



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Progettazione e studio di un impianto per
analisi di vibrazioni**
**Design and study of a rig for vibrations
analysis**

Candidato:
Stefano Ciarcelluto

Relatore:
Prof. Pierpaolo Belardinelli

Anno Accademico 2021-2022



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Progettazione e studio di un impianto per
analisi di vibrazioni**
**Design and study of a rig for vibrations
analysis**

Candidato:
Stefano Ciarcelluto

Relatore:
Prof. Pierpaolo Belardinelli

Anno Accademico 2021-2022

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA
Via Brezze Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

Ringraziamenti

Un sentito grazie al Prof. Pierpaolo Belardinelli per avermi seguito nello sviluppo della tesi. Una menzione va anche alla mia famiglia e a tutti coloro che mi hanno supportato e mi sono stati a fianco durante questo percorso.

Ancona, Ottobre 2022

Stefano Ciarcelluto

Sommario

Solitamente si è abituati ad ottenere una risposta ben determinata a partire da eccitazioni finite di cui si conosce la legge, ciò non è sempre vero in quanto esistono dei casi in cui si possono ottenere dei moti caotici, cioè caratterizzati dall'imprevedibilità. E' quindi utile andare a studiare ed identificare regioni di esistenza e parametri che giocano un ruolo in tale moto complesso. L'obiettivo di questo lavoro è ricreare un apparato sperimentale per lo studio di moto caotico. Questo sistema si compone degli stessi elementi costruttivi di un impianto esistente descritto in [1] ma ha differenze visibili per quanto riguarda le dimensioni e i materiali scelti, dato che questi due parametri sono legati a esigenze di disponibilità e facilità della lavorazione. Messo in funzionamento l'impianto sperimentale si devono acquisire a livello digitale i dati che caratterizzano il moto e così si crea una base all'elaborazione dei dati che permetterà validare tutto ciò che è stato enunciato.

Indice

1	Gli attrattori strani	1
1.1	Introduzione all'impianto teorico	1
1.2	Generalità sugli attrattori strani	1
1.3	Modelli teorici	2
1.3.1	Forze magnetiche	2
1.3.2	Modello discreto, catastrofe della farfalla	4
1.3.3	Modello continuo	5
1.4	Riduzione del modello a un'equazione ordinaria differenziale con il metodo di Galerkin	8
1.5	Analisi del modello a singolo modo	10
2	Design dell'impianto sperimentale	13
2.1	Introduzione al design	13
2.2	Progettazione sostegno	14
2.2.1	Disegno	14
2.2.2	Verifica	16
2.3	Scelta dei magneti e progettazione dei loro supporti	19
2.3.1	Scelta magneti	19
2.3.2	Progettazione supporti	22
2.4	Scelta della trave	23
3	Acquisizione e Digitalizzazione dei dati	29
3.1	L'Acquisizione in generale	29
3.2	Strumenti utilizzati	30
3.2.1	Strumentazione per l'applicazione della forzante	31
3.2.2	Impostazione della videocamera	33
3.3	Programmazione del file di acquisizione	33
3.3.1	Sezione della forzante	35
3.3.2	Sezione dell'acquisizione	35
3.4	Procedura di utilizzo del sistema	36
4	Conclusioni	39
4.1	Conclusioni	39

Elenco delle figure

1.1	Linee di campo magnetico, dall'articolo [2]	2
1.2	(a) sistema di coordinate usate per l'analisi teorica, (b) elemento della trave nel campo magnetico uniforme, (c) elemento della trave in un campo magnetico non uniforme	3
1.3	Diagramma in cui si notano le zone con il numero di equilibri corrispondente in base ai valori di λ_1 e λ_2 , da [3]	5
1.4	Mappe di Poincarè:(a) $f < f_1$,(b) $f_1 < f < f_2$,(c) $f > f_2$, da [2]	12
2.1	Esplosivo del sostegno	14
2.2	Sostegno fabbricato	15
2.3	Schema trave 3 incastrata.	16
2.4	Schema trave 2 incastrata.	17
2.5	Foglio di calcolo Excel	18
2.6	Analisi FEM su Comsol	19
2.7	Foglio di calcolo del campo magnetico	20
2.8	Calcolo del campo magnetico Su Comsol	21
2.9	Calcolo degli spostamenti con magneti simmetrici su Comsol	22
2.10	Esplosivo del supporto del magnete	22
2.11	Tabella costanti per le varie condizioni iniziali e di vibrazione	25
2.12	Calcolo della prima frequenza naturale e della massa effettiva su Excel	26
2.13	Calcolo della prima frequenza naturale su Comsol	27
3.1	Oggetti principali dell'impianto sperimentale	30
3.2	Scheda d'acquisizione	31
3.3	Amplificatore APS 125	32
3.4	Slitta micrometrica APS 113	32
3.5	Zona di impostazione della forzante su Labview	34
3.6	Zona di impostazione dell'immagine su Labview	34
3.7	Zona dell'elaborazione e salvataggio dati su Labview	35

Capitolo 1

Gli attrattori strani

1.1 Introduzione all'impianto teorico

Le vibrazioni forzate di una trave incastrata possono mostrare comportamento caotico non periodico per eccitazioni forzanti definite. Usando dei magneti per deformare la trave si creano delle posizioni stabili e la deflessione può essere descritta staticamente come una catastrofe della farfalla e dinamicamente come un attrattore strano. Le vibrazioni non periodiche tra le posizioni sono studiate nel piano di fase di Poincarè. Per smorzamento moderato nel piano di Poincarè ho struttura ben definita, attraverso l'uso di mappe di Poincarè si svela la struttura degli attrattori strani su tutto lo spazio toroidale prodotto del piano di fase e dell'angolo di fase della forzante.

1.2 Generalità sugli attrattori strani

Gli attrattori strani sono stati studiati con le equazioni differenziali autonome di terzo ordine, come nei lavori di Lorentz [4]. Ma si è scoperto che questo tipo di moto caotico è caratteristico anche di un oscillatore di secondo ordine non lineare forzato esternamente. Questo genera tre punti di equilibrio: di cui due stabili e uno instabile. Andando a applicare una forza periodica la trave passa tra questi tre punti in modo caotico.

Se si può ridurre il moto a un modo di vibrare e poi usare un tipo di approssimazione di Galerkin, si ottiene così un'equazione differenziale di secondo ordine

$$\ddot{A} + \gamma \dot{A} - \frac{A}{2}(1 - A^2) = f \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

con lo spostamento A e il tempo t che sono stati adimensionalizzati e con $\omega, \gamma, f > 0$. Per $f = 0$ si hanno tre equilibri: $(A, \dot{A}) = (0, 0)$ oppure $(A, \dot{A}) = (\pm 1, 0)$.

Se si ha $\gamma > \epsilon_0 > 0$ e con piccole forze $f < \epsilon_0$ ho delle orbite attrattive periodiche vicino i due ultimi punti e una periodica a sella vicino $(0, 0)$. Linearizzando l'equazione per $(A, \dot{A}) = (\pm 1, 0)$ si ha un sistema di secondo ordine con frequenza naturale $\omega_0 = 1$. Per alte f si arriva a una serie di complicate orbite periodiche e non. In base alle posizioni dei magneti si ottengono tre o cinque punti di equilibrio e dall'e-

quazione 1.1 si ottengono oscillazioni strane riguardo due o tre punti di equilibrio stabile.

1.3 Modelli teorici

1.3.1 Forze magnetiche

Si utilizzano magneti permanenti per creare un campo magnetico statico \vec{B} che induce una magnetizzazione \vec{M} per unità di volume sul solido.

$$\vec{M} = \left(\frac{\chi}{\chi + 1}\right) \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (1.2)$$

con χ suscettibilità magnetica (per gli acciai è circa 10^3 o 10^4) e μ_0 permeabilità magnetica del vuoto (di valore $4\pi 10^{-7} \frac{N}{A^2}$).

Il campo magnetico \vec{B} , le cui linee sono visibili in Fig. 1.1, crea forza \vec{F} e momento \vec{C} sulla trave

$$\vec{F} = \vec{M} * \nabla \vec{B}$$

$$\vec{C} = \vec{M} x \vec{B} \quad (1.3)$$

Entrambi sono conservativi e ricavabili dal potenziale magnetico W sulla trave

$$W = -\frac{1}{2} \int \vec{M} \vec{B} dv \quad (1.4)$$

Ciò indica che per un sistema autonomo (cioè senza forzante) si ha solo azione delle forze magnetiche (le quali sono conservative) e perciò non c'è moto fluttuante. Queste inoltre influenzano in modo non lineare lo spostamento della punta della trave se questo è paragonabile al distanziamento tra i magneti.

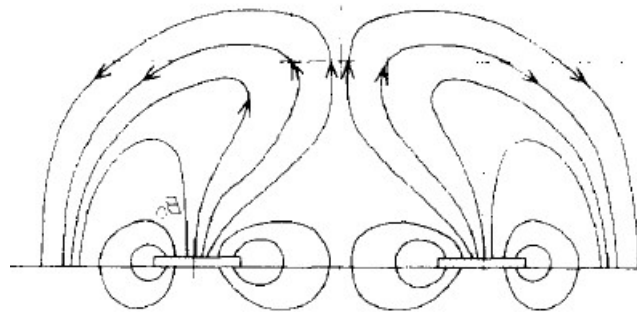


Figura 1.1: Linee di campo magnetico, dall'articolo [2]

Assumendo che la trave sia piatta, che \vec{B} sia uniforme e \vec{M} cambi poco con la

curvatura si trova la formula della magnetizzazione generale

$$\vec{M} = \left(\frac{\cos \beta}{\mu_r} \hat{n} + \sin \beta \hat{a} \right) \frac{\chi \vec{B}(x, y)}{\mu_0} \quad (1.5)$$

con \hat{n} e \hat{a} che sono i versori normale e tangente al piatto della trave, β che è l'angolo tra il campo e la normale \hat{n} , come si vede in Fig. 1.2 (b). Infine $\mu_r = \chi + 1$ è la permeabilità relativa della trave.

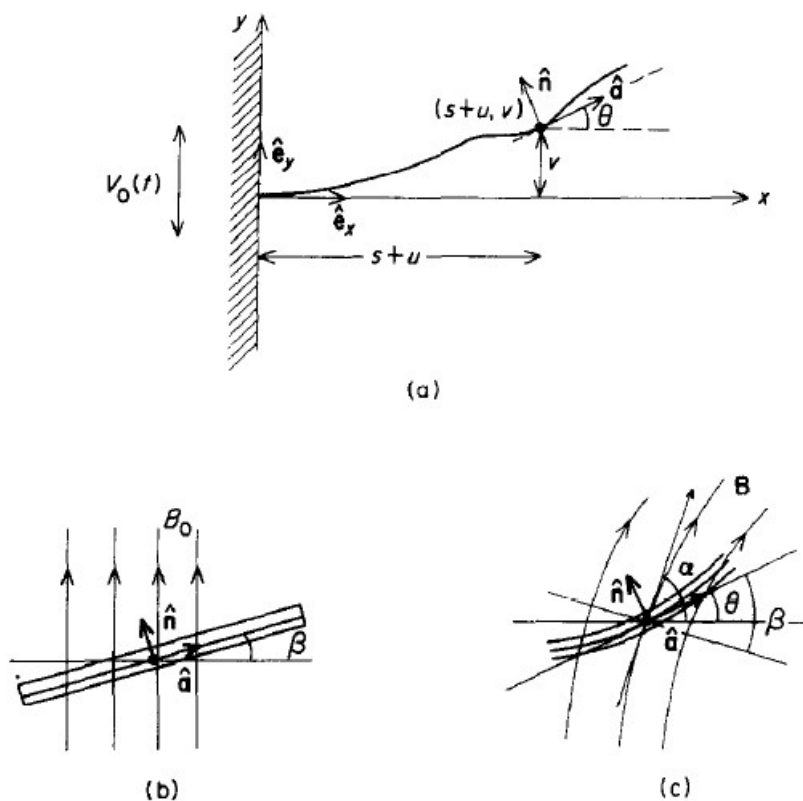


Figura 1.2: (a) sistema di coordinate usate per l'analisi teorica, (b) elemento della trave nel campo magnetico uniforme, (c) elemento della trave in un campo magnetico non uniforme

Prendendo il campo \vec{B} non uniforme così come nel caso della Fig. 1.2 (c) questo avrà componenti

$$B_x = B \cos(\alpha)$$

$$B_y = B \sin(\alpha) \quad (1.6)$$

con $\alpha = \theta - \beta + \frac{\pi}{2}$, e si va a riutilizzare tutto ciò nell'equazione della magnetizzazione 1.5. Si arriva così all'equazione dell'energia potenziale magnetica che dall'Eq. 1.4 diventa

$$W = -\frac{\chi}{4\mu_0\mu_r} \int_0^L [B_1 + B_2 \sin(2\theta) + B_3 \cos(2\theta)] ds \quad (1.7)$$

in cui L è la lunghezza della trave, e le varie B_k sono:

$$B_1 = (\mu_r + 1)(B_x^2 + B_y^2) \quad (1.8)$$

$$B_2 = 2B_x B_y (\mu_r - 1) \quad (1.9)$$

$$B_3 = (\mu_r - 1)(B_x^2 + B_y^2) \quad (1.10)$$

in cui B cambia punto per punto andando lungo la trave.

1.3.2 Modello discreto, catastrofe della farfalla

Per il modello sperimentale si assume solo la punta magnetizzata e si trascura il momento \vec{C} . Si considera che la magnetizzazione sia $\vec{M} = \frac{\chi}{\chi + 1} B_x \hat{a}$ sulla punta della trave.

Con queste ipotesi si può trovare la forza perpendicolare alla barra

$$\mathcal{F}_y = \alpha B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (1.11)$$

in cui α è una costante dipendente dalla geometria e da χ .

Essendo il campo \vec{B} irrotazionale si può scrivere

$$\mathcal{F}_y = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$W = \frac{-1}{2} \alpha B_x^2 \quad (1.12)$$

in cui y è lo spostamento della punta.

Ponendo i magneti simmetricamente la forza è non lineare con lo spostamento della trave. Inoltre in questo caso si avrà un'energia potenziale magnetica W che ha forma generica nello sviluppo in polinomio di Taylor

$$W = \frac{1}{2} a y^2 + \frac{1}{4} d y^4 + \frac{1}{6} c y^6 \quad (1.13)$$

Se si approssima a un solo modo di vibrare si ha l'energia potenziale elastica

$$\Psi = \frac{1}{2} k y^2 + (\text{termini di ordine maggiore}) \quad (1.14)$$

Andando a sommare queste due si ottiene il potenziale

$$V_1 = W + \Psi = \frac{1}{2} (k + a) y^2 + \frac{1}{4} d y^4 + \frac{1}{6} c y^6 \quad (1.15)$$

I punti di equilibrio della punta della trave si trovano con lo studio dei punti critici del potenziale e possono essere 1, 3 o 5 in base ai parametri k , a , c , d che dipendono dalle condizioni iniziali.

Secondo la teoria della catastrofe [5] il potenziale può essere anche riscritto con una formula generica in funzione di quattro parametri λ_j

$$V_1 = \lambda_1 y + \frac{1}{2} \lambda_2 y^2 + \frac{1}{3} \lambda_3 y^3 + \frac{1}{4} \lambda_4 y^4 + \frac{1}{6} y^6 \quad (1.16)$$

in cui λ_1 e λ_3 sono gli allontanamenti dalla simmetria (per forza magnetica o spaziatura non uguale tra i due magneti e la trave), $\lambda_4 < 0$ è collegata alle forze magnetiche, λ_2 contiene le costanti riguardanti le forze lineari magnetiche e elastiche. In [2], e allo stesso modo in [3], è stato determinato un diagramma del numero di punti di equilibrio disegnato nel piano λ_1 - λ_2 con $\lambda_4 < 0$ e $\lambda_3 = 0$ che si trova in Fig. 1.3, in cui sono indicate le curve che separano le diverse zone.

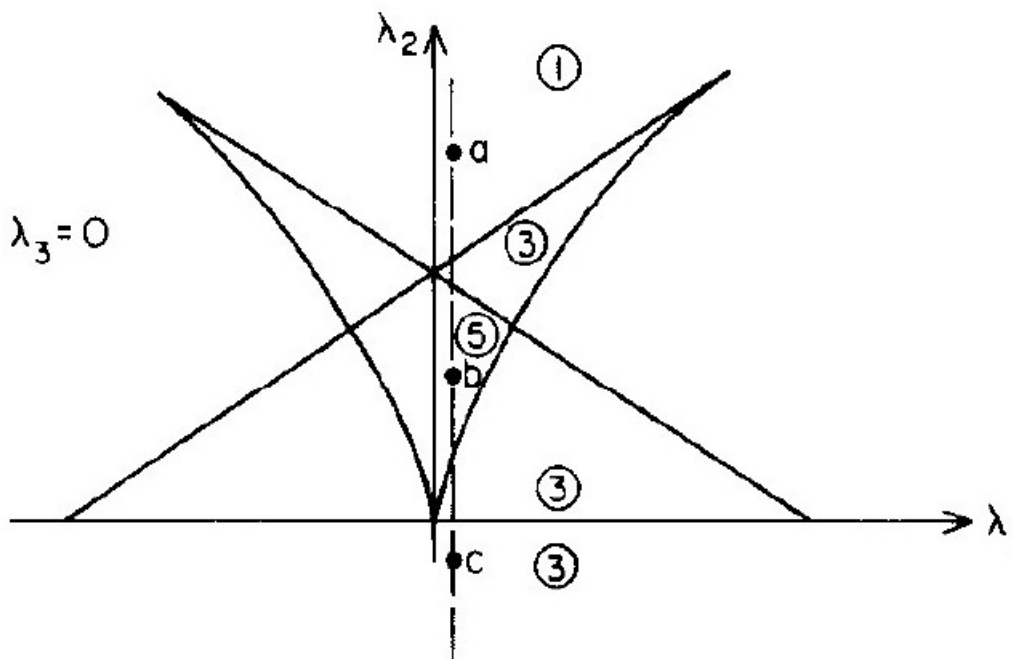


Figura 1.3: Diagramma in cui si notano le zone con il numero di equilibri corrispondente in base ai valori di λ_1 e λ_2 , da [3]

1.3.3 Modello continuo

Si fa l'ipotesi di inestensibilità della trave e dei piccoli spostamenti laterali. Quindi si ottiene la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = I - (\Psi + W) \quad (1.17)$$

in cui I è l'energia cinetica, W quella magnetica e Ψ quella elastica. Inoltre è possibile legare l'inclinazione θ della trave allo spostamento

$$\tan \theta = \frac{v'}{1 + u'} \quad (1.18)$$

in cui ho le derivate degli spostamenti lungo x (u') e lungo y (v'). A cui poi viene applicata la condizione di inestensibilità della trave che implica

$$1 = (1 + u')^2 + (v')^2 \quad (1.19)$$

Per far fronte al vincolo si introduce un moltiplicatore di Lagrange $T(s, t)$, funzione dello spostamento s sulla trave e del tempo t , usando il potenziale magnetico trovato nell' Eq. 1.7 si ottiene che il principio di Hamilton ha equazione

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{1}{2} m [\dot{u}^2 + (\dot{v} + \dot{V}_0)^2] - \frac{1}{2} D (\theta')^2 + \Psi + \frac{1}{2} T [1 - (1 + u')^2 - (v')^2] x ds dt \quad (1.20)$$

nella quale D è la rigidità elastica della trave, $V_0(t)$ è il moto della base a cui è collegata la trave e con

$$\Psi = \frac{-\chi \Delta}{4\mu_0 \mu_r} [B_1 + B_2 \sin(2\theta) + B_3 \cos(2\theta)] \quad (1.21)$$

che contiene Δ che è lo spessore della trave.

Sfruttando il fatto che

$$\delta \theta = -v' \delta u' + (1 + u') \delta v' \quad (1.22)$$

dalle equazioni 1.18 e 1.19, si ottengono due equazioni differenziali parziali di moto e le condizioni di vincolo

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} - G' = m(\ddot{v} + \ddot{V}_0)$$

$$[-D\theta\delta\theta + G\delta v - H\delta u]_0^L = 0 \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} + H' = m\ddot{u}$$

in cui

$$G = D\theta''(1 + u') + \frac{\partial \Psi}{\partial u}(1 + u') - Tv'$$

$$H = D\theta''v' + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}v' + T(1 + u') \quad (1.24)$$

con condizioni di contorno per la trave incastrata

$$u(0, t) = v(0, t) = \theta(0, t) = 0$$

$$G(L, t) = H(L, t) = \theta'(L, t) = 0 \quad (1.25)$$

Nel caso statico si avranno le condizioni

$$\ddot{u} = \ddot{v} = \ddot{V}_0 = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0 \quad (1.26)$$

che inserite nelle Eq. 1.24 le rendono

$$D\theta'' + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$$

$$T = 0 \quad (1.27)$$

si può quindi sostituire a questa la Ψ trovata nell' Eq. 1.21, derivata per θ ,

$$D\theta'' + \frac{\chi \Delta}{2\mu_0 \mu_r} [B_2 \cos(2\theta) - B_3 \cos(2\theta)] = 0 \quad (1.28)$$

la quale per un campo magnetico trasversale diventa

$$D\theta'' + \frac{\chi^2 \Delta}{2\mu_0 \mu_r} [B_y^2 \sin(2\theta)] = 0 \quad (1.29)$$

Mantenendo come non trascurabili solo le non linearità in v e sostituendo θ con v' , per le ipotesi fatte, si ottengono le equazioni

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} - Dv''' - \frac{\partial \Psi'}{\partial \theta} + (Tv')' = m(\ddot{v} + \ddot{V}_0)$$

$$T(s) = T(L) - \int_0^s \frac{\partial \Psi}{\partial u} ds \quad (1.30)$$

con condizioni al contorno

$$v = v' = 0 \text{ con } x = 0$$

$$v'' = 0, T = 0, Dv'' + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \text{ con } x = L \quad (1.31)$$

Si può interpretare tutto ciò in termini fisici andando a porre nella prima equa-

zione 1.30

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\
 \mathcal{F}_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial v} \\
 \mathcal{F}_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial u}
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

e con il moltiplicatore T che è la tensione della trave generata dalla forza magnetica assiale e il termine $(Tv')''$ che è la reazione vincolare dovuta alla tensione della trave.

1.4 Riduzione del modello a un'equazione ordinaria differenziale con il metodo di Galerkin

Nel metodo di Galerkin si sceglie un idoneo insieme di funzioni $\Phi_j(x)$ di basi ortogonali, che rispettano le condizioni al contorno, e lo spostamento incognito è espresso

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \Phi_j(x)
 \tag{1.33}$$

Normalmente nei problemi di vibrazioni si sceglie come base un insieme di modi di vibrare normali del problema lineare associato. In seguito si sostituisce lo spostamento v nell'equazione del moto e mantenendo il prodotto interno con $\Phi_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ si ottiene un insieme infinito di equazioni differenziali ordinarie di secondo ordine per i coefficienti modali incogniti $a_j(t)$. Per l'Eq. 1.30 con un'adatta scelta di funzioni di base i modi rimangono disaccoppiati in assenza di forze esterne e quindi il primo modo perde stabilità in maniera indipendente appena un semplice autovalore passa per lo zero.

Si è osservato che il modo minore è quello dominante nel moto, un'approssimazione a un singolo modo

$$v(x, t) = a(t) \Phi(x)
 \tag{1.34}$$

si può fare solo se $\Phi(x)$ soddisfa

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(L) = 0$$

$$D\Phi(L)''' + \mathcal{K}\Phi(L)' = 0
 \tag{1.35}$$

$$\int_0^L \Phi^2 dx = 1$$

1.4 Riduzione del modello a un'equazione ordinaria differenziale con il metodo di Galerkin

L' equazione differenziale per $a(t)$ risulta

$$m\ddot{a} + a \int_0^L (\mathcal{K} + T)(\Phi')^2 dx + D \int_0^L (\Phi'')^2 dx = \int_0^L \mathcal{F}_y \Phi dx - m\ddot{V}_0 \int_0^L \Phi dx \quad (1.36)$$

ricordando che \mathcal{K} , \mathcal{F}_y e T dipendono tutti da B_y e B_x , i quali dipendono da $a(t)$. Si può considerare che \vec{B} agisca per primo e si può scrivere

$$\mathcal{F}_y = F_y \delta(x - L) \mathcal{F}_x = F_x \delta(x - L) \mathcal{K} = K \delta(x - L) \quad (1.37)$$

queste assunzioni portano a

$$T = T_0 = F_x$$

$$m\ddot{a} + a \{ F_x(a) \int_0^L (\Phi')^2 dx + D \int_0^L (\Phi'')^2 dx + K \Phi'(L)^2 \} - F_y(a) \Phi(L) = m\ddot{V}_0 \int_0^L \Phi dx \quad (1.38)$$

Il termine tra parentesi graffe di quest'ultima equazione indica la rigidezza effettiva e contiene i contributi elastici e magnetici che tendono a ripristinare la posizione iniziale. Per completare il modello si dovrà aggiungere un termine di smorzamento e considerare le equazioni delle forze come di seguito, le quali sono coerenti con la fisica,

$$F_x = F_0 = \text{costante}$$

$$F_y = \frac{m}{\Phi(L)} (\alpha_1 a + \beta a^3 + \eta a^5 \dots) \quad (1.39)$$

con α_1 , β , η legati al campo locale sulla punta e ai gradienti di campo. Assumendo $V_0(t) = \frac{A_0}{\int_0^L \phi dx} \cos \Omega t$ l'equazione di moto per l'ampiezza modale a diventa

$$\ddot{a} + \delta \dot{a} - \alpha a + \beta a^3 + \eta a^5 = \Omega^2 A_0 \cos \Omega t \quad (1.40)$$

dove

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{m} [D \int_0^L (\Phi'')^2 dx + K \Phi'(L)^2 + F_x \int_0^L (\Phi')^2 dx] \quad (1.41)$$

Se non si ha forza esterna ($A_0 = 0$) il problema della biforcazione statica corrisponde all'Eq. 1.40 che è uguale all'equazione dell' energia potenziale 1.15 dato che $\alpha = k + a$, $\beta = d$ e $\eta = c$.

Se si hanno tre punti di equilibrio si può trascurare il termine di quinto grado, che non influisce nel comportamento del sistema, e adimensionalizzare l'equazione di moto 1.40 come

$$f \cos(\omega t) = \ddot{A} + \gamma \dot{A} - \frac{1}{2}(1 - A^2)A \quad (1.42)$$

in cui vengono usate le variabili tempo e distanza, $\frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$ con ω_0 frequenza naturale riguardo la posizione deformata e $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ con a_0 posizione deformata. Si possono derivare sperimentalmente le tre costanti α, β, γ , il quale è lo smorzamento. Inoltre il problema con tre punti di equilibrio può essere caratterizzato usando

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\delta}{\omega_0} \\ f &= \frac{A_0\Omega^2}{\omega^2 a_0} \\ \omega &= \frac{\Omega}{\omega_0}\end{aligned}\tag{1.43}$$

1.5 Analisi del modello a singolo modo

Si può riscrivere l'Eq. 1.42 come un sistema autonomo su $R^2 \times S^1$ con $A_1 = A$, $A_2 = \dot{A}$ e $t = \theta$ come

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 1 \\ \dot{A}_1 &= A_2\end{aligned}\tag{1.44}$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2}A_1(1 - A_1^2) - \gamma A_2 + f \cos \omega \theta$$

e considerare la mappa di Poincarè $P_f : \Sigma \Rightarrow \Sigma$ sulla sezione trasversale $\Sigma = \{(x, y, \theta) \in R^2 \times S^1 | \theta = 0, 2\pi \dots\}$ definita dalla soluzione del sistema 1.44. Quindi è stata studiata in [2] la struttura orbitale di P_f quando cresce l'ampiezza f della forza.

Considero $f = 0$, le sezioni trasversali sono uguali per tutti i $\theta \in [0, 2\pi]$. La mappa di Poincarè ha strutture identica a quella del campo vettore di un sistema autonomo bidimensionale

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= A_2 \\ \dot{A}_2 &= \frac{1}{2}A_1(1 - A_1^2) - \gamma A_2\end{aligned}\tag{1.45}$$

nel senso che le molteplicità stabili e instabili $M^s(s), M^u(s)$ del punto di sella $(0,0)$ della mappa di Poincarè sono curve identiche ai separatori stabili e instabili di $(0,0)$ per il campo vettore. Solo che nel primo caso è una sequenza di punti $a, P_f(a), P_f^2(a), \dots, P_f^n(a), \dots$, e non una curva come nel secondo caso.

Ogni molteplicità è invariante nel senso che ogni orbita che inizia su di essa ci rimane sotto le interazioni di P_f . Come è stato dimostrato in [1] la mappa di Poincarè è stabile perciò per $f = 0$ e sarà lo stesso per $f \neq 0$ piccola e hanno stesso

tipo topologico di P_f , la cui mappa è rappresentata in 1.4(a). Per una piccola f si ha un punto di sella e due punti stabili che sono le due orbite attraenti e quella repulsiva chiuse dell'equazione differenziale 1.44. Andando a aumentare f i punti di sella e quelli stabili vengono a contatto e si intersecano, ciò avviene a una $f=f_1$ che per γ e f minori di 1 è stimata da Holmes in [1]

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}\gamma}{3\pi\omega} \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.46)$$

Va tenuto in considerazione che questo valore è una soglia minima che vale solo per smorzamenti $\gamma > 0, 1$ e che si basa sull'ipotesi che questa frequenza sia maggiore di quella naturale, mentre nella realtà ciò non è sempre verificato.

Basandosi su [6] si ottiene che per $f > f_1$ P_f ha un insieme invariante Ω_h complicato vicino ai punti omoclinici. Considerando due punti vicini che giacciono su uno dei cicli avvolti dalle molteplicità stabile e instabile. Sotto le iterazioni di P_f il ciclo A è mappato in $P_f(A), P_f^2(A)$ etc. Si nota che durante l' iterazione il ciclo è intrecciato e i punti sono separati, nel caso del sistema 1.44 i punti non possono fuggire all'infinito a causa della stabilità globale e $P_f^n(a)$ per $n \Rightarrow \infty$ è intrecciato e avvolto nell' altro lobo. Facendo ciò interseca gli avvolgimenti infiniti della molteplicità nell' altro lobo causando che, per un n abbastanza grande, indipendentemente dalla vicinanza di a e b , $P_f^n(a)$ e $P_f^n(b)$ si trovano agli opposti della molteplicità stabile $M^s(S)$ e il loro destino è diverso. Ma Ω_h contiene anche un insieme infinito numerabile di punti periodici di ogni periodo e un insieme non numerabile di dense orbite non periodiche. Adesso se a e b si trovano su orbite periodiche dello stesso periodo le loro iterazioni non divergeranno. Essendo le orbite periodiche di tipo a sella è abbastanza improbabile che il sistema seguirà un' orbita periodica, oppure potrebbe passare vicino a una di queste e divergere improvvisamente. Il comportamento di orbite nei pressi di Ω_h appare perciò caotico e imprevedibile.

Per f leggermente maggiori di f_1 , come in 1.4(b) i due punti stabili d^+ e d^- esistono ancora ma la presenza di intersezioni omocliniche causa che le soluzioni vaghino avanti e dietro irregolarmente per un periodo prima di avvicinarsi a uno dei punti.

Andando a aumentare ancora f si dimostra in [1] che i punti fissi d^+ e d^- si biforcano in buchi di periodo due e poi di periodo quattro. Dopo un secondo valore critico f_2 le iterazioni successive di P_f non sono più attratte da orbite chiare e sembrano muoversi caoticamente avanti e dietro in Σ come si vede in 1.4(c). Questo moto è in realtà ordinato in quanto le orbite convergono rapidamente e rimangono in una curva unidimensionale che sembra essere uguale alla molteplicità instabile del punto di sella.

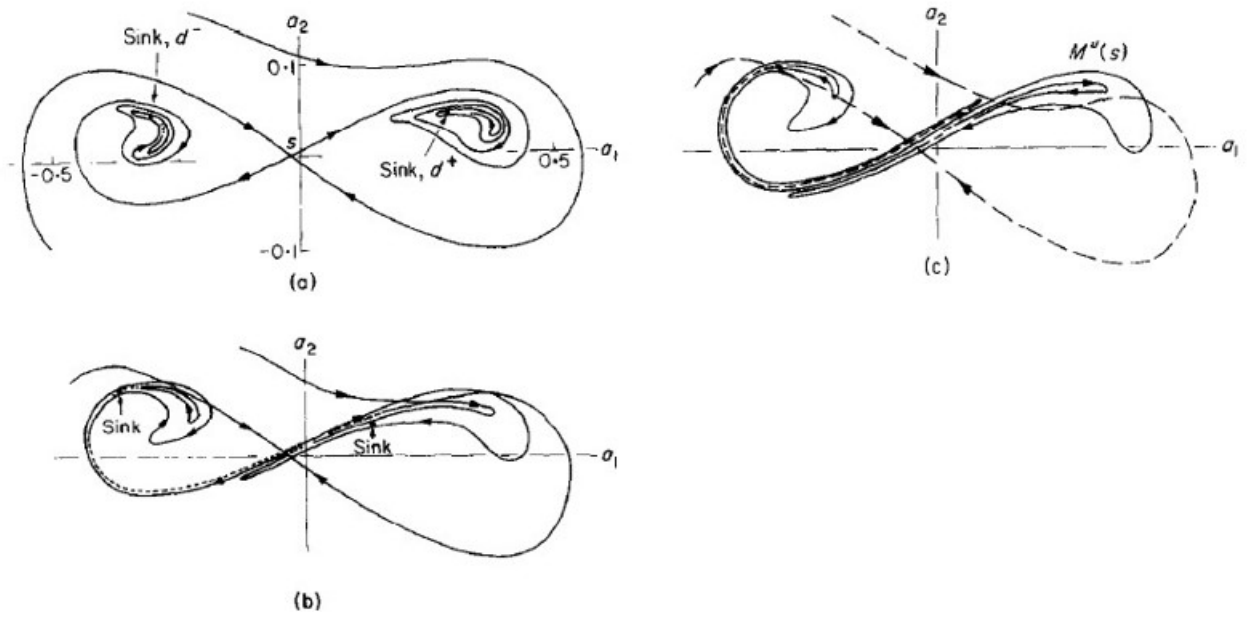


Figura 1.4: Mappe di Poincarè:(a) $f < f_1$, (b) $f_1 < f < f_2$, (c) $f > f_2$, da [2]

Capitolo 2

Design dell'impianto sperimentale

2.1 Introduzione al design

Per poter ricreare le mappe descritte nel Capitolo 1 è stato necessario riprogettare tutto l'impianto sperimentale in modo da avere la stessa situazione di partenza degli articoli citati ma confrontandosi con i materiali e le lavorazioni disponibili.

In particolare la progettazione è stata svolta in tre fasi.

La prima di disegno e verifica strutturale dello scheletro che ha funzione di sostegno della trave, dei magneti e collegamento con la slitta micrometrica (attraverso cui si metterà il tutto in vibrazione con parametri controllati da un computer).

La seconda fase invece è quella che riguarda i due magneti che devono poter essere bloccati in una posizione scelta ma avere anche la possibilità di cambiarla in base alle necessità e di cui andavano ridefinite le dimensioni e il materiale.

Infine è stata svolta l'ultima fase di progettazione con la definizione dei parametri riguardanti la trave, con un occhio di riguardo verso la frequenza naturale di quest'ultima in quanto è necessario conoscerla per poter mettere il sistema in vibrazione con la stessa frequenza e generare il fenomeno della risonanza.

In tutti e tre i casi le scelte e i disegni sono stati seguiti da un lavoro di verifica sviluppato in parallelo sui programmi Excel e Comsol. Nel primo sono stati fatti dei calcoli sfruttando delle equazioni note o ricavate, mentre nel secondo è stato ricreato un disegno semplificato, cioè contenente solo le parti necessarie alla simulazione, e è stata generata un'analisi agli elementi finiti che riproducesse il comportamento reale. In seguito è bastato confrontare la coerenza dei risultati di queste due verifiche per validare la progettazione.

2.2 Progettazione sostegno

2.2.1 Disegno

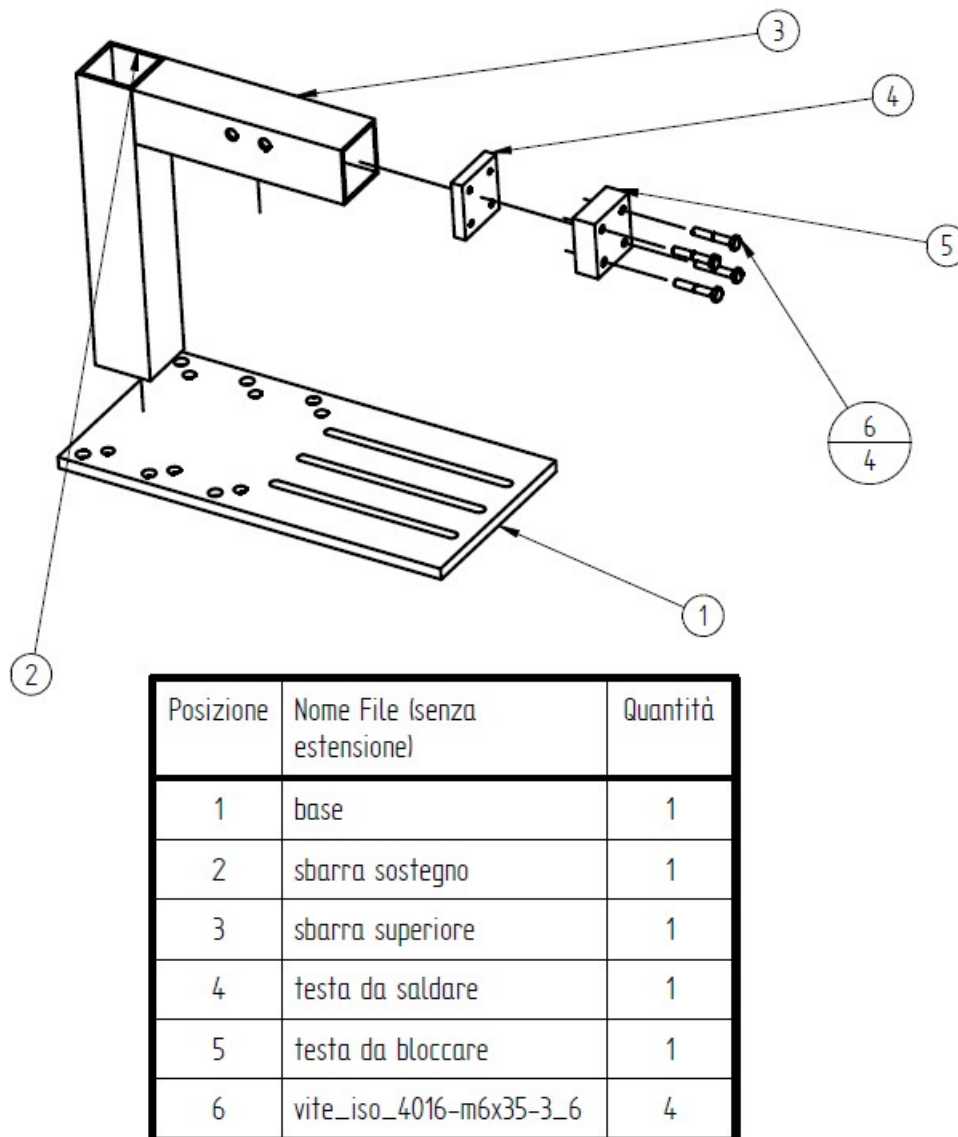


Figura 2.1: Esploso del sostegno

Il punto di partenza per il disegno della struttura di sostegno è quello di avere libertà su quasi tutti i valori e vincoli riguardanti la forma complessiva e l'altezza della trave verticale, in modo da posizionare correttamente la trave vibrante. Il fulcro del disegno è composto da due travi saldate a L e di cui una è saldata su un largo supporto.

Per quanto riguarda il supporto di base (1) è semplicemente una lamina rettangolare in acciaio laminato a caldo. Le uniche accortezze dovute sono state quelle

2.2 Progettazione sostegno

di creare dodici fori per le viti dei montaggi alla slitta micrometrica e creare le tre asole, su cui poi si bloccheranno i supporti dei magneti. Il resto del supporto è stato lasciato vuoto al fine di dare spazio alla saldatura e all'eventuale montaggio di un accelerometro.

Le travi (2) e (3) sono state costruite dello stesso materiale del supporto e sono di forma tubolare. Le loro sezioni sono uguali ma la trave (3) ha due fori laterali per il fissaggio dei fili degli estensimetri, se si decidesse di usarli, al fine di evitare rumori elettrici dovuti al loro moto caotico. Le lunghezze sono vincolate dalle condizioni iniziali, la trave (2) è lunga 268,9 mm per dare lo spazio alla trave vibrante di muoversi liberamente e la trave (3) è lunga 190 mm per permettere un centraggio rispetto all'asse di simmetria delle asole. A causa della disponibilità di queste travi tubolari è stato necessario saldare alla trave (3) un blocco massiccio (4) dello stesso materiale di 10 mm il quale ha quattro fori filettati che permettono il bloccaggio della trave vibrante.

Infine si ha un secondo blocco massiccio (5) con fori passanti che completa il bloccaggio della trave attraverso l'avvitamento di quattro viti (6).

Dopo aver fatto le verifiche che saranno descritte successivamente il sostegno è stato quindi fabbricato come si vede in Fig. 2.2.



Figura 2.2: Sostegno fabbricato

2.2.2 Verifica

Tramite Excel sono stati verificati gli spostamenti delle due travi saldate per controllare se fossero trascurabili all'applicazione delle forzanti e perciò se la struttura fosse abbastanza rigida. Al fine di poter creare un foglio di calcolo sono state risolte le due equazioni differenziali della linea elastica flessionale del secondo ordine ipotizzando le due come travi incastrate e perciò è stato calcolato lo spostamento dovuto alla flessione sulla loro punta. Partendo dalla formula della linea elastica flessionale

$$-M(z) = EI_x v''(z) \quad (2.1)$$

con le condizioni iniziali della trave incastrata $v(0) = 0$ e $v'(0) = 0$ che indicano lo spostamento e l'angolo di flessione nulli nell'estremità incastrata. In cui $M(z)$ è il momento flettente dovuto alla reazione vincolare nella posizione z sulla trave, E il modulo di Young, I_x è il momento d'inerzia sull'asse orizzontale e $v''(z)$ è la derivata seconda rispetto alla posizione dello spostamento verticale della trave. A partire dalla trave (3) sulla sua estremità agisce il peso dovuto ai blocchi di collegamento e il peso delle viti, raggruppati in F_1 , mentre la trave vibrante ha peso trascurabile così come lo sono le forze agenti su di essa. Lungo il corpo della trave invece agisce il peso proprio della stessa, chiamato P .

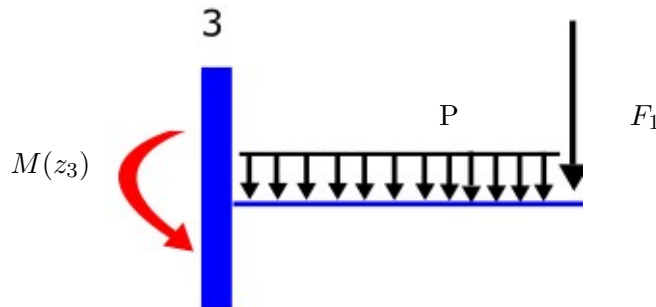


Figura 2.3: Schema trave 3 incastrata.

$$F_1 = \rho g [4(A_{res} L_v) + l^2 J] \quad (2.2)$$

$$P = \rho g L_3 [l^2 - (l - s)^2] \quad (2.3)$$

in cui ρ è la densità dell'acciaio, g l'accelerazione di gravità, A_{res} è l'area resistente delle viti, L_v la lunghezza delle viti, l è il lato del blocco quadrato (che è lo stesso delle travi) e J è la lunghezza del blocco che si compone dei blocchi (4) e (5) del disegno. Inoltre L_3 è la lunghezza della trave (3) e s è lo spessore delle due travi saldate. Si potrà così calcolare il momento flettente di reazione vincolare $M(z_3)$

$$M(z_3) = F_1(-L_3 + z_3) + P\left(-\frac{L_3^2}{2} - \frac{z_3^2}{2} + L_3 z_3\right) \quad (2.4)$$

Adesso basterà risolvere l'equazione differenziale (2.1) inserendo questo momento.

$$v''(z_3) = \frac{F_1(L_3 - z_3)}{EI_x} + \frac{P(\frac{L_3^2}{2} + \frac{z_3^2}{2} - L_3z_3)}{EI_x} \quad (2.5)$$

$$v'(z_3) = \frac{F_1L_3z_3}{EI_x} - \frac{F_1z_3^2}{2EI_x} + \frac{PL_3^2z_3}{2EI_x} + \frac{Pz_3^3}{6EI_x} - \frac{PL_3z_3^2}{2EI_x} \quad (2.6)$$

$$v(z_3) = \frac{F_1}{2EI_x}(L_3z_3^2 - \frac{z_3^3}{3}) + \frac{P}{6EI_x}(\frac{6L_3^2z_3^2}{4} + \frac{z_3^4}{4} - L_3z_3^3) \quad (2.7)$$

Andando a risolvere quest'ultima equazione si ottiene un valore molto piccolo che si può considerare nullo, come si può notare nella Fig. 2.5 in basso alla colonna di destra. Ciò è dovuto all'alta rigidezza flessionale K_3 che è stata calcolata come

$$K_3 = \frac{3EI_x}{L_3^3} \quad (2.8)$$

Per la verifica della trave (2) si è proceduto allo stesso modo ipotizzando una forzante esterna A_0 e un contributo di momento flettente M della trave (3), che sarebbe la $M(z_3 = 0)$ dell'Eq. 2.4.

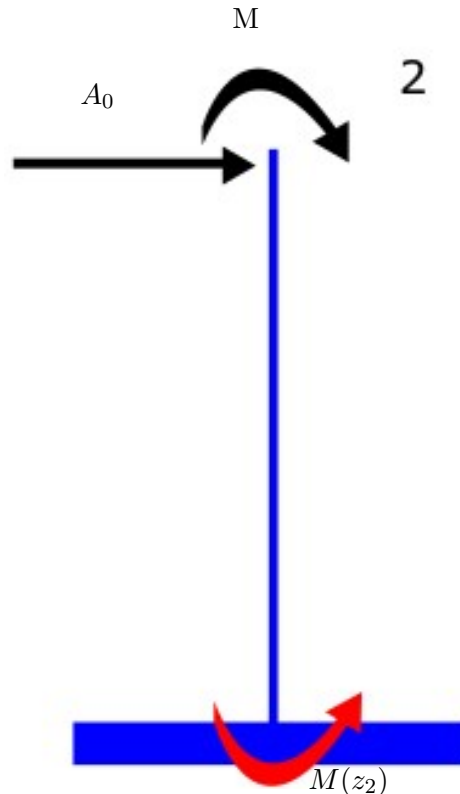


Figura 2.4: Schema trave 2 incastrata.

Si avrà

$$M(z_2) = A_0(-L_2 + z_2) - M \quad (2.9)$$

Capitolo 2 Design dell'impianto sperimentale

che come prima verrà inserita nell' Eq. 2.1

$$v''(z_2) = \frac{A_0(-z_2 + L_2)}{EI_x} + \frac{M}{EI_x} \quad (2.10)$$

$$v'(z_2) = -\frac{A_0 z_2^2}{2EI_x} + \frac{A_0 L_2 z_2}{EI_x} + \frac{M z_2}{EI_x} \quad (2.11)$$

$$v(z_2) = \frac{A_0}{2EI_x} \left(-\frac{z_2^3}{3} + z_2^2 L_2 \right) + \frac{M z_2^2}{2EI_x} \quad (2.12)$$

Andando a risolvere ipotizzando un caso estremo di $A_0 = 700N$ si ottiene un valore di spostamento $v(z_2max) = 0.10mm$, come si può notare nella Fig. 2.5 in fondo alla colonna di sinistra. Anche in questo caso ciò deriva dal fatto di avere una trave molto rigida, anche se meno della (3) a causa della maggiore lunghezza, il cui valore di K_2 è stato calcolato allo stesso modo

$$K_2 = \frac{3EI_x}{L_2^3} \quad (2.13)$$

Forzante	Ao(N)	700						
modulo Young	E(N/cm2)	22000000	Acciaio					
densità	p(kg/cm3)	0,00787						
lato	l(cm)	5						
spessore	s(cm)	0,3						
momento d' inerzia	Ix(cm4)	20,8492						
lunghezza trave 2	L2(cm)	26,89						
lunghezza trave 3	L3(cm)	19						
						costante gravità	g(m/s2)	9,8
						spessore collegamento	J(cm)	3
						area res.vite m6	Ares(cm2)	2,01
						lunghezza vite m6	Lv(cm)	3
						peso ogg. Collegamento	F1(N)	7,64472912
						peso lineare trave 3	P(N/cm)	0,43499064
						Momento in saldatura 2,3	M(N*cm)	223,7656638
posizione trave 2	z2(cm)	26,89				posizione trave 3	z3(cm)	19
spostamento trave 2	v2(cm)	0,0100673				spostamento trave 3	v3(cm)	5,35544E-05
Rigidezza trave 2	K2(N/cm)	70771,911						
						rigidezza trave 3	K3(N/cm)	200619,2156

Figura 2.5: Foglio di calcolo Excel

Parallelamente è stato creato un file di Analisi agli elementi finiti sul programma Comsol nel quale è stata disegnata una struttura costituita dalle due travi saldate e

2.3 Scelta dei magneti e progettazione dei loro supporti

incastrate al supporto. All'estremo libero della trave (3) è stato aggiunto un blocco massiccio che schematizza la presenza dei blocchi di collegamento e delle viti. Quindi è stato impostato lo stesso materiale con si è fatto il calcolo precedentemente. Come si può osservare nella Fig. 2.6 si ha coerenza dei risultati in quanto il moto della punta della trave (3) deriva solamente dallo spostamento della trave verticale, e ha modulo di spostamento maggiore di 0,1 mm a causa dello spostamento lungo l'orizzontale, e per quanto riguarda la punta della trave verticale (2) si hanno gli stessi valori di spostamento trovati nel foglio di calcolo.

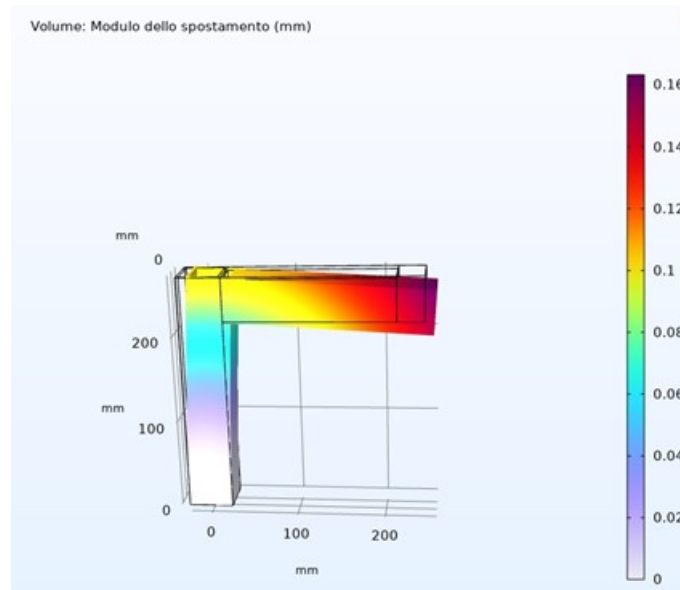


Figura 2.6: Analisi FEM su Comsol

2.3 Scelta dei magneti e progettazione dei loro supporti

2.3.1 Scelta magneti

L'unica condizione iniziale per il magnete era quella di avere un campo magnetico $B = 0.18T$ sulla punta della trave. Ciò ha lasciato libertà di scelta riguardo alle dimensioni del magnete e alla distanza z tra questo e la punta della trave vibrante. Per comodità è stato scelto un magnete cilindrico i cui parametri sono l'altezza D e il raggio R . Attraverso la seguente formula trovata dal catalogo di magneti [7] è stato possibile legare i parametri al fine di ottenere il campo desiderato

$$B = \frac{B_r}{2} \left[\frac{D+z}{\sqrt{R^2 + (D+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \quad (2.14)$$

in cui B_r è chiamato campo di rimanenza, si misura in Tesla come il campo magnetico e dipende unicamente dal materiale del magnete.

Coerentemente con le disponibilità dovute al catalogo si è optato per un magnete cilindrico di raggio $R = 10$ mm e altezza $D = 20$ mm posto a una $z = 8.9$ mm. È

stato scelto un magnete con composizione in lega di Neodimio, Ferro e Boro (NdFeB) con rivestimento nichelato (Ni-Cu-Ni) con magnetizzazione di tipo N42, la quale ci definisce il valore del campo di rimanenza $B_r = 1,29T$. Attraverso questi parametri possiamo ottenere il campo magnetico voluto come si vede nel file Excel in Fig. 2.7.

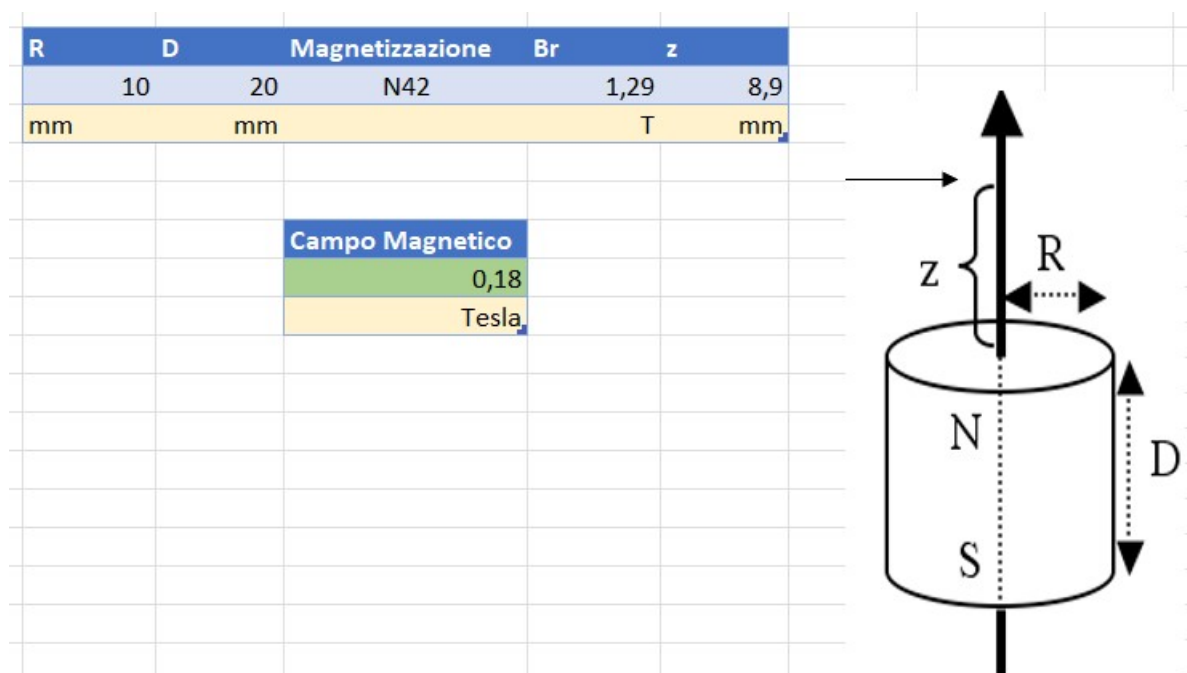


Figura 2.7: Foglio di calcolo del campo magnetico

Quindi è stata fatta la verifica su Comsol disegnando la trave vibrante e due magneti simmetrici all'asse di questa al fine di verificare se il campo fosse quello desiderato (Fig. 2.8) e se gli spostamenti fossero trascurabili (Fig. 2.9).

2.3 Scelta dei magneti e progettazione dei loro supporti

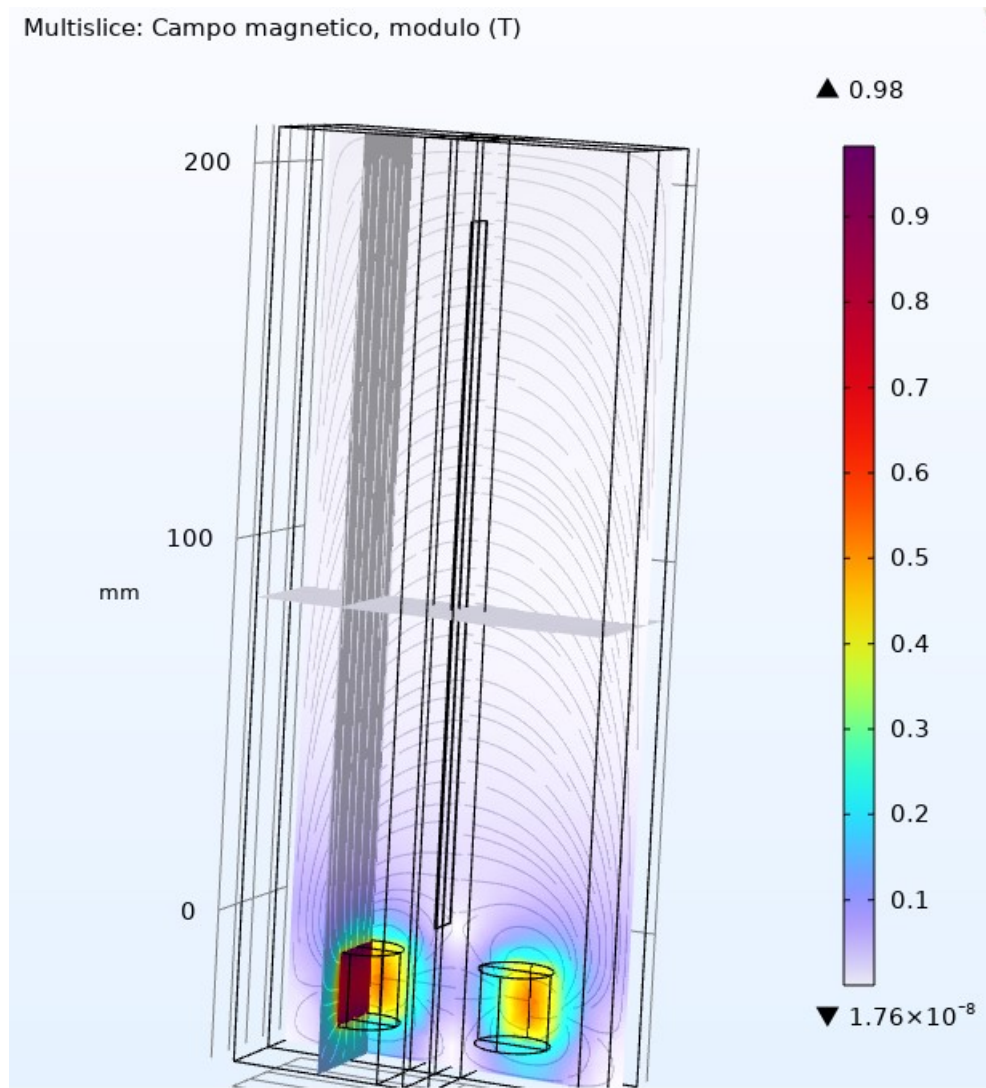


Figura 2.8: Calcolo del campo magnetico Su Comsol

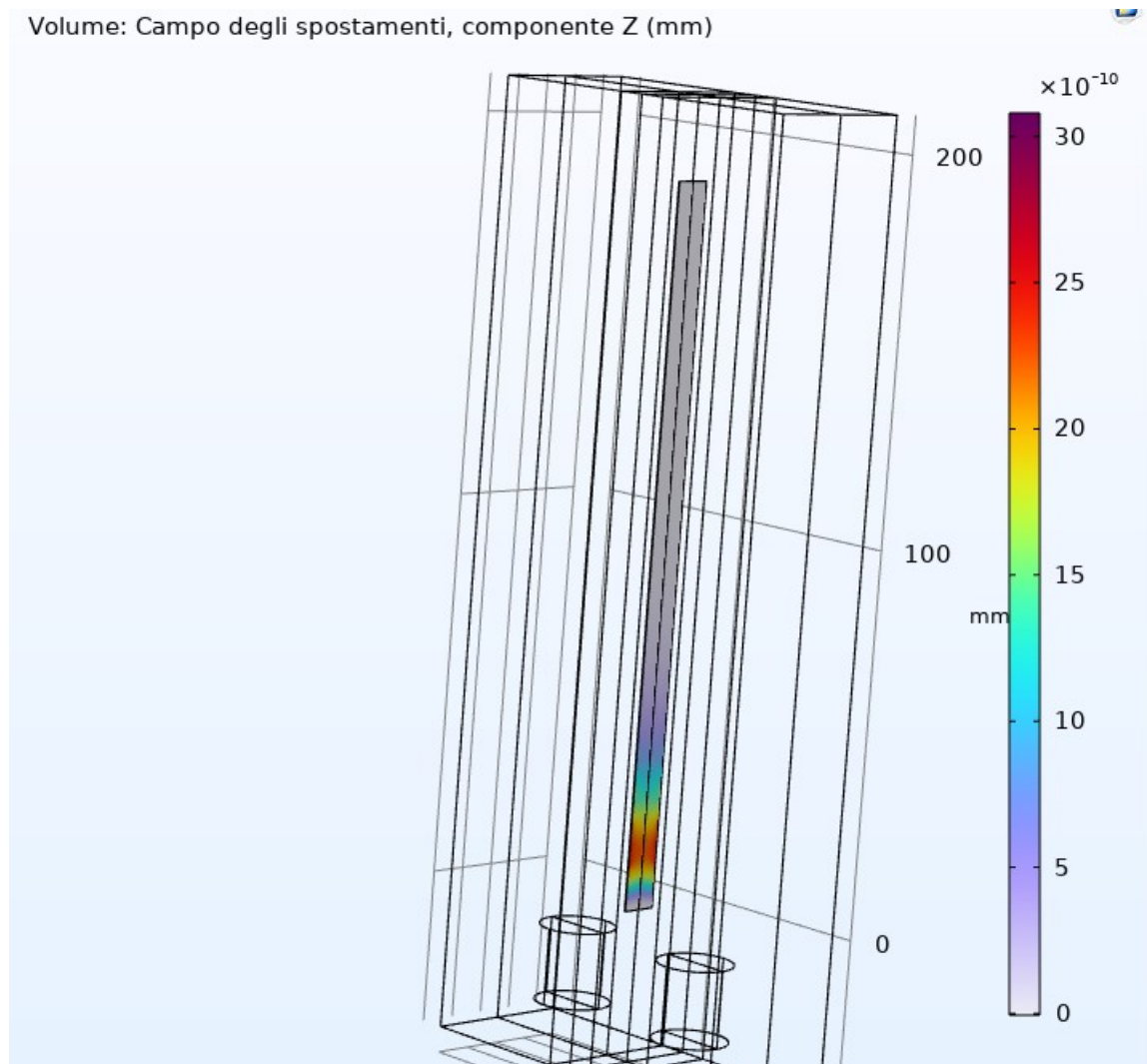


Figura 2.9: Calcolo degli spostamenti con magneti simmetrici su Comsol

2.3.2 Progettazione supporti

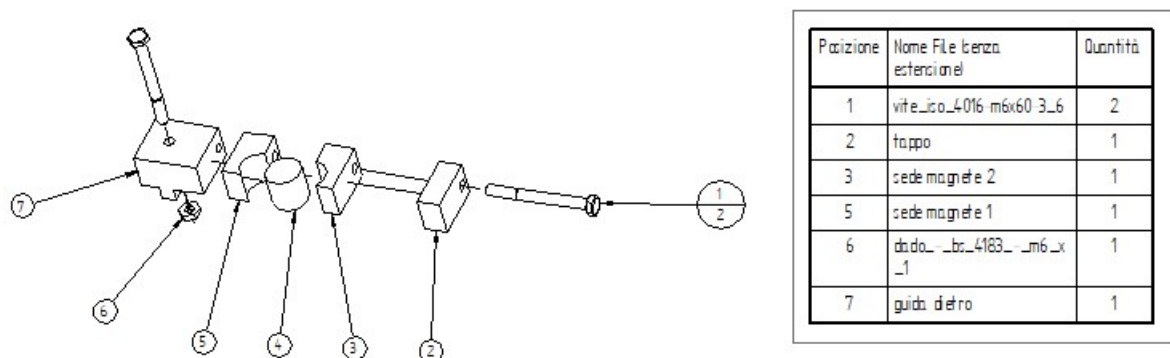


Figura 2.10: Esploso del supporto del magnete

Dopo aver deciso il magnete da usare ne sono stati comprati due in modo da creare sempre una situazione simmetrica. Si sono quindi dovuti progettare due supporti speculari che li bloccassero alla base ma allo stesso tempo permettessero uno spostamento lungo una linea nel caso si volesse allontanarli o avvicinarli tra di loro. Essendo i due supporti speculari se ne può descrivere uno solo visto che l'altro è uguale solo posto nel verso opposto, qui tratteremo il supporto più vicino alla trave verticale (2). Inoltre questo non necessita di verifica in quanto è sottoposto a piccole forze e perciò basta che risulti funzionale. La parte più importante del supporto per il magnete è la guida (7), la quale ha un rilievo nella parte inferiore che la fa entrare perfettamente in un'asola di quelle che si notano in Fig. 2.1. Per bloccare la guida si usa il bullone, costituito da una vite (1) e dal dado (6), che entra nel foro passante e la ferma andando a contatto diretto con il sostegno di base, dato che il rilievo della guida è meno profondo dell'asola. Il magnete (4) è poi intrappolato tra due sedi (3) e (5) formate ad arco di circonferenza che perciò ne impediscono la fuoriuscita, queste due saranno prodotte in plastica con stampa 3D. Infine si ha un tappo (2) che ha il solo scopo di portare a battente la vite (1), la quale va ad avvitarsi nella guida passando per le due sedi senza interferire con il magnete.

2.4 Scelta della trave

Per quanto riguarda la trave, bloccata dagli elementi di collegamento del sostegno e messa in moto dalla forzante data dalla slitta e dalle forze magnetiche, i vincoli sono semplicemente il rispetto delle dimensioni che devono essere: lunghezza $L = 188$ mm, altezza $h = 9.5$ mm e spessore $s = 0.23$ mm. Oltre a ciò la trave deve essere ferromagnetica al fine di interagire con il campo magnetico che la circonda.

Dato che deve essere messa in moto dalla forzante della slitta micrometrica è stato ritenuto utile uno studio delle frequenze naturali della trave per imporre la stessa frequenza forzante generando un fenomeno di risonanza che semplifica lo studio del moto caotico.

Per poter descrivere facilmente il moto di flessione della trave è stato necessario fare una semplificazione con un modello agli ordini ridotti, che rende il peso distribuito un carico concentrato sulla punta e ci permette di descrivere lo spostamento $\omega = f(x, t)$, in cui x è la posizione lungo la trave e t il tempo, attraverso delle derivate parziali di una variabile per volta

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

in cui E è il modulo di Young, I il momento d'inerzia, ρ la densità e A l'area trasversale della trave. Questa equazione dà una soluzione separabile con ogni contributo dipendente da una sola variabile.

$$\omega = W(x)G(t) \quad (2.16)$$

Sostituendola nella 2.15 si ottiene

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2} = -\frac{EI}{\rho AW} \frac{d^4 W}{dx^4} = \lambda \quad (2.17)$$

in cui λ è una costante dato che le due sono funzioni ciascuna solo di tempo o posizione.

Dato che non si ha smorzamento per le condizioni iniziali si assume $\lambda = -\omega^2$ e inserendola nella 2.17 si ottiene l'equazione temporale degli autovalori

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \omega^2 G = 0 \quad (2.18)$$

che ha soluzione del tipo

$$G(t) = G_{os} \sin(\omega t) + G_{oc} \cos(\omega t) \quad (2.19)$$

in cui G_{os} e G_{oc} sono costanti dipendenti dalle condizioni iniziali e ω è la frequenza naturale.

Si sostituisce la Eq. 2.16 nella 2.15 e usando la 2.19 ottengo

$$0 = G(t) \left(EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho A \omega^2 W \right) \quad (2.20)$$

che deve essere sempre soddisfatta per ogni $G(t)$, cioè per $EI \frac{d^4 W}{dx^4} - \rho A \omega^2 W = 0$.

Si vorranno trovare gli autovalori ω e le le autofunzioni $W(x)$, dato che i primi sono le frequenze naturali e le seconde danno le forme modali. Entrambi dipendono solamente dalle condizioni iniziali e dalla geometria della trave.

Per risolvere il problema sarà comodo usare dei coefficienti

$$C_b^2 = E/\rho$$

$$r^2 = I/a \quad (2.21)$$

$$\Omega^4 = \frac{\omega^2 L^4}{C_b^2 r^2} = \omega^2 \frac{\rho AL^2}{EI}$$

in cui C_b è la velocità longitudinale sull'asse x della trave, r è il raggio di curvatura della sezione di taglio della trave rispetto l'asse neutro, Ω è un coefficiente adimensionale di frequenza.

Ricavo l'inversa dell'ultima equazione dell'Eq. 2.21 dato che da questa si troveranno le frequenze naturali

$$\omega = \Omega^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (2.22)$$

Per la trave incastrata nel primo modo di vibrare si trova in Fig. 2.11 a pagina 578 di [8] il valore di $\frac{\Omega}{\pi} = 0.5969$ cioè $\Omega^2 = (0.5969\pi)^2 = 3.52$ che permette di calcolare velocemente la frequenza naturale in Hz per il primo modo di vibrare, il cui valore è stato calcolato su Excel e si vede in Fig. 2.12.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3.52}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (2.23)$$






Boundary Conditions	$n = 1$	
<i>Case 1</i> Clamped-clamped	Ω_n/π^{\ddagger}	1.5056
	Mode shapes	
	Node points*	None
<i>Case 2</i> Hinged-hinged	Ω_n/π^{\ddagger}	1
	Mode shapes	
	Node points*	None
<i>Case 3</i> Clamped-hinged	Ω_n/π^{\ddagger}	1.25
	Mode shapes	
	Node points*	None
<i>Case 4</i> Clamped-free	Ω_n/π^{\ddagger}	0.5969
	Mode shapes	
	Node points*	None
<i>Case 5</i> Free-free	Ω_n/π^{\ddagger}	1.5056
	Mode shapes	
	Node points*	0.224, 0.776

Figura 2.11: Tabella costanti per le varie condizioni iniziali e di vibrazione

Capitolo 2 Design dell'impianto sperimentale

Può inoltre essere utile definire un parametro definito massa effettiva m_{eff} , la quale indica la massa concentrata sulla punta della trave che genera le stesse frequenze naturali della massa distribuita a disposizione, questa deriva dall'equazione generica del sistema con massa, molla e smorzatore, così come è stato fatto in [9]

$$m_{eff} = \frac{K}{\omega^2} \quad (2.24)$$

in cui la K è la rigidezza calcolata come $K = \frac{3EI}{L^3}$ dato che il carico sulla trave è unicamente sulla punta. Adesso si potrà sostituire nell'Eq. 2.24 il valore di ω trovato nell'Eq. 2.22 con $\Omega^2 = 3.52$ come trovato prima e si ottiene l'equazione

$$m_{eff} = \frac{3}{3.52^2} m \quad (2.25)$$

che ha risultato $m_{eff} = 0.782g$ come si nota in Fig. 2.12.

	E(N/mm2)	152000
	b(mm)	9,5
	h(mm)	0,23
	L(mm)	188
	p(kg/m3)	7860
	V(mm3)	410,78
	m(kg)	0,00322873
	Ix(mm4)	0,00963221
rigidezza	K(N/mm)	0,00066102
massa effettiva	meff(kg)	0,00078175
frequenza naturale trave	f(Hz)	4,62801577

Figura 2.12: Calcolo della prima frequenza naturale e della massa effettiva su Excel

Anche in questo caso si è proceduto con la verifica su Comsol come si nota nella Fig. 2.13 in cui è stata disegnata una trave incastrata delle stesse dimensioni e si ottiene una frequenza naturale pressochè identica andando a selezionare il primo modo di vibrare.

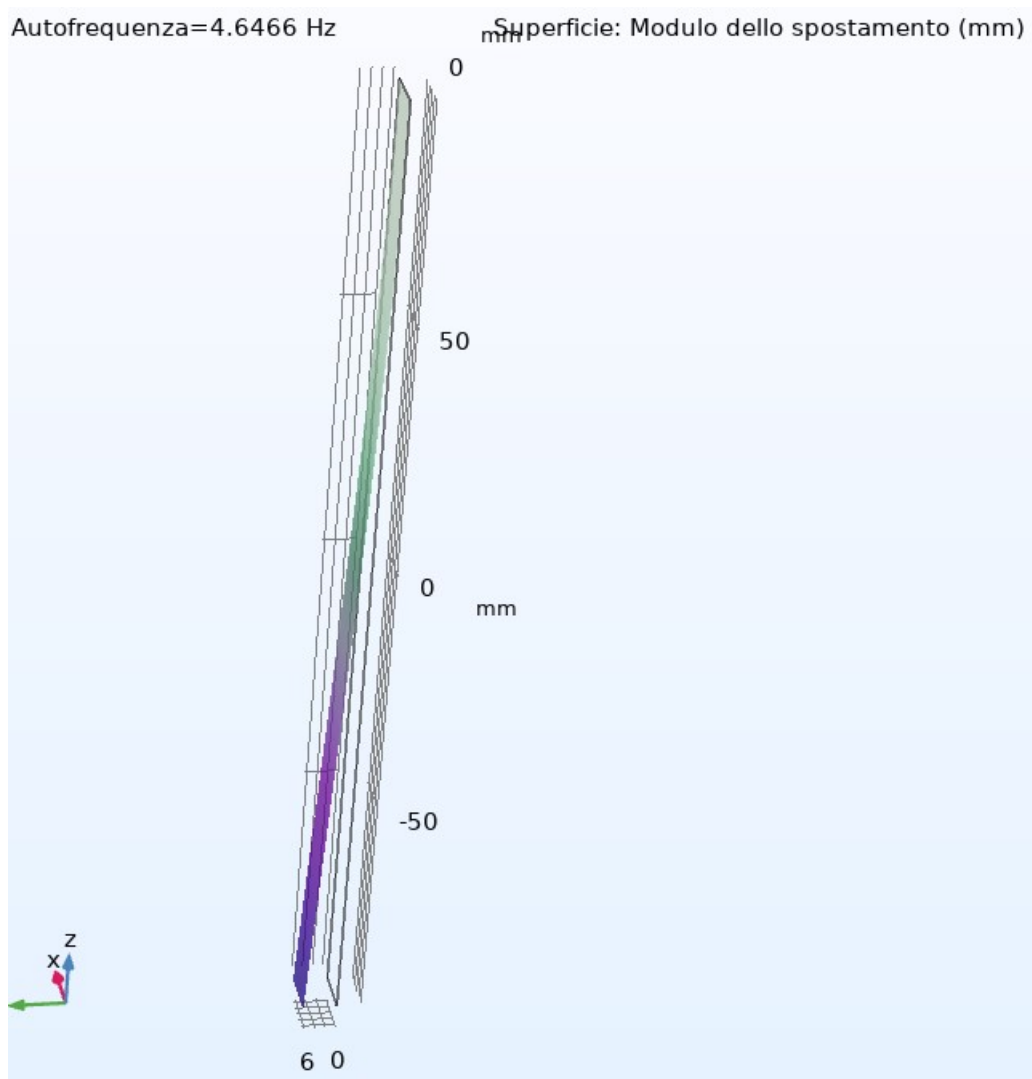


Figura 2.13: Calcolo della prima frequenza naturale su Comsol

Capitolo 3

Acquisizione e Digitalizzazione dei dati

3.1 L'Acquisizione in generale

Per poter analizzare il comportamento della trave è necessario prima di tutto acquisire i dati riguardanti la posizione e l'angolazione della trave in funzione del tempo. Per fare ciò si deve definire la procedura di acquisizione, la quale richiede determinati strumenti, e creare un programma apposito, che misura solo ciò che serve e salva in un file impiegabile come base per una successiva elaborazione dei dati per tracciare i diagrammi a farfalla e le mappe di Poincarè del sistema.

Si andranno perciò a trattare i tre nuclei fondamentali che servono per ottenere i dati in maniera digitale. Il primo si compone di tutti gli strumenti che sono stati usati in aggiunta ai componenti progettati nel capitolo precedente. Quindi si passa alla progettazione del programma elaborato su Labview che permette di trasformare gli input in file di testo composti da colonne di dati. Infine verrà descritta la procedura per l'uso del file Labview e dell'impianto sperimentale dato che sono necessarie delle azioni sequenziali per avere una buona riuscita dell'acquisizione.

3.2 Strumenti utilizzati

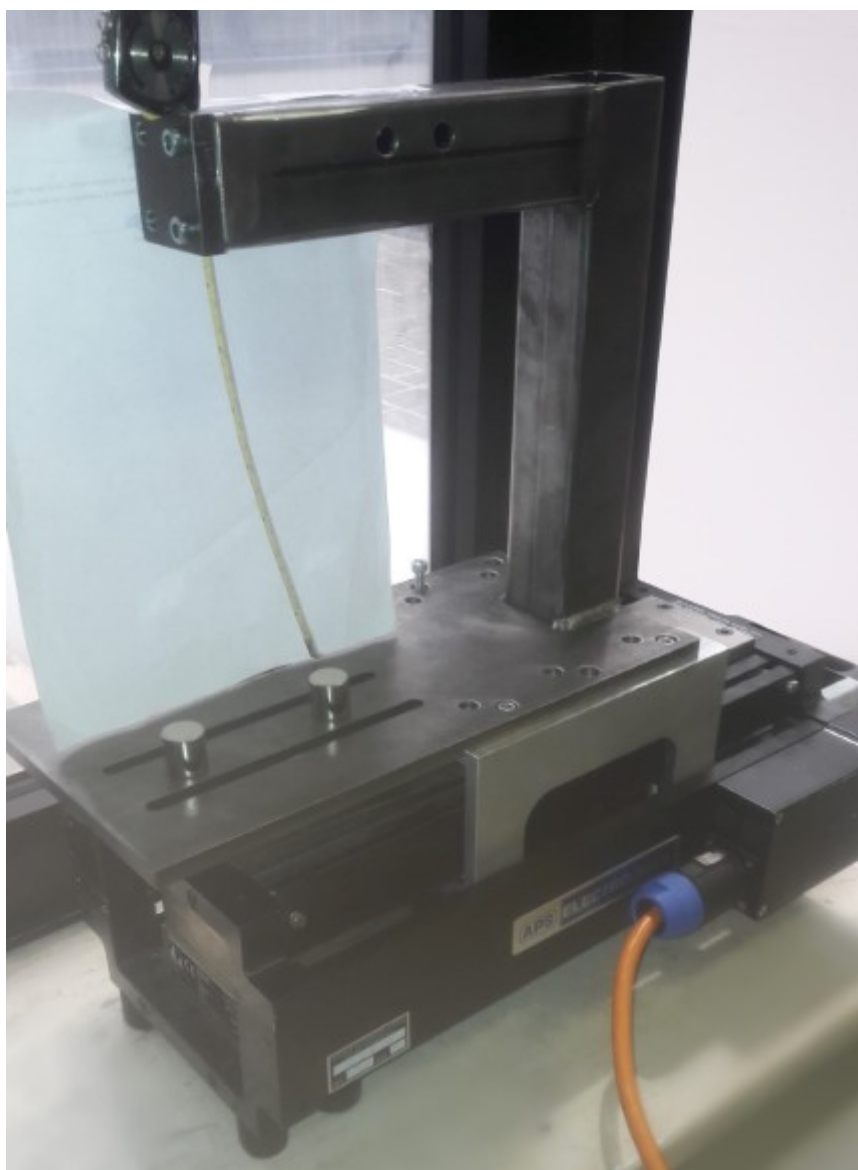


Figura 3.1: Oggetti principali dell'impianto sperimentale

Il fulcro dell'impianto sperimentale è il gruppo visibile in Fig. 3.1 nel quale è facilmente riconoscibile la struttura definita in precedenza, inoltre si notano la trave, in giallo, e i due magneti che sono stati progettati precedentemente. In questo caso i magneti sono tenuti fermi dalla loro forza magnetica generata dall'interazione con la struttura senza i supporti di cui si è parlato nel capitolo precedente.

La base è montata con le viti sulla slitta micrometrica APS 113 che è ciò che dà le forzanti in base a come sono impostate su un computer. Per fare da tramite tra la slitta e il computer sono stati usati un amplificatore di tensione APS 125 e una scheda NI 6008.

Di particolare importanza è poi la videocamera che sarà montata in maniera solidale con il sostegno per individuare solo i moti caotici relativi tra la trave e la struttura dovuti agli attrattori strani, affinché questa possa essere impiegata per acquisire è necessario creare uno sfondo bianco, sarà infatti il programma sfruttando alcune condizioni iniziali a riconoscere l'oggetto oscillante e a seguirne i movimenti sfruttando il contrasto con lo sfondo.

3.2.1 Strumentazione per l'applicazione della forzante

Con un apposito file Labview si imposta la funzione forzante, solitamente un'onda sinusoidale, e questa viene rielaborata dalla scheda NI 6008 in Fig. 3.2 e trasmessa in un segnale leggibile dagli strumenti successivi. Questa scheda ha sui due lati dei canali che sono digitali o analogici, per i nostri scopi è stato usato il primo canale analogico con un filo che lo collega all'amplificatore. Inoltre lo scopo di questa scheda può essere sia di acquisire segnali che mandarli, in questo caso è bastato inviare il segnale nel primo canale anche se è molto comune l'utilizzo di un sistema con due canali occupati di cui il primo usato sempre allo stesso modo e il secondo con collegamento a un accelerometro montato sulla slitta per avere una verifica della forzante attraverso un'acquisizione che porta risultati simili se è stato fatto tutto correttamente.



Figura 3.2: Scheda d'acquisizione

Per avere poi un segnale coerente con quelli elaborabili come input dalla slitta è stato necessario usare l'amplificatore APS 125 come collegamento tra i due. Questo come si vede in Fig. 3.3 è dotato di uno schermo in cui si vedono i valori di corrente e tensione in uscita e due manopole di regolazione dell'amplificazione delle due variabili.



Figura 3.3: Amplificatore APS 125

Quindi si arriva alla macchina che applica effettivamente la forza sinusoidale attraverso uno spostamento controllato in cui la frequenza di oscillazione è una conseguenza dei parametri impostati di tempi e punti per ogni ciclo e in cui il valore di ampiezza dipende dalla corrente continua selezionata. L'oggetto in moto sarà bloccato nella zona superiore della Fig. 3.4 attraverso delle viti e ciò genera sulla struttura lo stesso moto della macchina. Sarà comodo mettere il tutto in moto con un valore di frequenza pari a quella naturale della trave incastrata per semplificare il problema, dato che per le non linearità della trave se non si fosse a frequenza naturale potrebbero generarsi modi di vibrare a diverse grandezze di oscillazione.



Figura 3.4: Slitta micrometrica APS 113

3.2.2 Impostazione della videocamera

Per la videocamera si può scegliere una videocamera connessa direttamente al computer tramite un cavo USB per facilitare l'uso con Labview, in questo caso però per avere più libertà di movimento di questa si è preferito usare un sistema da remoto attraverso la videocamera di un cellulare.

Sul cellulare è stata installata un'applicazione che trasmette in diretta ciò che la videocamera vede in una pagina internet il cui nome è univoco e legato all'indirizzo IP del cellulare. Per far utilizzare al computer questa videocamera allo stesso modo di una Camera USB è bastato installare un programma che emula le videocamere interne al dispositivo. Impostando su questo programma l'indirizzo IP del telefono e mantenendo entrambi i dispositivi sulla stessa rete il computer si connette al sito e trasporta il tutto sul programma emulatore rendendola di fatto una delle videocamere del computer. In seguito questa videocamera è stata impostata come quella che va usata dal programma Labview al momento dell'acquisizione.

3.3 Programmazione del file di acquisizione

Come si può vedere nelle successive immagini è stato creato un unico file Labview diviso in più zone che permettesse di unire la parte relativa all'impostazione della forzante in Fig. 3.5 a quella di acquisizione nelle Fig 3.6 e 3.7. I due programmi sono sincronizzati e perciò con il passare del tempo si può trovare l'angolo di flessione corrispondente a ogni posizione lungo la curva della forzante, l'unica differenza tra i due grafici è il tempo iniziale che nella seconda si azzerà ogni volta che si avvia il programma mentre nella prima era nullo solo nel primo avviamento e va sempre in crescendo. Dato che questi sono due programmi in parallelo vale la pena considerarli come due programmi separati, così come saranno illustrati successivamente, tenendo conto che è bastato imporre a entrambi l'uso dell'orologio interno al computer per ottenere il funzionamento in sincrono.

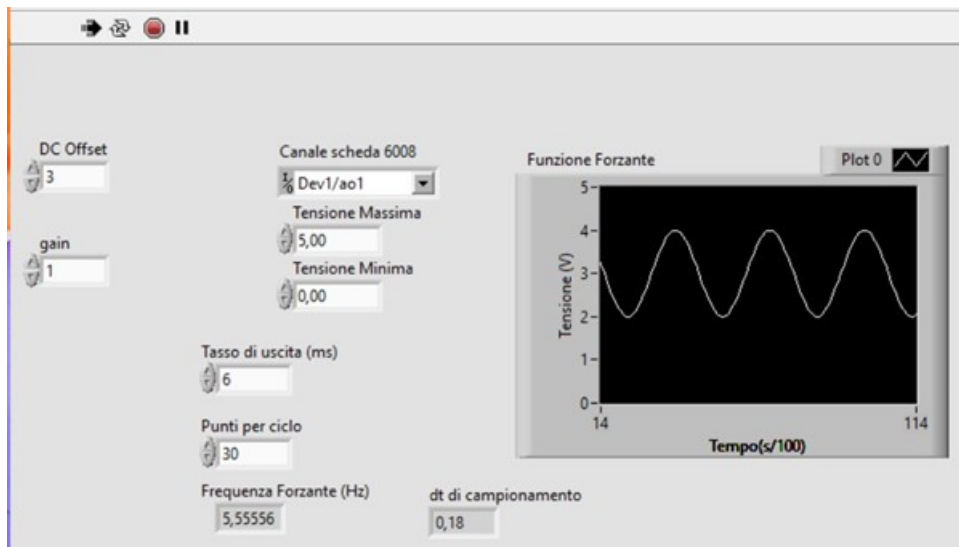


Figura 3.5: Zona di impostazione della forzante su Labview

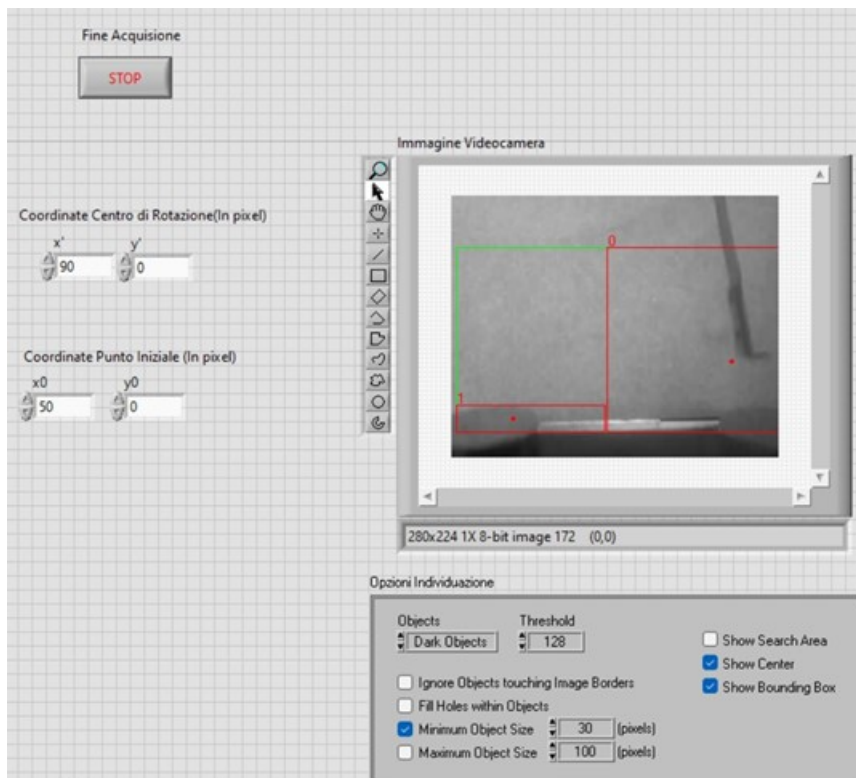


Figura 3.6: Zona di impostazione dell'immagine su Labview

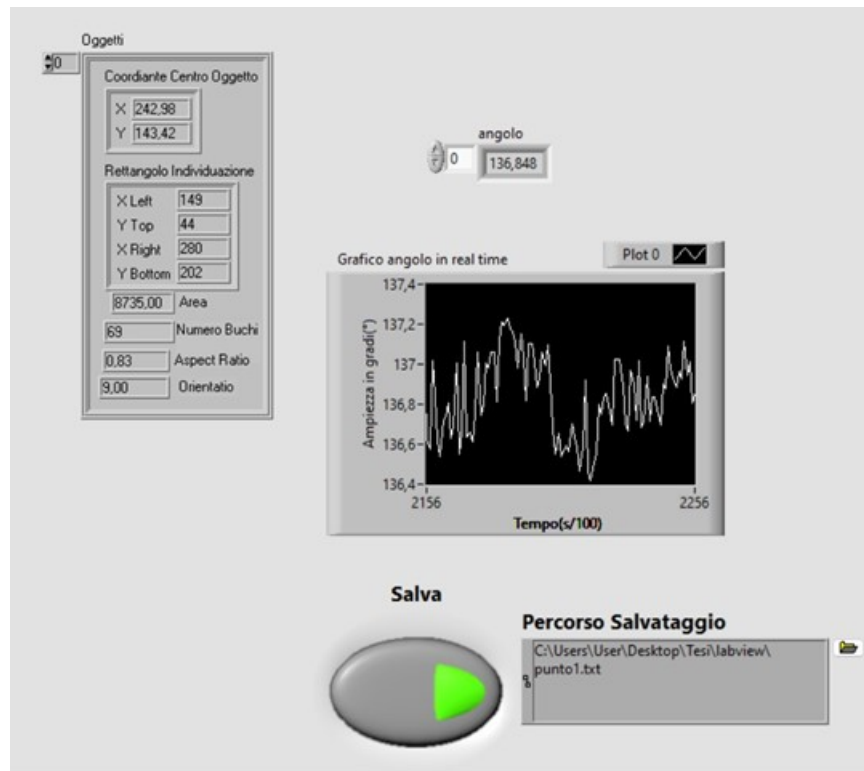


Figura 3.7: Zona dell'elaborazione e salvataggio dati su Labview

3.3.1 Sezione della forzante

Nella Fig. 3.5 sono presenti tutte le caratteristiche necessarie per la definizione della funzione forzante, la quale è disegnata nel grafico a fianco mentre agisce.

Le prime condizioni iniziali da imporre sono le tre in alto al centro della figura cioè il canale della scheda a cui dare l'output e l'intervallo di tensione che la slitta riesce a sopportare, sapendo che se si esce fuori da questo il sistema va in blocco.

Quindi si vanno a impostare le ampiezze con i due controlli a sinistra che sono il valore medio della forzante (chiamato "DC offset") e la variazione dal valore medio (indicata con "gain").

Infine è necessario decidere la frequenza dell' output attraverso la definizione di quanto tempo dura un ciclo ("tasso di uscita") e di quanti punti per ogni ciclo vengono elaborati. Di conseguenza il programma calcola la frequenza e ne fa l'inverso per calcolare il tempo di campionamento, definito come il tempo che intercorre tra due segnali uno dopo l'altro.

3.3.2 Sezione dell'acquisizione

La seconda parte invece è quella dell'acquisizione vera e propria, visibile nelle Fig. 3.6 e 3.7, in cui si trovano gli strumenti di rilevamento della posizione, di calcolo dell'angolo e di salvataggio. Il prodotto finale di questa è ciò che basterà per

le elaborazioni dei dati future cioè un file di testo composto da quattro colonne: i tempi, le posizioni x e y sull'immagine e l'angolo di flessione della trave.

Nella Fig. 3.6 si nota in alto il pulsante di fine acquisizione che verrà usato per ultimo ma è pratica comune metterlo in cima affinché risulti ben visibile.

Successivamente al di sotto sono presenti i quattro controlli in cui si mettono le condizioni iniziali di posizione della punta oscillante e del punto in cui è incastrata la trave. Va notato che queste coordinate sono in pixel sull'immagine perciò è stato comodo inserire l'immagine in contemporanea sulla destra.

Sotto l'immagine si trovano i parametri del riconoscimento degli oggetti che permettono di trascurare le ombre presenti o piccole imperfezioni per identificare solamente la punta oscillante della trave.

Passando alla Fig. 3.7 si nota sulla sinistra un blocco che mostra le posizioni in tempo reale del centro dell'oggetto identificato, la serie di queste posizioni è ciò che verrà poi salvato.

Quindi è stato fatto un programma di supporto che sfruttando le condizioni iniziali e la posizione identificata calcola l'angolo della trave in gradi e ne traccia la variazione nel tempo sul grafico, la cui curva strana in realtà è dovuta a dei piccoli movimenti che si osservano nel caso statico della prova fatta, mentre nel caso dinamico si osservano curve più omogenee che descrivono il moto caotico dell'attrattore strano.

La parte inferiore si compone semplicemente del pulsante per avviare o bloccare il salvataggio in base alle esigenze e della finestra di dialogo affianco in cui indicare il percorso sulla memoria del computer dove creare il file testo di salvataggio.

3.4 Procedura di utilizzo del sistema

Avendo quindi definito i componenti del programma l'uso di quest'ultimo risulta abbastanza intuitivo. Può essere utile fare una descrizione del funzionamento per fare in modo che venga svolto correttamente notando delle accortezze necessarie all'ottenimento di un risultato coerente con gli scopi e con le condizioni preliminari.

Prima di tutto va collegata la videocamera al computer e creata la linea di collegamento che va dal computer alla slitta passando per la scheda e per l'amplificatore, facendo in modo che non vada in blocco durante il funzionamento.

Quindi si devono definire le condizioni iniziali della trave cioè la posizione a tempo nullo e il punto di incastro alla struttura. Ciò si fa attraverso una taratura statica in cui si fa funzionare il programma con forzanti nulle e con le impostazioni per il salvataggio spente in modo da visualizzare solo le informazioni utili e scriverle nei controlli appositi in Fig. 3.6. In questa fase ci si assicura anche che il programma riconosca solo la punta della trave come oggetto e che la segua al passare del tempo, se ciò non accade o viene perso segnale negli spostamenti si può restringere il campo di analisi rispetto a tutta l'immagine, attraverso un'impostazione in cui l'operatore seleziona manualmente un rettangolo di interesse, oppure si rende la punta più visi-

3.4 Procedura di utilizzo del sistema

bile avvolgendola con qualcosa di scuro, che aiuta a riconoscerla meglio creando più contrasto.

Adesso si può far funzionare il sistema nelle sue condizioni a regime in cui si imposta la forzante voluta, avvicinandosi alla frequenza naturale, e attivando in un certo momento il salvataggio per un periodo consono a un'elaborazione che abbia abbastanza dati per poter risalire al moto caotico. Il file di testo si presenterà come voluto con le varie caratteristiche sulle colonne e con ogni riga corrispondente a un tempo specifico.

Infine si ferma il tutto unicamente premendo il tasto di Fine acquisizione, in quanto cliccando altro si rischia di abortire il processo prima che finisca il salvaggio.

Capitolo 4

Conclusioni

4.1 Conclusioni

In questa tesi è stata quindi introdotta la problematica della determinazione del moto di ciò che viene definito attrattore strano. La trattazione si divide in tre parti riguardanti: la struttura teorica del problema e le semplificazioni per ottenere la legge, il design dell'impianto sperimentale che si compone principalmente della definizione di trave vibrante, la sua struttura di sostegno e i magneti e l'ultima che tratta tutto ciò che riguarda l'acquisizione dei dati alla messa in funzione.

Nel Cap. 1 è stata fatta una trattazione della legge che governa il moto, ricavata dopo aver applicato le dovute semplificazioni. Infatti dopo la definizione del problema si è indicato ciò che è più importante nell'applicazione delle forze magnetiche, come la definizione della sola punta magnetizzata e il calcolo dell'energia potenziale magnetica. Proseguendo si è calcolato il potenziale del sistema che è stato sfruttato per una parametrizzazione del problema statico, cioè il calcolo del numero di punti di equilibrio al variare di alcuni parametri fissandone altri, e si è creata una mappa di quest'ultimo. Nelle ultime sezioni di questo capitolo si è poi trovata l'equazione di moto, attraverso l'impiego delle condizioni iniziali della trave incastrata e l'uso del metodo di Galerkin, e si è rappresentato il comportamento della trave con dei grafici che dipendono dal valore dell'ampiezza f della forzante rispetto a dati valori di soglia.

Andando a apprezzare la fase di design nel Cap. 2 è stata progettata e verificata la scelta e la disposizione degli oggetti che creano il moto attraverso due controlli distinti su due software. Nel caso della struttura di sostegno alla trave e ai magneti è bastato creare un disegno basato sulle esigenze e poi si è dimostrato che costruendola in tubolari di acciaio è abbastanza rigida da conservare il moto che subisce. Quindi sono stati scelti i magneti in modo che il campo magnetico fosse quello richiesto e la trave non subisse spostamenti notevoli in alcune zone se i magneti fossero stati messi simmetricamente alla trave. Infine è stata definita la trave, mantenendo le dimensioni richieste, e ne è stata calcolata la frequenza naturale, che serve per la messa in moto.

Nella fase finale, cioè nel Cap. 3, si è trattato il percorso necessario per digitalizzare i dati che si generano nella messa in funzione del tutto. Sono stati definiti la

Capitolo 4 Conclusioni

catena di generazione delle forze attraverso vari dispositivi e il metodo per collegare una videocamera generica. Finita la parte di hardware si è passato al programma progettato al computer al fine di acquisire e salvare dati contemporaneamente alla generazione di forze scelte dall'operatore. In conclusione per un buon funzionamento è stato definito il processo secondo cui usare tutto ciò che è stato descritto in precedenza per generare dati utili nella prosecuzione dell'analisi.

Bibliografia

- [1] P.J.Holmes. A nonlinear oscillator with strange attractor. *Philosophical transactions of the royal society*, 292(1394):419–448, 1979.
- [2] F. Moon and P.J.Holmes. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration*, 65(2):275–296, 1979.
- [3] P.J.Holmes. Experiments of chaotic motion of a forced nonlinear oscillator: strange attractors. *Journal of Applied Mechanics*, 47:638–644, 1979.
- [4] E.N.Lorentz. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963.
- [5] I. T.Poston. Catastrophe theory and its applications. 1978.
- [6] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73:747-817, 1967.
- [7] W. GmbH. Campi magnetici per varie forme di magneti, 2003.
- [8] E. B. M. Balakumar Balachandran. *VIBRATIONS SECOND EDITION*. Cengage Learning, 2009.
- [9] M. I.Younis. *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer Science+Business Media, 2011.