4.S – Matrice di covarianza modificata degli asset sotto stress

In questa Appendice viene riportata la matrice di covarianza modificata degli asset sotto lo scenario di stress ipotizzato.

	ISHARES CORE MSCI WORLD	X GLOBAL GOV BOND	ISHARES GLOBAL CORP	ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	X GLBAL INFLTION LNKD IC EUR	AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	LYXOR REFINITIV CORE COMM	SPDR GLOBAL REAL ESTATE	ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE
ISHARES CORE MSCI WORLD	3,68	-0,23	0,23	0,49	-0,13	0,32	0,47	0,66	0,39	0,58
X GLOBAL GOV BOND	-0,23	1,17	0,43	0,08	0,34	0,31	0,04	-0,04	0,01	-0,11
ISHARES GLOBAL CORP	0,23	0,43	1,36	0,40	0,37	0,54	0,38	0,33	0,32	0,25
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	0,49	0,08	0,40	2,09	0,25	0,46	0,52	0,45	0,47	0,43
X GLBAL INFLTION LNKD IC EUR	-0,13	0,34	0,37	0,25	1,30	0,43	0,30	-0,09	0,34	0,02
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	0,32	0,31	0,54	0,46	0,43	2,28	0,44	0,48	0,40	0,34
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	0,47	0,04	0,38	0,52	0,30	0,44	2,29	0,38	0,53	0,41
LYXOR REFINITIV CORE COMM	0,66	-0,04	0,33	0,45	-0,09	0,48	0,38	4,23	0,29	0,52
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	0,39	0,01	0,32	0,47	0,34	0,40	0,53	0,29	3,45	0,35
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	0,58	-0,11	0,25	0,43	0,02	0,34	0,41	0,52	0,35	2,76

APPENDICE 4.T - Script del calcolo del rendimento e della varianza di portafoglio sotto stress

```

428 # Pesi di portafoglio equal-weight --> X ha dimensione (10,1) - Nx1
429 X_riga = np.matrix([0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1])
430 X = X_riga.T
431
432 # rendimento totale portafoglio
433 rendimento_atteso_portafoglio = np.dot(X.T, rendimento_atteso_st)
434 print('Il rendimento atteso di portafoglio è: ', rendimento_atteso_portafoglio)
435
436 # deviazione standard di portafoglio
437 X_T_matrice_covarianza_st = np.dot(X.T, matrice_covarianza_st)
438
439 variance_portafoglio = np.dot(X_T_matrice_covarianza_st, X)
440
441 standard_deviation_portafoglio = np.sqrt(variance_portafoglio)
442 print('La deviazione standard di portafoglio è: ', standard_deviation_portafoglio)
443

```

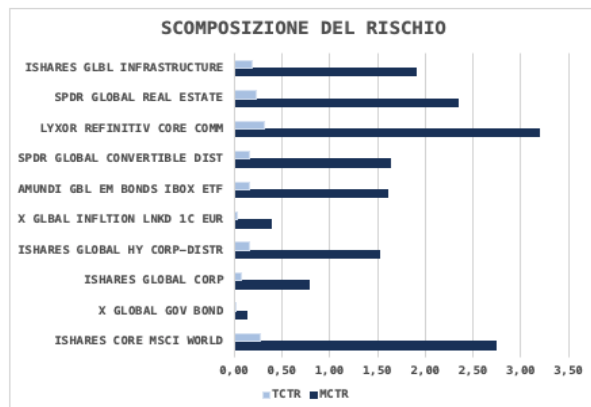
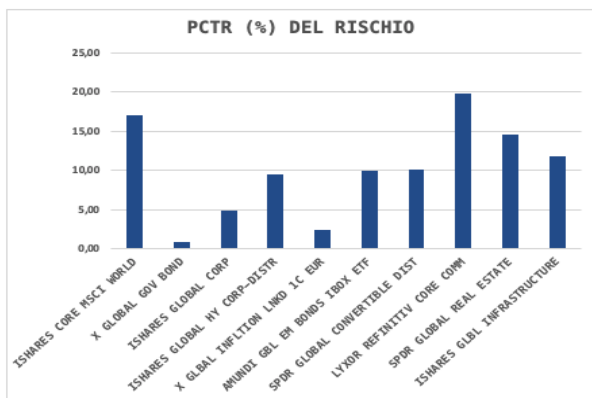
APPENDICE 4.U - Script utilizzato per il calcolo del VaR, dell'ES e per le scomposizioni

```
444
445 #Calcolo VaR ed ES di portafoglio dato un certo alpha
446 alpha = 0.99
447
448 VaR_99_portafoglio = rendimento_atteso_portafoglio - 2.33 * standard_deviation_portafoglio
449 ES_99_portafoglio = rendimento_atteso_portafoglio - standard_deviation_portafoglio * norm.ppf(2.33) / (1 - alpha)
450 print('Il VaR è: ', VaR_99_portafoglio)
451 print('L ES è: ', ES_99_portafoglio)
452
453
454 #estraggo dalle matrici i numeri rispettivamente del rend e della dev stand del portafoglio
455 loc = rendimento_atteso_portafoglio[0,0]
456 scale = standard_deviation_portafoglio[0,0]
457
458 #disegna la distribuzione
459 fig, ax = plt.subplots(1, 1)
460 p = np.linspace(norm.ppf(0.001, loc=loc, scale=scale), norm.ppf(0.999, loc=loc, scale=scale), 10000)
461 plt.xlim(-10, 2)
462 plt.ylim(0, .30)
463 ax.plot(p, norm.pdf(p, loc=loc, scale=scale), 'b-', lw=5, alpha=0.6, label='portfolio return pdf')
464 plt.show()
465
466 #Scomposizione di rischio della volatilità
467 MCTR_var = np.dot(matrice_covarianza_st, X) / standard_deviation_portafoglio
468 TCTR_var = np.multiply(MCTR_var, X)
469 PCTR_var = 100 * (TCTR_var / standard_deviation_portafoglio)
470
471 scomposizione_var = pd.DataFrame(index=['ISHARES CORE MSCI WORLD', 'X GLOBAL GOV BOND', 'ISHARES GLOBAL CORP', 'ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR', 'X GLBAL INFLTION LNKD IC EUR',
472                                     'AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF', 'SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST', 'LYXOR REFINITIV CORE COMM', 'SPDR GLOBAL REAL ESTATE', 'ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE'])
473 scomposizione_var['MCTR'], scomposizione_var['TCTR'], scomposizione_var['PCTR (%)'] = [MCTR_var, TCTR_var, PCTR_var]
474 scomposizione_var.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/ST_6/scomposizione_volatilità_6.xlsx')
475
476 #Scomposizione di rischio del VaR
477 beta_scomposizione = np.dot(matrice_covarianza_st, X) / variance_portafoglio
478 MCTR_VaR = np.multiply(VaR_99_portafoglio, beta_scomposizione)
479 TCTR_VaR = np.multiply(MCTR_VaR, X)
480 PCTR_VaR = 100 * (TCTR_VaR / VaR_99_portafoglio)
481
482 scomposizione_VaR = pd.DataFrame(index=['ISHARES CORE MSCI WORLD', 'X GLOBAL GOV BOND', 'ISHARES GLOBAL CORP', 'ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR', 'X GLBAL INFLTION LNKD IC EUR',
483                                     'AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF', 'SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST', 'LYXOR REFINITIV CORE COMM', 'SPDR GLOBAL REAL ESTATE', 'ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE'])
484 scomposizione_VaR['MCTR'], scomposizione_VaR['TCTR'], scomposizione_VaR['PCTR (%)'] = [MCTR_VaR, TCTR_VaR, PCTR_VaR]
485 scomposizione_VaR.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/ST_6/scomposizione_VaR_6.xlsx')
486
487 #Scomposizione di rischio dell'ES
488 MCTR_ES = np.multiply(ES_99_portafoglio, beta_scomposizione)
489 TCTR_ES = np.multiply(MCTR_ES, X)
490 PCTR_ES = 100 * (TCTR_ES / ES_99_portafoglio)
491
492 scomposizione_ES = pd.DataFrame(index=['ISHARES CORE MSCI WORLD', 'X GLOBAL GOV BOND', 'ISHARES GLOBAL CORP', 'ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR', 'X GLBAL INFLTION LNKD IC EUR',
493                                     'AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF', 'SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST', 'LYXOR REFINITIV CORE COMM', 'SPDR GLOBAL REAL ESTATE', 'ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE'])
494 scomposizione_ES['MCTR'], scomposizione_ES['TCTR'], scomposizione_ES['PCTR (%)'] = [MCTR_ES, TCTR_ES, PCTR_ES]
495 scomposizione_ES.to_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/ST_6/scomposizione_ES_6.xlsx')
496
497
498 #estraggo dalle matrici i numeri rispettivamente del rend e della dev stand del portafoglio
499 loc = rendimento_atteso_portafoglio[0,0]
500 scale = standard_deviation_portafoglio[0,0]
501
502 #disegna la distribuzione
503 p = np.linspace(norm.ppf(0.001, loc=loc, scale=scale), norm.ppf(0.999, loc=loc, scale=scale), 10000)
504 plt.xlim(-10, 2)
505 plt.ylim(0, .30)
506 ax.plot(p, norm.pdf(p, loc=loc, scale=scale), 'b-', lw=5, alpha=0.6, label='portfolio return pdf')
507 plt.show()
508
509 #calcolo la probabilità che sotto lo scenario considerato il portafoglio registri un rendimento non negativo
510 probabilità_rend_pos_sotto_stress = (1 - norm.cdf(0, loc=loc, scale=scale)) * 100
511 prob_0 = np.round(probabilità_rend_pos_sotto_stress,3)
512 print('La probabilità di ottenere un rendimento non negativo è: ', prob_0, '%')
513
```

APPENDICE 4.V – Tabelle scomposizione di deviazione standard, VaR ed ES
 Scomposizione della deviazione standard.

TABELLA DELLA SCOMPOSIZIONI DI RISCHIO

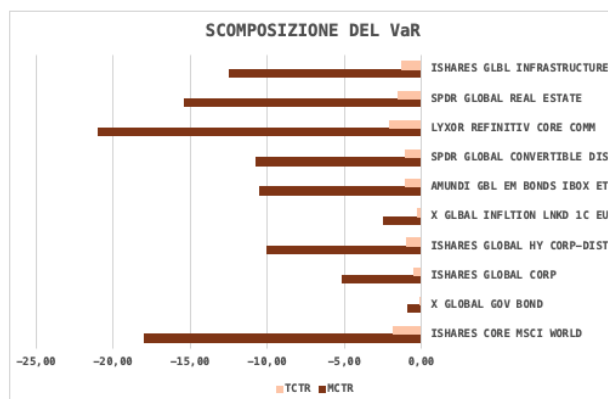
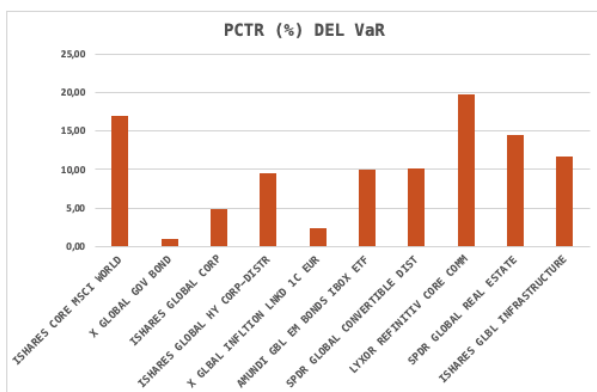
	MCTR	TCTR	PCTR (%)
ISHARES CORE MSCI WORLD	2,75	0,27	16,90
X GLOBAL GOV BOND	0,13	0,01	0,83
ISHARES GLOBAL CORP	0,78	0,08	4,82
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	1,52	0,15	9,38
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	0,38	0,04	2,34
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	1,60	0,16	9,87
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	1,63	0,16	10,06
LYXOR REFINITIV CORE COMM	3,19	0,32	19,67
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	2,35	0,23	14,46
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	1,90	0,19	11,68
	-	1,62	100



Scomposizione del VaR.

TABELLA DELLA SCOMPOSIZIONE DEL VALUE AT RISK

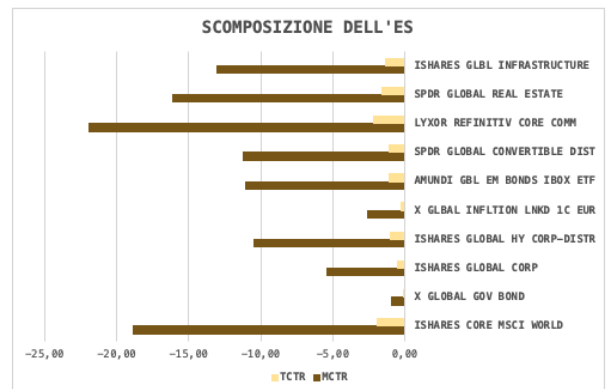
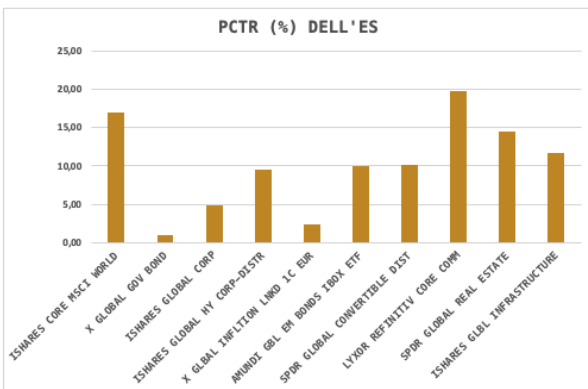
	MCTR	TCTR	PCTR (%)
ISHARES CORE MSCI WORLD	-18,00	-1,80	16,90
X GLOBAL GOV BOND	-0,88	-0,09	0,83
ISHARES GLOBAL CORP	-5,14	-0,51	4,82
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	-9,99	-1,00	9,38
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	-2,49	-0,25	2,34
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	-10,51	-1,05	9,87
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	-10,71	-1,07	10,06
LYXOR REFINITIV CORE COMM	-20,94	-2,09	19,67
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	-15,40	-1,54	14,46
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	-12,44	-1,24	11,68
	-	-10,65	100



Scomposizione dell'ES.

TABELLA DELLA SCOMPOSIZIONE DELL'ES

	MCTR	TCTR	PCTR (%)
ISHARES CORE MSCI WORLD	-18,86	-1,89	16,90
X GLOBAL GOV BOND	-0,92	-0,09	0,83
ISHARES GLOBAL CORP	-5,38	-0,54	4,82
ISHARES GLOBAL HY CORP-DISTR	-10,46	-1,05	9,38
X GLBAL INFLTION LNKD 1C EUR	-2,61	-0,26	2,34
AMUNDI GBL EM BONDS IBOX ETF	-11,01	-1,10	9,87
SPDR GLOBAL CONVERTIBLE DIST	-11,22	-1,12	10,06
LYXOR REFINITIV CORE COMM	-21,94	-2,19	19,67
SPDR GLOBAL REAL ESTATE	-16,13	-1,61	14,46
ISHARES GLBL INFRASTRUCTURE	-13,04	-1,30	11,68
	-11,16		100



APPENDICE 4.W - Script utilizzato per l'ottimizzazione di portafoglio

```

1 import cvxpy as cp
2 import numpy as np
3 import pandas as pd
4
5 mu_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/ST_6/rendimenti_assets_6.xlsx', index_col = 'Unnamed: 0')
6 sigma_df = pd.read_excel(r'/Users/riccardostizza/Desktop/ST_6/sigma_assets_6.xlsx', index_col = 'Unnamed: 0')
7
8 mu = mu_df.to_numpy()
9 sigma = sigma_df.to_numpy()
10
11 #Dati di portafoglio
12 w = cp.Variable(10)
13 ret = mu.T @ w
14 risk = cp.quad_form(w, sigma)
15 VaR_99 = 2.33 * risk - ret
16
17 #OGGETTO E VINCOLI DELL'OTTIMIZZAZIONE
18 objective=cp.Minimize(VaR_99)
19 constraints=[w>=0, w<=0.2, cp.sum(w)==1]
20
21 #Sviluppo del problema
22 problem = cp.Problem(objective, constraints)
23 problem.solve()
24
25 #Pesi ottimizzati
26 weights = w.value
27 weights = np.round(weights, 4) * 100
28 print(weights)
29

```