



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Edile

Micromeccanica e macromeccanica dei compositi laminati a fibre lunghe

Micromechanics and macromechanics of laminated fiber-reinforced composites

Relatore:

Prof. **Serpilli Michele**

Tesi di Laurea di:

Keci Klaudio

Anno Accademico 2019 /2020

*Se poni una piccola cosa su un'altra piccola cosa, e fai
questo continuamente presto avrai una grande cosa*

Esiodo, Opere e Giorni

Indice

Indice delle figure	3
Abstract	5
1 Introduzione	6
1.1 Applicazioni dei materiali compositi	6
1.1.1 Applicazioni in campo aerospaziale.....	7
1.1.2 Applicazioni in campo aeronautico	8
1.1.3 Applicazione in campo automobilistico.....	8
1.1.4 Applicazioni in campo nautico.....	9
1.1.5 Applicazioni in campo biomedico	10
1.1.6 Applicazioni in campo sportivo.....	11
1.1.7 Applicazioni nel campo delle costruzioni	12
1.2 Principali caratteristiche dei compositi	14
1.2.1 Classificazione dei compositi	14
1.2.2 Compositi con particelle	15
1.2.3 Compositi fibrosi.....	15
1.2.4 Matrici.....	18
1.2.5 Fibre	18
2 Micromeccanica	20
2.1 Generalità	20
2.2 Modulo di elasticità longitudinale	22
2.3 Resistenza a trazione longitudinale	24
2.4 Caratteristiche meccaniche in direzione trasversale	27
2.4.1 Modulo di elasticità in direzione trasversale.....	27
2.4.2 Resistenza a trazione trasversale.....	29
2.5 Modulo di elasticità tangenziale G_{12}	30
2.6 Coefficiente di Poisson	31
2.6.1 Coefficiente di Poisson longitudinale ν_{12}	31
2.6.2 Coefficiente di Poisson trasversale ν_{21}	32
2.7 Coefficienti di dilatazione termica	32
2.7.1 Coefficiente di dilatazione termica longitudinale α_L	33
2.7.2 Coefficiente di dilatazione termica trasversale α_T	33
2.8 Compositi a fibre corte	34
2.8.1 Trasferimento delle tensioni.....	34

2.8.2	Moduli di Elasticità.....	37
2.8.3	Resistenza a trazione	37
2.8.4	Resistenza a fatica.....	39
2.8.5	Meccanismi di tenacizzazione per compositi	39
2.9	Analisi della lamina.....	40
2.9.1	Teoria della elasticità.....	42
2.9.2	Effetto dell'orientazione.....	46
2.9.4	Legame tra costanti elastiche e matrice di cedevolezza valutato tramite semplici stati di tensione	49
2.9.5	Invarianti proprietà di una lamina ortotropa	51
3	Macromeccanica	53
3.1	Generalità	53
3.2	Codifica dei laminati	54
3.3	Teoria classica della laminazione	55
3.3.1	Forze e momenti nel laminato.....	57
3.3.2	Tensioni e deformazioni	59
3.4	Laminati particolari.....	60
3.4.1	Laminati simmetrici	60
3.4.2	Laminati ortotropi.....	61
3.4.3	Laminati speciali con D_{13} e $D_{23}=0$	61
3.4.4	Laminati incrociati	62
3.4.5	Laminati ibridi	62
3.4.6	Laminati quasi isotropi	62
3.5	Sforzi interlaminari	63
	Conclusioni	67
	Ringraziamenti	69
	Bibliografia/Sitografia	70

Indice delle figure

Fig.1 – Osso(a), mattone fatto di paglia e argilla (b).....	6
Fig.2 – Satellite Anik(a), Viking(b).....	7
Fig.3 – Space Shuttle	7
Fig.4 – Boeing 787.....	8
Fig. 5 – Airbus A350.....	8
Fig.6 – Primo telaio in composito(a), freni a disco(b).....	9
Fig.7 – Pneumatici(a), vettura di Formula 1(b).....	9
Fig.8 - Barca a vela (a), albero in fibra di carbonio(b).....	10
Fig.9 – Atleta con protesi in fibra di carbonio.....	11
Fig.10 – Mazze da golf in fibra di carbonio (a), racchetta da tennis in fibra di carbonio (b), telaio bici in fibra di carbonio (c).....	12
Fig.11 – Vetro laminato fibro-rinforzato(a), pannelli X-LAM(b).....	13
Fig.12 - Classificazione dei materiali compositi in base alla forma ed all'orientamento del rinforzo	14
Fig.13 – Proprietà di materiali prodotti in fibre e di alcuni materiali convenzionali.....	16
Fig.14 – Woven mat (a), stiched mat (b), balanced woven mat (c).....	17
Fig.15 – Continuos strand mat (a), veil (b).....	17
Fig.16 - Compositi a fibre corte con orientamento casuale (a), con orientamento preferenziale(b)	18
Fig.17 – Schema semplificato di una lamina con rinforzo unidirezionale.....	20
Fig.18 – Sezione trasversale lamina con rinforzo unidirezionale.....	21
Fig.19 – Diagrammi σ - ε per lamina con componenti con comportamento lineare (a) e non lineare (b).....	23
Fig.20 – Andamento del rapporto P_f/P_c al variare del rapporto E_f/E_m per diversi valori di V	24
Fig.21 – Diagrammi σ - ε per lamina (matrice duttile) con fibre fragili e duttili.....	24
Fig.22 – Andamento della tensione di rottura a trazione longitudinale per lamina unidirezionale	26
Fig.23 – Elemento di volume rappresentativo della lamina unidirezionale.....	27
Fig.24 – Andamento (teorico) del modulo longitudinale e trasversale di lamina unidirezionale con $E_f/E_m=10$	28
Fig.25 – Andamento del rapporto E_c/E_m per lamina unidirezionale al variare del rapporto E_f/E_m per diverse concentrazioni di fibre.....	28
Fig.26 – Rappresentazione grafica dell'equazione di Halpin – Tsai.....	29
Fig.27 – Modello deformativo per trovare G_{12}	30
Fig.28 – Modello deformativo per valutare ν_{12}	31

Fig.29 – dipendenza dei coefficienti di dilatazione termica da V_f	33
Fig.30 – meccanismo di trasferimento del carico (a) e tratto infinitesimo di fibra corta a sezione circolare(b).....	34
Fig.31 – Andamento delle tensioni normali e tangenziali nella fibra al variare della lunghezza.....	36
Fig.32 – Tensioni nella fibra per matrice elasto-plastica.....	36
Fig.33 – prova di pull-out.....	38
Fig.34 – Curve cedevolezza-lunghezza cricca per compositi a fibre corte.....	40
Fig.35 – Materiale isotropo sottoposto a trazione e a taglio puro.....	41
Fig.36 – Materiale anisotropo sottoposto a trazione e a taglio puro.....	41
Fig.37 – Materiale ortotropo sottoposto a trazione e a taglio puro.....	42
Fig.38 – Stato di tensione nell’intorno di un punto.....	42
Fig.39 – Piano di riferimento arbitrario ruotato rispetto a x-y.....	46
Fig.40 – Andamento delle costanti elastiche al variare dell’orientazione(a), andamento dei coefficienti di accoppiamento al variare dell’angolo θ	51
Fig. 41 – Esempio di un laminato.....	53
Fig.42 – laminato unidirezionale(a), laminati angle-ply(b), laminati cross-ply(c).....	54
Fig.43 – deformazione nel piano x-z.....	55
Fig.44 – Andamento delle tensioni e deformazioni all’interno di un laminato.....	56
Fig.45 – Geometria del laminato con n lamine.....	57
Fig.46 – Distribuzione delle tensioni applicate nel piano medio del laminato.....	57
Fig.47 – Laminato simmetrico.....	61
Fig.48 – Laminato incrociato.....	62
Fig.49 – Delaminazione.....	63
Fig.50 – Andamento delle tensioni interlaminari τ_{xy} e τ_{xz} agli estremi liberi di un laminato $[\pm 45]_S$ sottoposto a N_{xx}	64
Fig.51 – Tensioni interlaminari τ_{yz} e tensioni interlaminari normali σ_z	64
Fig.52 – Variazione degli sforzi interlaminari τ_{xz} in funzione dell’orientazione θ delle fibre in un laminato $[\pm \theta]_S$	65
Fig.53 – Influenza della sequenza di impacchettamento sulle tensioni interlaminari nei laminati Quasi-isotropi T300 Caron-Epoxy sollecitati a trazione.....	65
Fig.54 – Edge cap (a), stitching (b), interleaved adhesive layers (c).....	66
Fig.55 – Ply termination (a), notching (b), tapering (c).....	66

Abstract

In questa tesi si è analizzato il comportamento dei laminati compositi a fibre lunghe, ottenuti dall'unione di lamine variamente orientate, che insieme riescono a garantire proprietà altrimenti non conseguibili.

Nella prima parte si è cercato di dare una visione globale dei materiali compositi, con definizioni e indicando alcuni esempi applicativi nei vari ambiti. Inoltre, si è proceduto alla loro classificazione e alla valutazione della funzione e proprietà di matrice e fibre.

Nella seconda parte sono state studiate in dettaglio le interazioni tra i costituenti della lamina, singolo strato di un laminato composito. In particolare, è stato valutato il comportamento elastico della lamina ortotropa e trasversalmente isotropa definendo le costanti (modulo elastico in direzione longitudinale E_1 , modulo di elasticità trasversale E_2 , modulo di elasticità tangenziale G_{12} , coefficiente di Poisson longitudinale ν_{12} e coefficiente di Poisson trasversale ν_{21}) ottenute da una serie di considerazioni e meccanismi che si sviluppano tra matrice e rinforzo. Per quanto riguarda la resistenza meccanica della lamina sono state accuratamente trattate la resistenza a trazione longitudinale $\sigma_{L, R}$ e trasversale $\sigma_{T, R}$. Prima di passare alla macromeccanica è stato necessario risalire all'equazione costitutiva della lamina, che lega tensioni e deformazioni, sia per un generico riferimento cartesiano ortogonale, sia per un piano di riferimento ruotato di un angolo ϑ in senso antiorario rispetto a quello principale tipico dei laminati angle-ply.

Nell'ultima sezione si sale di scala, si passa dalla lamina al laminato delineandone il comportamento. Inoltre, si è valutato l'andamento delle tensioni e deformazioni al suo interno, per poi arrivare all'equazione costitutiva fondamentale per la progettazione.

1 Introduzione

In questa tesi tratteremo in particolare lo studio dei materiali compositi principalmente utilizzati nel campo delle costruzioni.

L'obiettivo dei materiali compositi è quello di perfezionare le prestazioni dei materiali convenzionali in termini di caratteristiche meccaniche. In generale per materiale composito si intende una combinazione di due o più componenti, o fasi, di natura diversa e macroscopicamente distinguibili, che forniscono proprietà meccaniche e fisiche complessivamente superiori a quelle dei suoi singoli costituenti. I componenti principali sono dunque due: la matrice, o fase continua, meccanicamente più debole e il rinforzo, componente più resistente che si presenta sotto forma di fase discontinua (fibre, particelle). Per la presenza di una fase continua (matrice) ed una discontinua (rinforzo), i compositi presentano un grado di anisotropia sia da un punto di vista elastico che di resistenza meccanica. Le fibre, scaglie, particelle, caratterizzano la struttura interna mentre la forma globale è definita dalle matrici [1].

1.1 Applicazioni dei materiali compositi

La presenza dei materiali compositi si può vedere fin dall'antichità come il legno costituito da fibra di cellulosa in una matrice legnosa e le ossa dei vertebrati costituite da collagene e apatite. Un altro esempio di materiale composito, già realizzato nell'antico Egitto, è il mattone ottenuto mescolando paglia e argilla. Non sono invece materiali compositi né le leghe metalliche né le materie plastiche.

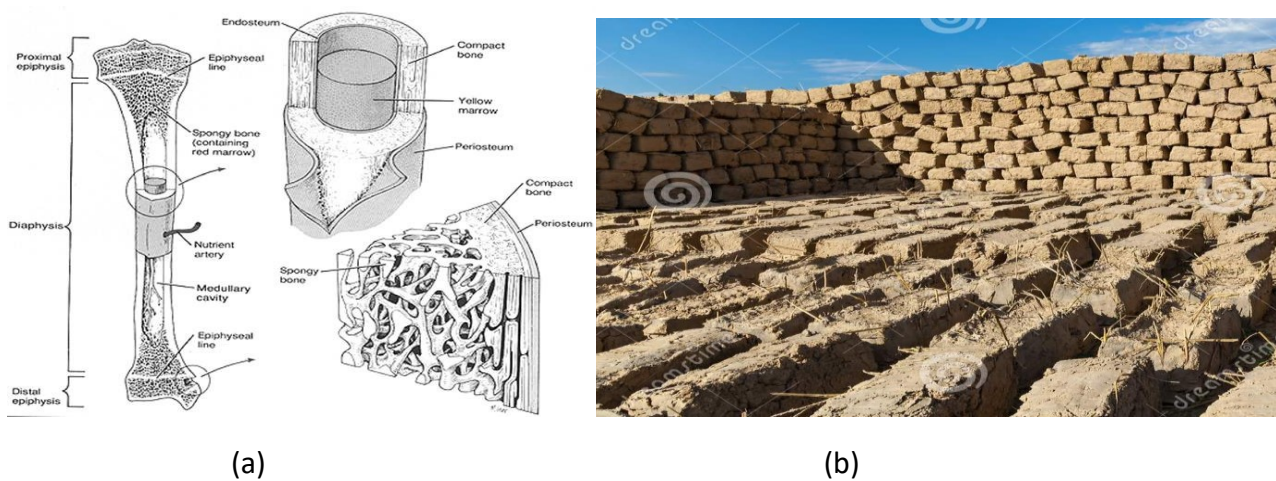
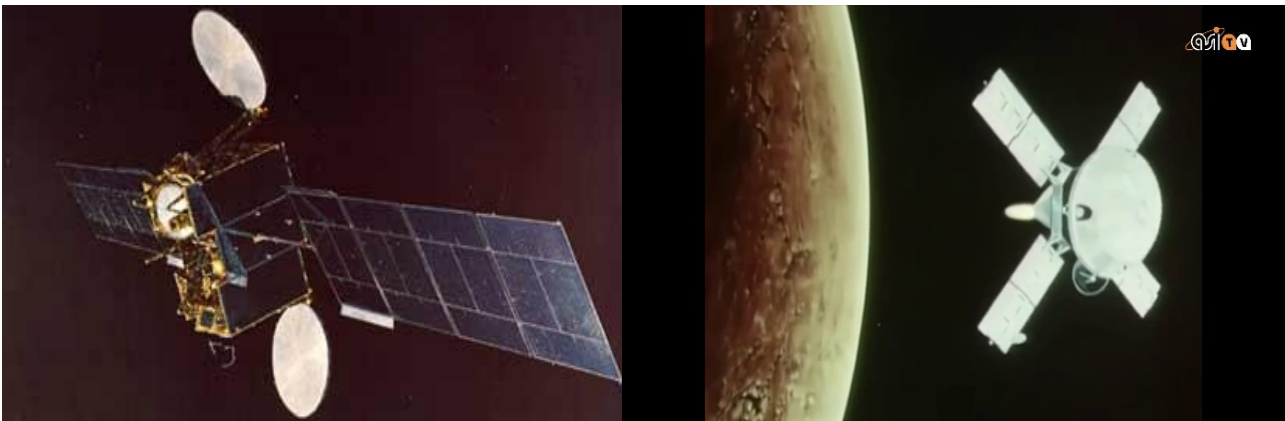


Fig.1 – Osso(a), mattone fatto di paglia e argilla (b)

Nel corso degli anni l'applicazione dei materiali compositi è notevolmente aumentata in vari campi come quello aerospaziale, dell'aeronautica, dell'industria automobilistica, nautica, biomedica, in campo sportivo e in ambito civile.

1.1.1 Applicazioni in campo aerospaziale

L'impiego di questi materiali innovativi ha trovato grande spazio anche in ambito aerospaziale negli Space Shuttle, per le stazioni spaziali e in molte altre strutture. Dopo notevoli studi si è visto che tali materiali presentavano caratteristiche meccaniche migliori rispetto a quelle presenti nei materiali metallici. Uno dei motivi principali dell'utilizzo dei compositi fibro-rinforzati nei veicoli spaziali è la leggerezza che conferiscono alla struttura. I tubi in resina epossidica rinforzati con fibra di carbonio vengono impiegati per le strutture a traliccio utilizzate per i satelliti (LEO) low earth orbit. Uno dei problemi dell'utilizzo dei compositi in resina epossidica nei satelliti (LEO) è la loro suscettibilità alla degradazione causata dall'assorbimento dell'ossigeno atomico, ma questo può essere risolto avvolgendo i tubi esposti all'ossigeno atomico con fogli di alluminio [2].



(a)

(b)

Fig.2 – Satellite Anik(a), Viking(b)



Fig.3 – Space Shuttle

1.1.2 Applicazioni in campo aeronautico

Attraverso l'utilizzo dei materiali compositi si riesce a ridurre il peso delle parti metalliche, evitare la corrosione ed eliminare rumori e vibrazioni. Nell'aeronautica il loro primo impiego risale al 1937 quando furono utilizzate fibre di vetro in resina fenolica nella realizzazione di parti di prototipi [3]. Oggigiorno i due principali costruttori (Boeing 787 e Airbus A350) impiegano un quantitativo di fibre di carbonio pari al 50% dell'intera struttura. Il resto della struttura del Boeing 787 è composto da leghe di alluminio per il 20%, leghe di titanio per il 15% e dal 10% di acciaio [2].



Fig.4 – Boeing 787



Fig. 5 – Airbus A350

1.1.3 Applicazione in campo automobilistico

Per quanto riguarda il settore automobilistico nel 1981 è stato realizzato il primo telaio per monoposto in composito. Avere una scocca in fibra di carbonio permetteva di avere una struttura più leggera e una maggiore rigidità torsionale. Da allora i materiali compositi furono utilizzati sempre in misura maggiore anche nella Formula 1 come si può vedere per alettoni, bandelle, fondo piatto. In questo campo i materiali compositi a matrice ceramica vengono soprattutto impiegati per la realizzazione dei freni a disco. Riguardo le autovetture anche per gli pneumatici vengono utilizzati

nanocompositi polimerici che conferiscono leggerezza e un aumento della resistenza all' abrasione [4].

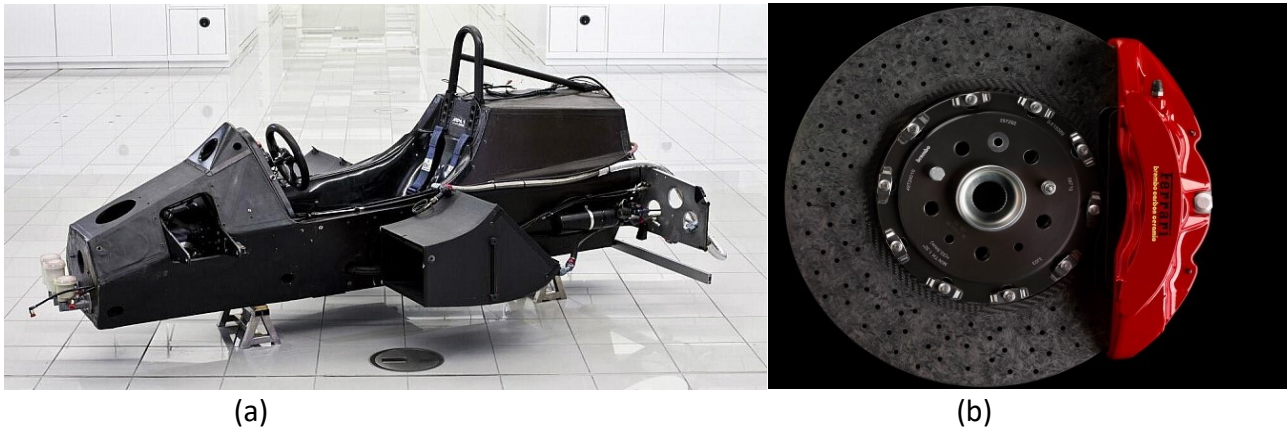


Fig.6 – Primo telaio in composito(a), freni a disco(b)

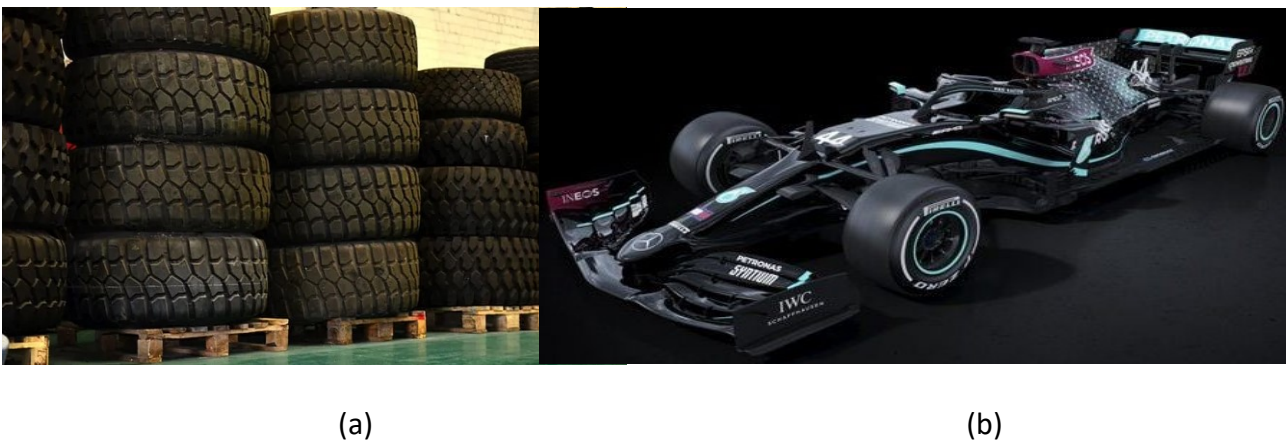


Fig.7 – Pneumatici(a), vettura di Formula 1(b)

1.1.4 Applicazioni in campo nautico

In campo nautico le imbarcazioni hanno scafo, coperta, alberi, scotte, cime e altri piccoli particolari di allestimento prodotti con fibre ad alta resistenza. Anche le vele delle imbarcazioni vengono realizzate in fibra di carbonio o Kevlar. In questo settore le resine poliesteri, vinilesteri ed epossidiche, sono quelle più impiegate perché riescono a garantire resistenza agli agenti ambientali, capacità di adesione e alte capacità meccaniche. La resina poliesteri utilizzata per la realizzazione degli scafi può essere di due tipi, l'Ortoftalica che è quella più economica presenta basse caratteristiche meccaniche, e l'Isaftalica che ha caratteristiche migliori e riesce a preservare il

laminato dal rischio di osmosi. Tra le quattro resine citate la migliore in termini di prestazione è quella epossidica che mantiene inalterate le proprie caratteristiche per tempi lunghi, presenta un'alta resistenza all'acqua ed ha una buona resistenza alle temperature elevate.

Come rinforzi in questo ambito le fibre maggiormente impiegate sono quelle aramidiche, di vetro e quelle di carbonio [5].



Fig.8 - Barca a vela (a), albero in fibra di carbonio(b)

1.1.5 Applicazioni in campo biomedico

Nel settore biomedicale, i materiali compositi vengono impiegati per lo sviluppo di tessuti ibridi per la rigenerazione di tessuti duri (es. ossa, denti) tessuti molli (es. pelle, disco intervertebrale, tessuto pulpare/ gengivale), e tessuti elettrofunzionali (es. nervi, tessuti muscolari e cardiaci). Questi sistemi possono essere iniettati in caso di fratture ossee o qualche difetto con procedure meno invasive rispetto a dei interventi chirurgici. Questi compositi applicati per la ristrutturazione tissutale sono prevalentemente a matrice polimerica a base di polietilene (PE), poliuretano (PU), politetrafluoroetilene (PTFE), poliacetato (PA), polimetilmetacrilato (PMMA), polietilentereftalato silicone (SR), rinforzati con fibre di vetro e carbonio. Possono essere impiegati anche per la realizzazione di protesi. I compositi polimerici rinforzati con fibre di vetro sono utilizzati anche per la realizzazione di apparecchiature di diagnostica medica, grazie alla loro radiotrasparenza (assorbono bassi livelli di energia radiante), con la quale riducono molto l'attenuazione del segnale, motivo per cui si ottengono immagini chiare delle varie parti del corpo analizzate. In questo ambito la progettazione si sta sempre di più orientando verso lo sviluppo dei nanocompositi funzionali. Questi materiali

innovativi presentano differenti proprietà chimiche, fisiche in grado di reagire in maniera intelligente alle condizioni ambientali [6].



Fig.9 – Atleta con protesi in fibra di carbonio

1.1.6 Applicazioni in campo sportivo

In campo sportivo la presenza dei materiali compositi si può ampiamente osservare come per le racchette da tennis con rinforzi in fibra di carbonio, sci con solette in fibra aramidica, mazze da golf e da hockey, archi e frecce, giavellotti e aste per salto, telai e ruote per biciclette. Nel ciclismo per la realizzazione dei telai di bici da corsa si è sempre andati alla ricerca di materiali che riuscissero a garantire leggerezza (basta pensare che si è passati da un peso medio delle biciclette da corsa di 9 kg nel 1980 ad un peso medio di 1.1 kg nel 1990), la quale negli ultimi anni è stata ottenuta mediante l'utilizzo della fibra di carbonio. La fibra di carbonio garantisce rigidità, resistenza a trazione, fatica e corrosione, ma nel caso di urti che provocano un danneggiamento di una lamina interna al quale corrisponderà una deformazione che ad ogni carico applicato aumenterà, essi potrebbero portare alla rottura di schianto [7]. Solitamente per la riduzione dei costi le fibre di carbonio vengono combinate con fibre di vetro o Kevlar 49 [2].



(a)



(b)



(c)

Fig.10 – Mazze da golf in fibra di carbonio (a), racchetta da tennis in fibra di carbonio (b), telaio bici in fibra di carbonio (c)

1.1.7 Applicazioni nel campo delle costruzioni

Nel campo delle costruzioni i materiali compositi sono principalmente utilizzati per il restauro di zone danneggiate, per l'adeguamento statico in strutture sottoposte ad azione sismica, per il rinforzo di murature, ponti o per il rinforzo strutturale dei solai in caso di armatura deteriorata. L'applicazione degli FRP non richiede l'utilizzo di macchinari vista la loro leggerezza. Per il ripristino dell'adeguamento statico e sismico gli FRP vanno ad incrementare la sezione resistente a trazione e a taglio, e sono in grado di aumentare la capacità portante e duttilità di elementi compressi o pressoinflessi come i pilastri.

Nel settore civile vengono anche utilizzati gli FRG, ovvero materiali compositi costituiti da fibre di rinforzo annegate in una matrice inorganica i quali vengono impiegati per rinforzi strutturali di paramenti murari o come elemento di rinforzo per consentire una corretta ammortatura delle pareti portanti in c.a. Questi compositi presentano elevate resistenze meccaniche, elevata durabilità e garantiscono una completa reversibilità dell'intervento [8].

Altre applicazioni dei materiali compositi in campo edilizio si possono vedere dai tondini in carbonio ai profili dei serramenti, dalle tubature all'impianto elettrico, reti, pavimentazioni, pannelli isolanti ecc. Nel campo delle costruzioni l'esempio per eccellenza è il calcestruzzo costituito dagli inerti che rappresentano il rinforzo e dalla matrice cementizia. Un altro caso di materiale composito è il vetro stratificato che si ottiene dall'unione di due o più strati di vetro alternato ad un foglio plastico, solitamente polivinilbutirrale(PVB).

Il PVB è unito a sandwich con il vetro che è poi scaldato a 70 °C e pressato con rulli per espellere l'aria ed unire i materiali, l'operazione viene conclusa inserendo il sandwich così composto in un'autoclave a temperatura e pressione costante, dove si completa il processo di espulsione dell'aria, rendendo così il vetro laminato nuovamente trasparente [9]. Anche i pannelli X-LAM, in inglese CLT (Cross Laminated Timber), sono considerati materiali compositi. I CLT sono pannelli di legno massiccio a strati incrociati, composti da più strati di lamelle (o tavole), sovrapposti e incollati uno sull'altro in modo che ogni singolo strato abbia la fibratura incrociata di 90° rispetto agli strati adiacenti.

Lo spessore delle tavole spessore varia fra i 19 e i 40 mm, larghe fra gli 80 ed i 260 mm e principalmente viene utilizzato l'abete per realizzarle. Per ottenere i pannelli XLAM la prima fase consiste nel selezionare le lamelle, poi queste vengono incollate una accanto all'altra per la formazione dei singoli strati di tavole che poi verranno incollati tra di loro incrociando la fibratura a 90°. Questi pannelli possono svolgere la funzione di parete sostenendo i carichi verticali, avendo anche la funzione di controventatura, oppure la funzione strutturale di piastra dove grazie a resistenza flessionale e a taglio riesce a portare i carichi perpendicolari al piano. I CLT riescono a garantire caratteristiche meccaniche migliori dei singoli pannelli [10].



(a)

(b)

Fig.11 – Vetro laminato fibro-rinforzato(a), pannelli X-LAM(b)

1.2 Principali caratteristiche dei compositi

Le proprietà fisico-meccaniche dei compositi dipendono dalla concentrazione, distribuzione, geometria, dimensione ed orientamento. Ad una distribuzione non uniforme corrisponde infatti sempre un decadimento delle proprietà del composito, ovvero una diminuzione della sua resistenza meccanica. L'orientamento e la concentrazione invece vanno ad influenzare il grado di anisotropia del composito.

1.2.1 Classificazione dei compositi

La classificazione dei materiali compositi si basa sulla resistenza, legata a forma ed orientamento del rinforzo. In base alla forma si distinguono in materiali compositi fibro-rinforzati e rinforzati con particelle. I materiali compositi rinforzati con particelle in base all'orientamento si dividono in orientamento casuale e preferenziale. I compositi fibro-rinforzati possono essere costituiti da una singola lamina o da più lamine eguali variamente orientate (laminati) o diverse (ibridi). I compositi a singola lamina possono essere del tipo a fibra continua (a fibra lunga) e discontinua (a fibra corta). I primi possono essere con rinforzo unidirezionale e bidirezionale (tessuti) mentre i secondi possono avere fibre con orientamento preferenziale.

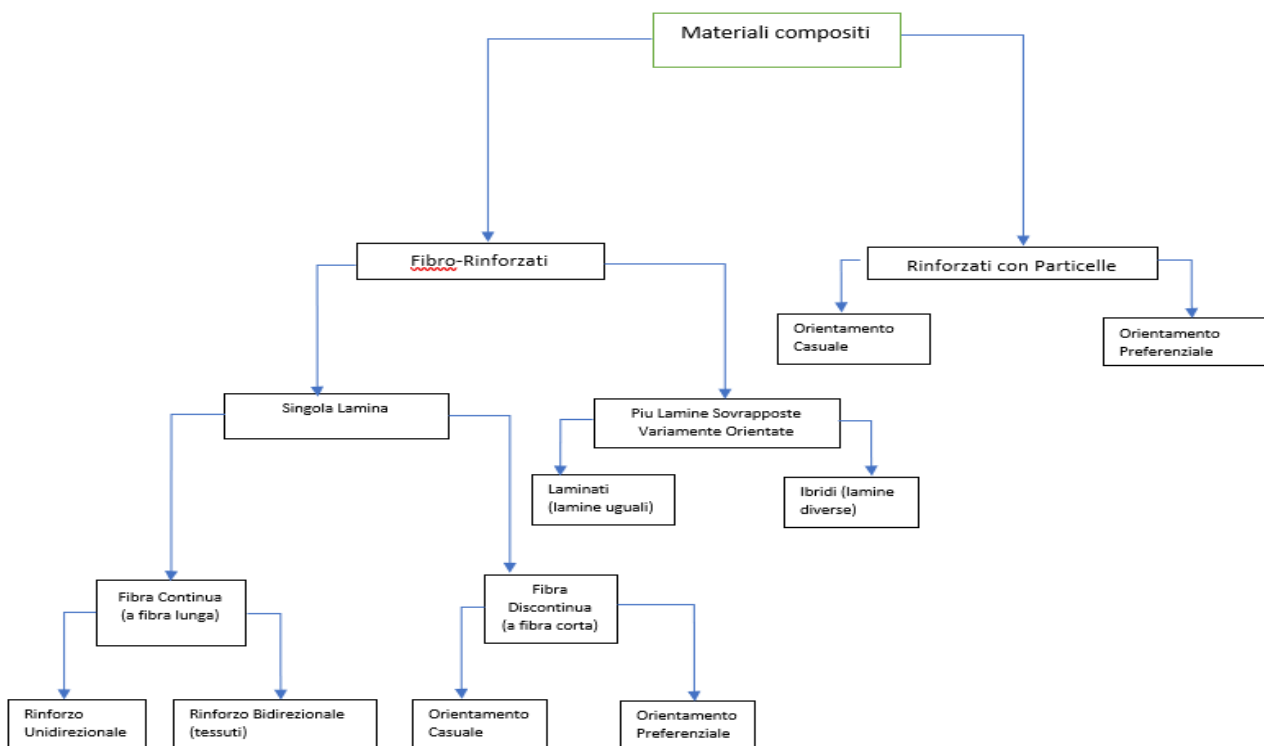


Fig.12 – Classificazione dei materiali compositi in base alla forma ed all'orientamento del rinforzo

1.2.2 Compositi con particelle

Le particelle nei compositi aumentano la resistenza all'usura, la durezza superficiale, la lavorabilità, la resistenza alle elevate temperature, la resistenza all'abrasione e la dilatazione termica. Questo però non porta a dei miglioramenti dal punto di vista meccanico e dal punto di vista della frattura tantoché all'eventuale presenza di difetti, esclusi i compositi con particelle in gomma dove la propagazione è rallentata, la loro propagazione può portare alla rottura del composito per rottura della sola matrice. Compositi con particelle possono essere realizzati dalla combinazione di materiali metallici o con sostanze come silici e argento come particelle.

1.2.3 Compositi fibrosi

I compositi fibrosi sono preferiti rispetto a quelli con particelle perché sono caratterizzati da una resistenza meccanica e rigidità maggiore. Il loro grande utilizzo è dovuto all'elevato rapporto resistenza/peso ed all'elevato rapporto rigidità/peso. L'elevata resistenza specifica di questi compositi è legata al basso peso specifico di fibre e matrice ma soprattutto alla elevata resistenza delle fibre. La resistenza del materiale aumenta se viene prodotto in fibre sottili e al diminuire della sezione trasversale e questo varia in funzione della natura del materiale. Nel caso di materiali amorfi, come il vetro per esempio, la elevata resistenza delle fibre rispetto allo stesso materiale non in fibra (bulk material), è dovuta alla diminuzione del numero e soprattutto delle dimensioni dei difetti (soffiature, inclusioni, cricche ecc.) presenti nella fibra rispetto alle dimensioni dei difetti generalmente presenti in elementi non in fibra.

Nei materiali cristallini la produzione in fibre dà luogo ad un orientamento preferenziale dei cristalli che si allungano nella direzione della fibra stessa con conseguente aumento della resistenza in questa direzione (anisotropia). Per i materiali polimerici la formazione di lunghe catene (polimeri) porta ad avere un'elevata resistenza. È ciò che si verifica nelle fibre organiche (aramide, polietilene ecc.) usate nella produzione di compositi.

Le fibre non possono sostenere sforzi di compressione e carichi trasversali, motivo per cui vengono immerse in una matrice a formare un composito fibroso. La massima tensione iniziale presente nella fibra cresce al crescere del diametro.

Nei compositi fibrosi la matrice presenta i difetti che si possono propagare fino ad incontrare la superficie laterale della fibra e quindi arrestarsi, oppure il difetto si propaga aggirando la fibra causando lo scollamento fibra-matrice.

Material	Tensile modulus (E) (GN/m ²)	Tensile strength (σ_u) (GN/m ²)	Density (ρ) (g/cm ³)	Specific modulus (E/ρ)	Specific strength (σ_u/ρ)
Fibers					
E-Glass	72.4	3.5 ^a	2.54	28.5	1.38
S-Glass	85.5	4.6 ^a	2.48	34.5	1.85
Graphite (high modulus)	390.0	2.1	1.90	205.0	1.1
Graphite (high tensile strength)	240.0	2.5	1.90	126.0	1.3
Boron	385.0	2.8	2.63	146.0	1.1
Silica	72.4	5.8	2.19	33.0	2.65
Tungsten	414.0	4.2	19.30	21.0	0.22
Beryllium	240.0	1.3	1.83	131.0	0.71
Kevlar-49 (aramid polymer)	130.0	2.8	1.50	87.0	1.87
Conventional materials					
Steel	210.0	0.34–2.1	7.8	26.9	0.043–0.27
Aluminum alloys	70.0	0.14–0.62	2.7	25.9	0.052–0.23
Glass	70.0	0.7–2.1	2.5	28.0	0.28–0.84
Tungsten	350.0	1.1–4.1	19.30	18.1	0.057–0.21
Beryllium	300.0	0.7	1.83	164.0	0.38

Fig.13 – Proprietà di materiali prodotti in fibre e di alcuni materiali convenzionali

Compositi a fibre lunghe

Quando la lunghezza del composito è paragonabile alla lunghezza delle fibre possiamo parlare di materiali compositi a fibre lunghe. Questi elementi compositi sono ottenuti da lamine sottili con rinforzo unidirezionale detti prepregs già impregnate di matrice non polimerizzata. Queste lamine prepreg vengono sovrapposte con orientamento fisso (single-layer) o variabile (multi-layer) e la polimerizzazione avviene a temperatura ambiente con opportuno riscaldamento fino ad ottenere i laminati.

Siccome queste lamine presentano una notevole resistenza in direzione longitudinale ma una bassa resistenza in direzione trasversale alle fibre, per evitare possibili rotture della lamina a seguito di carichi molto bassi in direzione ortogonale alla fibra vengono poste delle fibre trasversali per ovviare a ciò, formando così un tessuto chiamato "woven mat". Possono inoltre formare un tessuto costituito da fibre longitudinali disposte a gruppi ricuciti dalle fibre trasversali, indicato con il termine inglese (stiched mat), il (balanced woven mat) dove la percentuale delle fibre nelle due direzioni ortogonali è la stessa, oppure lamine dove le fibre non sono allineate (continuous strand mat) o con orientamento casuale (veil). Tuttavia, questo non riesce a garantire una resistenza tale da proteggere da carichi localizzati ortogonali, motivo per cui vengono realizzati tessuti con fibre disposte in tre direzioni mutualmente ortogonali.

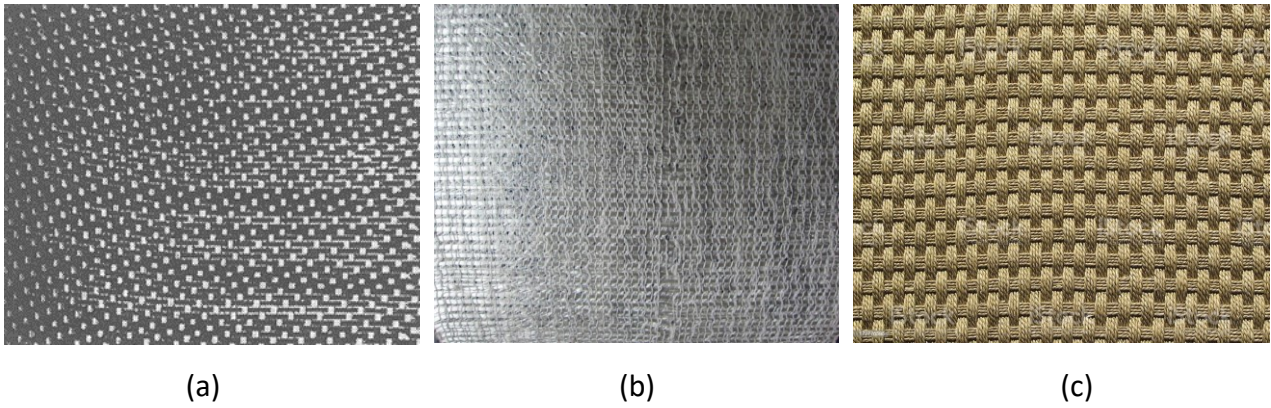


Fig.14 – Woven mat (a), stitched mat (b), balanced woven mat (c)

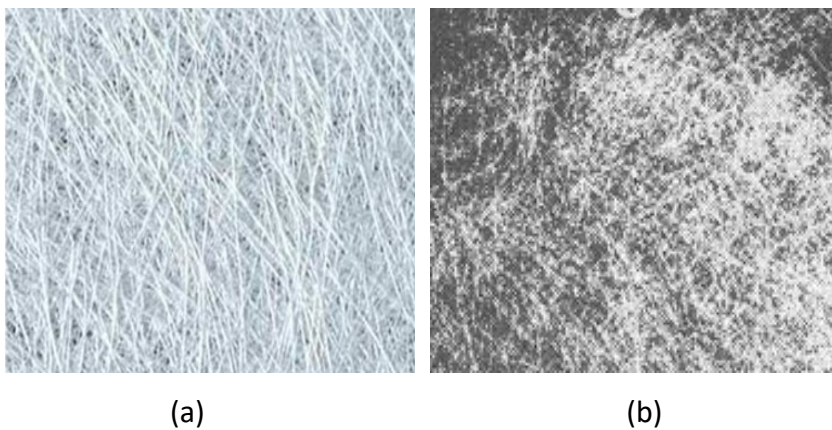


Fig.15 – Continuous strand mat (a), veil (b)

Compositi a fibre corte

Nei compositi a fibre corte l'orientamento è puramente casuale e questo fa sì che il materiale sia pressoché isotropo.

Questi compositi possono essere ottenuti mediante estrusione, oppure sovrapponendo lamine pre-impregnate con fibre orientate in modo casuale nel piano della lamina, ma parallele al piano della lamina stessa.

I compositi a fibre corte sono solitamente più economici ma presentano una resistenza inferiore rispetto a quelli a fibre lunghe. Le proprietà fisico-meccaniche dei compositi a fibre corte sono influenzate dalla lunghezza delle fibre che può variare da 1 a 8 cm e dalla quale dipende anche il meccanismo di trasferimento del carico esterno dalla matrice alla fibra.

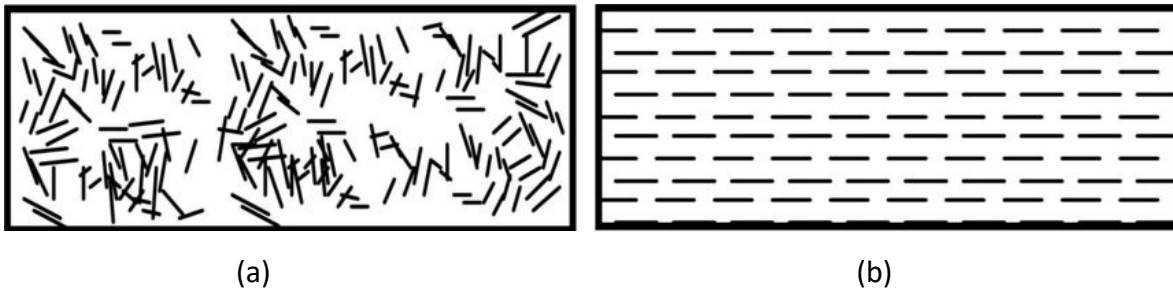


Fig.16 – Compositi a fibre corte con orientamento casuale (a), con orientamento preferenziale(b)

1.2.4 Matrici

La matrice svolge le seguenti funzioni:

- 1) tenere insieme le fibre;
- 2) trasferire alle fibre il carico esterno;
- 3) proteggere le fibre da danni derivanti da azioni meccaniche dirette (taglio, usura ecc.);
- 4) proteggere le fibre dai fattori ambientali (umidità, UV) e agenti corrosivi.

In base al materiale della matrice si hanno compositi a matrice polimerica (PMC, polymer-matrix composites), a matrice metallica (MMC, metal matrix composites) e compositi a matrice ceramica (CMC, ceramic-matrix composites).

Tra questi i PMC sono i più utilizzati e la loro matrice può essere costituita da resine termoindurenti o termoplastiche. Solitamente vengono impiegate resine termoplastiche caratterizzate da una bassa viscosità che permette di raggiungere rapporti volumetrici fibra-matrice maggiore del 70-80%.

Le matrici termoindurenti possono essere costituite da resine epossidiche (quelle più utilizzate), le resine poliesteri, resine poliammidiche, policianurati e le resine fenoliche (migliore resistenza al fuoco).

Le matrici termoplastiche presentano una maggiore resistenza agli urti e una notevole resistenza alle basse temperature.

1.2.5 Fibre

Le fibre che analizzeremo sono le fibre di vetro, di carbonio, di aramide e di boro.

Le fibre di vetro presentano un'ottima resistenza meccanica (2.5-4.8 GPa), basso costo, buona tenacità, buona rigidità con modulo elastico (72-90 GPa), media densità (2.5-2.8 gr/cm³).

Le fibre di carbonio sono caratterizzate da elevata resistenza (2.1-2.5 GPa), una rigidità ($E=240-390$ GPa), circa cinque volte quella delle fibre di vetro, una elevata conducibilità elettrica e termica ed una elevatissima resistenza alla corrosione.

In base alla rigidità le fibre di carbonio si suddividono in cinque categorie: LM (low modulus), SM (standard modulus), IM (intermediate modulus), HM (high modulus) e UHM (ultrahigh modulus).

Le fibre di aramide presentano un'elevata resistenza all'urto, buona resistenza meccanica e rigidità, e una bassa densità (1.5 gr/cm³). Uno degli svantaggi che porta ad una limitazione dell'utilizzo di queste fibre è la bassa temperatura di esercizio (max 160° C).

In commercio le resine aramidiche più impiegate per la realizzazione dei PMC sono il Kevlar 29 e Kevlar 49.

Le fibre di boro trovano principalmente applicazione nel settore aeronautico, aerospaziale e sportivo per la loro elevata resistenza, rigidità. Queste fibre non vengono solitamente utilizzate per i costi elevati e perché vengono sostituite dalle fibre di carbonio che presentano caratteristiche meccaniche simili o superiori.

Di seguito verranno approfonditi gli argomenti riguardanti la micromeccanica e macromeccanica dei materiali compositi.

2 Micromeccanica

La micromeccanica si occupa dello studio delle interazioni tra i materiali costituenti dei compositi su scala microscopica. Il composito viene considerato un materiale omogeneo del quale vengono stimate le principali grandezze partendo da quelle dei singoli componenti. Il progettista può scegliere forma, dimensione e materiale da impiegare.

2.1 Generalità

Gli elementi strutturali che si ottengono dai materiali compositi sono ottenuti sovrapponendo lamine con rinforzo unidirezionale ma diversamente orientate, i cosiddetti laminati. Quindi per conoscere il comportamento meccanico dei laminati è necessaria la conoscenza del comportamento meccanico della lamina con rinforzo unidirezionale.

Per lo studio della lamina viene adottata una semplificazione fig.17, perché vengono considerate delle fibre a sezione circolare parallele ed equi-spaziate immerse in una matrice continua, rispetto alla realtà dove queste hanno una distribuzione puramente casuale fig.18. Lo spessore di una lamina è generalmente compreso tra 0.1 e 1 mm mentre il diametro delle fibre è tipicamente dell'ordine di circa $10\ \mu\text{m}$ (vetro, carbonio, Kevlar) cosicché il rapporto spessore lamina/diametro fibre può variare tra 10 e 100 circa.

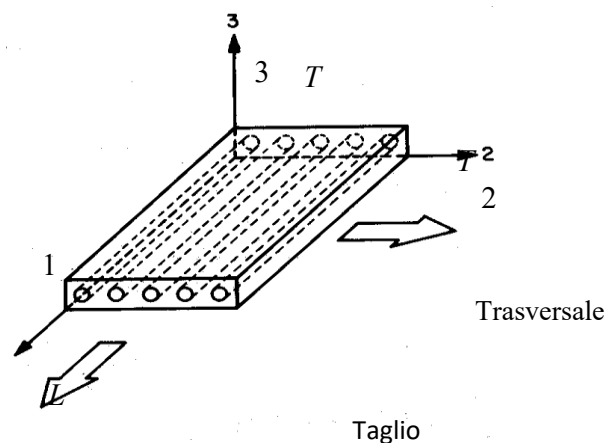


Fig.17 – Schema semplificato di una lamina con rinforzo unidirezionale

Considerando la lamina unidirezionale si può notare che essa ammette tre piani di simmetria mutuamente ortogonali (materiale ortotropo), con 1 viene indicata la direzione delle fibre, con 2 la direzione ortogonale giacente sul piano medio della lamina e con 3 la direzione ortogonale al piano della lamina.

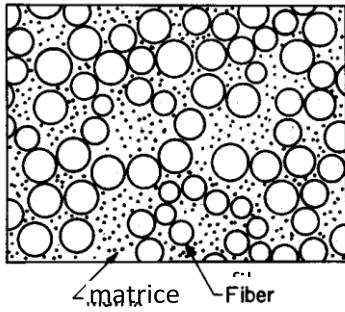


Fig.18 – Sezione trasversale lamina con rinforzo unidirezionale

Nella direzione delle fibre, quella longitudinale, le caratteristiche meccaniche sono molto maggiori rispetto alle altre direzioni, che vista la distribuzione casuale delle fibre, qualsiasi direzione considerata le caratteristiche trasversali rimangono invariante, motivo per cui la lamina è detta trasversalmente isotropa. Il comportamento elastico di una lamina ortotropa e trasversalmente isotropa è definito completamente da 5 costanti elastiche quali il modulo di Young in direzione longitudinale E_1 e trasversale E_2 , il modulo di elasticità trasversale nel piano della lamina G_{12} , il coefficiente di Poisson ν_{12} ed il coefficiente di Poisson nel piano trasversale ν_{23} .

Le caratteristiche fisico-meccaniche della lamina dipendono dal rapporto (volumetrico o ponderale) fibra-matrice. Per valutare le proprietà del composito si fa riferimento alla cosiddetta regola delle miscele dove la generica proprietà del composito P_c è data dalla media P_c, mp pesata secondo le concentrazioni in volume o in peso delle corrispondenti proprietà dei materiali componenti.

$$P_c = P_{c,mp} = \frac{P_r X_r + P_m X_m}{X_r + X_m}$$

avendo indicato con X_i ($i=r,m$) la concentrazione in peso o volume di rinforzo (r) e matrice (m) rispettivamente.

Indicando con V_f e V_m il rapporto volumetrico fibra/composito e matrice/composito e con W_f e W_m il rapporto ponderale fibra/composito e matrice/composito, questi vengono rispettivamente ottenuti da:

$$V_f = \frac{v_f}{V_c} \qquad V_m = \frac{v_m}{V_c} \qquad (1-2)$$

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \qquad W_m = \frac{w_m}{w_c} \qquad (3-4)$$

Con V_f, V_m e V_c si indica il volume di fibre, matrice e composito, mentre con w_f, w_m e w_c il peso rispettivamente di fibra, matrice e composito. I rapporti in volume ed in peso sono legati attraverso il peso specifico come lo si può vedere dalle seguenti formule:

$$W_f \frac{w_f}{w_c} = \frac{v_f \rho_f}{v_c \rho_c} = V_f \frac{\rho_f}{\rho_c} \Leftrightarrow V_f = W_f \frac{\rho_c}{\rho_f} \quad V_m = W_m \frac{\rho_c}{\rho_m} \quad (5-6)$$

La densità teorica di un composito si ottiene come media pesata della densità di fibra e matrice (come già visto tramite la regola delle miscele).

$$\rho_c = V_m \rho_m + V_f \rho_f \text{ che può essere scritta anche così } \rho_c = \frac{1}{(W_f/\rho_f) + (W_m/\rho_m)} \quad (7-8)$$

Per compositi costituiti da n componenti si ha:

$$W_i = V_i \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad \rho_c = \sum_i^n V_i \rho_i \quad \rho_c = \frac{1}{\sum_i^n (W_i/\rho_i)} \quad (9-11)$$

Durante il processo di formazione del composito a causa della presenza dei vuoti l'aria rimane intrappolata nella matrice e questo fa sì che la densità misurata sperimentalmente sia diversa dalla densità teorica. La presenza dei vuoti causa un decadimento delle proprietà fisico-meccaniche, motivo per cui in un buon composito il rapporto volumetrico deve essere minore o al massimo uguale all' 1%.

$$V_v = \frac{v_v}{v_c} = \frac{v_{ce} - v_{ct}}{v_{ct}} = \frac{\frac{w_c}{\rho_{ce}} - w_c/\rho_{ct}}{w_c/\rho_{ct}} = \frac{\rho_{ce} - \rho_{ct}}{\rho_{ct}} \quad (12)$$

Dalla (12) si vede come il rapporto volumetrico V_v che è dato dal rapporto tra il volume dei vuoti v_v e del composito v_c dipende dalla densità teorica ρ_{ct} ed effettiva ρ_{ce} del composito.

La resistenza la rigidità longitudinale, possono essere stimate per via teorica conoscendo la concentrazione dei costituenti, tutto ciò senza effettuare indagini sperimentali.

2.2 Modulo di elasticità longitudinale

In termini di tensioni applicando un carico di trazione alla lamina si ha:

$$\sigma_c A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \text{ e dividendo per l'area complessivo } A \text{ del composito } \sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m \quad (13-14)$$

La tensione media σ_c sulla lamina è la media delle tensioni presenti su fibra e matrice pesata secondo le rispettive percentuali in volume (regola delle miscele). Con A_f si indica la sezione trasversale delle fibre e con A_m l'area della matrice. Considerando l'ipotesi di perfetta adesione fibra- matrice si ha:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c = \varepsilon \quad (15)$$

Derivando la (14) rispetto alla deformazione e ipotizzando che sia fibra e matrice abbiano un comportamento elastico lineare si può vedere che il modulo di Young longitudinale segue la regola delle miscele per la quale il modulo si ottiene come media pesata dei volumi di fibra e matrice. Il modulo elastico longitudinale nel caso in cui la rigidità delle fibre è superiore a quella della matrice ha lo stesso ordine di grandezza di quello delle fibre, quindi è molto influenzato dalle fibre.

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m \quad (16)$$

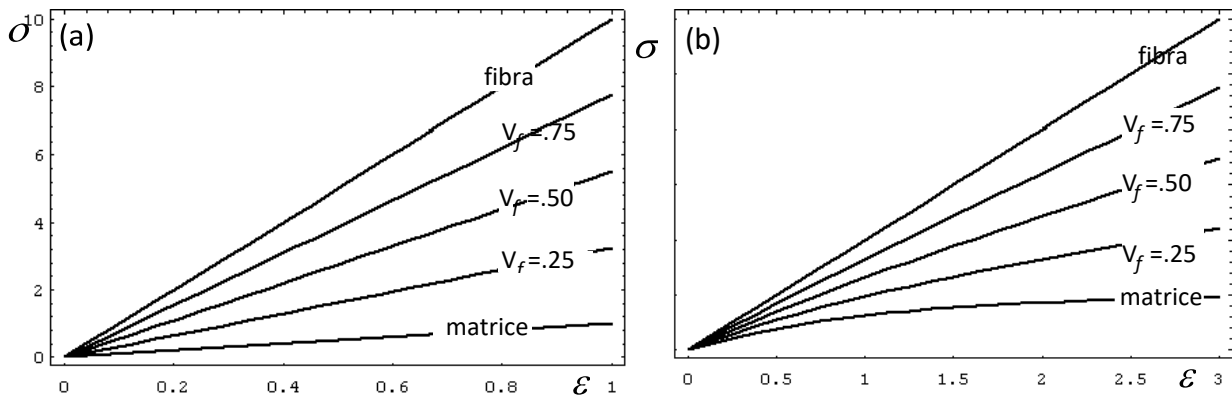


Fig.19 – Diagrammi σ - ε per lamina con componenti con comportamento lineare (a) e non lineare (b)

Come si può notare nella fig.19 (a) la matrice presenta un andamento lineare ai bassi carichi e in corrispondenza di un'elevata concentrazione di fibre (che hanno una rottura fragile) la lamina assume un comportamento simile a quello della fibra, e questo si verifica anche in caso di un comportamento non lineare perché la non linearità della matrice viene trascurata.

Quando una lamina è soggetta a trazione la ripartizione del carico tra fibra e matrice la si può valutare tramite questa relazione (17) da cui si evince che il rapporto tra carico sopportato dalle fibre P_f e quello sopportato dalla matrice P_m è lineare al rapporto tra i moduli di Young e a quello delle concentrazioni di volume di fibre e matrice. Quindi ad un elevato rapporto tra i moduli di Young (tra i 20 e 130) corrisponde un elevato rapporto tra i carichi sopportati, ciò vuol dire che in questi casi quando un composito è sottoposto a trazione sono le fibre a sostenere gran parte del carico.

$$\frac{\sigma_f - \sigma_m}{E_f - E_m} \Rightarrow \frac{(\sigma_f A_f)}{E_f} A_m = \frac{(\sigma_m A_m)}{E_m} A_f \Rightarrow \frac{P_f}{P_m} = \frac{E_f V_f}{E_m V_m} \quad (17)$$

Possiamo valutare il rapporto fibra-composito attraverso questi passaggi:

$$\frac{P_m}{P_f} = \frac{E_m V_m}{E_f V_f} \Rightarrow \frac{P_c - P_f}{P_f} = \frac{E_m V_m}{E_f V_f} \Rightarrow \frac{P_c}{P_f} = \frac{E_f V_f + E_m V_m}{E_f V_f} \Rightarrow \frac{P_f}{P_c} = \frac{1}{1 + (E_m V_m)/(E_f V_f)} \quad (18)$$

Come si può notare dalla (18) il rapporto P_f/P_c tende ad 1 anche per basse concentrazioni di fibre ma con un elevato rapporto tra i moduli di Young. Per concentrazioni di fibre che vanno dal 15 al 70% il rapporto P_f/P_c va dal 75 al 90% (per concentrazioni di fibre maggiori al 70% si nota un decadimento delle caratteristiche fisico-meccaniche dovuto a problemi di adesione fibra-matrice).

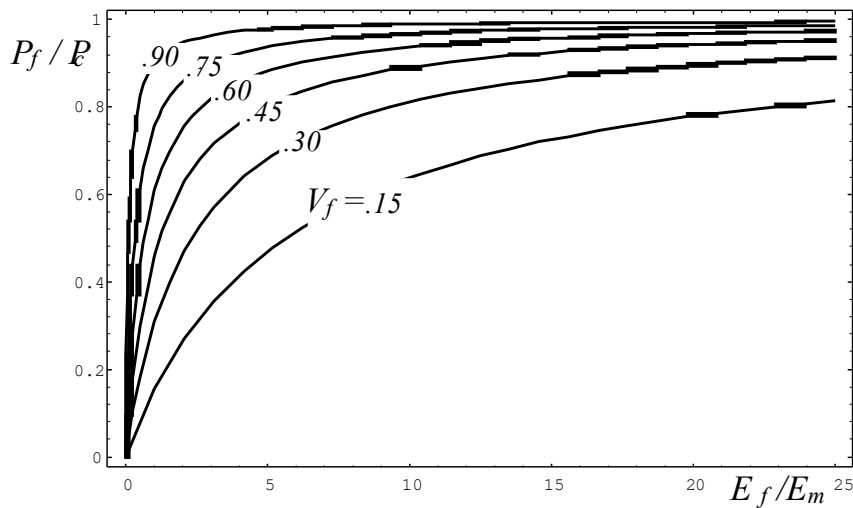


Fig.20 – Andamento del rapporto P_f/P_c al variare del rapporto E_f/E_m per diversi valori di V

2.3 Resistenza a trazione longitudinale

Generalmente la rottura di una lamina fibro-rinforzata avviene quando la deformazione longitudinale del composito raggiunge quella di rottura delle fibre ($\epsilon_{f,r}$). La rottura è generalmente governata dalle fibre che presentano solitamente una rottura fragile, mentre la matrice ha deformabilità più elevata, ma resistenza minore.

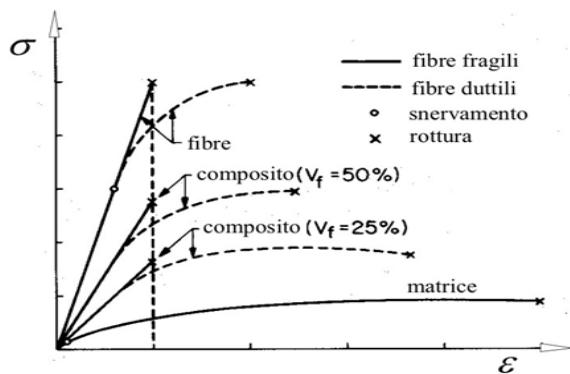


Fig.21 – Diagrammi σ - ϵ per lamina (matrice duttile) con fibre fragili e duttili

Attraverso la regola delle miscele si arriva a valutare la tensione di rottura a trazione della lamina corrispondente a tale deformazione:

$$\sigma_{L,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r}} (1 - V_f) \quad (19)$$

La rottura del composito coincide con quella delle fibre quando la concentrazione di esse è tale che il carico che le porta a rottura è maggiore del carico che porta a rottura la sola matrice. La tensione $\sigma'_{L,R}$ che porta a rottura la sola matrice è: $\sigma'_{L,R} A = \sigma_{m,R} A_m \Rightarrow \sigma'_{L,R} = \sigma_{m,R} V_m$ (20)

La percentuale di fibre necessaria per avere che alla rottura di esse segua quella della matrice e dell'intero composito deve essere maggiore al valore minimo dato dal seguente rapporto oltre la disuguaglianza:

$$V_f \geq \frac{\sigma_{m,R} - \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r}}}{\sigma_{f,R} - \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r} + \sigma_{m,R}}} = V_{f,\min} \quad (21)$$

Le fibre potrebbero non costituire un rinforzo nel caso in cui la capacità portante della matrice sia maggiore di quella del composito ovvero $V_f < V_{f,\min}$. Affinché le fibre possano essere considerate come un rinforzo la tensione di rottura del composito deve essere maggiore o uguale a quella della matrice: $\sigma_{L,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r}} (1 - V_f) \geq \sigma_{m,R}$ (22)

dalla quale poi si ricava il valore critico, il quale garantisce il fatto che una volta superato questo valore le fibre diano un contributo alla resistenza costituendo di fatto un rinforzo:

$$V_{f,\text{crit}} \geq \frac{\sigma_{m,R} - \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r}}}{\sigma_{f,R} - \sigma_m \big|_{\varepsilon = \varepsilon_{f,r}}} > V_{f,\min} \quad (23)$$

Quando la concentrazione delle fibre è minore a quella minima la rottura del composito avviene per rottura della matrice che si ha per:

$$\sigma_{L,R} = \sigma_{m,R} (1 - V_f) \quad (24)$$

Quindi le fibre costituiscono un rinforzo quando $\sigma_{L,R} > \sigma_{m,R}$ per $V_f > V_{f,\text{crit}}$, mentre per $V_{f,\min} < V_f < V_{f,\text{crit}}$ le fibre non fungono da rinforzo e la tensione di rottura è minore di quella della matrice.

$$\sigma'_{L,R} A = \sigma_{m,R} A_m \Rightarrow \sigma'_{L,R} = \sigma_{m,R} V_m$$

$$\sigma'_{L,R} = \sigma_{m,R} (1 - V_f)$$

$$\sigma_{L,R} = \sigma_{f,R} V_f + \sigma_m \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{f,R}} (1 - V_f)$$

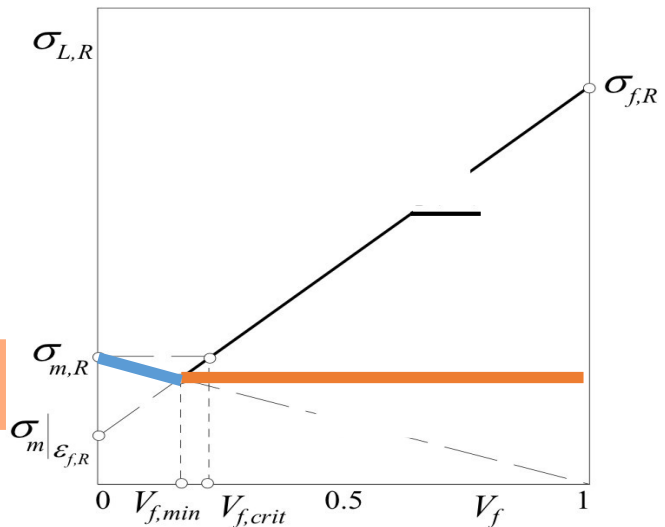


Fig.22 – Andamento della tensione di rottura a trazione longitudinale per lamina unidirezionale

Per compositi con fibre di vetro-resina e con fibre di carbonio la concentrazione di fibre critica è generalmente inferiore all' 1% e quindi la rottura di essi si verifica sempre per rottura delle fibre. Mentre per compositi a matrice metallica si verificano rapporti più bassi di rigidzze di fibra e matrice.

Solitamente la resistenza teorica calcolata mediante la (19) è simile a quella trovata sperimentalmente. Le divergenze che si possono trovare tra le due sono principalmente dovute a:

- 1) non perfetto allineamento delle fibre;
- 2) non uniforme resistenza delle fibre;
- 3) variabili condizioni di interfaccia;
- 4) tensioni residue.

1) non perfetto allineamento delle fibre

Il non perfetto allineamento delle fibre con il carico fa sì che la resistenza risulti più bassa del valore teorico stimato.

2) non uniforme resistenza delle fibre

La non uniforme resistenza delle fibre è correlata alla non uniformità della sezione resistente ed ai trattamenti subiti e questa provoca delle rotture le quali partendo dalle sezioni più deboli causano un indebolimento e una rottura quindi progressiva. Sperimentalmente si è notato che la resistenza delle fibre diminuisce con la lunghezza, questo è dovuto al fatto che le fibre si rompono in

corrispondenza del punto più debole, la loro possibile presenza aumenta all'aumentare della lunghezza della fibra. Le rotture locali delle fibre in delle sezioni sono facilitate da fenomeni di concentrazione delle tensioni che creano discontinuità.

3) variabili condizioni di interfaccia

Una buona adesione garantisce la corretta trasmissione del carico dalla matrice alla fibra, il controllo del propagarsi delle microcricche non consentendo la loro propagazione lungo la lunghezza della fibra, un aumento della resistenza trasversale e delle prestazioni ambientali, a fronte però di una riduzione della tenacità alla frattura.

4) tensioni residue

La valutazione delle tensioni residue è importante perché in esercizio esse si sommano alle tensioni indotte dai carichi applicati e vanno ad influenzare la resistenza della lamina, e queste tensioni derivano dalla differenza dei coefficienti di dilatazione termica di fibra e matrice e dipendono anche dalla temperatura di utilizzazione della lamina.

2.4 Caratteristiche meccaniche in direzione trasversale

2.4.1 Modulo di elasticità in direzione trasversale

Per analizzare il modulo di elasticità e la resistenza a trazione trasversali si fa riferimento ad un elemento costituito da una fibra e dalle parti di matrice adiacenti come si può vedere dal seguente schema:

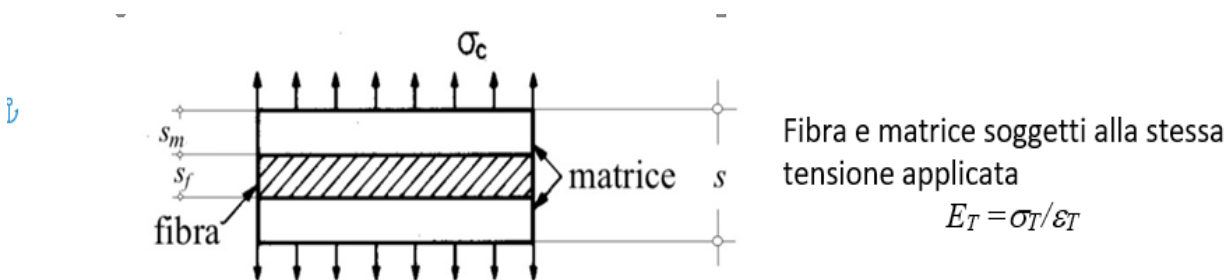


Fig.23 – Elemento di volume rappresentativo della lamina unidirezionale

Regole delle miscele per $1/E_T$ (Materiali in "serie")

$$\epsilon_T = \frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta s_m + \Delta s_f + \Delta s_m}{s} = \frac{\epsilon_{T,m} 2s_m + \epsilon_{T,f} s_f}{s} = \frac{\sigma_T}{E_m} V_m + \frac{\sigma_T}{E_f} V_f \implies \frac{1}{E_T} = \frac{\epsilon_T}{\sigma_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \implies$$

$$\implies E_T = \frac{E_f}{V_f + (E_f/E_m)V_m} \quad (25)$$

Come si vede dalla (25) la relazione che lega il modulo delle fibre e della matrice non è lineare, pur sempre variando tra quello della fibra e matrice come per il modulo longitudinale, ma nel caso del modulo trasversale concentrazioni di fibre abbastanza elevate non comportano grandi incrementi del modulo.

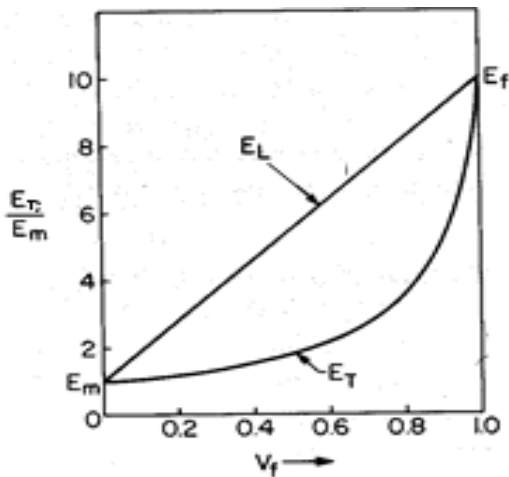


Fig.24 – Andamento (teorico) del modulo longitudinale e trasversale di lamina unidirezionale con $E_f/E_m=10$

L' ipotesi che fibra e matrice siano soggetti alla stessa tensione è approssimata perché fibra e matrice non sono perfettamente paralleli e quindi la distribuzione del carico avviene tra le due.

Per una stima più accurata del modulo di elasticità trasversale si fa riferimento a modelli teorici più complessi o con metodi numerici (FEM).

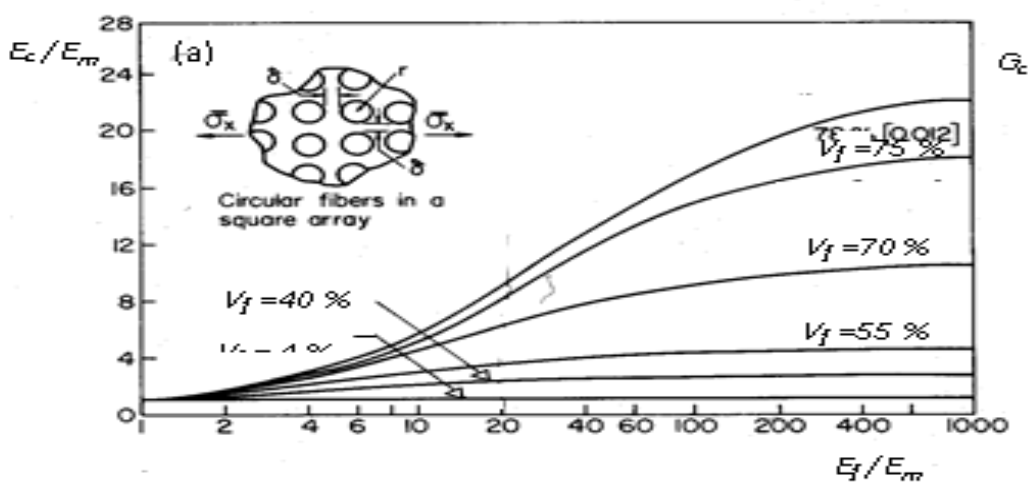


Fig.25 – Andamento del rapporto E_c/E_m per lamina unidirezionale al variare del rapporto E_f/E_m per diverse concentrazioni di fibre

Per la valutazione del modulo trasversale una relazione che garantisce una buona approssimazione è la relazione di Halpin-Tsai in cui vengono utilizzate formule semi-empiriche:

$$\frac{E_T}{E_m} = (1 + \zeta \eta V_f) / (1 - \eta V_f) \quad \eta = ((E_f/E_m) - 1) / ((E_f/E_m) + \zeta) \quad (26)$$

ζ = parametro empirico ottenuto mediante fitting di risultati teorici (misura del rinforzo legato alla geometria della sezione trasversale delle fibre).

Si ha $\zeta=2$ per fibre a sezione quadrate o circolari e $\zeta=2a/b$ per fibre a sezione rettangolare (axb) con a nella direzione del carico.

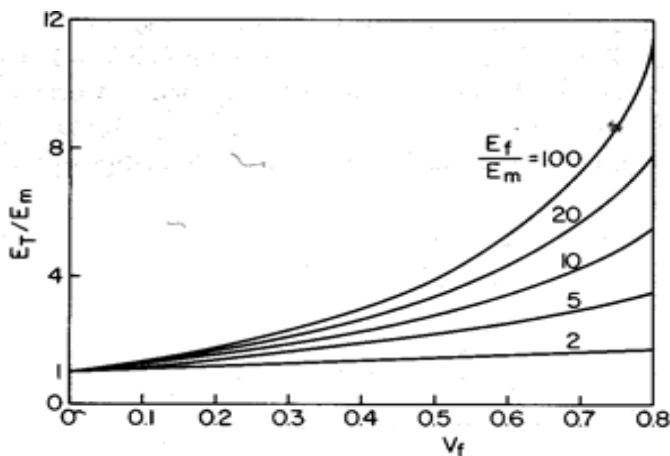


Fig.26 – Rappresentazione grafica dell’equazione di Halpin – Tsai

2.4.2 Resistenza a trazione trasversale

Prendendo in considerazione il modello semplificato dei materiali in serie, la resistenza a trazione trasversale della lamina unidirezionale coincide con la resistenza a trazione della matrice, materiale meno resistente. A causa della presenza di tensioni localizzate all’ interfaccia fibra-matrice e la presenza dei vuoti la rottura avviene a tensioni più basse rispetto a quelle che porterebbero a rottura la matrice, motivo per cui viene introdotto S coefficiente riduttivo il quale corrisponde al coefficiente k di concentrazione delle tensioni.

$$\sigma_{T,R} \approx \sigma_{m,R} \quad \sigma_{T,R} = \frac{\sigma_{m,R}}{S} \quad (27-28)$$

$$S = k = \frac{1 - V_f \left[1 - \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right]}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \left[1 - \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right]} \quad (29)$$

L'andamento di S può essere ottenuto con il metodo degli elementi finiti (FEM) e questo varia con la concentrazione delle fibre e dal rapporto dei moduli di fibra e matrice. Esistono diverse formulazioni empiriche che danno una stima più accurata della precedente. Queste tengono conto della percentuale di vuoti mediante il coefficiente C_v e del rapporto tra i moduli di fibra e matrice che vanno ad influenzare la resistenza trasversale.

Formula di Nielsen

$$\sigma_{T,R} = C_v (1 - V_f^{1/3}) \frac{E_T}{E_m} \sigma_{m,R} \quad C_v = 1 - \sqrt{\frac{4V_v}{\pi(1-V_f)}} \quad (30-30')$$

Formula di Chamis

$$\sigma_{T,R} = C_v \left[1 + (V_f - \sqrt{V_f}) \left(1 - \frac{E_m}{E_f} \right) \right] \sigma_{m,R} \quad (31)$$

Tutti questi valori risultano inferiori ai valori di resistenza della matrice.

2.5 Modulo di elasticità tangenziale G_{12}

Il modulo di elasticità tangenziale è dato dal rapporto tra la tensione tangenziale τ_{12} applicata nel piano della lamina e lo scorrimento corrispondente al piano γ_{12} . Per analizzare il modulo di elasticità tangenziale si ipotizza che la tensione tangenziale e lo scorrimento siano uniformemente distribuiti in modo perfettamente identico tra fibra e matrice.

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} \quad (32)$$

Per ricavare il modulo è necessario definire lo spostamento totale del modello deformativo che viene preso in considerazione per questo studio per poter ricavare lo scorrimento totale. Con Δ indichiamo lo spostamento e con w lo spessore.

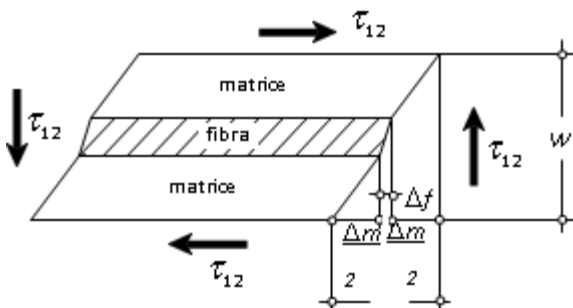


Fig.27 – Modello deformativo per trovare G_{12}

$$\Delta = \Delta_f + \Delta_m = \gamma_f W_f + \gamma_m W_m = \gamma W \Rightarrow \gamma = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m \quad (33)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\left(\frac{\tau}{G_f}\right)V_f + \left(\frac{\tau}{G_m}\right)V_m}{\tau} = \frac{1}{G_f} V_f + \frac{1}{G_m} V_m \quad (34)$$

Come si può vedere $1/G_{12}$ segue la regola delle miscele.

$$\text{Dividendo per } V_f = (1 + V_m/V_f)^{-1} \text{ si ha: } \left(1 + \frac{V_m}{V_f}\right) \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_m} \frac{V_m}{V_f} + \frac{1}{G_f} \quad (35)$$

I valori teorici che si possono ottenere dalla (34) e (35) si differenziano da quelli sperimentali, per il fatto che fibra e matrice non sono in serie ma la loro distribuzione è in parte in serie e in parallelo. Per ovviare a ciò si è introdotto un coefficiente di ripartizione η_s , influenzato solo da fattori geometrici, che tiene conto della forma delle fibre, dimensione delle fibre, volume percentuale di fibre ma non dall' anisotropia di esse.

$$\text{Sostituendo } V^* = \eta_s V_m/V_f \text{ alla (35) si arriva a: } (1 + V^*) \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_f} + \frac{1}{G_m} V^* \quad (36)$$

Grazie all' introduzione del coefficiente di ripartizione, si risale al modulo di elasticità tangenziale delle fibre.

2.6 Coefficiente di Poisson

Il coefficiente di Poisson è una proprietà che varia con la direzione presa in considerazione, e per poterlo valutare è necessario prima stimare il coefficiente di Poisson longitudinale ν_{12} e quello trasversale ν_{21} . Per valutare questo coefficiente vengono indicate delle relazioni che fanno riferimento al modello deformativo di fig.28.

2.6.1 Coefficiente di Poisson longitudinale ν_{12}

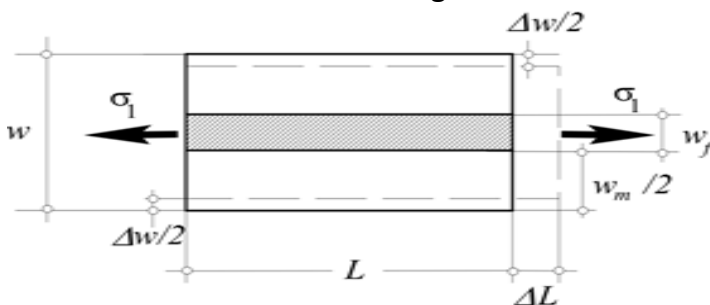


Fig.28 – Modello deformativo per valutare ν_{12}

La tensione longitudinale causa una deformazione trasversale:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta w_f + \Delta w_m}{w} = \frac{\Delta w_f + \Delta w_m}{w} = \frac{-v_f \varepsilon_1 w_f - v_m \varepsilon_1 w_m}{w} \quad (37)$$

Il coefficiente di Poisson è dato dall' opposto del rapporto tra deformazione trasversale e longitudinale:

$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = v_f V_f + v_m V_m \quad (38)$$

Il coefficiente di Poisson longitudinale v_{12} segue la regola delle miscele perché questo coefficiente si ottiene dalla combinazione lineare di quelli di fibra e matrice e questa formulazione è valida per fibre isotrope. Tale coefficiente assume un valore tra 0.25 e 0.3.

2.6.2 Coefficiente di Poisson trasversale v_{21}

Il valore del coefficiente di Poisson in direzione trasversale è maggiore rispetto a quello longitudinale, ad una deformazione longitudinale corrisponde una deformazione trasversale elevata, mentre ad una deformazione trasversale corrisponde una relativa deformazione longitudinale. Il coefficiente di Poisson trasversale dipende dal rapporto dei moduli di Young e dal coefficiente di Poisson longitudinale v_{12} .

Lamina ortotropa

$$\frac{v_{12}}{v_{21}} = \frac{E_1}{E_2} \quad \Rightarrow \quad v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (39)$$

2.7 Coefficienti di dilatazione termica

Generalmente il coefficiente di dilatazione termica longitudinale è minore di quello in direzione trasversale perché le fibre impediscono la dilatazione termica della matrice in direzione longitudinale dovuto al fatto che esse presentano un coefficiente di dilatazione termica minore rispetto a quello della matrice.

2.7.1 Coefficiente di dilatazione termica longitudinale α_L

Si parte dalla considerazione che ad un incremento di temperatura corrisponde una deformazione longitudinale la quale è identica a quella di fibra e matrice.

$$\varepsilon_L = \varepsilon_f^M + \alpha_f \Delta T \quad \varepsilon_m = \varepsilon_m^M + \alpha_m \Delta T \quad (40-41)$$

$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \quad (42)$$

Nella (42) si vede che il coefficiente di dilatazione termica longitudinale si ottiene dalla regola delle miscele, dalla media pesata dei coefficienti di dilatazione di fibra e matrice e di rigidezza.

2.7.2 Coefficiente di dilatazione termica trasversale α_T

Il coefficiente di dilatazione termica trasversale come precedentemente detto presenta generalmente un valore più elevato di quello longitudinale ed è legato alla percentuale di fibre e matrice in modo non lineare:

$$\alpha_T = \frac{\varepsilon_T}{\Delta T} = (1 + \nu_f) \alpha_f V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m - \alpha_L \nu_{12} \quad (43)$$

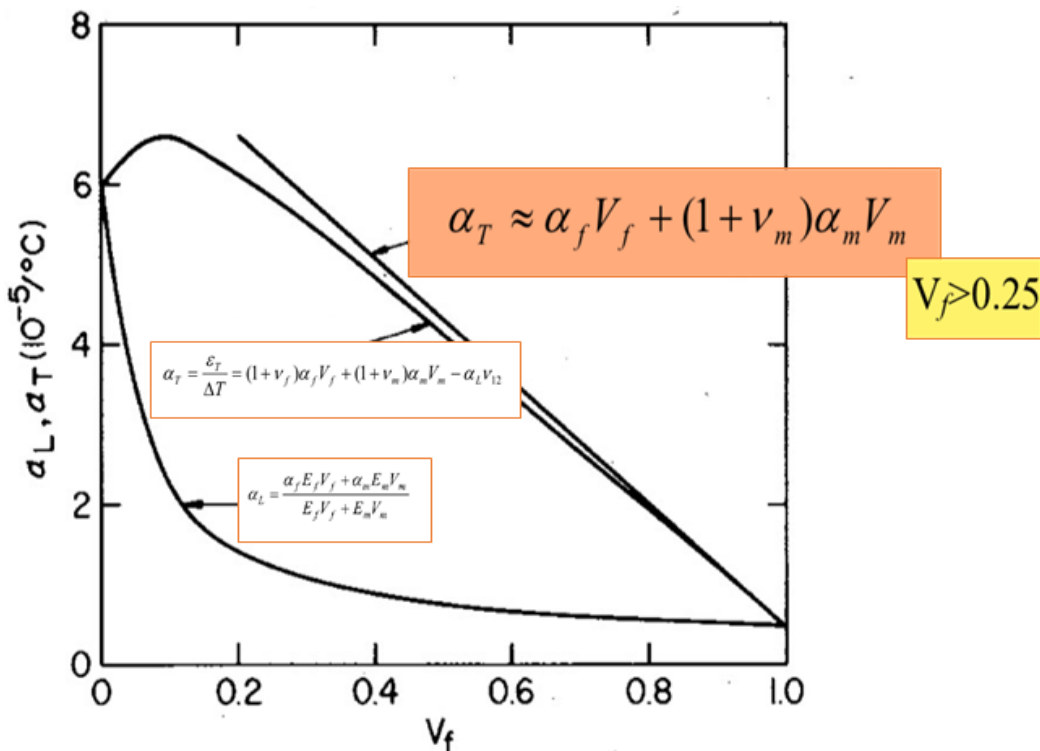


Fig.29 – dipendenza dei coefficienti di dilatazione termica da V_f

2.8 Compositi a fibre corte

Un corretto progetto dei composti laminati unidirezionali prevede il direzionamento delle fibre dove è presente la massima tensione sfruttando in modo ottimale il materiale. Nel caso di uno stato tensionale isotropo vengono preferiti i compositi rinforzati con fibre corte con orientamento casuale rispetto alle fibre lunghe per la loro economicità e per il fatto che usando laminati quasi isotropi con fibre lunghe a causa della bassa resistenza in direzione trasversale si possono verificare fenomeni di rottura locale.

2.8.1 Trasferimento delle tensioni

Nei compositi a fibre corte la lunghezza influenza la trasmissione del carico tra fibra e matrice, la resistenza meccanica. La trasmissione del carico avviene attraverso tensioni tangenziali concentrate all'estremità delle fibre in corrispondenza degli spigoli dell'interfaccia. Questo trasferimento crea uno sforzo di trazione all'interno delle fibre. Per comprendere il meccanismo di trasferimento facciamo riferimento ad un tratto di infinitesimo di fibra a sezione retta circolare di lunghezza dz soggetto a tensioni tangenziali sulla superficie laterale e soggetta ad una tensione normale parallela alla fibra.

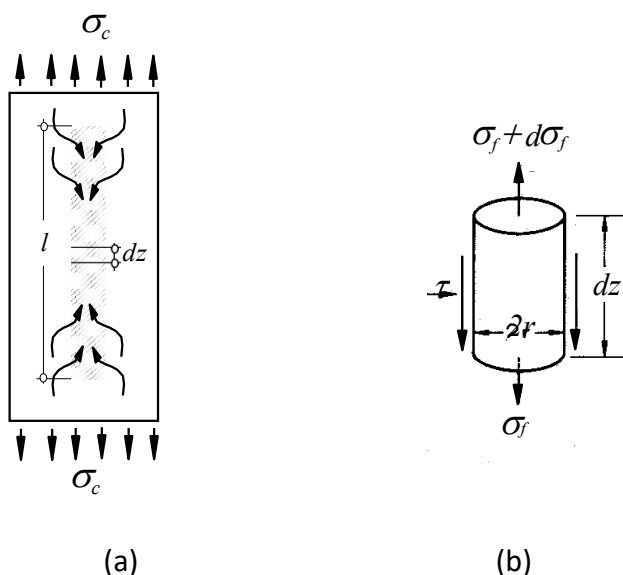


Fig.30 – meccanismo di trasferimento del carico (a) e tratto infinitesimo di fibra corta a sezione circolare(b)

Facendo l'equilibrio lungo l'asse della fibra si ottiene:

$$\pi r^2 \sigma_f + 2\pi r \tau dz = \pi r^2 (\sigma_f + d\sigma_f) \quad (44)$$

Da semplici passaggi e mediante un'integrazione si riesce a valutare l'andamento delle tensioni normali che dipende dalla tensione iniziale e dalle tensioni tangenziali. La tensione iniziale può essere trascurata per i fenomeni di parziale o totale distacco all'interfaccia fibra-matrice in corrispondenza delle estremità dovuti alla loro differente rigidità.

$$\sigma_f = \sigma_{f,0} + \frac{2}{r} \int_0^z \tau dz \quad (45)$$

Ipotizzando un modello rigido-perfettamente plastico grazie al quale si riesce meglio a rappresentare il comportamento delle matrici duttili, si può dire che a scorrimenti corrisponde una tensione tangenziale costante chiamata tensione di snervamento τ_s . Conseguentemente si osserva che la tensione normale assume il valore massimo in mezziera.

$$\sigma_{f,max} = \sigma_f \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{\tau_s l}{r} \quad (46)$$

Si può notare che il massimo carico sopportato dalla fibra (47) è direttamente proporzionale alla tensione di snervamento e alla lunghezza della fibra, motivo per cui le fibre lunghe presentano una maggiore resistenza, e non dipende dal carico esterno applicato.

$$P_{max} = \sigma_{f,max} \pi r^2 = \tau_s \pi r l \quad (47)$$

C'è una lunghezza caratteristica della fibra, oltre la quale la tensione assume nel tratto centrale un andamento costante e non avviene più il trasferimento di carico perché il carico dopo ciò risulta completamente trasmesso dalla matrice alla fibra. Questa distanza si indica con l_t ed è direttamente proporzionale al carico applicato al composito ed indirettamente alla tensione di snervamento (48).

$$l_t = \sigma_{f,max} \frac{r}{\tau_s} = \left(\frac{\sigma_c}{\tau_s} \right) \left(\frac{E_f}{E_c} \right) r \quad (48)$$

$$\text{Se } l_{fibra} \geq l_t \text{ viene utilizzata } \sigma_{f,max} = \varepsilon_f E_f = \varepsilon_c E_f = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c \quad (49)$$

Se $l_{fibra} = l_t$ la massima tensione si trova con la (46).

La lunghezza critica limite è il valore massimo della lunghezza di trasferimento completo del carico corrispondente al massimo carico sopportato dalla fibra ed è dato dalla seguente relazione:

$$l_c = \left(\frac{\sigma_{f,R}}{\tau_s} \right) r \quad (50)$$

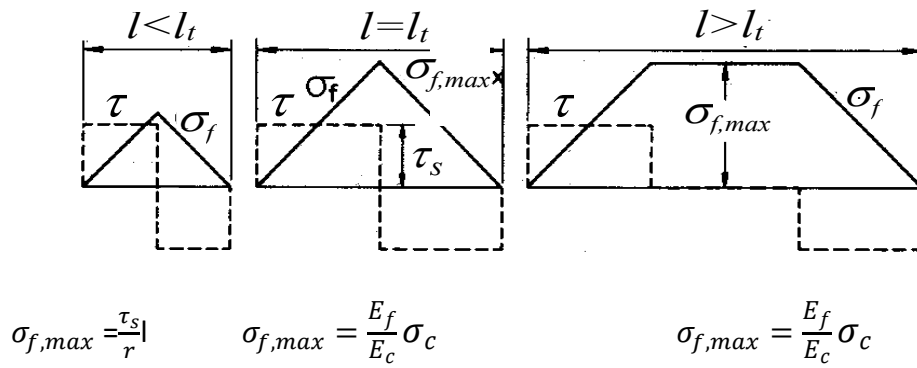


Fig.31 – Andamento delle tensioni normali e tangenziali nella fibra al variare della lunghezza

Per $l < l_t$ un aumento del carico applicato al composito non produce un aumento della tensione massima sulla fibra e quindi l'incremento del carico verrà sostenuto dalla matrice, mentre per $l > l_t$ un aumento del carico applicato produce un aumento della tensione massima sulla fibra. Per lunghezze di fibra minori di l_c la massima tensione si determina con la (46) e questa risulterà sempre minore alla tensione di rottura delle fibre e ciò fa sì che in questi casi la rottura del composito avviene per rottura della matrice. All' interfaccia fibra-matrice è presente una tensione radiale di trazione che facilita il debonding, mentre nel resto della fibra la tensione risulta di compressione, e tutto ciò fa sì che se ci fossero fenomeni di scollamento queste tensioni radiali di compressione (forze di attrito) consentono ancora il trasferimento di carico tra fibra e matrice. L'andamento delle tensioni tangenziali di interfaccia del comportamento elasto-plastico è molto simile a quello rigido-perfettamente plastico come possiamo vedere dal grafico, con la linea tratteggiata è stato indicato l'andamento rigido-perfettamente plastico:

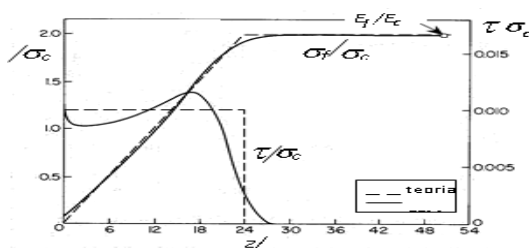


Fig.32 – Tensioni nella fibra per matrice elasto-plastica

Si è visto che le fibre corte che normalmente vengono impiegate (1-8 cm) nei compositi tendono a comportarsi come fibre lunghe se la loro lunghezza è superiore di 5-50 volte la lunghezza critica che risulta pressoché pari a 1 mm.

2.8.2 Moduli di Elasticità

Per la determinazione dei moduli di elasticità viene utilizzata l'equazione di Halpin-Tsai, la quale per il modulo di elasticità longitudinale considera $\zeta=2(l/d)$, mentre per quello trasversale viene preso $\zeta=2$.

$$\frac{E_L}{E_m} = \frac{1+2\left(\frac{l}{d}\right)^3 V_F}{1-V_F} \quad \eta_L = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)+2\left(\frac{l}{d}\right)} \quad (51-52)$$

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1+2^3 V_F}{1-V_F} \quad \eta_T = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)+2} \quad (53-54)$$

Dalla (53) si può vedere che il modulo trasversale delle fibre corte coincide con quello delle fibre lunghe e non dipende del rapporto caratteristico (l/d). Un composito a fibre discontinue si comporta come uno a fibre lunghe per $l/d \approx 1000$, che per $d \approx 10 \mu\text{m}$ corrisponde in pratica a circa 1 cm.

Nei compositi a fibre corte con orientamento puramente casuale (materiale isotropo) si può trovare relazione che con buona approssimazione lega il modulo di elasticità con i moduli di elasticità longitudinale e trasversale di un materiale composito equivalente con la stessa percentuale di fibre ma parallele.

$$E_{\text{random}} = 3/8 E_L + 5/8 E_T \quad (55)$$

2.8.3 Resistenza a trazione

Una tensione di trazione applicata al composito si trasferisce dalla matrice alle fibre attraverso tensioni tangenziali all' interfaccia fibra-matrice. Il completo trasferimento del carico avviene quando la lunghezza delle fibre supera il valore critico e questo fa sì che alla rottura del materiale segue quella delle fibre [11]. La tensione applicata si può ottenere mediante la regola delle miscele considerando per le fibre la tensione media:

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_f V_f + \sigma_m V_m \quad (56)$$

Nel caso di matrice perfettamente plastica si usano le seguenti relazioni:

$$\sigma_c = \frac{\tau_s l}{d} V_f + \sigma_m V_m \quad (l < l_t) \quad \sigma_c = \frac{\tau_s l_t}{r} \left(1 - \frac{l_t}{2l}\right) V_f + \sigma_m V_m \quad (l > l_t) \quad \sigma_c = \frac{\tau_s l_t}{r} V_f + \sigma_m V_m \quad (l >> l_t) \quad (57-59)$$

Per $l < l_c$ la resistenza del composito è retta dalla resistenza del legame all' interfaccia fibra-matrice. In questo caso la rottura del composito visto che per $l < l_c$ la tensione di rottura delle fibre non viene raggiunta, coincide con la rottura della matrice.

$$\sigma_{c,R} = \frac{\tau_{sl}}{d} V_f + \sigma_{m,R} V_m \quad (l < l_c) \quad (60)$$

Se $l > l_c$ la lunghezza critica viene superata e quindi la rottura del composito avviene in corrispondenza della rottura delle fibre. Valutiamo $\sigma_{c,R}$ con la seguente relazione, indicando con $\tilde{\sigma}_m$ la tensione sulla matrice relativa alla deformazione della fibra.

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) V_f + \tilde{\sigma}_m V_m \quad (l > l_c) \quad (61)$$

Per lunghezze molto maggiori di quella critica il composito si comporta come uno a fibre lunghe.

$$\sigma_{c,R} = \sigma_{f,R} V_f + \tilde{\sigma}_m V_m \quad (l \gg l_c) \quad (62)$$

Per la determinazione della lunghezza critica si ricorre al pull-out test:

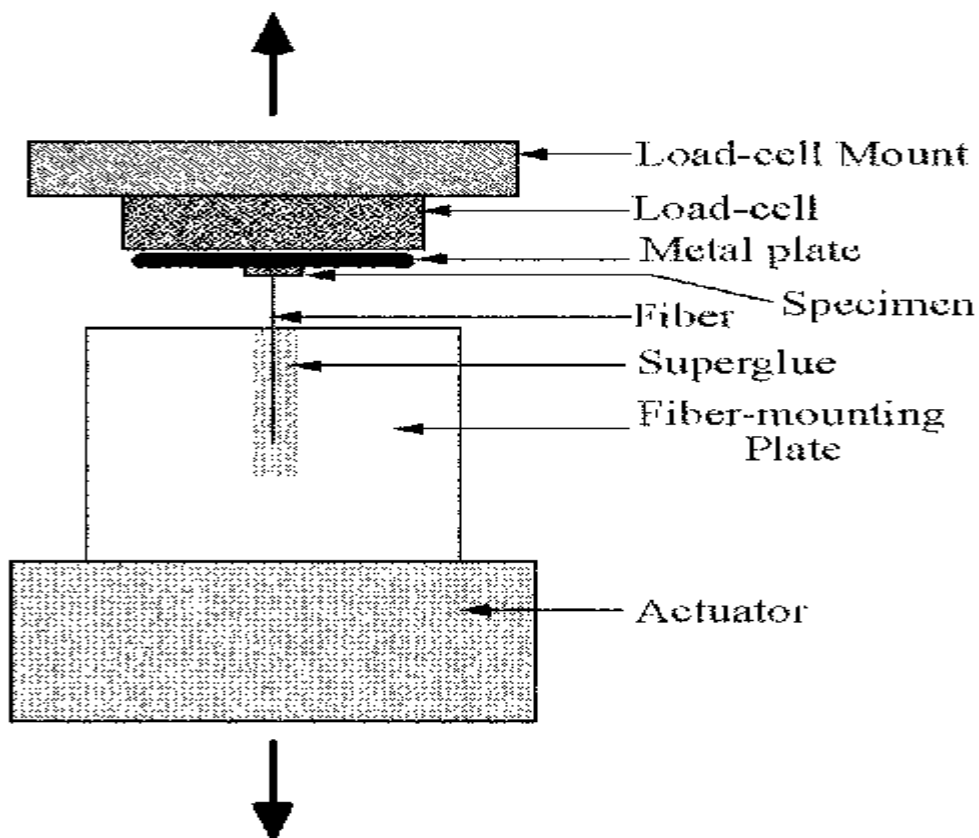


Fig.33 – prova di pull-out

La prova consiste nell' immergere la fibra in un blocco di matrice per una lunghezza e sottoporla ad uno sforzo di trazione misurando contemporaneamente lo spostamento. Se la lunghezza immersa

nella matrice è maggiore a $l_c/2$ la fibra si frattura fuori dalla matrice, mentre se essa è minore di $l_c/2$ avviene una perdita di adesione (debonding). Il carico aumenta sempre di più fino a quando all'interfaccia non si verifica perdita di adesione, per poi diminuire drasticamente. Ad un certo punto si può notare una condizione di equilibrio tra la forza di trazione applicata e le forze di attrito che ancora sono presenti perché solamente una parte della fibra ha perso adesione. La lunghezza critica viene presa quindi come il doppio della lunghezza minima della fibra per la quale la rottura precede l'estrazione.

2.8.4 Resistenza a fatica

I compositi a fibre corte sono meno resistenti di quelli a fibre lunghe e la rottura a fatica di questi compositi può avvenire per diversi motivi:

- 1) Presenza di tensioni locali all'estremità delle fibre;
- 2) Fenomeni di scollamento fibra-matrice;
- 3) Danneggiamento termico a causa della bassa conducibilità della matrice.

Il propagarsi delle cricche dopo la loro formazione dipende essenzialmente dalle caratteristiche della matrice: se la matrice è fragile si assiste alla formazione di cricche all'interfaccia e la velocità di propagazione di esse aumenta all'aumentare della fragilità della matrice, mentre se la matrice è duttile la rottura avviene principalmente per i fenomeni di (debonding).

2.8.5 Meccanismi di tenacizzazione per compositi

La tenacità è la capacità di un materiale di resistere alla frattura assorbendo e dissipando energia. Solitamente si è osservato che durante le prove al crescere del carico avviene prima una diminuzione della rigidità per poi seguire la rottura. L'apice della cricca è seguito da un cospicuo danneggiamento del materiale, questa si ferma momentaneamente quando incontra la fibra.

Quando la cricca avanza può portare alla rottura del legame d'interfaccia fibra-matrice causando così fenomeni di perdita di adesione. In seguito al debonding ed alla formazione della superficie di separazione la matrice si richiude sulla fibra e si generano forze di attrito che contrastano lo scorrimento relativo che causa l'apertura della cricca. Mediante la seguente relazione si è cercato di mettere in relazione la tenacità facendo riferimento all'intensità degli sforzi:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (63)$$

Con a viene indicata la dimensione della cricca, con σ il valore dello sforzo e con K il fattore critico.

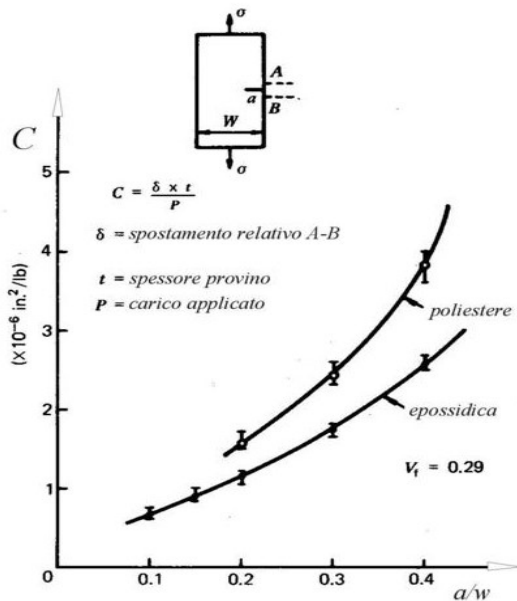


Fig.34 – Curve cedevolezza-lunghezza cricca per compositi a fibre corte

Nella zona interessata dal debonding la cricca avanzerà e questo causa scorrimento tra fibra e matrice, che potrebbe portare alla frattura definitiva nel momento in cui si verifica lo sfilamento della fibra dalla matrice. Tutti questi momenti comportano una dissipazione di energia. Per compositi con fibre corte la tenacità dipende fortemente dalla matrice, perché le fibre principalmente riescono a declinare il percorso della cricca. Nel caso di matrici polimeriche che non sono caratterizzate da elevati valori di tenacità la presenza del rinforzo, fase discontinua, contribuisce ad ottenere un materiale complessivo più tenace. La resistenza alla frattura si è visto che aumenta all'aumentare della percentuale delle fibre, della resistenza di esse e diminuisce col crescere della temperatura e della velocità di deformazione.

2.9 Analisi della lamina

La lamina di un materiale composito consiste in un singolo strato del laminato che viene ottenuto dalla sovrapposizione di più lamine diversamente orientate. Per riuscire a ricavare le equazioni costitutive del laminato è necessario partire dalla legge costitutiva della singola lamina. La lamina è un elemento eterogeneo perché le sue caratteristiche variano da punto a punto ma dal punto di

vista macroscopico può essere considerata un elemento omogeneo. Macroscopicamente mostra un comportamento ortotropo, ovvero caratterizzato da tre piani di simmetria mutuamente ortogonali (piano medio della lamina e i due piani a questo ortogonali paralleli alle due direzioni principali). Per le caratteristiche della lamina vengono fatte delle ipotesi semplificative:

- 1) ogni componente del composito presenta un comportamento elastico e lo mantiene anche inserito nel composito;
- 2) perfetta aderenza tra fibra e matrice;
- 3) distribuzione regolare delle fibre nella matrice.

Differenze tra materiali isotropi, anisotropi e ortotropi:

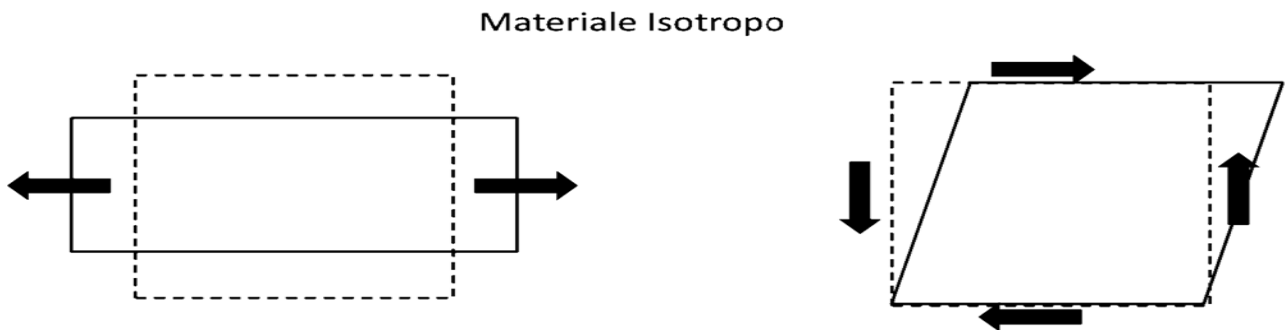


Fig.35 – Materiale isotropo sottoposto a trazione e a taglio puro

Un materiale isotropo sottoposto ad uno sforzo di trazione monoassiale subisce un allungamento nella direzione del carico e per l'effetto Poisson subisce una contrazione nella direzione perpendicolare, mentre il taglio puro provoca distorsioni, ma le lunghezze rimangono invariate.

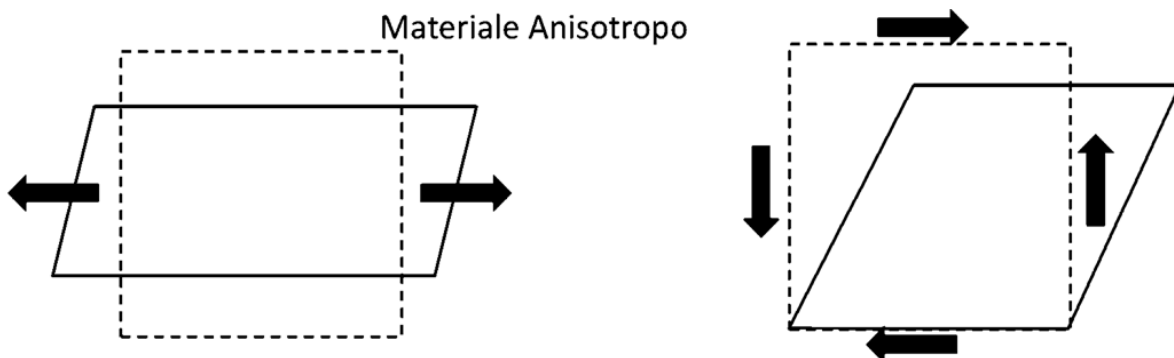


Fig.36 – Materiale anisotropo sottoposto a trazione e a taglio puro

Il materiale anisotropo sottoposto a trazione subisce una variazione degli angoli tra i lati, mentre se sottoposto a taglio puro anche delle lunghezze.

Materiale Ortotropo

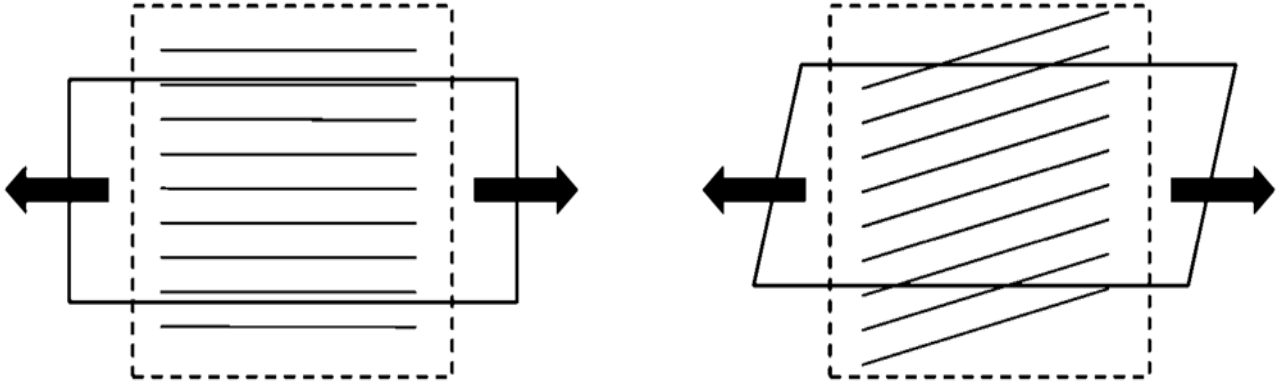


Fig.37 – Materiale ortotropo sottoposto a trazione e a taglio puro

I compositi ortotropi se sollecitati lungo gli assi di simmetria hanno le stesse caratteristiche dei materiali isotropi, mentre nelle altre direzioni assume un comportamento tipico di un materiale anisotropo.

2.9.1 Teoria della elasticità

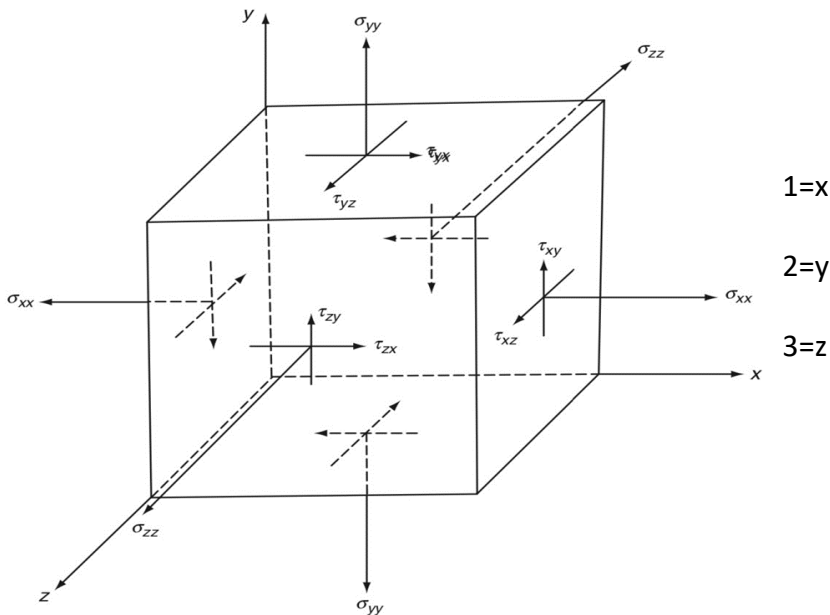


Fig.38 – Stato di tensione nell'intorno di un punto

Lo stato tensionale e deformativo nell'intorno di un punto sono costituiti da 9 componenti σ_{ij} ($i,j=1,2,3$) e ε_{kl} ($k,l=1,2,3$). In realtà questi tensori sono simmetrici quindi possono essere espressi da sei componenti. Il tensore delle tensioni è costituito da 3 tensioni normali e 3 tensioni tangenziali, mentre per quanto riguarda il tensore di deformazione infinitesima, esso è composto da 3 dilatazioni o deformazioni normali e 3 scorrimenti angolari.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{kl} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

La legge di Hooke o equazione costitutiva lega tensione e deformazione nel caso di materiali linearmente elastici [12]. La matrice $[E]$ è chiamata tensore di elasticità o matrice di rigidità.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & - \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & - & - & - \\ E_{1311} & E_{1322} & - & - & - & - \\ E_{2311} & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \sum_{k,l} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (64)$$

Le costanti elastiche E_{ijkl} pertanto di un materiale anisotropo sono 36. Un materiale si dice conservativo se esiste una funzione U , detta potenziale elastico tale che: $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ (65)

Se considero un materiale elastico lineare la conservatività comporta una riduzione delle costanti elastiche $\Rightarrow E_{ijkl} = E_{klij} \Rightarrow [E]$ è simmetrico.

Materiale anisotropo

Si ottiene che il tensore di elasticità $[E]$ è simmetrico rispetto alla diagonale principale (quindi si parla di grande simmetria), quindi per un materiale anisotropo il suo comportamento elastico lineare è definito da 21 costanti elastiche lineari indipendenti.

Materiale ortotropo

I materiali ortotropi contengono tre piani di simmetria (piano 1-2, piano 1-3, piano 2-3), e all'applicazione di una tensione σ_{ij} non si hanno distorsioni ε_{ij} ($i \neq j$). Quindi sottoponendo il materiale ad una tensione σ_{11}, σ_{22} o σ_{33} sono nulli anche $E_{11kl}=0, E_{22kl}=0$ e $E_{33kl}=0$ per $k \neq l$.

Per la simmetria rispetto ai piani principali quando il materiale ortotropo è sottoposto a sforzi di taglio $\sigma_{ij}(i \neq j)$ non avvengono scorrimenti negli altri piani ($ij \neq kl$) $\varepsilon_{kl}(k \neq l)$. Tra tensioni tangenziali agenti su un piano e distorsioni agenti sugli altri piani non c'è nessuna relazione.

Tutto ciò implica che $E_{ijkl}=0$ per ($i \neq j, k \neq l, ij \neq kl$), quindi il comportamento elastico lineare di un materiale ortotropo è definito da 9 costanti elastiche, le quali coincidono con quelle ingegneristiche: $E_L, E_T, E_{T'}, G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}, \nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Materiale trasversalmente isotropo

Un materiale trasversalmente isotropo è un materiale ortotropo che presenta un piano di isotropia e il suo comportamento è caratterizzato da 5 costanti elastiche indipendenti, visto che il comportamento nelle direzioni trasversali T e T' è uguale, $E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}, \nu_{TT'}$ [13].

La relazione che lega tensioni e deformazioni per un materiale trasversalmente isotropo è:

$$E_{1122}=E_{1133}, E_{2222}=E_{3333}, E_{1212}=E_{1313}, E_{2323}=(E_{2222}-E_{2233})/2 \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2233} & E_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (E_{2222} - E_{2233})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Materiale isotropo

Il comportamento dei materiali isotropi è indipendente dalla direzione di azione del carico ed è definito solamente da due costanti elastiche indipendenti (E, ν). Per i materiali isotropi, preso un punto, qualsiasi piano passante per esso è un piano principale. Le tensioni normali sono associate soltanto alle dilatazioni lineari, mentre le tensioni tangenziali sono associate soltanto agli scorrimenti angolari (variazioni di forma), $E_{11}=E_{22}, E_{12}=(E_{11}-E_{12})/2$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & (E_{11} - E_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Per materiali isotropi si ha $E_L = E_T = E$, $\nu_{LT} = \nu_{TL} = \nu$, $G_{LT} = G = E/2(1 + \nu)$, e da queste relazioni si ricava la seguente equazione costitutiva valida per un generico riferimento cartesiano ortogonale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Stato piano di tensione

Per applicazione di carichi paralleli al piano medio della lamina si ha ($\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33} = 0$), il comportamento del materiale è descritto da quattro costanti ingegneristiche: $E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Invertendo il tensore di elasticità si può ottenere il legame tra deformazioni e tensioni tramite il tensore di cedevolezza [S] della lamina ortotropa. I termini della matrice di cedevolezza sono legati

in questo modo: $S_{11} = \frac{E_{22}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}$ $S_{22} = \frac{E_{11}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}$ $S_{12} = -\frac{E_{12}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}$ $S_{33} = \frac{1}{E_{33}}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Legame tra costanti elastiche ed ingegneristiche

Sotto ponendo una lamina ortotropa a tensioni lungo i piani principali, una tensione monoassiale in direzione longitudinale, una in direzione trasversale e ad un taglio puro.

- 1) Tensione monoassiale in direzione longitudinale $\Rightarrow \varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E_L}, \varepsilon_T = -\nu_{LT}\varepsilon_L, \gamma_{LT} = 0$
- 2) Tensione monoassiale in direzione trasversale $\Rightarrow \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E_T}, \varepsilon_L = -\nu_{LT}\varepsilon_T, \gamma_{LT} = 0$
- 3) Taglio puro nel piano della lamina $\Rightarrow \varepsilon_L = 0, \varepsilon_T = 0, \gamma_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}}$

Per valutare l'effetto complessivo sulla lamina è necessario applicare il principio di sovrapposizione

degli effetti ed attraverso le seguenti relazioni: $S_{11} = \frac{1}{E_L}, S_{22} = \frac{1}{E_T}, S_{12} = \frac{-\nu_{LT}}{E_L}, S_{33} = \frac{1}{G_{LT}}$

si può risalire all'equazione costitutiva in termini di costanti elastiche ingegneristiche.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (73)$$

In termini di costanti elastiche ingegneristiche l'equazione costitutiva (71) si scrive:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(E_L+E_T)/2}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Lamina ortotropa bilanciata

Lamina ortotropa bilanciata è una lamina bidirezionale con fibre disposte in due direzioni ortogonali (woven fabrics) e la sua matrice di rigidezza è possibile ricavarla attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti valutando la fibra disposta a 0° e l'altra a 90°.

La relazione tra tensione-deformazione della lamina con rinforzo bidirezionale è:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{(E_T+E_L)/2}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (75)$$

2.9.2 Effetto dell'orientazione

In questo paragrafo si è cercato di valutare le relazioni tra tensioni e deformazioni per un piano di riferimento ruotato di un angolo ϑ in senso antiorario rispetto a quello principale, tutto ciò è utile nel caso dei laminati angle-ply, caratterizzati da lamine variamente orientate.

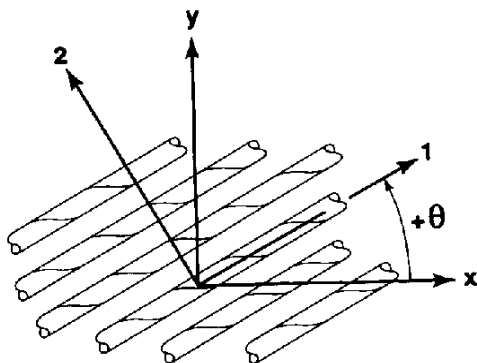


Fig.39 – Piano di riferimento arbitrario ruotato rispetto a x-y

Per trovare lo stato di sollecitazione e deformazione nella direzione definita dal sistema di

riferimento è necessario ricorrere alla matrice di rotazione [T].

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Attraverso delle relazioni tensioni-deformazioni è possibile trovare il legame tensioni-deformazioni del nuovo piano di riferimento cartesiano attraverso la nuova matrice di elasticità $[\tilde{E}]$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T][\bar{E}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [T][\bar{E}][T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

La differenza tra la matrice di elasticità del piano di riferimento (x-y) [E] e $[\bar{E}]$ sta nel fatto che in $[\bar{E}]$ è presente il termine $2G_{xy}$ anziché G_{xy} . $[\bar{T}]^{-1}$ si ottiene dalla divisione per 2 della terza colonna della matrice $[T]^{-1}$. Di seguito verrà indicata la relazione che permette di determinare il tensore elastico $[\tilde{E}]$ del piano (1-2):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [\tilde{E}] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= E_{11}\cos^4\theta + E_{22}\sin^4\theta + 2(E_{12} + 2E_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \tilde{E}_{12} &= (E_{11} + E_{22} - 4E_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta + E_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \tilde{E}_{22} &= E_{11}\sin^4\theta + E_{22}\cos^4\theta + 2(E_{12} + 2E_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \tilde{E}_{13} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33})\sin\theta\cos^3\theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33})\sin^3\theta\cos\theta \\ \tilde{E}_{23} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33})\sin^3\theta\cos\theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33})\cos^3\theta\sin\theta \\ \tilde{E}_{33} &= (E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 2E_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta + E_{33}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned} \quad (81-86)$$

Allo stesso modo può essere ottenuto il tensore di cedevolezza ruotato $[\tilde{S}]$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [\tilde{S}] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{11} &= S_{11}\cos^4\theta + S_{22}\sin^4\theta + (2S_{12} + S_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \tilde{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{22}=S_{11}\sin^4\theta + S_{22}\cos^4\theta + (2S_{12} + S_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta \quad (88-93)$$

$$\tilde{S}_{13}=(2S_{11} - 2S_{12} - S_{33}) \sin\theta\cos^3\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \sin^3\theta \cos\theta$$

$$\tilde{S}_{23}=(2S_{11} - 2S_{12} - S_{33})\sin^3\theta \cos\theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{33})\cos^3\theta \sin\theta$$

$$\tilde{S}_{33}=2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{33})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{33}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

Come si può osservare le matrici $[\tilde{E}]$ e $[\tilde{S}]$ non presentano nessun termine pari a 0, tranne nel caso in cui gli assi 1 e 2 coincidano con x e y. Mediante queste relazioni è possibile ricavare le tensioni in ogni direzione e una volta conosciute queste è possibile risalire alle deformazioni del materiale.

2.9.3 Coefficienti di Lekhnitskii e Chentsov

Altre costanti importanti sono chiamate coefficienti di mutua influenza o di Lekhnitskii [14].

$$\eta_{i,ij}=\frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}} \quad (94)$$

Valida per $\tau_{ij} = \tau$ e tutti gli altri sforzi nulli.

Questo coefficiente caratterizza la deformazione in direzione "i", generata da tensioni tangenziali $\tau_{ij} = \tau$ nel piano ij.

$$\eta_{i,i}=\frac{\gamma_{ij}}{\sigma_i/E_L} \quad (95)$$

Valida per $\sigma_i = \sigma$ e tutti gli altri sforzi nulli.

Questo secondo coefficiente caratterizza lo scorrimento che avviene nel piano "ij" corrispondente ad una tensione normale σ in direzione "i".

Altri coefficienti utilizzati sono quelli di Chentsov, i quali sono legati ai termini della matrice di cedevolezza S_{45}, S_{46}, S_{56} tramite le seguenti relazioni:

$$\mu_{23,31} = \frac{S_{45}}{G_{31}} = \frac{S_{45}}{S_{55}} \quad \mu_{23,12} = \frac{S_{46}}{G_{12}} = \frac{S_{46}}{S_{66}} \quad \mu_{31,12} = \frac{S_{56}}{G_{12}} = \frac{S_{56}}{S_{66}} \quad (96-98)$$

I coefficienti di Chentsov sono definiti così:

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \quad (99)$$

valida per $\tau_{ij} = \tau$ e tutti gli altri sforzi nulli.

Dalla (99) si osserva si osserva il coefficiente di Chentsov che caratterizza lo scorrimento nel piano "kl" dovuto alle tensioni tangenziali presenti nel piano "ij".

Successivamente si sono trovate le relazioni reciproche che legano i coefficienti di Chentsov:

$$\frac{\mu_{ij,kl}}{G_{ij}} = \frac{\mu_{kl,ij}}{G_{kl}} \quad (100)$$

Dove $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $j \neq i$, $k \neq l$.

Tali coefficienti sono simili ai coefficienti di Poisson solamente che a differenza dei coefficienti di Poisson essi trattano gli effetti delle tensioni tangenziali e non di quelle normali.

2.9.4 Legame tra costanti elastiche e matrice di cedevolezza valutato tramite semplici stati di tensione

Stato monoassiale σ_x ($\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$):

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{1}{\tilde{S}_{11}}$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\tilde{S}_{12}\sigma_x}{\tilde{S}_{11}\sigma_x} = -\frac{\tilde{S}_{12}}{\tilde{S}_{11}} \quad (101-103)$$

$$m_x = -\frac{\gamma_{xy}}{\sigma_x} E_L = \tilde{S}_{13} E_L$$

Stato monoassiale σ_y ($\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$):

$$m_y = -\frac{\gamma_{xy}}{\sigma_y} E_L = \tilde{S}_{23} E_L \quad (104)$$

Stato di taglio puro τ_{xy} ($\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$):

$$m_x = -\frac{\varepsilon_x}{\tau_{xy}} E_L = -\tilde{S}_{13} E_L$$

$$m_y = -\frac{\varepsilon_y}{\tau_{xy}} E_L = -\tilde{S}_{23} E_L \quad (105-107)$$

$$G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{1}{\tilde{S}_{33}}$$

Quindi conoscendo i termini della matrice di cedevolezza è possibile risalire alle costanti elastiche. In presenza di disallineamenti tra la direzione di carico e direzione delle fibre il modulo di Young decade rapidamente. La lamina presenta la massima rigidità a taglio per valori di $\theta = \pm 45^\circ$ e minima nelle direzioni principali dove si annullano anche i coefficienti di accoppiamento m_x e m_y i

quali assumono i loro massimi valori per circa $\theta = 35^\circ$ e $\theta = 55^\circ$.

Il coefficiente di Poisson $\nu_{xy} \leq \sqrt{\frac{E_x}{E_T}}$ della lamina ortotropa può assumere valori >0.5 , anche maggiori di 1 per $E_x \gg E_T$.

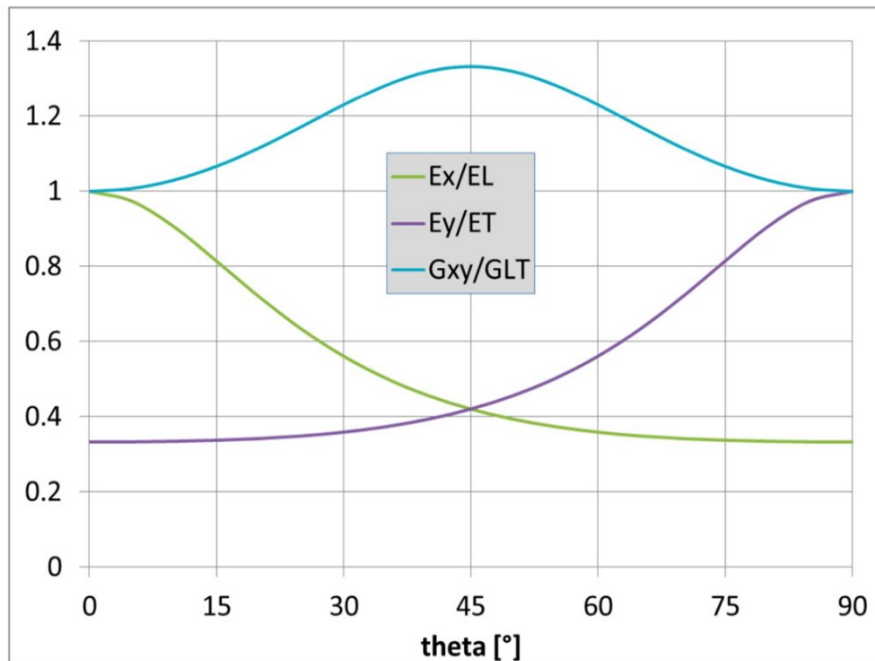
È possibile trovare un legame tra modulo di Young e l'orientazione e lo stesso vale per il modulo di elasticità tangenziale.

$$\frac{1}{E(\theta)} = \frac{\cos^4\theta}{E_x} + \frac{\sin^4\theta}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta \quad (108)$$

$$\frac{1}{G(\theta)} = 4 \left(\frac{1+2\nu_{xy}}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{2G_{xy}} \right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{1}{G_{xy}} (\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (109)$$

Lamina ortotropa glass-epoxy

$E_L = 42 \text{ GPa}$
 $E_T = 14 \text{ GPa}$
 $G_{LT} = 7 \text{ GPa}$
 $\nu_{LT} = 0.25$



(a)

Lamina ortotropa graphite-epoxy

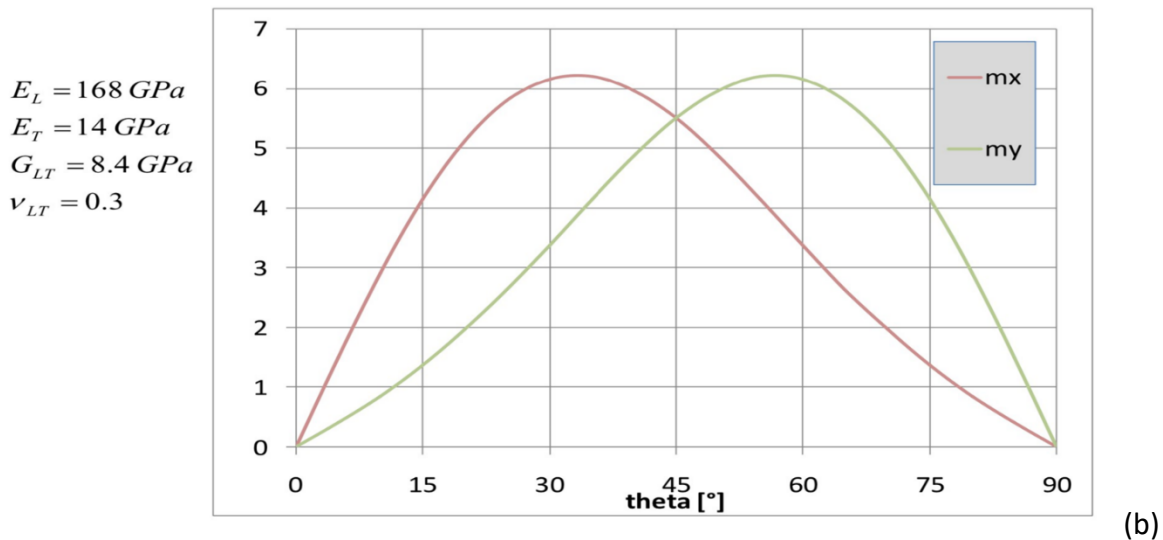


Fig.40 – Andamento delle costanti elastiche al variare dell'orientazione(a), andamento dei coefficienti di accoppiamento al variare dell'angolo θ

2.9.5 Invarianti proprietà di una lamina ortotropa

Attraverso delle formule trigonometriche Tsai e Pagano si sono accorti che per quanto riguarda la matrice di rigidezza e cedevolezza i loro termini potevano essere espressi mediante l'uso delle invarianti, ovvero quattro costanti le quali rimangono tali indipendentemente dalla rotazione del riferimento.

$$\tilde{E}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$\tilde{E}_{12} = U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

$$\tilde{E}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \tag{110-115}$$

$$\tilde{E}_{13} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

$$\tilde{E}_{23} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta$$

$$\tilde{E}_{33} = \frac{1}{2} U_1 - \frac{1}{2} U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

Invarianti:

$$U_1 = \frac{1}{8} (3E_{11} + 3E_{22} + 2E_{12} + 4E_{33})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (E_{11} - E_{22}) \tag{116-119}$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 4E_{33})$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(E_{11} + E_{22} + 6E_{12} - 4E_{33})$$

Lo stesso ragionamento può essere fatto per i termini della matrice di cedevolezza.

$$V_1 = \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{33})$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \tag{120-123}$$

$$V_3 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{33})$$

$$V_4 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{33})$$

Per un maggiore approfondimento degli argomenti trattati nella micromeccanica si consultino le seguenti fonti [1, 2, 11, 13,15].

3 Macromeccanica

3.1 Generalità

Il laminato si ottiene dall'incollaggio di due o più lamine le quali messe insieme formano un unico integro elemento strutturale.

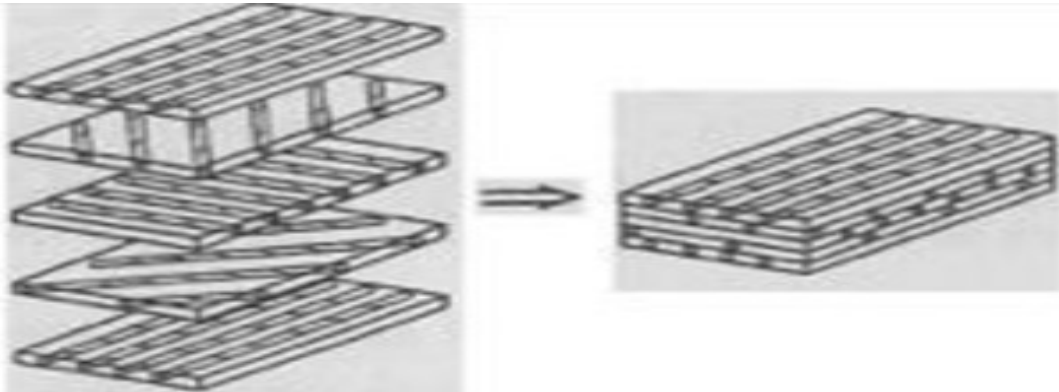


Fig.41 – Esempio di un laminato

Per ovviare al fatto che le lamine unidirezionali in direzione trasversale non risultano sufficienti a sopportare rilevanti carichi, sono realizzati i laminati i quali vengono costituiti dall'unione di lamine unidirezionali orientate in base alle esigenze del progetto. Per trovare la legge costitutiva del laminato si parte dalla conoscenza della legge costitutiva della lamina.

Le varie tipologie di laminati che tratteremo sono:

- 1) Laminati unidirezionali: tutte le fibre presentano la stessa orientazione per ogni lamina del laminato;
- 2) Laminati angle-ply: questa tipologia dei laminati presenta un'orientazione diversa da 0 e 90° e le fibre hanno la stessa orientazione in strati alternati ed è $\theta/-\theta/\theta/-\theta$;
- 3) Laminati cross-ply: l'orientazione delle fibre nei vari strati è $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$;
- 4) Laminati simmetrici: l'orientazione delle fibre delle lamine è simmetrica rispetto al piano centrale del laminato $\theta(z) = \theta(-z)$ indicando con z la distanza dal piano medio;
- 5) Laminati antisimmetrici: l'orientazione delle fibre delle lamine è antisimmetrica rispetto al piano centrale del laminato $\theta(z) = -\theta(-z)$ indicando con z la distanza dal piano medio.

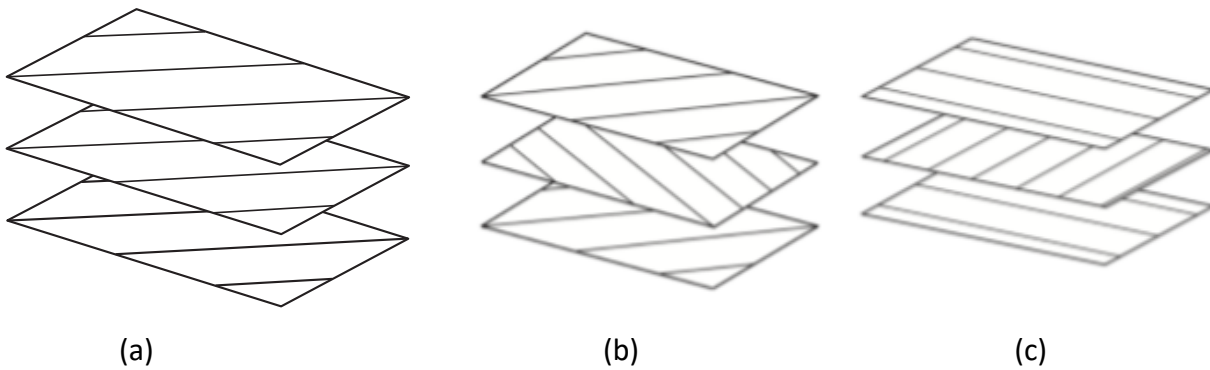


Fig.42 – laminato unidirezionale(a), laminati angle-ply(b), laminati cross-ply(c)

3.2 Codifica dei laminati

Nella codifica d'orientamento dei laminati la sequenza delle lamine è raggruppata dalle parentesi quadre, l'orientazione viene numerata e deve essere presa da un asse di riferimento e l'orientazione delle varie lamine è separata da uno slash (/). Di seguito sono riportate alcune delle regole impiegate per la codifica dei laminati:

- 1) Per i laminati simmetrici il codice termina con una S e in esso è contenuta solo metà della sequenza per via della simmetria;

$$\begin{array}{l}
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 [90/0/45/45/0/90] \qquad \qquad \qquad [90/0/45]_S
 \end{array}$$

- 2) Nel caso in cui il numero delle lamine è dispari e la lamina centrale si trova metà sopra e metà sotto il piano centrale essa viene sopra-segnata con un -;

$$\begin{array}{l}
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\
 [90/0/45/0/90] \qquad \qquad \qquad [90/0/\overline{45}]_S
 \end{array}$$

- 3) In presenza di due lamine adiacenti che hanno lo stesso orientamento ma con segni opposti, esse vengono raggruppate e viene indicato l'orientamento con un \pm ;

$$\begin{array}{l}
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\
 [90/0/+45/-45] \qquad \qquad \qquad [90/0/\pm 45]
 \end{array}$$

- 4) Se due lamine adiacenti hanno lo stesso orientamento ad esempio di 90° , esse vengono raggruppate e indicate con il pedice che indica il numero di lamine adiacenti con la stessa orientazione $/90_2/$;

- 5) Ci potrebbero essere sets di lamine che si ripetono in un laminato, questi vengono segnati con un pedice che indica il numero delle volte che i sets si ripetono.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

[90/0/+45/90/0/45/90/0/45]

[90/0/45]₃

6) Quando le lamine hanno fibre di materiale diverso, vengono indicate con un pedice che riporta i rispettivi materiali.

[0_B/45_C/-45_C/90_{GR}/90_{GR}/-45_C/45_C/0_B]

[0_B/±45_C/90_{GR}]

B indica Boro, Gr grafite, C carbonio.

3.3 Teoria classica della laminazione

Le costanti elastiche dei laminati dipendono dalle costanti elastiche delle singole lamine e dalla loro orientazione. Per affrontare lo studio della macromeccanica dei laminati è necessario fare delle ipotesi le quali sono considerate valide per i laminati comuni:

- 1) Spessore costante e piccolo (lastra sottile);
- 2) Tutte le lamine sono macroscopicamente omogenee ed hanno un comportamento elastico lineare;
- 3) Perfetta adesione tra le lamine costituenti il laminato (continuità di spostamenti e deformazioni all'interfaccia tra due lamine adiacenti);
- 4) Deformazione a taglio degli stati è trascurabile.

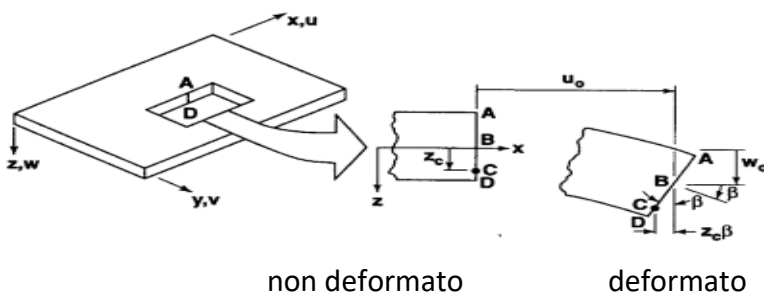


Fig.43 – deformazione nel piano x-z

Considerando un segmento rettilineo ortogonale al piano medio e prendendo un punto appartenente al piano medio distante z da esso si vanno a valutare le componenti dello spostamento u_0 lungo l'asse x , v_0 lungo l'asse y e w_0 lungo l'asse z :

Per le ipotesi precedentemente fatte $\varepsilon = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

$$u(z) = u_0 - \alpha z \quad \text{per} \quad \alpha = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad u(z) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (124)$$

$$v(z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (125)$$

Per piccoli spostamenti utilizzando le equazioni di congruenza le deformazioni nel piano x-y possono

essere scritte:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z k_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z k_y \quad (126-128)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \quad (129)$$

Con k_x si indica la curvatura flessionale del piano medio del laminato x-z, con k_y la curvatura flessionale del piano y-z e con k_{xy} la curvatura torsionale del piano x-y, mentre $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ sono le deformazioni del piano medio.

Come si può vedere dalle (126-128) le deformazioni variano linearmente lungo lo spessore del laminato, mentre per le tensioni la relazione è così espressa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (130)$$

Le tensioni variano linearmente all'interno di ogni singola lamina perché il tensore di elasticità ruotato $[\tilde{E}]_k$ varia da lamina e lamina, dipende dall'orientazione ed è costante nella lamina.

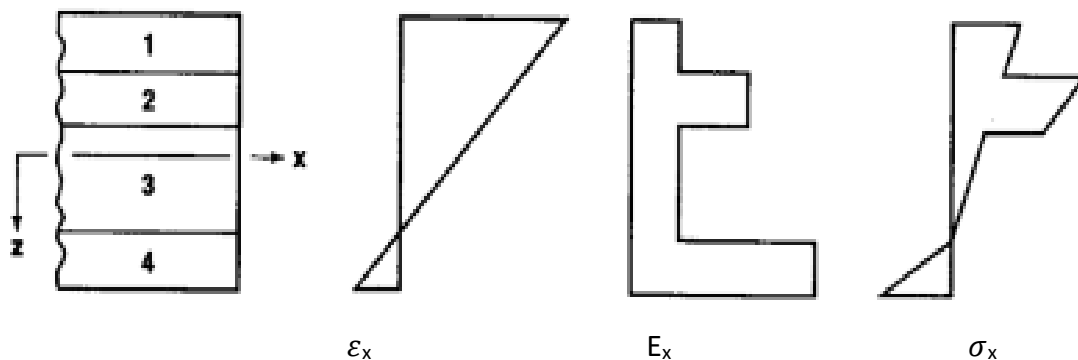


Fig.44 – Andamento delle tensioni e deformazioni all'interno di un laminato

3.3.1 Forze e momenti nel laminato

Per risalire all' equazione costitutiva del laminato è opportuno legare le sollecitazioni per unità di larghezza del laminato con le componenti delle deformazioni del piano medio.

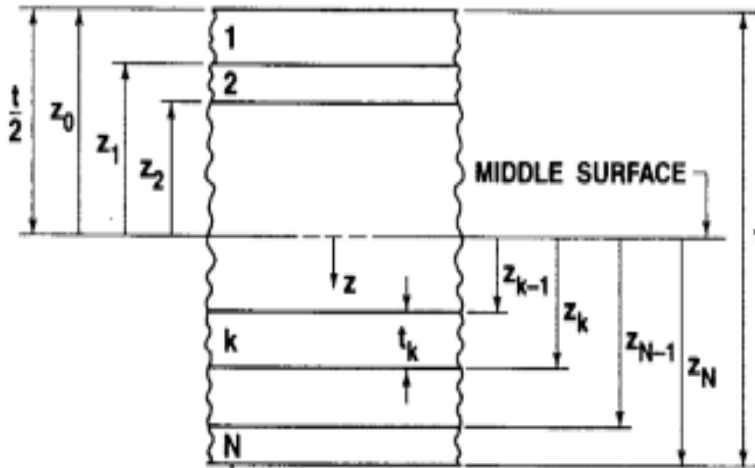


Fig.45 – Geometria del laminato con n lamine

Sforzo normale:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad (131)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \quad (132)$$

Taglio nel piano x-y:

$$T_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (133)$$

Momento flettente:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (134)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (135)$$

Momento torcente:

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (136)$$

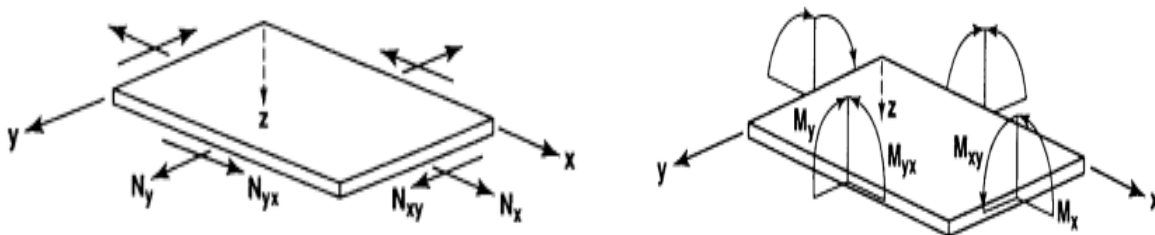


Fig.46 – Distribuzione delle tensioni applicate nel piano medio del laminato

Sostituendo le espressioni (130-135) nella (129) si ha:

viene considerata ogni lamina spezzando l'integrale

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \Rightarrow \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} dz =$$

Essendo i termini k e ε^0 costanti rispetto a z possono essere portati fuori dall'integrale.

$$= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k - z_{k-1}) \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k - z_{k-1}) = [A]$ Matrice di rigidità estensionale

$\sum_{k=1}^n \frac{[\tilde{E}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} = [B]$ Matrice di accoppiamento

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (137)$$

Questa è la classica forma matriciale delle forze che le lega alle deformazioni del piano medio e alle curvature.

Lo stesso ragionamento può essere fatto per trovare la forma matriciale dei momenti.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\tilde{E}]_k z \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z^2 [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} dz =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) / 3 \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$\left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) / 2 \right] = [B]$ Matrice di accoppiamento

$\left[\sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) / 3 \right] = [D]$ Matrice di rigidità flessionale

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (138)$$

Mettendo insieme la (136) e la (137) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}^0 \\ \tilde{k} \end{bmatrix} \quad (139)$$

La (139) è la legge costitutiva del laminato. Nell'espressione della matrice di rigidezza estensionale [A] entra in gioco lo spessore della lamina e lega carichi normali a deformazioni normali e scorrimenti. La matrice di rigidezza flessionale [D] lega i momenti alle curvature. La matrice di accoppiamento [B] accoppia effetto estensionale con l'effetto flessionale, precisamente i termini B_{11} , B_{12} , B_{22} accoppiano l'applicazione di tensione normali a curvature e momenti flettenti, i termini B_{13} e B_{23} legano l'applicazione di tensioni normali a torsione (curvature torsionali e momenti torcenti) e B_{33} accoppia l'applicazione di forze di taglio a torsione (curvature torsionali e momenti torcenti). Questa matrice viene ad esserci a causa della non simmetrica sovrapposizione delle lamine rispetto al piano medio. L'accoppiamento tra forze normali e tensioni di taglio, tra momenti flettenti e curvature torsionali è presente solo nei laminati e non in strutture monolitiche.

La corretta progettazione del laminato consente di eliminare questi accoppiamenti.

3.3.2 Tensioni e deformazioni

Per la conoscenza della resistenza del laminato bisogna valutare in ogni punto deformazioni e tensioni locali di ogni singola lamina e per il calcolo di queste si inizia considerando le deformazioni del piano medio invertendo il legame fornito dalla (137):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} - [A]^{-1}[B] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (140)$$

Rielaborando poi l'espressione della (137) rispetto alle curvature:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [D]^{-1} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} - [D]^{-1}[B] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Mettendo insieme la (139) con la (140) si ha:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [D]^{-1} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} - [D]^{-1}[B][A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} + [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (142)$$

Vengono introdotte due nuove matrici [F] e [G] pari a:

$$[F] = [[I] - [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B]]^{-1}[-[D]^{-1}[B][A]^{-1}] \quad (143)$$

$$[G] = [[I] - [D]^{-1}[B][A]^{-1}[B]]^{-1}[D]^{-1} \quad (144)$$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} + [G] \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (145)$$

Sostituendo la (145) nella (140) e ponendo [H] e [L] pari a:

$$[H] = [A]^{-1}[[I] + [B][F]] \quad (146)$$

$$[L] = -[A]^{-1}[B][G] \quad (147)$$

Si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} + [L] \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (148)$$

Mettendo insieme la (148) e la (145) in forma compatta si ha:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} & \bar{L} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} \quad (149)$$

Per la progettazione di un laminato la (149) risulta fondamentale, perché una volta conosciute le sollecitazioni esterne M ed N si ricavano le deformazioni nel piano medio del laminato, dalle quali poi attraverso la (129) si risale alle tensioni delle singole lamine.

3.4 Laminati particolari

3.4.1 Laminati simmetrici

I laminati simmetrici sono laminati che sono costituiti da una serie di lamine uguali sia geometricamente che dal punto di vista delle proprietà rispetto al piano medio. L'analisi di questo tipo di laminati è più semplice perché [B]=0, ovvero non c'è accoppiamento tra comportamento estensionale e flessionale. Per una lamina distante da h_1 dal piano medio con orientazione ϑ si avrà una lamina ugualmente inclinata ad una distanza $-h_1$ dal piano medio.

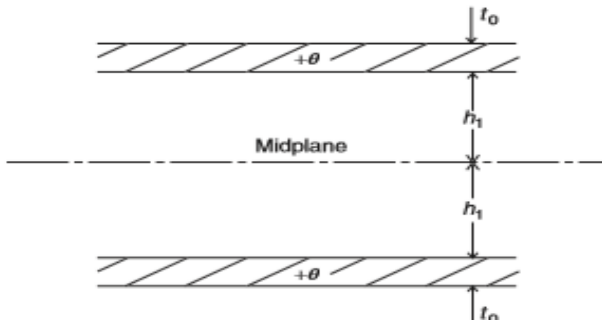


Fig.47 – Laminato simmetrico

Le forze e i momenti per i laminati simmetrici sono espressi così:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (151)$$

3.4.2 Laminati ortotropi

Se per ogni lamina con orientamento $+\theta$ ne corrisponde una identica con orientamento $-\theta$ indipendentemente dalla sequenza di impacchettamento non si ha accoppiamento tra tensioni normali e scorrimenti, si annullano quindi i termini A_{13} e A_{23} della matrice di rigidezza estensionale $[A]$. Questo tipo di laminati viene chiamato laminato bilanciato $[0/+30/-30/+30/-30/0]$. Possono essere realizzati laminati simmetrici bilanciati detti semplicemente ortotropi, perché ammettono tre piani di simmetria mutuamente ortogonali $[0/+30/-30/-30/+30/0]$ o $[0/\pm 30]_s$.

3.4.3 Laminati speciali con D_{13} e $D_{23}=0$

Per laminati antisimmetrici in cui per ogni lamina con orientazione $+\theta$ sopra il piano medio ne corrisponde una identica posizionata alla stessa distanza con orientamento $-\theta$ al di sotto del piano medio si verifica un disaccoppiamento tra sollecitazioni flettenti e curvatura torsionale e viceversa tra momento torcente e curvature flessionali ($D_{13}=0$ e $D_{23}=0$). Per i laminati simmetrici questa condizione non si verificherà mai a meno che l'orientazione sia $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$.

Progettando un laminato con lamine successive con orientamento opposto si riesce ad ottenere valori di D_{13} e D_{23} molto piccoli perché essendo i termini di $[D]$ legati al prodotto tra i termini della

matrice $[\tilde{E}_{ij}]_k$ che in questo caso sono opposti, per la differenza dei cubi delle distanze degli estremi della lamina dal piano medio che assumono valori pressoché uguali.

3.4.4 Laminati incrociati

Nei laminati cross-ply le lamine sono orientate alternativamente a 0 e 90°, c'è un disaccoppiamento tra momento flettente e curvatura torcente, quindi con i termini D_{13} e $D_{23}=0$.

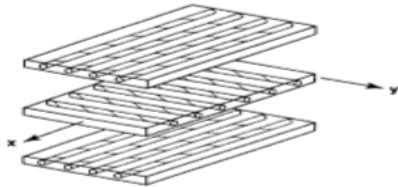


Fig.48 – Laminato incrociato

3.4.5 Laminati ibridi

I laminati ibridi si ottengono dall'unione di lamine costituite da materiali diversi. Spesso i laminati ibridi si ottengono dall'uso di fibre differenti, come nel caso di parti del Boeing 757 sono stati utilizzati laminati con lamine fibra di grafite in matrice epossidica e lamine in fibra di Kevlar-49 in matrice epossidica.

3.4.6 Laminati quasi isotropi

Per laminati quasi isotropi si intendono laminati con una rigidità estensionale isotropa $[A]$ isotropa, qualsiasi direzione venga considerata. Per questo tipo di laminati si ha:

$$A_{11}=A_{22}, A_{33}=(A_{11}-A_{12}) / 2 \text{ e } A_{13}=A_{23}=0$$

Sebbene $[A]$ è uguale indipendentemente dalla direzione, $[B]$ e $[D]$ dipendono dall'orientazione delle direzioni principali del laminato e questo vuol dire che i laminati quasi isotropi presentano un comportamento isotropo quando sottoposti a trazione e compressione e non rispetto a flessione e torsione. Questi laminati sono molto utilizzati soprattutto in aeronautica. La ragione è che essi offrono una buona uniformità in rigidità e resistenza secondo tutte le direzioni, ed anche un buon contrasto alla propagazione delle fessure [16]. Per la progettazione di questo tipo di laminati, per poter ottenere una rigidità estensionale isotropa è necessario che:

- 1) Il numero delle lamine sia maggiore o uguale a 3
- 2) Lamine dello stesso spessore
- 3) Lamine angolarmente equispaziate

3.5 Sforzi interlaminari

Per sforzi interlaminari si intendono le tensioni che nascono all'interfaccia tra lamine adiacenti di un laminato composito, dovuti ad una differente orientazione delle lamine. Queste tensioni nella teoria classica della laminazione non vengono considerate perché in essa si presuppone un incollaggio perfetto dei laminati e perché questa teoria non fornisce risultati accurati in corrispondenza dei bordi liberi. Sforzi interlaminari elevati è una delle cause dei meccanismi di rottura dei laminati, provocando delaminazione.

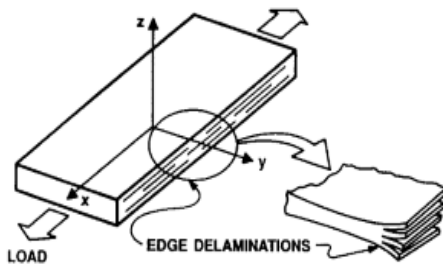


Fig.49 – Delaminazione

Per la valutazione delle tensioni interlaminari si prende come riferimento un laminato bilanciato simmetrico $[\pm 45]_S$ sottoposto ad uno stato monoassiale N_{xx} di trazione, $A_{13}=A_{23}=0$ e $B=0$. Le deformazioni del piano medio sono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} N_{xx} \\ \varepsilon_{yy}^0 &= -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} N_{xx} \\ \gamma_{xy}^0 &= 0 \end{aligned} \tag{152-154}$$

Per la generica lamina k-esima del laminato lo stato di tensione è:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{155}$$

Anche se lo stato di tensione è monoassiale, quindi con $N_{xy}=0$, le lamine del laminato sono soggette a tensioni tangenziali τ_{xy} che assumono un certo valore al centro del laminato per poi diminuire ed annullarsi in corrispondenza dei bordi. La grande variazione di τ_{xy} ai margini del laminato viene equilibrata dalle tensioni tangenziali τ_{xz} .

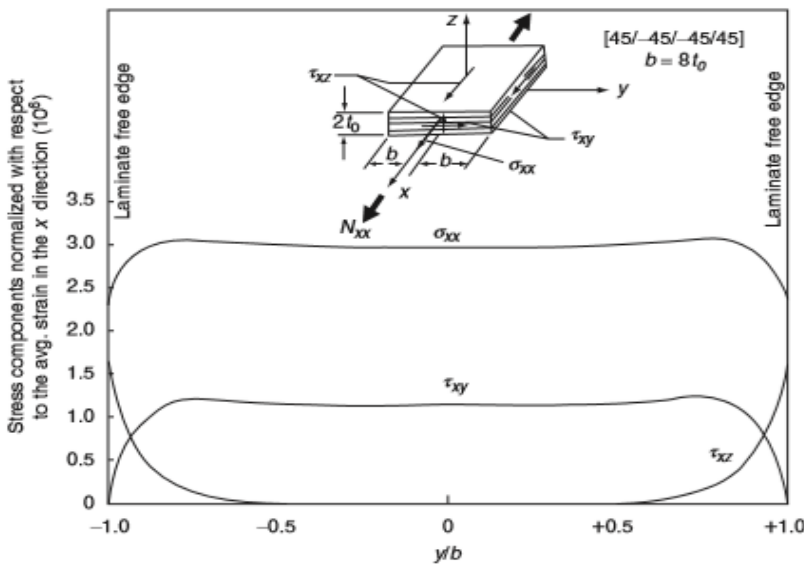


Fig.50 – Andamento delle tensioni interlaminari τ_{xy} e τ_{xz} agli estremi liberi di un laminato $[\pm 45]_S$ sottoposto a N_{xx}

Se le lamine non fossero incollate perfettamente tra di loro e quindi in grado di deformarsi liberamente, un carico assiale lungo x a causa dei diversi coefficienti di Poisson ν_{xy} porterebbe le lamine ad avere deformazioni trasversali ε_y differenti. Nel caso di perfetta adesione la deformazione trasversale deve essere uguale per tutto il laminato, non consentendo quindi le deformazioni libere delle lamine, che causano l'insorgenza di tensioni normali σ_y in ogni lamina e di tensioni interlaminari τ_{yz} all'interfaccia tra le lamine. La nascita di queste tensioni è dovuta ad una mancata corrispondenza tra i coefficienti di Poisson ν_{xy} e i coefficienti di mutua influenza m_x e m_y tra lamine adiacenti. Valori differenti dei coefficienti di influenza comporterebbero scorrimenti angolari γ_{xy} se le lamine non fossero unite tra loro. La congruenza delle distorsioni provoca la presenza degli sforzi interlaminari τ_{xz} .

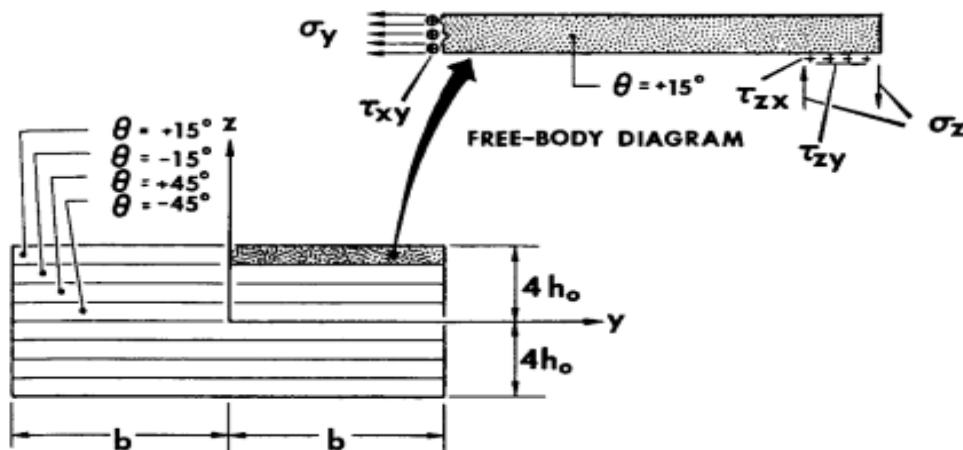


Fig.51 – Tensioni interlaminari τ_{yz} e tensioni interlaminari normali σ_z

Secondo le analisi sperimentali i risultati della teoria classica della laminazione si ristabiliscono ad una lunghezza pari allo spessore del laminato dal bordo. Dalle analisi si è visto che all'interfaccia tra le lamine σ_z , τ_{yz} e τ_{xz} assumono valori elevati e dalle quali si è notato che in particolare τ_{xz} sia soggetta ad elevati gradienti. I valori di τ_{xz} variano anche in funzione dell'orientazione delle fibre in un laminato come si può vedere dalla seguente immagine:

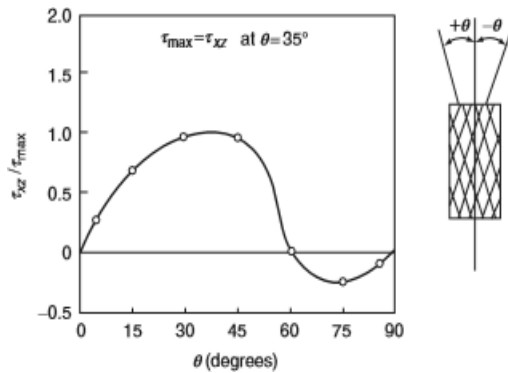


Fig.52 – Variazione degli sforzi interlaminari τ_{xz} in funzione dell'orientazione θ delle fibre in un laminato $[\pm\theta]_S$

Lo studio di queste interazioni tra lamine è importante perché in corrispondenza dei bordi o in presenza di fori e tagli si sviluppano tensioni interlaminari ed in particolare la tensione σ_z che può innescare la delaminazione. Gli sforzi interlaminari sono fortemente dipendenti dalla sequenza di impacchettamento e dal numero delle lamine.

All'aumentare del numero delle lamine dalle valutazioni numeriche si è osservata una diminuzione delle tensioni interlaminari.

La sequenza di impacchettamento è molto importante perché le tensioni interlaminari dipendono da essa perché sono legate ai vincoli fra lamine adiacenti. La migliore sequenza di impilaggio è quella che presenta la minore discontinuità delle costanti elastiche tra lamine adiacenti. Essa influenza anche il segno della tensione σ_z .

Laminate	Max σ_{zz}		Max τ_{xz}	
	Value	Location	Value	Location
[90/45/0/-45] _s	-6.8	Midplane	-6.9	0°/-45°
[0/-45/90/45] _s	6.2	90° layer	-6.6	90°/45°
[45/90/0/-45] _s	6.6	90° layer	5.9	0°/-45°
[45/90/-45/0] _s	6.9	90° layer	-6.5	45°/90°
[45/0/90/-45] _s	7.6	90° layer	-5.8	90°/-45°
[45/0/-45/90] _s	10.4	Midplane	-6.0	0°/-45°
[90/0/-45/45] _s	-8.2	-45°/45°	9.0	-45°/45°
[90/45/-45/0] _s	-7.4	45°/-45°	-9.2	45°/-45°
[0/90/45/-45] _s	-7.6	45° layer	-9.2	45°/-45°
[0/45/-45/90] _s	10.0	Midplane	-8.3	45°/-45°
[45/-45/90/0] _s	9.0	0° layer	-7.7	45°/-45°
[45/-45/0/90] _s	10.9	Midplane	-7.2	45°/-45°

Source: Adapted from Herakovich, C.T., *J. Compos. Mater.*, 15, 336, 1981.

^a The stress magnitudes are in ksi. To transform to MPa, multiply by 6.89. The (/) indicates interface between adjacent layers.

Fig.53 – Influenza della sequenza di impacchettamento sulle tensioni interlaminari nei laminati Quasi-isotropi T300 Caron-Epoxy sollecitati a trazione

Per contrastare la delaminazione esistono dei rinforzi da collocare nei bordi oppure viene modificata la geometria degli estremi liberi. Per rinforzare i bordi vengono impiegati gli edge caps, capaci di resistere sia alle tensioni laminari normali che di taglio, e sono come degli involucri che rafforzano i bordi liberi. Un altro metodo consiste nell'interporre degli adesivi tra le lamine alle estremità che garantisce una buona resistenza alle tensioni laminari di taglio, ma non a quelle normali. Per quanto riguarda la modifica della geometria dei bordi seguentemente verranno mostrate tre possibili varianti, di cui la più favorevole è il tapering.

• **EDGE REINFORCEMENT**

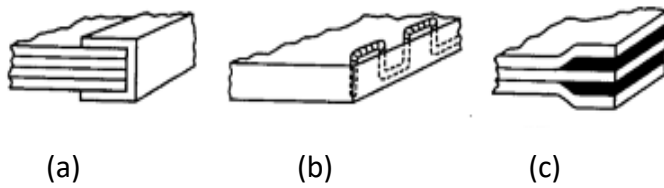


Fig.54 – Edge cap (a), stitching (b), interleaved adhesive layers (c)

• **EDGE MODIFICATION**

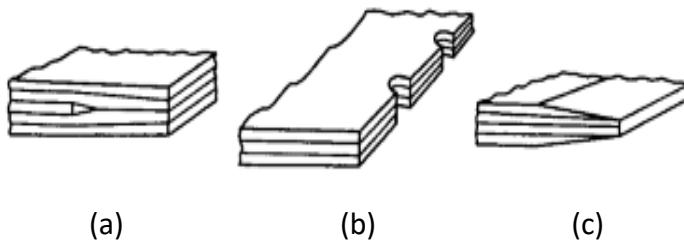


Fig.55 – Ply termination (a), notching (b), tapering (c)

Per approfondire i temi affrontati dalla macromeccanica si consultino le seguenti fonti [1, 2, 13, 15].

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi, strutturato in tre sezioni, lo studio si è focalizzato nella comprensione ed approfondimento della micromeccanica e macromeccanica dei compositi laminati a fibre lunghe.

Sin dall'antichità si può notare l'esistenza dei materiali compositi come nel caso delle ossa dei vertebrati, ma importanti ricerche e studi hanno portato ad una sempre più crescente applicazione dei compositi in vari settori.

Nei laminati compositi a fibre lunghe le caratteristiche meccaniche in direzione longitudinale, direzione del rinforzo, sono maggiori rispetto alle altre direzioni.

Studiando le varie interazioni tra i costituenti della lamina si è visto che le proprietà del composito si ottengono dalla media pesata delle concentrazioni in volume o in peso delle proprietà dei materiali componenti. Si è osservato come il modulo di elasticità longitudinale dipenda linearmente dal modulo della matrice e delle fibre ed è fortemente influenzato dalla concentrazione delle fibre a differenza di quello trasversale che alla presenza di grandi quantità di esse non ha importanti incrementi.

La resistenza a trazione longitudinale è generalmente governata dalle fibre, che possono essere considerate di fatto come un rinforzo quando la percentuale minima delle fibre è maggiore al valore critico, valore corrispondente alla rottura del composito per la rottura della matrice. La resistenza a trazione trasversale invece coincide con dei valori leggermente inferiori alla resistenza a trazione della matrice per la presenza di tensioni localizzate all'interfaccia fibra-matrice.

Per il coefficiente di Poisson longitudinale è stato ottenuto un risultato simile a quello del modulo elastico longitudinale, cioè dipendente linearmente dalle concentrazioni di fibre e matrice. Il coefficiente di Poisson in direzione trasversale è maggiore rispetto a quello longitudinale, infatti ad una deformazione trasversale corrispondono piccole deformazioni in direzione longitudinale per la presenza delle fibre.

Analizzando la lamina ortotropa facendo riferimento alla teoria dell'elasticità, in particolar modo alla legge di Hooke che lega tensioni e deformazioni, sono state determinate le equazioni costitutive nel riferimento principale. Nel caso di uno stato piano di tensione di una lamina ortotropa le equazioni costitutive sono caratterizzate da quattro costanti elastiche.

Per la conoscenza delle tensioni e deformazioni nelle lamine variamente orientate entra in gioco il tensore di rotazione $[T]$ grazie al quale è possibile ottenere la matrice di elasticità ruotata $[\tilde{E}]$ ed il tensore di cedevolezza ruotato $[\tilde{S}]$.

Nella macromeccanica si sale di scala, si passa dalla lamina al laminato delineandone il comportamento. Oltre alla codifica del laminato è stata approfondita la teoria classica della laminazione grazie alla quale si è potuto notare che l'andamento delle deformazioni è lineare all'interno del laminato, mentre quello delle tensioni è lineare all'interno di ogni singola lamina.

Legando le sollecitazioni per unità di larghezza del laminato con le componenti delle deformazioni del piano medio, si riesce a ricavare la legge costitutiva del laminato. L'equazione prevede termini che legano forze normali e tensioni di taglio, momenti flettenti e curvature torsionali, effetti estensionali ed effetti flessionali. Questa relazione è fondamentale per una corretta progettazione di un laminato.

Infine, per concludere ed approfondire tutti gli aspetti legati alla macromeccanica dei laminati compositi a fibre lunghe, sono stati analizzati gli sforzi interlaminari che nascono all'interfaccia tra lamine adiacenti o in presenza di fori. Queste tensioni sono una delle cause principali della delaminazione.

I laminati compositi costituiscono una tecnologia all'avanguardia che garantisce elevate prestazioni meccaniche, difficilmente ottenibili da singoli materiali. Tutto ciò è dimostrato anche dal loro crescente impiego nell'edilizia vista la leggerezza e posa in opera che solitamente non risulta essere invasiva.

Ringraziamenti

Innanzitutto, ringrazio la mia famiglia, che dopo tanti sacrifici e con il continuo supporto mi ha permesso di arrivare fin qui.

Ringrazio il mio relatore Serpilli Michele, per la grande disponibilità e cortesia nell'avermi seguito passo dopo passo nella stesura della tesi.

Ringrazio tutti i miei amici, che con il loro affetto mi hanno sempre sostenuto in tanti momenti ed è anche merito loro il raggiungimento di questo primo traguardo della mia vita.

Ringrazio di cuore tutti coloro che in ogni occasione mi sono stati vicini, vi porterò sempre con me.

Bibliografia/Sitografia

- [1] Gianni Caligiana, Francesco Cesari, I materiali compositi, Pitagora Editrice Bologna, 2002.
- [2] P.K. Mallick, Fiber – Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design, CRC Press, 2007.
- [3] Lee, S, Historical Perspectives of Composites, In International Encyclopedia of Composites, VCH Publishers, 1990.
- [4] J. H. Koo, Polymer nanocomposites: processing, characterization, and applications, McGraw-Hill New York, 2006.
- [5] <https://blugatesailing.com/2020/03/31/i-materiali-compositi-seconda-parte/> (10
- [6] Imast, I materiali compositi, Napoli, 2015-2020.
- [7] <https://www.bikeitalia.it/bici-in-carbonio-fibra-dei-ciclisti/>
- [8] <https://img.edilportale.com/catalogs/MAPEI-Manuale-rinforzo-strutturale-MAPEI-0-catcf23250c.pdf>
- [9] <https://www.vetrosistem.it/vetri.html>
- [10] <https://www.costantinilegno.it/chi-siamo/tecnologie-costruttive-legno-x-lam/>
- [11] Claudio Baldini, Materiali compositi per l'ingegneria, Celid,2013.
- [12] O. Belluzzi, Scienza delle Costruzioni, Ed. Zanichelli,1961.
- [13] Roberts M. Jones, Mechanics of composite materials, Taylor e Francis, 1999.
- [14] S. G. Lekhnitskii, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [15] B. Zucarello, Progettazione meccanica con materiali compositi non convenzionali, 2008.
- [16] http://www2.ing.unipi.it/scuola_dottorato_ingegneria/Corsi2008/2008-Vannucci-Materiali_compositi-Capitolo6.pdf