



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

---

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

**STUDIO DI MODELLI COSTITUTIVI PER  
MATERIALI IPERELESTICI  
INCOMPRESSIBILI**

**STUDY OF CONSTITUTIVE MODELS  
FOR INCOMPRESSIBLE HYPERELASTIC**

Relatore:

Prof.re Marco Coco

Tesi di Laurea di:

Stefano Spurio

A.A. 2023/2024

# STUDIO DI MODELLI COSTITUTIVI PER MATERIALE IPERELASTICI INCOMPRIMIBILI

\*

July 9, 2024

## **Abstract**

**Parole chiave:** elasticità non lineare, taglio rettilineo, taglio assiale, materiale Neo-Hookeano generalizzato

---

\*Stefano Spurio in collaborazione con Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche, via Brecce Bianche, 12, 60131 Ancona, Italy ().

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Preliminari matematici:Cenni di teoria dell'elasticità</b>	<b>6</b>
2.1	Deformazione e Tensione . . . . .	6
2.1.1	Moto. Cordinate spaziali e materiali . . . . .	6
2.1.2	Il tensore gradiente di deformazione . . . . .	8
2.1.3	Tensori di deformazione . . . . .	9
2.1.4	Il vettore spostamento . . . . .	10
2.1.5	Forze di superficie e forze di volume . . . . .	10
2.1.6	Principio di conservazione della quantità di moto e di momento angolare. Tensore delle tensioni . . . . .	11
2.1.7	Tensioni principali. Direzioni principali di tensione. Invarianti di tensione . . . . .	13
2.2	Equazioni costitutive . . . . .	14
2.2.1	Introduzione . . . . .	14
2.2.2	Invarianza rispetto a moti rigidi . . . . .	15
2.2.3	Invarianza di $W$ sotto l'ipotesi di moti rigidi . . . . .	16
2.2.4	Tensore delle tensioni in funzione della funzione ener- gia di deformazione . . . . .	17
2.2.5	Materiali elastici incomprimibili . . . . .	19
2.2.6	Forme della funzione densità d'energia di deformazione	20
<b>3</b>	<b>Deformazione di taglio rettilineo</b>	<b>22</b>
3.1	Introduzione . . . . .	22
3.2	Taglio Rettilineo . . . . .	26
3.3	Invertibilità della relazione tensione-deformazione . . . . .	32

3.4	Soluzioni Esatte . . . . .	35
3.5	Osservazioni finali . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Grafici delle soluzioni analitiche esatte</b>	<b>37</b>
4.1	Modello di Gent . . . . .	39
4.2	Modello Fung-Demiray . . . . .	41
4.3	Modello Knowles . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Calcolo esplicito per il modulo generalizzato di taglio per i vari modelli d'energia</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Referenze</b>	<b>49</b>

# 1 Introduzione

- Pagina 1: Titolo.
- Pagine 2-3: Lista contenuti.
- Pagina 4-5 Introduzione
- Pagina 4-21: Traduzione autonoma del riassunto del libro [2]; An Introduction to Theory of Elasticity. R.J. Atkins, N. Fox, con immagini prese dallo stesso libro.
- Pagina 22-36: Traduzione testuale autonoma, dell'articolo [1] Lecture Notes of TICMI Vol. 21, 2020, 107-119, con sviluppo dei seguenti calcoli non già presenti già, in ordine :
  1. Calcolo esplicito dello stato tensionale  $\mathbf{T}$  equazione (90)
  2. Calcolo esplicito della divergenza di  $\mathbf{T}$  equazione (92)
  3. Sostituzione del moltiplicatore di lagrange  $p$  nel sistema di equazioni alle derivate parziali equazione (97)
  4. Risoluzione del sistema di equazioni alle derivate parziali equazione (98)
  5. Adimensionalizzazione delle grandezze equazione (103)
  6. Calcolo esplicito del determinante di  $(\mathbf{B} - \lambda\delta_{ij})$  equazione (107)
  7. Calcolo esplicito dei autovalori  $\lambda$  equazione (108)
- Pagina 37-44: parte originale che consiste nel plottare la funzioni u proposte nell' articolo [1] Lecture Notes of TICMI Vol. 21, 2020, 107-119, con Matlab.

- Scrittura di due codici Matlab (modello Gent e Knowles Power) e relativi plot
  - Spiegazione dei codici fatta in maniera autonoma
  - Discussione sulle peculiarità dei grafici.
  - Scrittura del codice e plot per il modello Fung-Demiray svolto in maniera autonoma
  - Layout dei grafici fatto in maniera autonoma
- Pagina 45-48: parte originale che consiste nel calcolo esplicito del modulo generalizzato di taglio  $Q(u_z^2)$  e della sua derivata rispetto a  $Z$ , per ogni modello costitutivo, ovvero il membro a sinistra dell'equazione differenziale (99) cioè quella che si ricava dalla (98), svolto in maniera autonoma.
  - Pagina 49: Referenze.

La parte iniziale della tesi è stata l'analisi dell'articolo [1] in cui si tratta un problema di elasticità non-lineare e in particolare si vuole risolvere un BVP (problema con valori al contorno) specifico ovvero dato un campo di spostamento, calcolare il valore di una funzione di deformazione incognita, risalire allo stato tensionale, dimostrare che la relazione sia invertibile e infine calcolare la deformazione. Essendo la tensione funzione non lineare della deformazione bisogna ricorrere alla teoria dell'elasticità non-lineare e a dei modelli di densità d'energia di deformazione per poi confrontare i vari risultati ottenuti al cambiare dei vari modelli con rispettivi parametri.

## 2 Preliminari matematici: Cenni di teoria dell'elasticità

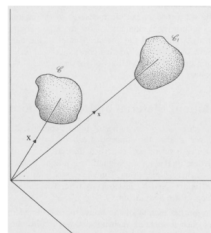
Lo scopo della sezione è fornire al lettore gli strumenti matematici per leggere il contenuto seguente all'introduzione e facilitarne la comprensione. Tutto quello che viene nella sezione a seguire compreso di immagini è preso dal [2].

Nella nostra discussione sul comportamento macroscopico del materiale, ignoriamo la sua microstruttura. La prima ipotesi che viene fatta quella del mezzo continuo, ovvero che il corpo viene visto come un materiale distribuito con continuità nello spazio. Ad ogni istante di tempo, ogni punto di una certa regione, è la posizione a cui noi ci riferiamo come particella del materiale. In questa sezione discuteremo come la posizione di ogni particella può essere descritta ad ogni istante, introducendo le misure di cambio di forma e di volume dell'elementino infinitesimo che compone il nostro materiale. Assumiamo che il corpo sia composto da un set di particelle che ad un certo istante di tempo  $t$ , occupa una regione chiusa dello spazio tridimensionale Euclideo che prende il nome di configurazione del corpo al tempo  $t$ .

### 2.1 Deformazione e Tensione

#### 2.1.1 Moto. Coordinate spaziali e materiali

Idealizziamo il corpo supponendo che è composto da un set di particelle che, ad ogni istante  $t$ , ogni particella è assegnata un unico punto di  $\mathcal{L}_t$  che è una regione dello spazio euclideo tridimensionale e che a ogni punto di  $\mathcal{L}_t$  è occupato solo da un'unica particella. Chiamiamo  $\mathcal{L}_t$  configurazione del corpo al tempo  $t$ . Per descrivere



il moto di un corpo, cioè descrivere la posizione di ogni particella ad ogni istante  $t$ . Conviene etichettare le particelle e per farlo selezioniamo una

configurazione iniziale  $\mathcal{L}$  e la chiamiamo configurazione di riferimento, allora il set delle coordinate

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3] \quad (1)$$

riferito a assi cartesiani fissati, di un punto di  $\mathcal{L}$  determina univocamente una particella del corpo. Quando scegliamo la configurazione di riferimento  $\mathcal{L}$  non siamo costretti a scegliere la configurazione occupata durante il moto ma possiamo scegliere  $\mathcal{L}$  come  $\mathcal{L}_0$  ovvero la configurazione occupata dal corpo all'origine della scala dei tempi  $t$ . In virtù della (1) possiamo descrivere il moto del corpo tramite una funzione dipendente dalla posizione di riferimento e dal tempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \chi [X_1, X_2, X_3, t] &= \chi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ &\chi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ &\chi_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Ricordiamo che  $X_1, X_2, X_3$  sono funzioni derivabili rispetto alle coordinate  $X_1, X_2, X_3$  tante volte quanto richiesto. inoltre assumiamo che lo jacobiano

$$J = \det \left[ \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A} \right] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

esista in ogni punto di  $\mathcal{L}$ , e che per ogni punto di  $\mathcal{L}_0$  sia

$$J > 0$$

. Il significato fisico dell'ipotesi che jacobiano sia sempre positivo è che il materiale non può penetrarsi da solo, che il materiale occupa un volume non nullo e che non può essere compresso ad un punto o espanso all'infinito



durante il moto. Matematicamente invece, garantisce che la (1) ammette un'unica funzione inversa

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

Quindi la posizione al tempo  $t$  di una particella  $P$  è descritta dalle coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$  che sono dette coordinate attuali (o Euleriane). Comunque il punto  $P$  può essere comunque descritto dalle coordinate  $(X_1, X_2, X_3)$  sono dette materiali (o Lagrangiane).

### 2.1.2 Il tensore gradiente di deformazione

Abbiamo discusso come il moto di un corpo può essere descritto, in questa sezione analizzeremo come gli elementi infinitesimi costituenti il corpo si deformano come risultato del moto. Supponendo che  $\mathcal{L}$  coincida con la configurazione iniziale  $\mathcal{L}_0$  e due particelle vicine  $P$  e  $Q$  sono in posizione  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  allora la loro posizione in  $\mathcal{L}_t$  al tempo  $t$ , sarà  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  dove

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} + d\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (5)$$

sono le componenti del differenziale totale  $d\mathbf{x}$  che sono dati in termini di componenti di  $d\mathbf{X}$  e delle derivate parziali rispetto a  $\mathbf{X}$  tramite

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A}(\mathbf{X}, t) dX_A = x_{i,A} dX_A \quad (6)$$

dove le quantità  $x_{i,A}$  sono conosciute come gradienti di deformazione. Sono le componenti di un tensore del secondo ordine chiamato proprio come tensore gradiente di deformazione

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

scritto sopra in forma matriciale.

### 2.1.3 Tensori di deformazione

Scrivendo  $x_{i,A}$  come  $F_{i,A}$  la (6) può essere scritta come

$$dx_i = F_{i,A} dX_A \quad (8)$$

dato che  $\mathbf{J}$  è sempre positivo, allora  $\mathbf{F}$  è non singolare e ammette un'unica decomposizione

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (9)$$

dove  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono tensori simmetrici definiti positivi e  $\mathbf{R}$  propriamente ortogonale (la sua trasposta coincide con l'inversa), e gode delle proprietà

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T, \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (10)$$

dove  $\mathbf{R}^T$  è la matrice trasposta di  $\mathbf{R}$ . Ricordiamo inoltre che per una matrice definita positiva  $\mathbf{A}$  vale,

$$x_i \mathbf{A} x_j > 0 \quad (11)$$

per ogni vettore non nullo  $\mathbf{x}$ . Il significato fisico della (9) è che possiamo separare la deformazione dalla rotazione rigida

$$dx_i = R_{ik} U_{KL} dX_L \quad (12)$$

il calcolo per i tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  può essere difficile, per questo definiamo rispettivamente i tensori di deformazione destro e sinistro di Cauchy-Green+

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (13)$$

ovviamente i tensori  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  sono collegati a  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  tramite le relazioni

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (14)$$

similmente otteniamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 \quad (15)$$

#### 2.1.4 Il vettore spostamento

A volte conviene considerare il vettore spostamento  $\mathbf{u}$  invece che la posizione  $\mathbf{x}$  della particella  $\mathbf{X}$  tramite la relazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (16)$$

in questo caso allora

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (17)$$

dove  $\mathbf{H}$  indica il tensore gradiente di spostamento, e adesso possiamo scrivere il tensore destro di Cauchy-Green come

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \quad (18)$$

ora possiamo vedere  $\mathbf{C}$  come misura della deformazione. Per esempio se  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  il corpo si muoverebbe di moto rigido. Definiamo ora un nuovo tensore

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (19)$$

detto tensore della deformazione infinitesima.

#### 2.1.5 Forze di superficie e forze di volume

Nella meccanica del continuo si assume che l'effetto di tutte le forze che agiscono su una data superficie sia rappresentato da un singolo campo vettoriale definito sulla superficie. Si assume inoltre che l'effetto delle forze esterne come la forza di gravità può essere rappresentato tramite un altro campo vettoriale definito nella regione di spazio occupato dal corpo. Indicando con  $V$  la regione occupata al tempo  $t$  da una arbitraria parte del corpo  $P$ , denotiamo con  $S$  la superficie chiusa che delimita  $V$ , inoltre indichiamo con  $\mathbf{n}$  il versore orientato verso l'esterno normale alla superficie  $S$

. Quindi postulando l'esistenza del campo  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  definito su  $S$ , dipendente dal punto  $\mathbf{x}$  e dalla normale  $\mathbf{n}$  e del campo  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ , possiamo scrivere la forza totale agente su  $P$

$$\int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \quad (20)$$

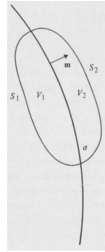
e la coppia come

$$\int_S \mathbf{x} \wedge (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})) dS + \int_V \mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{b}(\mathbf{x})) dV \quad (21)$$

dove il campo  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  rappresenta le forze distribuite sul corpo per unità di massa, che di solito coincide con la gravità, in generale  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ , può dipendere dal tempo.

### 2.1.6 Principio di conservazione della quantità di moto e di momento angolare. Tensore delle tensioni

(1.11.3)



Quando abbiamo a che fare con sistemi di particelle, possiamo dedurre dalla II legge di Newton, e da altre assunzioni, che la risultante delle forze esterne che agisce su un sistema è responsabile della variazione della quantità di moto. Fissando un polo, possiamo inoltre definire il momento risultante come la variazione rispetto al tempo del momento angolare. Introduciamo il momento lineare (Quantità di moto) come

$$\mathbf{Q} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (22)$$

scrivendo la sommatoria delle forze come la variazione rispetto al tempo della quantità di moto

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \quad (23)$$

supponendo di voler dividere la regione  $V$  in due sottoregioni  $V_1$  e  $V_2$  divise da una superficie  $\sigma$ , con la regione  $V_1$  delimitata dalla superficie  $S_1$  e la regione  $V_2$  delimitata dalla superficie  $S_2$ , allora dato che la (21) deve valere per ogni parte del corpo deve valere sia per la regione  $V_1$  che per la regione  $V_2$ , indicando con  $\mathbf{m}$  il versore uscente dalla regione  $V_1$  ovvero la normale a  $\sigma$  abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_1} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \int_{V_1} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \quad (24)$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{V_2} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_2} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{m}) + \int_{V_2} \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \quad (25)$$

Sottraendo la (24) alla (25), dato che  $S_1 + S_2 = S$  e che  $V_1 + V_2 = V$ , abbiamo che

$$\int_{\sigma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{m}) dS = 0 \quad (26)$$

Dato che la superficie  $\sigma$  è arbitraria, raggiungiamo la conclusione che la funzione integranda deve essere uguale a 0 e che quindi

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{m}) \quad (27)$$

se ora scriviamo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{21}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{23}\mathbf{e}_3 \\ T_{31}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \\ T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

allora possiamo scrivere la tensione come

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T_{ij}n_j \quad (29)$$

le quantità  $T_{ij}$  sono le componenti di un tensore del secondo ordine conosciuto meglio come Tensore delle Tensioni di Cauchy. Dalla (26) e dalla (27)

vediamo come dipende linearmente da  $\mathbf{n}$ . Inoltre imponendo l'equilibrio alle rotazioni possiamo trovare che

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (30)$$

cioè che il tensore delle tensioni è simmetrico.

### 2.1.7 Tensioni principali. Direzioni principali di tensione. Invarianti di tensione

Considerando un elementino di superficie  $dS$ . La forza per unità di superficie agente su  $dS$  è  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ . Questo vettore è in direzione di  $\mathbf{n}$  solo per le direzioni  $\mathbf{n}$  per cui

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lambda \mathbf{n} \quad (31)$$

per qualche scalare  $\lambda$ , usando la (28),

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_{ij} = 0 \quad (32)$$

le uniche direzione  $\mathbf{n}$  per cui vale la (30) sono le direzioni principali di tensione. Gli autovalori  $\lambda$  le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (33)$$

mentre gli invarianti di tensione sono

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr} \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{T})^2 - \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{T}^2 \\ &= \frac{1}{2} (T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{11}T_{33} - T_{12}^2 + T_{23}^2 - T_{13}^2) \\ I_3 &= \det \mathbf{T} \end{aligned} \quad (34)$$

## 2.2 Equazioni costitutive

### 2.2.1 Introduzione

A meno che il corpo non sia rigido, queste equazioni sono in genere insufficienti per determinare il moto associato dalle condizioni al contorno e dalle forze di volume. Necessitiamo quindi di un ulteriore set di equazioni, note come equazioni costitutive. Le equazioni costitutive cambiano da materiale a materiale, oppure possono descrivere un'intera classe di materiali. Teniamo presente che comunque fanno riferimento a materiali ideali perchè è impossibile tenere conto di tutti gli aspetti reali. Inoltre non devono dipendere dal sistema di riferimento scelto e inoltre hanno la condizione che la risposta in tensione di un corpo non dipende dai moti considerati rigidi, ma solo da cambi di forma del corpo. Per materiali che possono subire grandi deformazioni ma senza subire variazioni apprezzabili di volume, (materiali non comprimibili), idealizziamo questa proprietà postulando il vincolo

$$J = 1 \quad (35)$$

oppure equivalentemente

$$v_{i,i} = D_{ii} = \text{tr} \mathbf{D} = 0 \quad (36)$$

, cioè sono ammessi soli i moti a volume costante. Quando non è esplicitata una restrizione geometrica sui possibili moti, il materiale è chiamato non vincolato. Dato che consideriamo solo il vincolo di incomprimibilità, da ora consideriamo i materiali non vincolati come comprimibili. Un buon punto di partenza per la teoria dei materiali elastici comprimibili è postulare un set di equazioni costitutive per le quali il del tensore delle tensioni è una funzione del tensore gradiente di deformazione,

$$T_{ij} = f_{ij}(F_{kA}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{F}) \quad (37)$$

La teoria dell'elasticità basata sulla (37) è normalmente chiamata elasticità di Cauchy. Ora per molti dei nostri sviluppi dobbiamo fare un'ulteriore assunzione, supponiamo che tutto il lavoro (potenza) compiuto dallo stato tensionale sia assorbito o derivato dalla funzione densità d'energia di deformazione  $W$  che dipende solo da  $\mathbf{F}$  in modo tale che

$$\frac{D}{Dt} \int_V \frac{\rho}{\rho_0} W dV = \int_V T_{ij} D_{ij} dV \quad (38)$$

dato che la (38) deve valere per ogni regione  $V$  del corpo, purchè la funzione integranda sia continua, allora

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} = T_{ij} D_{ij} \quad (39)$$

la teoria dell'elasticità che ingloba questa assunzione prende il nome di elasticità di Green o Iper-elasticità. Notiamo qui che l'uso di  $\mathbf{F}$  come variabile indipendente nelle equazioni costitutive significa che  $W$  e  $\mathbf{T}$  sono completamente determinati quando  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}_0$  sono specificati.

### 2.2.2 Invarianza rispetto a moti rigidi

Sopra abbiamo discusso su come il moto del corpo può essere descritto fornendo la posizione  $\mathbf{x}$  di ogni particella  $\mathbf{X}$  al tempo  $t$  con l'equazione

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (40)$$

per un corpo che per sta ruotando e traslando, ad ogni istante di tempo, la configurazione corrente  $\mathcal{L}_t$  del corpo è ottenuta tramite una dipendenza dal tempo, da una rotazione rigida e da una traslazione.

$$\hat{x}_i = q_{ij}(t) \chi_j(\mathbf{X}, t) + c_i(t) \quad (41)$$



dove  $\mathbf{Q}(t)$  è un tensore propriamente ortogonale e dipendente dal tempo tale che

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = 1 \quad (42)$$

dove  $\mathbf{c}(t)$  è un vettore dipendente dal tempo. Per un moto di questo tipo cioè di rotazione e traslazione ogni particella occupa la stessa posizione relativa rispetto alle posizione iniziale(il corpo non si è deformato). Assumiamo quindi che  $W$  dipenda solo da queste posizioni relative(cioè dalla deformazione) e non dalle posizioni assolute nello spazio. Inoltre il valore di  $W$  della particella  $\mathbf{X}$  è lo stesso in entrambi i moti e ad ogni istante di tempo. Bisogna sottolineare che questa assunzione è un'idea che va sotto il nome di principio di indifferenza di forma materiale. Fisicamente, significa che  $W$  è indipendente dal moto dell'osservatore, trascurando chiaramente tutti gli effetti relativistici dalle nostre considerazioni. Le componenti del tensore gradiente di deformazione associato a (41) sono

$$\hat{F}_{iA} = \hat{x}_{i,A} \equiv \frac{\partial \hat{\chi}_i}{\partial X_A} \quad (43)$$

ora dalla (41)

$$\hat{x}_{i,A} = Q_{ij} x_{j,A} \quad (44)$$

fornendo

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Q} \mathbf{F} \quad (45)$$

### 2.2.3 Invarianza di $W$ sotto l'ipotesi di moti rigidi

Il valore della densità d'energia di deformazione associata al moto (ref73) è  $W(\mathbf{F})$  mentre quella associata a (41) è  $W(\hat{\mathbf{F}})$  inoltre ricordando il principio di indifferenza cioè che  $W$  non dipende da rotazioni rigide del corpo possiamo scrivere

$$W(\hat{\mathbf{F}}) = W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \mathbf{F}) \quad (46)$$

dove (46) deve valere per tutte le  $\mathbf{Q}$  propriamente ortogonali. Quindi vediamo che  $W$  non può dipendere da  $\mathbf{F}$  in maniera arbitraria ma solo in modo che la (46) sia soddisfatta. Usando la il teorema di decomposizione polare la (46) diventa

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{QRU}) \quad (47)$$

$\mathbf{U}$  è un tensore definito positivo, e quindi è univocamente determinato dalla sua radice  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ . Quindi è più facile calcolarlo scegliendo assi per cui  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{C}$  sono diagonali. Allora gli elementi della diagonale principale sono  $c_1 = u_1^2, c_2 = u_2^2, c_3 = u_3^2$ , significa che invece di scrivere  $W$  in funzione di  $\mathbf{U}$  la scriviamo in funzione di  $\mathbf{C}$

$$W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C}) \quad (48)$$

dove per chiarezza di notazione abbiamo introdotto un nuovo simbolo per la  $W$ . Possiamo dimostrare che (48) è una condizione sufficiente perche (45) sia valida.

#### **2.2.4 Tensore delle tensioni in funzione della funzione energia di deformazione**

Usando la (48) e la regola della catena possiamo scrivere

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} \frac{D}{Dt}(C_{PQ}) \quad (49)$$

e dalla definizione di  $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(C_{PQ}) &= \frac{D}{Dt}(x_{i,P}, x_{i,Q}) \\
&= x_{i,P} \frac{D}{Dt}(x_{i,Q}) + x_{i,Q} \frac{D}{Dt}(x_{i,P}) \\
&= x_{i,P} v_{i,Q} + x_{i,Q} v_{i,P} \\
&= x_{i,P} v_{i,j} x_{j,Q} + v_{i,j} x_{j,P} x_{i,Q} \\
&= v_{i,j} (x_{i,P} x_{j,Q} + x_{j,P} x_{i,Q})
\end{aligned} \tag{50}$$

dove adesso il campo delle velocità è scritto in funzione di  $\mathbf{x}$  e del tempo  $t$ .

Quindi

$$\frac{D}{Dt}(C_{PQ}) = v_{i,j} (x_{i,P} x_{j,Q} + x_{j,P} x_{i,Q}) \tag{51}$$

dato che  $T_{ij} D_{ij} = T_{ij} u_{ij}$  unendo la (51) e la (50), la (39) può essere riscritta

$$P_{ij} v_{i,j} = 0 \tag{52}$$

dove

$$P_{ij} = T_{ij} - \frac{\rho}{\rho_0} (x_{i,P} x_{j,Q} + x_{j,P} x_{i,Q}) \frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} \tag{53}$$

adesso  $P_{ij}$  è completamente determinato dai valori di  $x_{i,A}$  e può essere dimostrato che, per qualunque valore di  $x_{i,A}$  in qualunque punto e ad ogni istante di tempo, esiste una classe di moti del corpo per cui i gradienti di velocità  $v_{i,j}$  sono arbitrari. Quindi dato che (52) deve essere valida per ogni tipo di moto segue che

$$P_{ij} = 0 \tag{54}$$

oppure usando (53)

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} (x_{i,P} x_{j,Q} + x_{j,P} x_{i,Q}) \frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} \\
&= \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,P} x_{j,Q} \left( \frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial W}{\partial C_{QP}} \right)
\end{aligned} \tag{55}$$

dato che  $\mathbf{C}$  è simmetrico,  $W$  può essere espressa simmetricamente come

$$T_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,P} x_{j,Q} \frac{\partial W}{\partial C_{PQ}} \quad (56)$$

per esempio

$$W = C_{11}^2 + C_{12}^2$$

allora

$$\frac{\partial W}{C_{12}} = 2C_{12} \quad e \quad \frac{\partial W}{C_{21}} = 0$$

quindi

$$\frac{\partial W}{C_{12}} \neq \frac{\partial W}{C_{21}}$$

comunque quando  $W$  è espressa simmetricamente

$$W = C_{11}^2 + \frac{1}{4}(C_{12} + C_{12})^2$$

e

$$\frac{\partial W}{C_{12}} = \frac{\partial W}{C_{21}}$$

le equazioni (55) (56) e (2.2.4) sono le equazioni costitutive per la tensione di un materiale elastico comprimibile.

### 2.2.5 Materiali elastici incomprimibili

Nella discussione sui materiali elastici comprimibili, che può essere visto come caso generale, si è postulato che il tensore delle tensioni  $\mathbf{T}$  dipenda solo solo dal tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  e che esiste una funzione energia di deformazione  $W$  che dipende solo da  $\mathbf{F}$  in modo che

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{DW}{Dt} = T_{ij} D_{ij} \quad (57)$$

, tutto il lavoro svolto dalla tensione è assorbita dalla  $W$ . Adesso per scopi pratici, dato che molte gomme possono essere trattate come incomprimibili, e quindi possono ammettere solo deformazioni a volume costanti,

$$v_{i,i} = tr\mathbf{D} = 0 \quad (58)$$

deve valere. Conserviamo le ipotesi riguardante l'esistenza della funzione energia di deformazione che ha portato alla (57), e anche l'ipotesi che porta a

$$W = W(\mathbf{C}) \quad (59)$$

dalla (58), vediamo che qualunque sia il valore di  $T_{ij}$ , anche componenti di tensione  $T_{ij} + \delta_{ij}$  soddisfano la (57) per un arbitrario valore dello scalare  $p$ . Quindi sostuiamo l'equazione costitutiva iniziale (37) per i materiali comprimibili, con una nuova equazione costitutiva

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + g_{ij}(F_{kA}), \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{g}(\mathbf{F}) \quad (60)$$

### 2.2.6 Forme della funzione densità d'energia di deformazione

Abbiamo visto che se la funzione densità d'energia di deformazione è nota allora è noto lo stato tensionale, ed nel caso di materiale incomprimibile, la tensione è determinata a meno di una pressione arbitraria. Questi modelli per la densità d'energia di deformazione sono modelli fenomenologici ovvero ottenuti per via sperimentale. Varie forme della densità d'energia di deformazione per una gomma comprimibile e incomprimibile sono note in letteratura. Per un materiale incomprimibile  $I_3 = 1$  e

$$W = W(I_1, I_2) \quad (61)$$

nella configurazione riferimento abbiamo che  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , quindi gli invarianti diventano  $I_1 = I_2 = 3$ , allora è conveniente considerare  $W$  come una funzione

di  $(I_1 - 3)$  e  $(I_2 - 3)$  e assumiamo che  $W$  sia nulla nella configurazione di riferimento. La prima forma di  $W$  che è stata proposta

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (62)$$

dove  $C_1$  è una costante. In letteratura è anche chiamato materiale Neo-Hookeano. Sembra che fornisce una buona approssimazione per materiali elastici di tipo gommosi. La forma lineare è

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (63)$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  sono costanti. Questo modello prende il nome di Mooney-Rivlin. Usando la (61) possiamo scrivere il tensore delle tensioni per i materiali neo-Hookeani come

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + C_1\mathbf{B} \quad (64)$$

o per Mooney-Rivlin come

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} \quad (65)$$

nonostante le due forme di  $W$  sono utili e hanno dei vantaggi per qualche problema di elasticità non lineare che sarebbe difficile da trattare altrimenti, diventando matematicamente più maneggevoli, ma non c'è sempre riscontro con i dati sperimentali per tutti i valori di  $I_1$  e  $I_2$ . E' quindi proposta una soluzione ulteriore nella forma

$$W = C_1(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (66)$$

dove  $C_1$  è ancora una costante e  $f$  è una funzione. Esistono in letteratura varie specificazioni per  $f$

### 3 Deformazione di taglio rettilineo

#### 3.1 Introduzione

Sia  $\mathbf{X} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  il vettore posizione (relativo ad un origine fissato  $O$ ) di una particella  $P$  di un corpo  $\mathcal{B}$  al tempo iniziale  $t = 0$ , e  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  sia il vettore posizione della stessa particella al tempo  $t > 0$ . Per convenienza scegliamo la configurazione occupata dal corpo  $\mathcal{B}$  al tempo iniziale come configurazione di riferimento e la denotiamo con  $\mathcal{B}_r$ . Un moto del corpo  $\mathcal{B}$  nell'intervallo  $[0, T]$ , è una funzione  $\chi$ , che assegna a valori di  $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{B}_r \times [0, T]$  un punto  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  in uno spazio Euclideo tridimensionale tale che per qualunque  $t \in [0, T]$   $\chi_t \equiv \chi(\cdot, t)$  è biunivoca. La configurazione del solido al tempo  $t$   $\mathcal{B}_t = \chi_t(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B}_r, t)$  è chiamata configurazione corrente. La funzione  $\chi_T : \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r \mapsto \mathbf{x} = \chi_T(\mathbf{X}) \in \mathcal{B}_T$  è riferita a una deformazione di  $\mathcal{B}$ . Il tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  e il tensore sinistro di Cauchy-Green  $\mathbf{B}$  sono tensori del secondo ordine.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi_T}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (67)$$

Il modello matematico per il comportamento del materiale solido iper-elastico incomprimibile è caratterizzato da una funzione densità d'energia di deformazione (cioè misurata per unità di volume nello stato indeformato)

$$W = W(I_1, I_2) \quad (68)$$

dove

$$I_1 = \text{tr}\mathbf{B}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\mathbf{B}^2) - (\text{tr}\mathbf{B})^2] = \text{tr}\mathbf{B}^{-1} \quad (69)$$

sono il primo e il secondo invariante di  $\mathbf{B}$ . Il terzo invariante di tensione risulta  $I_3 = 1$  per il vincolo di incomprimibilità del materiale. Per la con-

sistenza del modello dell'elasticità lineare nel limite delle deformazione infinitesime è necessario che

$$W_1(3, 3) + W_2(3, 3) = \frac{\mu}{2} \quad (70)$$

dove il pedice  $i$  ( $i = 1, 2$ ) denota la differenziazione rispetto a  $I_i$ , e  $\mu$  è il modulo di taglio infinitesimo. Dato che dopo siamo interessati anche a regimi dove le deformazioni sono piccole ma non infinitesime, è conveniente riportare qui alcune basi della teoria dell'elasticità debolmente non-lineare. In questa teoria l'energia elastica  $W$  immagazzinata è espressa nei termini degli invarianti del tensore di Cauchy-Green  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I})/2$  come

$$\mathcal{I}_1 = tr\mathbf{E}, \quad \mathcal{I}_2 = tr(\mathbf{E}^2), \quad \mathcal{I}_3 = tr(\mathbf{E}^3) \quad (71)$$

per un solido incomprimibile, Ogden [9] dimostrò che l'espansione della funzione energia di deformazione  $W$  fino a termini di ordine quattro coinvolge solamente tre costanti. Nella notazione di Hamilton [7] è scritta come

$$W = \mu\mathcal{I}_2 + \frac{\mathcal{A}}{3}\mathcal{I}_3 + \mathcal{D}\mathcal{I}_2 \quad (72)$$

dove  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$  sono le costanti elastiche non lineari di Landau. Per via del vincolo incomprimibilità gli invarianti  $\mathcal{I}$  non sono indipendenti e devono soddisfare

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_1^2 - \mathcal{I}_2 + \frac{2}{3}\mathcal{I}_1^3 - 2\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 + \frac{4}{3}\mathcal{I}_3 = 0 \quad (73)$$

sull'utilizzo di tale restrizione e della relazione

$$I_1 = 2\mathcal{I}_1 + 3, \quad I_2 = 2\mathcal{I}_1^2 - 2\mathcal{I}_2 + 4\mathcal{I}_1 + 3, \quad (74)$$

una volta verificato, per la (68) con (72), è necessario che (70) e le seguenti due identità

$$\begin{aligned} W_1(3, 3) + 2W_2(3, 3) &= -\frac{\mathcal{A}}{8}, \\ W_1(3, 3) + 3W_2(3, 3) + W_{11}(3, 3) + 2W_{12}(3, 3) + W_{22}(3, 3) &= \frac{\mathcal{D}}{2} \end{aligned} \quad (75)$$



devono essere vere. Per quanto riguarda l'analicità della (68) in un intorno della configurazione di riferimento  $I_1 = I_2 = 3$ , si può scrivere  $W$  come una serie di potenze di  $I_1 - 3$  e  $I_2 - 3$ . Perciò

$$W(I_1, I_2) = \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{pq} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q \quad (76)$$

dove i coefficienti  $C_{pq}$  non dipendono dalla deformazione. Dato che l'energia è definita a meno di una costante additiva,  $W$  può essere assunta nulla nella configurazione di riferimento quindi  $C_{00} = 0$ . Una funzione densità d'energia di deformazione isotropa può essere approssimata da uno sviluppo (76) contenendo un numero finito di termini. La funzione energia di deformazione neo-Hookeana è

$$W_{nH} = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3), \quad (77)$$

dove è stato posto  $C_{10} = \mu$  per coerenza con la teoria lineare, e il modello di Mooney-Rivlin

$$W_{MR} = \frac{C_{10}}{2} (I_1 - 3) + \frac{C_{01}}{2} (I_2 - 3), \quad (78)$$

dove  $C_{10} + C_{01} = \mu$ , sono approssimazioni della funzione densità d'energia di deformazione  $W$  che è stata ampiamente adottata nello sviluppo della teoria dell'elasticità non-lineare e nelle prime applicazioni. Nel seguito, seguendo e approfondendo i risultati contenuti in [1] considereremo le seguenti forme approssimate di  $W$

$$W_{qMR} = W_{MR} + \frac{1}{2} [C_{20}(I_2 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2], \quad (79)$$

dove i moduli elastici  $C_{ij=0,1,2}$  soddisfano le seguenti relazioni

$$C_{10} = 2\mu + \frac{\mathcal{A}}{4}, \quad C_{01} = -\mu - \frac{\mathcal{A}}{4}, \quad C_{20} + C_{11} + C_{02} = \frac{1}{2} \left( \mu + \frac{\mathcal{A}}{2} + \mathcal{D} \right) \quad (80)$$

Dato che  $W_{qMR}$  contiene termini che sono quadratici negli invarianti  $I_1 - 3$  e  $I_2 - 3$  d'ora in poi ci riferiremo alla (80) come il modello quadratico. Una immediata conseguenza di (70) per un generico materiale neo-Hookeano è

$$\frac{dW_{gmH}}{dI_1}(3) = \frac{\mu}{2} \quad (81)$$

Riportiamo qui tre esempi notevoli per generici modelli neo-Hookeani

- Modello Fung-Demiral [[4],[5]]

$$W_{FD} = \frac{u}{2\alpha} \exp[(\alpha(I_1 - 3)) - 1] \quad (82)$$

dove  $\alpha$  è una costante positiva che tiene conto dell'irrigidimento del materiale;

- Modello Gent [6]

$$W_G = -\frac{\mu}{2} J_m \log \left( 1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right), \quad (83)$$

dove il parametro positivo  $J_m$  fornisce una misura della estensibilità limite della catena degli elastomeri;

- Modello Knowles

$$W_K = \frac{\mu}{2b} \left\{ \left[ 1 + \frac{b}{n} (I_1 - 3) \right]^n - 1 \right\} \quad (84)$$

dove  $b$  e  $n$  sono due parametri costitutivi positivi

Osserviamo che i modelli Fung-Demiray, Gent and Knowles tendono al modello per la energia di deformazione neo-Hookeana per piccoli valori di  $\alpha$ ,  $1/J_m$  e  $b$ .

### 3.2 Taglio Rettilineo

La deformazione di taglio semplice,

$$x = X + u(Z), \quad y = Y, \quad z = Z, \quad (85)$$

dove  $u(Z)$  la funzione incognita da determinare. Per prima cosa dobbiamo calcolare il tensore di Cauchy-Green sinistro e la sua inversa. Per farlo però dobbiamo prima calcolare il tensore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  e la sua trasposta  $\mathbf{F}^T$  per il campo di spostamenti assegnato, per farlo utilizziamo la (6)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_z & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

e poi usando la (12) calcoliamo il tensore sinistro di Cauchy-Green

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 + u_z^2 & 0 & u_z \\ 0 & 1 & 0 \\ u_z & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_z & 0 & 1 + u_z^2 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

il primo e il secondo invariante di  $\mathbf{B}$  sono

$$I_1 = \text{tr}\mathbf{B} = 3 + u_z^2 \quad I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{B})^2 - \frac{1}{2}\text{tr}\mathbf{B}^2 = 3 + u_z^2 \quad (88)$$

adesso usando l'equazione (65)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} \quad (89)$$

espandendo i termini

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2C_1 \begin{bmatrix} 1 + u_z^2 & 0 & u_z \\ 0 & 1 & 0 \\ u_z & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2C_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_z & 0 & 1 + u_z^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -p + 2C_1(1 + u_z^2) - 2C_2 & 0 & 2C_1u_z - 2C_2(-u_z) \\ 0 & -p + 2C_1 - 2C_2 & 0 \\ 2C_1u_z - 2C_2(-u_z) & 0 & -p + 2C_1 - 2C_2(1 + u_z^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

possiamo calcolare il tensore delle tensioni di Cauchy necessario a supportare gli spostamenti definiti in (85), dove  $C_1 = W_1$  e  $C_2 = W_2$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + 2W_1(1 + u_z^2) - 2W_2 & 0 & 2u_z(W_1 + W_2) \\ 0 & -p + 2W_1 - 2W_2 & 0 \\ 2u_z(W_1 + W_2) & 0 & -p + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2) \end{bmatrix}$$

o in componenti

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p + 2W_1(1 + u_z^2) - 2W_2, & T_{13} &= 2(W_1 + W_2)u_z \\ T_{22} &= -p + 2W_1 - 2W_2, & T_{33} &= -p + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2), & T_{12} &= T_{23} = 0, \end{aligned} \tag{90}$$

Adesso utilizziamo le equazioni indefinite d'equilibrio

$$div \mathbf{T} = \rho \vec{\mathbf{a}} \tag{91}$$

che nel caso in questione essendo in un caso statico, hanno l'accelerazione nulla

$$div \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{32}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{bmatrix} = \vec{0} \tag{92}$$

Eseguendo le derivate parziali otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d(-p + 2W_1(1 + u_z^2) - W_2)}{dX} + \frac{d(0)}{dY} + \frac{d(2u_z(W_1 + W_2))}{dZ} &= 0 \\ \frac{d(0)}{dX} + \frac{d(-p + 2W_1 - 2W_2)}{dY} + \frac{d(0)}{dZ} &= 0 \\ \frac{d(2u_z(W_1 + W_2))}{dX} + \frac{d(0)}{dY} + \frac{d(-p + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2))}{dZ} &= 0 \end{aligned}$$

cioè

$$-p_X + \frac{d}{dZ}[2(W_1 + W_2)u_z] = 0, \quad -p_Y = 0, \quad \frac{d}{dZ}[-p + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2)] = 0 \quad (93)$$

dove, scrivendo il modulo generalizzato di taglio come

$$Q(u_z^2) = 2(W_1 + W_2) \quad (94)$$

in cui abbiamo ommesso la dipendenza di  $W_1$  e  $W_2$  dagli invarianti di deformazione calcolati sopra, allora le (93) diventano

$$-p_X + \frac{d}{dZ}[Q(u_z^2)u_z] = 0, \quad -p_Y = 0, \quad \frac{d}{dZ}[-p + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2)] = 0 \quad (95)$$

il sistema (95) è un sistema alle derivate parziali sovradeterminato, con incognite la pressione  $p = p(X, Y, Z)$  e  $f = f(Z)$ . Il sistema è simile a quello introdotto da Zhang e Rajogopal [10] nello studio dei tipi di moto per materiali non lineari elastici. Si dimostra, ma non lo faremo che il sistema (95) è compatibile se solo se il moltiplicatore di Lagrange è nella forma

$$p = A_0X + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2), \quad (96)$$

Infatti se sostituisco la (96) nelle (93) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \left( -(A_0X + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2)) + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2) \right) &= 0 \\ -\frac{d}{dX}(A_0X + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2)) + \frac{d}{dZ}(Q(u_z^2)) &= 0 \end{aligned} \quad (97)$$

è facile vedere che dalla prima equazione delle (97), semplificando i termini, che il "gradiente di pressione" in direzione Z è nullo

$$\frac{d}{dZ} (A_0 X) = 0$$

mentre dalla seconda otteniamo

$$\frac{d}{dX} (-(A_0 X + 2W_1 - 2W_2(1 + u_z^2)) + \frac{d}{dZ} (Q(u_z^2)) \quad (98)$$

con  $A_0$  costante, che con un abuso di terminologia possiamo chiamare uniforme gradiente di pressione nella direzione dell'asse X, eseguendo le derivate rispetto X e portando il termine appena calcolato a destra dell'uguale vediamo come il campo di spostamento  $u$  soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dZ} (Q(u_z^2)u_z) = A_0 \quad (99)$$

Risolviamo la (99) associandole le condizioni al contorno di Dirichlet

$$u(\pm H) = 0 \quad (100)$$

Per semplificare l'analisi introduciamo le grandezze adimensionali

$$Z^* = \frac{Z}{H}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad Q^* = \frac{Q}{\mu}, \quad (101)$$

dove  $U = \frac{|A_0|H^2}{\mu}$  è la valore di riferimento più appropriata per il campo di spostamento (85). Questo è motivato dal fatto che finche le condizioni al contorno della lastra sono fissate, la deformazione di taglio rettilineo è causato solamente dal gradiente di pressione nella direzione dell'asse X, e dall'altra parte, il modulo di taglio infinitesimo fornisce una misura della rigidità(resistenza alla deformazione) del materiale. Introducendo le grandezze

adimensionali (101) nelle (100) e (99) e omettendo gli asterischi (per semplicità di notazione) si ottiene il seguente problema ai valori al contorno

$$\frac{d}{dZ} (Q(\varepsilon^2 u_z^2) u_z) = \text{sign}(A_0), \quad u(\pm 1) = 0, \quad (102)$$

in cui è stata operata l'adimensionalizzazione delle grandezze

$$u_z^2 = \left( \frac{d u}{d Z} \right)^2 = \frac{d u^2}{d Z^2} = \frac{d}{d} \left( \frac{U^2 u_*^2}{H^2 Z_*^2} \right) = \frac{U^2}{H^2} \left( \frac{d u_*^2}{d Z_*^2} \right) = \varepsilon^2 u_z^2 \quad (103)$$

dove il parametro

$$\varepsilon = \frac{U}{H} = \frac{|A_0| H}{\mu} \quad (104)$$

fornisce una misura della grandezza dello sforzo di taglio. In vista dell'invarianza del problema (102) rispetto alla trasformazione  $Z \rightarrow -Z$ , la soluzione (se esiste) è simmetrica rispetto a  $Z = 0$ . Inoltre, la deformazione  $u_z$  si annulla quando  $Z = 0$  e integrando la (99) otteniamo

$$Q(\varepsilon^2 u_z^2) u_z = \text{sign}(A_0) Z \quad (105)$$

Dalla (105) deduciamo che se il modulo di taglio generalizzato è positivo, allora la soluzione al problema (102) è positivo nell'intervallo  $] -1, 1[$  se il gradiente di pressione  $A_0$  è negativo, mentre è negativo se  $A_0 > 0$ . Dato che il segno del gradiente di pressione  $A_0$  dipende solamente dalla scelta della direzione dell'asse X, possiamo assumere senza perdere di generalità che  $A_0$  è negativo. Nelle sezioni a seguire, studieremo l'esistenza, unicità e regolarità della soluzione della (105) con  $\text{sign} A_0 = -1$ . Sempre dalla (105) possiamo capire che l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (102) dipende dall'invertibilità della relazione

$$\tau = Q(\gamma^2) \gamma \equiv \Gamma(\gamma) \quad (106)$$

in cui  $\tau = T_{13}$ ,  $\gamma = u_z$  infatti, nell'intervallo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  è contenuto il codominio di  $\Gamma$  e  $\Gamma$  deve essere invertibile con inversa  $\Gamma^{-1}$ , allora (102) può essere risolto

univocamente per ottenere  $u_z = \Gamma^{-1}(-\varepsilon Z)$  e quindi determinare il campo di spostamento  $u$  tramite quadratura.



### 3.3 Invertibilità della relazione tensione-deformazione

In [1] si dimostra che la relazione (104) è invertibile. Lo spettro del tensore sinistro di Cauchy-Green associato a (85), cioè il set delle direzioni principali è  $\lambda^2, 1, \lambda^{-2}$ .

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbf{B} - \lambda\delta_{ij}) &= \det \begin{bmatrix} (1 + u_z^2) - \lambda & 0 & u_z \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ u_z & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\
 &= (1 - \lambda)^2((1 + u_z^2) - u_z^2(1 - \lambda)) = 0 \\
 &= (1 - \lambda) \left( (1 - \lambda)(1 + u_z^2 - \lambda) - u_z^2 \right) \\
 &= (1 - \lambda) \left( 1 + u_z^2 - \lambda + (-\lambda - u_z^2\lambda + \lambda^2) - u_z^2 \right) \\
 &= (1 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda(u_z^2 + 2) + 1) = 0
 \end{aligned} \tag{107}$$

Le soluzioni dell'equazione sono (107)

$$(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 1$$

oppure

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{u_z^2 + 2 \pm \sqrt{(u_z - 2)^2 - 4}}{2} \\
 &= \frac{u_z^2 + 2 \pm \sqrt{u_z^4 + 4u_z^2 + 4 - 4}}{2} \\
 &= \frac{u_z^2 + 2 \pm \sqrt{u_z^4 + 4u_z^2}}{2} \\
 &= \frac{u_z^2 + 2 \pm \sqrt{u_z^2(u_z^2 + 4)}}{2}
 \end{aligned}$$

dato che gli autovalori sono stati chiamati  $\lambda^2$  e  $\lambda^{-2}$  abbiamo

$$\lambda = \sqrt{\frac{u_z^2 + 2 + \sqrt{u_z^2(u_z^2 + 4)}}{2}}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{u_z^2 + 2 - \sqrt{u_z^2(u_z^2 + 4)}}} \tag{108}$$

sono gli autovalori associati. In vista delle direzioni principali di deformazione gli invarianti scalari  $I_1$  e  $I_2$

$$I_1 = I_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \quad (109)$$

Inoltre è facile verificare che il terzo invariante di tensione  $I_3$  risulta

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

quindi il vincolo di incomprimibilità è rispettato. Proprio in vista della (3.3), possiamo esprimere la funzione energia di deformazione in termini di direzioni principali  $\lambda$  ponendo  $\tilde{W}(\lambda) = W(\lambda^2 + \lambda^{-2} + 1, \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1)$ . Come provato da Ogden [8],  $W$  soddisfa la condizione di forte ellitticità se solo se  $\tilde{W}$  soddisfa le disuguaglianze

$$\frac{\lambda \tilde{W}'(\lambda)}{\lambda^2 - 1} > 0, \quad \lambda^2 \tilde{W}''(\lambda) + 2 \frac{\lambda \tilde{W}'(\lambda)}{\lambda^2 + 1} > 0, \quad (110)$$

dove l'apice rappresenta la derivata rispetto  $\lambda$ , si dimostra in [1] che scrivendo  $W = W(I_1, I_2)$  attraverso i  $\lambda$  e usando le (106), (92) e (94) la (110) diventa

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} Q(\gamma^2) &> 0, \\ \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{\lambda^2} \left[ Q(\gamma^2) + 2\gamma^2 \frac{dQ}{d\gamma^2} \right] &> 0, \\ \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{\lambda^2} \frac{d\Gamma}{d\gamma} &> 0 \end{aligned} \quad (111)$$

La disuguaglianza (111<sub>1</sub>) implica la positività del modulo generalizzato di taglio  $Q$ , mentre la (111<sub>2</sub>) implica che  $\Gamma$  è funzione crescente con la deformazione. Quindi  $\Gamma$  è invertibile. Infine, dato che in termini di  $\gamma$  gli invarianti scalari sono  $I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2$  l'energia elastica immagazzinata in una deformazione rettilinea di taglio dipende solamente dalla deformazione di taglio  $\gamma$  in accordo con

$$\widehat{W}(\gamma) = W(\gamma^2 + 3, \gamma^2 + 3), \quad (112)$$

dalla (112) è facile verificare che

$$\mathcal{F} = \frac{d\widehat{W}}{d\gamma}, \quad e \quad Q = \frac{1}{\gamma} \frac{d\widehat{W}}{d\gamma} \quad (113)$$

che possono provare che la condizione di forte ellitticità è equivalentemente a richiedere che  $\widehat{W}$  sia convessa.

### 3.4 Soluzioni Esatte

Considerando che l'intervallo  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  è contenuto nel codominio di  $\mathcal{F}$ , allora la soluzione di (99) e (102) è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(\varepsilon^2 x^2) &= 2\varepsilon^2 x f'(\varepsilon^2 x^2) \\ \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_a^b \frac{d}{dz} f(\varepsilon^2 x^2) dx &= \int_a^b x f'(\varepsilon^2 x^2) dx \\ \frac{1}{2\varepsilon^2} [f(\varepsilon^2 x^2)]_a^b &= \end{aligned}$$

dove nel nostro caso specifico

$$\nu = \gamma = u_z = f', \quad u = f, \quad b = z, \quad a = -1,$$

allora con gli adatteamenti del caso abbiamo, e con un segno meno scambiamo le funzioni

$$u = - \int_{-}^z \nu(\varepsilon^2 \zeta^2) \zeta d\zeta = \frac{1}{2\varepsilon^2} [\Gamma(\varepsilon^2) - \Gamma(\varepsilon^2 z^2)] \quad (114)$$

dove  $\Gamma$  è l'antiderivata di  $\nu$ . Come esempi, riportiamo da [1] alcune soluzioni esatte in forma chiusa corrispondenti a differenti modelli della funzione d'energia di deformazione. Per il modello Fung-Demiral model, il codominio di  $\mathcal{F}$  è l'intero asse reale per ogni  $\varepsilon > 0$  l'unica soluzione di (99) e (??) è

$$\begin{aligned} u_{FD} = \frac{1}{2\alpha\varepsilon} \left\{ [W(2\alpha\varepsilon^2) - 1] \exp \left[ \frac{W(2\alpha\varepsilon^2)}{2} \right] \right. \\ \left. - [W(2\alpha\varepsilon^2 Z^2) - 1] \exp \left[ \frac{W(2\alpha\varepsilon^2 Z^2)}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

Per il modello Gent, il codominio di  $\mathcal{F}$  è l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  la soluzione di (99) e (102)

$$u_G = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[ \sqrt{4J_m\varepsilon^2} + \frac{J_m^2}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{4J_m\varepsilon^2} - J_m}{\sqrt{4J_m\varepsilon^2} + J_m} \right) + J_m \ln|z| \right. \\ \left. - \sqrt{4J_m\varepsilon^2 Z^2} - \frac{J_m^2}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{4J_m\varepsilon^2 Z^2} - J_m}{\sqrt{4J_m\varepsilon^2 Z^2} + J_m} \right) \right]. \quad (116)$$

Per il modello Knowles con  $n = 1/2$ , il codominio di  $\mathcal{F}$  è l'intervallo  $[\frac{-1}{\sqrt{2b}}, \frac{1}{\sqrt{2b}}]$ . Quindi il problema (102) ammette soluzione solo se  $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2b}}$ . Per questi valori di  $\varepsilon$  la soluzione di (102) è data da

$$u_K = \frac{1}{2b\varepsilon^2} \left[ \sqrt{1 - 2b\varepsilon^2 Z^2} - \sqrt{1 - 2b\varepsilon^2} \right] \quad (117)$$

Per il modello quadratico non è possibile esprimere una soluzione in forma chiusa.

### 3.5 Osservazioni finali

Abbiamo valutato alcune peculiarità costitutive di diversi modelli per la densità d'energia di deformazione per un materiale isotropo incomprimibile considerando una deformazione di taglio rettilineo per una lastra di gomma. Un'attenzione particolare è stata rivolta ai materiali Neo-Hookeani generalizzati che sono largamente usati ad esempio in applicazioni biologiche.

## 4 Grafici delle soluzioni analitiche esatte

In questa sezione plotteremo le soluzioni esatte proposte nell'articolo [1]. Per prima cosa attraverso l'utilizzo di Matlab R2023b abbiamo ricavato i grafici delle funzioni  $u$ . Mostriamo adesso in dettaglio i codici utilizzati per le varie funzioni.

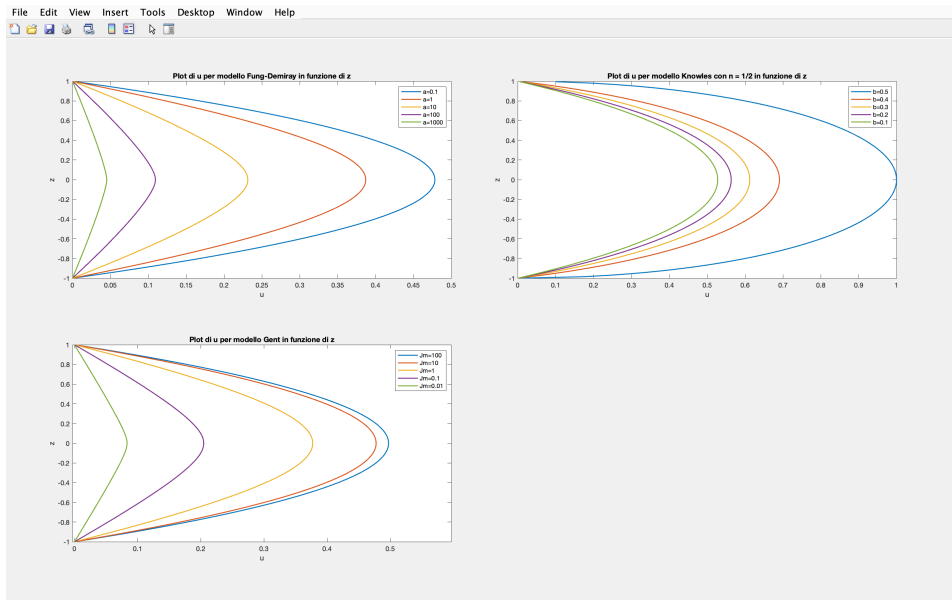


Figure 1: Layout 2x2 Grafici

Il comando "tiledlayout(2,2)" (figura 2), crea una griglia 2x2 e con il "comando nexttile" si inseriscono i grafici nella griglia.

```

tiledlayout(2,2)

nexttile
plot(uFD01,z,uFD1,z,uFD10,z,uFD100,z,uFD1000,z,LineWidth=1.5);
title('Plot di u per modello Fung-Demiray in funzione di z')
ylabel('z');
xlabel('u');
legend('a=0.1','a=1','a=10','a=100','a=1000')

nexttile
plot(uK_05,Z,uK_04,Z,uK_03,Z,uK_02,Z,uK_01,Z,'LineWidth',1.5)
title('Plot di u per modello Knowles con n = 1/2 in funzione di z')
xlabel('u');
ylabel('z');
legend('b=0.5 ','b=0.4','b=0.3','b=0.2','b=0.1')

nexttile
plot(u_G100,Z,u_G10,Z,u_G1,Z,u_G01,Z,u_G001,Z,'linewidth',1.5)
title('Plot di u per modello Gent in funzione di z')
xlabel('u');
ylabel('z');
legend('Jm=100 ','Jm=10','Jm=1','Jm=0.1','Jm=0.01')
|

```

Figure 2: Codice Matlab per Layout Grafici

## 4.1 Modello di Gent

```

Z=-1:0.015:1;
Jm=100;
for i=1:length(Z)
    u_G100(i)=0.5*(sqrt(4*Jm+Jm^2)+Jm/2*log(((sqrt(4*Jm+Jm^2)-Jm)/(sqrt(4*Jm+Jm^2)+Jm))) ...
    +Jm*log(abs(Z(i)))-sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)-Jm/2*log(((sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)-Jm)/(sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)+Jm)))));
end
Jm=10;
for i=1:length(Z)
    u_G10(i)=0.5*(sqrt(4*Jm+Jm^2)+Jm/2*log(((sqrt(4*Jm+Jm^2)-Jm)/(sqrt(4*Jm+Jm^2)+Jm))) ...
    +Jm*log(abs(Z(i)))-sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)-Jm/2*log(((sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)-Jm)/(sqrt(4*Jm*Z(i)^2+Jm^2)+Jm)))));
end

```

Figure 3: Codice Matlab per il modello di Gent

Per esempio in figura 3 vediamo il codice per il modello di Gent, dove per prima definiamo il dominio della funzione cioè l'insieme  $Z$  che va da  $a=-1$  a  $b=1$  con passo  $h=0.015$ , questo comporta che l'insieme di partenza ha

$$n = \frac{b - a}{h} = \frac{1 - (-1)}{0.015} = 133.33 \quad (118)$$

elementi, arrotondato per eccesso a 134. Adesso utilizziamo il ciclo for per ripetere l'istruzione per ogni elemento  $i$ -esimo del dominio associando un valore del dominio per ogni  $i$  dove  $i$  va da  $i=1$  a  $i=length(Z) = 134$ . Il primo elemento del dominio cioè per  $i = 1$  è  $Z=-1$ , mentre l'ultimo elemento del dominio cioè il 134 elemento è proprio  $Z = 1$ .

Possiamo notare in figura 4 che per il parametro  $Jm = 0.01$  la funzione  $u$  presenta un punto angoso, dall'analisi sappiamo che i punti angolosi sono punti di non deribabilità e dato che la derivata di  $u$  cioè  $u_z$  rappresenta proprio la deformazione di taglio, allora sappiamo che in zero abbiamo una discontinuità del taglio .



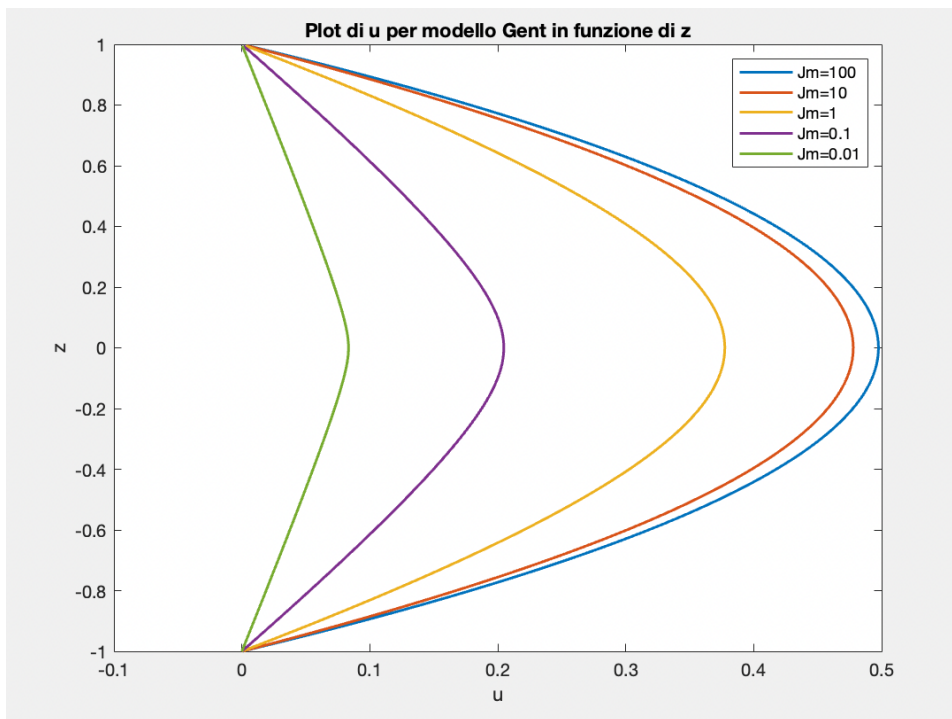


Figure 4: Grafico per il modello di Gent

## 4.2 Modello Fung-Demiray

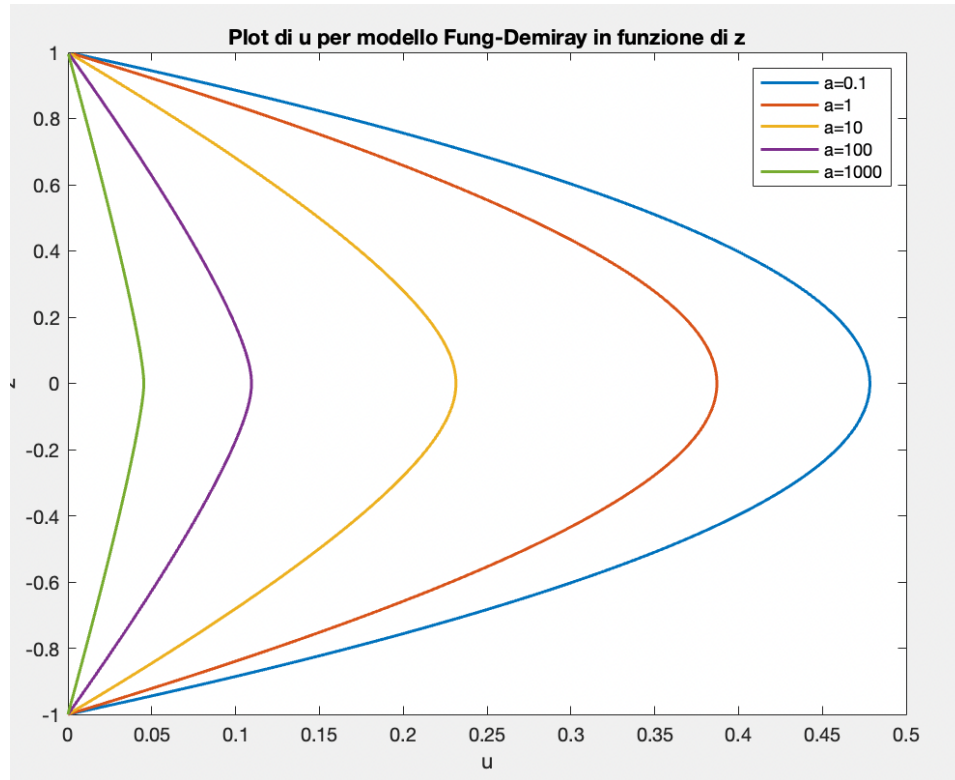


Figure 5: Grafico per il modello Fung-Demiray

Per il plot di questo modello abbiamo utilizzato la funzione lambert W, che rappresenta la soluzione dell'equazione

$$ye^y = x$$

per ogni numero complesso  $x$ , nel nostro caso ci limitiamo a considerare i numeri reali  $x \geq 0$ . Per la sintassi del codice abbiamo utilizzato solamente il comando "lambertw(x)" che richiama la funzione Lambert W, dove  $x$  dipende dal parametro costitutivo ( $a$ ) e dalla variabile ( $z$ ).

```

a = 0.1;
for i = 1 : length(z)
uFD01(i)=((lambertw(2*a)-1)*exp(lambertw(2*a)/2)+ ...
-1*(lambertw(2*a*z(i)^2)-1)*exp(lambertw(2*a*z(i)^2)/2))/(2*a);
end

a = 1;
for i = 1 : length(z)
uFD1(i)=((lambertw(2*a)-1)*exp(lambertw(2*a)/2)+ ...
-1*(lambertw(2*a*z(i)^2)-1)*exp(lambertw(2*a*z(i)^2)/2))/(2*a);
end

a = 10;
for i = 1 : length(z)
uFD10(i)=((lambertw(2*a)-1)*exp(lambertw(2*a)/2)+ ...
-1*(lambertw(2*a*z(i)^2)-1)*exp(lambertw(2*a*z(i)^2)/2))/(2*a);

```

Figure 6: Codice per il modello Fung-Demiray

### 4.3 Modello Knowles

Per il Modello Knowles con  $n = \frac{1}{2}$ , dove non è stato utilizzato il ciclo for ma l'elevazione al quadrato elemento per elemento con comando '.' prima dell'elevamento a potenza quando quell'elemento è un vettore composto da più elmenenti.

```
%%% knowles power model
eps = 1;

b = 0.5;
uK_05=1/(2*b*eps^2)*(sqrt(1-2*b*eps^2*Z.^2)-sqrt(1-2*b*eps^2));

b = 0.4;
uK_04=1/(2*b*eps^2)*(sqrt(1-2*b*eps^2*Z.^2)-sqrt(1-2*b*eps^2));

b = 0.3;
uK_03=1/(2*b*eps^2)*(sqrt(1-2*b*eps^2*Z.^2)-sqrt(1-2*b*eps^2));

b = 0.2;
uK_02=1/(2*b*eps^2)*(sqrt(1-2*b*eps^2*Z.^2)-sqrt(1-2*b*eps^2));

b = 0.1;
uK_01=1/(2*b*eps^2)*(sqrt(1-2*b*eps^2*Z.^2)-sqrt(1-2*b*eps^2));
```

Figure 7: Codice per modello Knowles

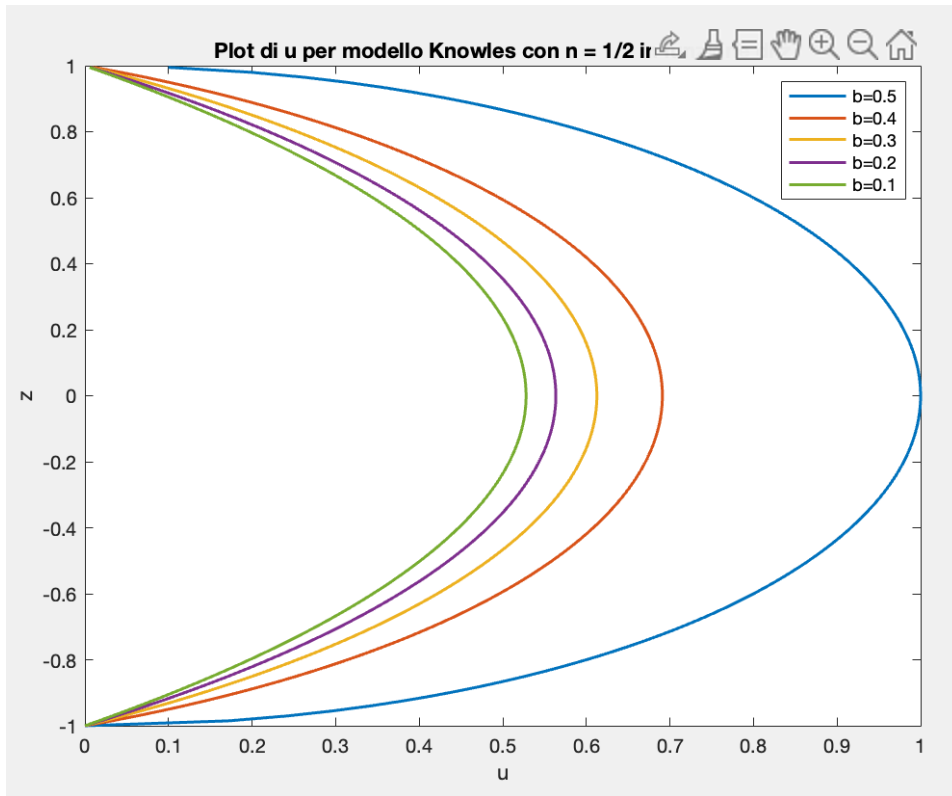


Figure 8: Grafico per modello Knowles

## 5 Calcolo esplicito per il modulo generalizzato di taglio per i vari modelli d'energia

In un'ottica di voler calcolare le soluzioni approssimate per confrontarle con le soluzioni esatte, deve essere esplicito il modulo generalizzato di taglio  $Q(u_z^2)$  e inserito nella (99).

$$\frac{d}{dz}[Q(\varepsilon^2 u_z^2) u_z^2] = \text{sign}(A_0) \quad (99)$$

questa operazione va ripetuta per ogni modello di densità d'energia di deformazione come segue.

- **Fung-Demiray:** dalla (82) che riportiamo sotto per comodità:

$$W_{FD} = \frac{u}{2\alpha} \exp[(\alpha(I_1 - 3)) - 1]$$

allora possiamo scrivere il modulo generalizzato di taglio come

$$\begin{aligned} \implies Q_{FD}(u_z^2) &= 2[W_1(3 + u_z^2, 3 + u_z^2) + W_2(3 + u_z^2, 3 + u_z^2)] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial I_1} W_{FD} \\ &= 2a \frac{\mu}{2\alpha} \exp[(\alpha(I_1 - 3)) - 1] \\ &= \mu \exp[(\alpha(u_z^2)) - 1] \end{aligned} \quad (119)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo solamente operato la sostituzione  $I_1 = u_z^2 + 3$ . Infine operando le seguenti adimensionalizzazioni

$$Z^* = \frac{Z}{H}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad Q^* = \frac{Q}{\mu}, \quad (120)$$

e ricordando la (103)

$$\varepsilon = \frac{U}{Z} \implies \varepsilon^2 u_z^2 \quad ; \quad \varepsilon u_z \quad (121)$$

dove abbiamo ommesso l'asterisco per semplicità di notazione(calcoli di adimensionalizzazione fatti sopra: cioè la (103)) allora la (122) diventa

$$Q(\varepsilon^2 u_z^2) = \exp[(\alpha(\varepsilon^2 u_z^2)) - 1] \quad (122)$$

Adesso risolviamo l'equazione differenziale ordinaria (99) per il modello Fung-Demiray (78)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}[\exp[(\alpha(\varepsilon^2 u_z^2)) - 1]u_z] &= \\ &= (\exp[(\alpha(\varepsilon^2 u_z^2)) - 1])'u_z + \frac{du_z}{dz}\exp[(\alpha(\varepsilon^2 u_z^2)) - 1] \\ &= \left(\frac{du_z}{dz}2\alpha\varepsilon^2 u_z \exp[\alpha\varepsilon^2 u_z^2 - 1]\right) + \frac{du_z}{dz}\exp[\alpha\varepsilon^2 u_z^2 - 1] \\ &= \frac{d^2 u}{dz^2} e^{(\varepsilon^2 \alpha u_z^2 - 1)} (2\alpha\varepsilon^2 u_z^2 + 1) \end{aligned} \quad (123)$$

- **Gent** In maniera analoga ricaviamo a partire dalla (83) cioè

$$W_G = -\frac{\mu}{2} J_m \log\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right)$$

il modulo generalizzato di taglio diventa

$$\begin{aligned} \implies Q_{FD}(u_z^2) &= 2 \frac{\partial}{\partial I_1} W_G = \\ &= -2 \frac{\mu}{2} J_m \frac{1}{J_m - I_1 + 3} \\ &= -\frac{\mu J_m}{J_m - u_z^2} \\ &= -\frac{J_m}{J_m - \varepsilon^2 u_z^2} \end{aligned} \tag{124}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo operato l'adimensionalizzazione e quindi l'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [Q(\varepsilon^2 u_z^2) u_z^2] &= -\frac{d}{dz} \left( \frac{J_m}{J_m - u_z^2} u_z \right) = \\ &= -\frac{1}{(J_m - \varepsilon^2 u_z^2)^2} \left[ \left( \frac{du_z}{dz} J_m (J_m - \varepsilon^2 u_z^2) \right) - \left( (-2u_z \frac{du_z}{dz}) (J_m u_z) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{(J_m - \varepsilon^2 u_z^2)^2} \left[ J_m^2 \frac{du_z}{dz} - J_m \varepsilon^2 u_z^2 \frac{du_z}{dz} + 2J_m \varepsilon^2 u_z^2 \frac{du_z}{dz} \right] \\ &= -\frac{1}{(J_m - \varepsilon^2 u_z^2)^2} \frac{d^2 u}{dz^2} [J_m^2 - J_m \varepsilon^2 u_z^2 + 2J_m \varepsilon^2 u_z^2] \\ &= -\frac{1}{(J_m - \varepsilon^2 u_z^2)^2} \frac{d^2 u}{dz^2} [J_m^2 + J_m \varepsilon^2 u_z^2] \\ &= \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{(J_m^2 + J_m \varepsilon^2 u_z^2)}{J_m - \varepsilon^2 u_z^2} \end{aligned} \tag{125}$$



- **Knowles Power Law** dalla 84

$$W_k = \frac{\mu}{2b} \left[ \left( 1 + \frac{b}{2}(I_1 - 3) \right)^n - 1 \right]$$

il modulo generalizzato di taglio con  $n = 1/2$  diventa

$$\begin{aligned} \Leftarrow Q_k(\varepsilon^2 u_z^2) &= 2 \frac{\partial}{\partial I_1} W_k = \\ &= \mu \frac{1}{\left[ 1 + \frac{b}{n}(I_1 - 3) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \mu \frac{1}{\left[ 1 + \frac{b}{n}(u_z^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left[ 1 + \frac{b}{n}(\varepsilon^2 u_z^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left[ 1 + \frac{b}{n}(\varepsilon^2 u_z^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (126)$$

l'equazione differenziale diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} Q_k(\varepsilon^2 u_z^2) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\left[ 1 + 2b(\varepsilon^2 u_z^2) \right]^{\frac{3}{2}}} 2b2\varepsilon^2 u_z \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dz^2} \\ &= -\frac{d^2 u}{dz^2} \frac{2b\varepsilon^2 u_z}{\left[ 1 + 2b(\varepsilon^2 u_z^2) \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (127)$$

una volta esplicitata la  $Q(u_z^2)$  per i vari modelli di densità d'energia e isolando il termine dove compare la derivata seconda di u, si può procedere (ma non lo faremo) con il calcolo della soluzione approssimata dell'equazione differenziale ordinaria di secondo ordine.

## 6 Referenze

### References

- [1] Lecture Notes of TICMI Vol. 21, 2020, 107-119
- [2] An Introduction to Theory of Elasticity. R.J. Atkins N. Fox
- [3] Dacorogna, Bernard. Introduction to the Calculus of Variations. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [4] Demiray, H. (1972). A note on the elasticity of soft biological tissues. *Journal of biomechanics*, 5(3), 309-311.
- [5] Fung, Y. C. (1967). Elasticity of soft tissues in simple elongation. *American Journal of Physiology- Legacy Content*, 213(6), 1532-1544.
- [6] Gent, A. N. (1996). A new constitutive relation for rubber. *Rubber chemistry and technology*, 69(1), 59-61.
- [7] Hamilton MF, Ilinskii YA, Zabolotskaya EA. 2004 Separation of compressibility and shear deformation in the elastic energy density. *J. Acoust. Soc. Am.* 116, 41–44.
- [8] R.W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover Publications, New York, 1984.
- [9] Ogden RW. 1974 On isotropic tensors and elastic moduli. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 75, 427–436.
- [10] Zhang, J. P., and Rajagopal, K. R. (1992). Some inhomogeneous motions and deformations within the context of a non-linear elastic solid. *International journal of engineering science*, 30, 919–938.