

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE - ARCHITETTURA

"Analisi vibrazionale di travi danneggiate in C.A. rinforzate con strisce di GFRP"

"Vibrational analysis of damaged R.C. beams strengthened with GFRP strips"

Relatore:
Prof. Ing. Roberto Capozucca

Tesi di laurea di:
Lisa Di Prinzio

Correlatore:
Ing. Maria Vittoria Vecchietti

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

INTRODUZIONE **3**

1. ANALISI DI VIBRAZIONE DELLA TRAVE **5**

1.1 Sistemi discreti soggetti a vibrazione 5
1.1.1. Il modello matematico del problema dinamico *6*
1.1.2 Sistemi continui e discreti *7*
1.2 Sistemi discreti: vibrazioni libere e forzate 8
1.2.1 sistemi ad un grado di libertà – SDOF *8*
1.3 Vibrazioni flessionali delle travi come sistemi continui 37
1.3.1 Moto forzato *37*
1.3.2 Moto libero *40*

2. ANALISI DINAMICA SPERIMENTALE **48**

2.1 Tecniche sperimentali di vibrazione 48
2.2 Cenni sulle tecniche di controllo non distruttivo basato sulle variazioni (CND-BV) 50
2.3 Cenni di teoria alla base del CND-BV 51
2.3.1 Analisi di fourier per vibrazioni periodiche e transitorie *51*
2.3.2 Analisi di fourier per vibrazioni casuali *57*
2.4 Generalità 63
2.5 Tecniche di misura delle frf 64
2.6 Condizioni di vincolo 67
2.6.1 Struttura libera *67*
2.6.2 Struttura vincolata *68*
2.7 Eccitazione della struttura 68
2.7.1 Eccitazione ad impatto *70*
2.7.2 Funzione di risposta in frequenza *73*
2.7.3 Prova ad impatto e funzione di coerenza *75*
2.7.4 Tecniche di finestrature nella prova ad impatto *77*
2.7.5 Punti di installazione *81*
2.8 Analizzatori bicanale fft 82
2.9 Errori di calibrazione 83
2.9.1 Errori di aliasing *84*
2.9.2 Errori di dispersione *84*
2.9.3 Calibrazione e misurazione *85*
2.10 Estrazione dei parametri modali 85
2.10.1 Metodo di picco *86*
2.10.2 Metodo circle-fit *87*
2.11 Fasi principali di una prova dinamica 88
2.12 Software per analisi dinamiche 88

3. DESCRIZIONE E CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPIONI **94**

3.1 Descrizione dei campioni 94
3.2 Valutazione del modulo dinamico e del modulo elastico statico del calcestruzzo 96
3.3 Descrizione delle componenti del rinforzo 98
3.3.1 GFRP *98*
3.3.2 Resina epossidica *99*

4. DESCRIZIONE DEI TEST SPERIMENTALI 101
4.1 Messa in opera 101
4.2 Prova a flessione 102
4.2.1 Strain gauges e estensometri 102
4.2.2 Trasduttori di spostamento 103
4.2.3 Preparazione del test 104
4.2.4 Definizione step di carico: diagramma momento- curvatura teorico della sezione di mezzeria 105
4.2.5 Esecuzione del test 107
4.3 Prova dinamica 108
4.3.1 Procedura di esecuzione della prova 108
4.3.2 Strumentazione 109
4.3.3 Preparazione del test 111
4.3.4 Esecuzione del test 111
4.3.5 Comportamento teorico della trave incernierata 112
4.3.6 Calcolo frequenze teoriche tramite il modello Bernoulli - Eulero 117
5. RISULTATI SPERIMENTALI 120
5.1 Trave B1 e stati di danno 120
5.2 Trave B2 e stati di danno 155
5.3 Trave B3 e stati di danno 189
6. CONCLUSIONI 218
BIBLIOGRAFIA 222
RINGRAZIAMENTI 225

INTRODUZIONE

Questa tesi tratta di modelli di travi in cemento armato danneggiati e rinforzati con strisce di GFRP sotto carico di flessione e vibrazioni libere.

L'acronimo F.R.P. sta per Fiber Reinforced Polymer, materiali fibrorinforzati, si definisce G.F.R.P. il Glass Fiber Reinforced Polymer, cioè fibra di vetro. Sono generalmente composti da fibre lunghe ad elevata resistenza immerse in una matrice polimerica di natura organica. Le fibre hanno il compito di essere gli elementi resistenti del materiale, quindi hanno il compito di esibire resistenze molto elevate quando sono sottoposte a trazione.

La matrice polimerica, invece, nota come resina, ha la funzione di proteggere le fibre dall'usura ed eventuali danneggiamenti esterni, deve assicurare un buon allineamento delle fibre e garantire che ci sia una buona distribuzione degli sforzi fra le fibre in modo che tutte siano sollecitate in modo uniforme.

La risposta dinamica di una struttura viene influenzata dalla presenza di uno stato di danneggiamento all'interno della stessa, sia che il danneggiamento sia di tipo distribuito e sia di tipo concentrato. Questo tipo di danneggiamento si riflette nella risposta dinamica della struttura incidendo sulle frequenze naturali e sui modi di vibrare. I cambiamenti che avvengono sono indice di variazione anche delle proprietà meccaniche e quindi di resistenza della struttura.

A valle di queste considerazioni, risulta fondamentale lo studio di modelli di analisi dinamica partendo da strutture integre fino ad arrivare a strutture danneggiate, in modo da studiare i cambiamenti dinamici e progettare un metodo di studio che possa fornire una valutazione affidabile del tipo di danno e del suo grado di estensione.

Viene utilizzato il metodo di risosta di frequenza unito al modello a elementi finiti, che dipende molto dalle condizioni al contorno, che permette di valutare il grado di danneggiamento interno di un materiale di geometria semplice. Infatti nella presente tesi è stata condotta una sperimentazione su una trave in cemento armato rinforzata con una striscia in GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) con tecnica NSM (Near Surfece Mounted). Quindi si studia prima il comportamento statico e dinamico della trave integra, poi danneggiata, cercando di correlare la variazione di frequenza della trave con quelle trovate tramite l'elaborazione di un modello analitico agli elementi finiti.

Nel primo capitolo si illustra la teoria riguardante l'analisi vibrazionale di una trave; nel secondo le tecniche sperimentali per l'acquisizione di dati dinamici e la spiegazione del software utilizzato, BK CONNECT; nel terzo capitolo sono descritte le caratteristiche meccaniche del materiale e delle strisce in GFRP e i test sperimentali eseguiti sulla trave; nel quarto capitolo ci si focalizza sul comportamento statico e dinamico della trave esaminata, studiando e trattando i dati ottenuti dalle prove sperimentali e confrontandoli con i modelli teorici; infine nell'ultimo capitolo si traggono le conclusioni a seguito dei test eseguiti e dei risultati ottenuti.

1. ANALISI DI VIBRAZIONE DELLA TRAVE

Il presente capitolo si occupa di fornire nozioni sul problema dinamico della trave intesa come sistema continuo. Attraverso modelli matematici, si descrivono le vibrazioni dei sistemi discreti ad uno solo grado di libertà.

1.1 SISTEMI DISCRETI SOGGETTI A VIBRAZIONE

Per *struttura* si intende un insieme di elementi interconnessi ed in grado di interagire con l'ambiente esterno.
Per lo studio teorico del comportamento sia dinamico che statico di strutture si utilizzano modelli matematici per semplificare i problemi pratici.
L'analisi tipica dei fenomeni di vibrazione si sviluppa attraverso tre fasi a cui corrispondo 3 modelli correlati. Si parte dalla descrizione delle caratteristiche geometriche e fisiche della struttura esaminata e dei relativi effetti esterni che essa subisce, che costituiranno il modello matematico del problema dinamico illustrato nel § 1.1.1.

Viene poi eseguita un'analisi modale teorica sul modello spaziale ottenuto, descrivendo così il comportamento della struttura con una serie di modi di vibrare arrivando al modello modale, il quale descrive i vari modi con cui una struttura vibra naturalmente, senza l'apporto di forze esterne.
§ 1.2.1.4, §1.2.1.5, §1.2.1.6, §1.2.1.7, §1.2.1.8
Infine, viene analizzato come la struttura risponde in termini di ampiezza a date condizioni di eccitazione. La risposta dipende dalle caratteristiche intrinseche della struttura, dalla natura e dalla grandezza della forzante imposta.

La struttura viene analizzata conducendo un'eccitazione imposta standard. La soluzione può essere estesa a qualsiasi caso particolare, ottenendo un modello di risposta, costituito da una serie di FRF, Funzioni di Risposta in Frequenza.
Si può condurre l'analisi anche partendo dalla descrizione delle proprietà di risposta, in questo caso le FRF misurate sperimentalmente, si possono ricavare i parametri modali e le proprietà spaziali.

Bisogna controllare la correttezza del modello adottato e delle ipotesi formulare, verificando la congruenza con i risultati ottenuti.

1.1.1. IL MODELLO MATEMATICO DEL PROBLEMA DINAMICO

Il modello matematico della struttura reale deriva dalla definizione di un modello geometrico o strutturale, di un modello meccanico o reologico e di un modello delle azioni esterne, attraverso i quali vengono considerati gli aspetti più significativi del fenomeno vibratorio.
In particolare, il *modello geometrico o strutturale* è la schematizzazione delle caratteristiche geometriche, delle condizioni di vincolo e distribuzione della massa che permette la distinzione tra sistema continuo e sistema discreto.
Il modello meccanico o reologico, riassume le caratteristiche dei materiali che compongono la struttura, soggetti a carichi esterni tramite relazioni sollecitazione-deformazione e/o le relazioni sollecitazione-velocità di deformazione utilizzando le leggi costitutive elastiche, viscose e viscoelastiche. La struttura complessa viene semplificata individuando dispositivi convenzionali: molla, smorzatore e massa.

Si prende in considerazione *la molla* (Spring) che definisce l'elasticità delle componenti della struttura attraverso una relazione lineare che lega la *forza di richiamo elastico* F_s e lo spostamento relativo $u = u_2 - u_1$, per mezzo di una costante k chiamata costante di rigidezza che rappresenta la forza capace di produrre uno spostamento relativo unitario:

$$F_s = k_u = k(u_2 - u_1) \tag{1.1}$$

Lo *smorzatore* (Damper) esprime la capacità delle componenti della struttura di dissipare energia per attrito e per superamento del limite di deformazione elastica. La forza corrisponde è la *forza di richiamo viscoso* F_D, proporzionale alla velocità $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ e al coefficiente c di smorzamento:

$$F_D = ci = c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \tag{1.2}$$

Le caratteristiche inerziali della struttura sono rappresentate dalla massa.

Per la molla e per lo smorzatore, la massa può essere considerata una costante dell'equazione costitutiva

$$F_I = m\ddot{u} = m(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1) \tag{1.3}$$

che esprime la seconda legge della dinamica, con $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ accelerazione della massa m ed F risultante delle forze agenti sulla stessa massa.

I materiali che compongono le strutture, presentano un comportamento in parte elastico e in parte viscoso perciò per descrivere al meglio e in modo completo questo comportamento, è necessario combinare il modello elastico e il modello viscoso: la combinazione in parallelo di molla e smorzatore, si ha il modello di Kelvin che fornisce l'equazione costitutiva viscoelastica

$$F = F_s + F_D = k_u + c\dot{u} \tag{1.4}$$

Il modello delle forze esterne determina i carichi statici e/o dinamici agenti sulla struttura. Quando si tratta di carichi dinamici, quindi variabili con il tempo, la struttura è soggetta ad accelerazione e quindi c'è la formazione di forze di inerzia che sono proporzionali alle masse ed alle accelerazioni stesse, di verso opposto alle azioni sollecitanti.

1.1.2 SISTEMI CONTINUI E DISCRETI

La struttura può essere modellata secondo un modello geometrico o strutturale definito come sistema che, a seconda del numero di gradi di libertà (DOF – Degrees Of Freedom), può essere definito continuo o discreto.

I gradi di libertà di un sistema sono parametri sufficienti a caratterizzare la posizione della massa rispetto alla sua configurazione di riposo. Sia il sistema discreto che il sistema continuo rappresentano modelli di uno stesso sistema fisico.

Dato che una generica configurazione del *sistema continuo* è determinato da infiniti parametri e coordinate, i sistemi continui hanno infiniti gradi di libertà.

Il comportamento dinamico dei sistemi continui è descritto da equazioni differenziali alle derivate parziali in quanto le grandezze che determinano il moto del sistema dipendono sia dal tempo che dallo spazio.

Solo nel caso specifico in cui la massa e le proprietà elastiche sono distribuite uniformemente si può ottenere una soluzione in forma chiusa del sistema di vibrazione continuo. Il moto del sistema è descritto da una funzione del tempo *t* e dalla coordinata spaziale che individua il generico punto della struttura.

D'altra parte, per i *sistemi discreti*, che hanno un numero limitato di gradi di libertà, la configurazione del sistema è descritta da parametri che sono solo funzioni del tempo. Per questo, l'equazione differenziale del moto di un sistema discreto è la derivata totale. Ci occuperemo di piccole vibrazioni in una configurazione di equilibrio statico.

Per tutti gli elementi strutturali, le equazioni del moto possono essere ottenute definendo le equazioni di equilibrio dinamico per il generico elemento di materia posto nella configurazione corrente.

1.2 SISTEMI DISCRETI: VIBRAZIONI LIBERE E FORZATE

Si possono suddividere i sistemi discreti in due categorie in base al numero di grdi di libertà della struttura oggetto di esame. In particolare:

- SDOF, Single Degree Of Freedom, sono I sistemi ad un grado di libertà e sono sistemi che possono essere definiti attraverso un unico parametro che ne caratterizza la posizione della massa.
- MDOF, Multiple Degree of Freedom, utilizza i risultati ottenuti dall'analisi vibrazionale di un sistema ad un unico grado di libertà che possono essere successivamente estesi ai sistemi a più gradi di libertà. I sistemi a più gradi di libertà sono espressi in forma matriciale.

1.2.1 SISTEMI AD UN GRADO DI LIBERTÀ – SDOF

Le strutture non sono realisticamente rappresentabili come un sistema ad un grado di libertà, le proprietà di questo sistema, però, sono estremamente importanti perché un sistema a più gradi di libertà può essere rappresentato come sovrapposizione lineare di un certo numero di caratteristiche di sistemi ad un grado di libertà.

Per l'analisi vibrazionale di sistemi ad un singolo grado di libertà si definisce un modello analitico per schematizzare la struttura reale utilizzando un oscillatore ad un grado di libertà (Figura 1.1 a). Nella generica posizione non in quiete del sistema, le forze agenti sulla massa m sono: F_s forza di richiamo elastico, F_D forza di richiamo viscoso, F_I forza di inerzia e $p(t)$ forzante esterna (figura 1.1 b).

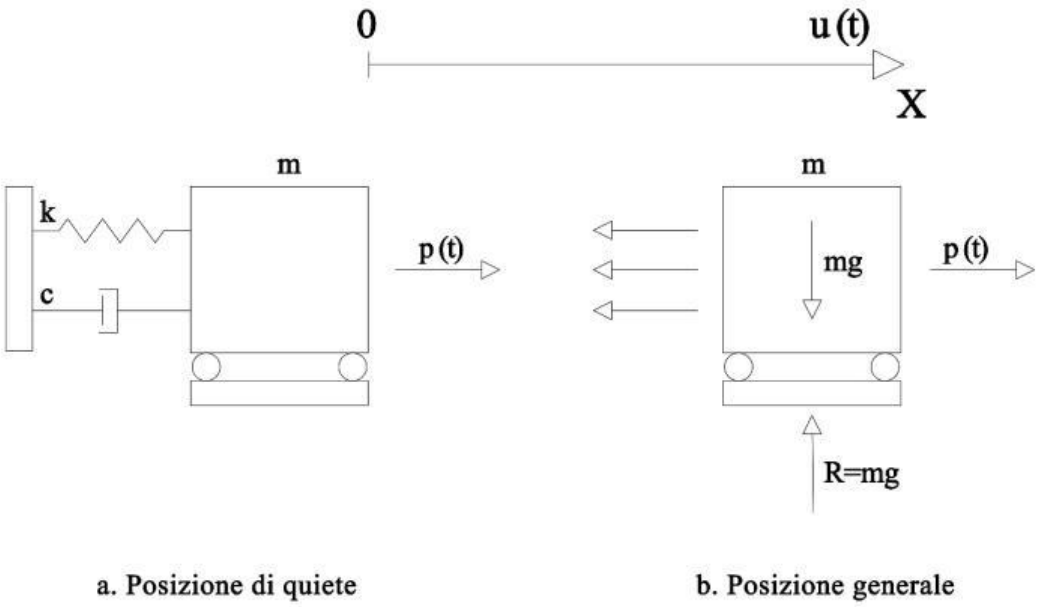


Figura 1.1 – Modello analitico dell'oscillatore nella posizione di quiete e generica

Dal modello analitico si passa al modello matematico attraverso il *Principio di D'Alembert*, imponendo, istante per istante, l'equilibrio delle forze agenti e delle forze di inerzia.

$$F_I + F_D + F_s = p(t) \tag{1.5}$$

Sostituendo alla (1.5) le equazioni costitutive (1.1), (1.2), (1.3), si ottiene l'equazione di equilibrio dinamico o equazione del moto dell'oscillatore semplice smorzato in presenza di forzante

$$m\ddot{u}(t) + \dot{c}u(t) + ku(t) = p(t) \tag{1.6}$$

Nell'equazione del moto non intervengono la forza peso mg e la reazione del carrello R, poiché si suppone l'attrito nullo.

1.2.1.1 MOTO LIBERO, NON SMORZATO

Per sistemi non smorzati e in assenza di forzante, l'equazione differenziale (1.6), si può riscrivere in maniera più specializzata:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{1.7}$$

è l'equazione del moto vibratorio libero dell'oscillatore non smorzato che governa il moto libero del sistema. È un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare ed omogenea a coefficienti costanti poiché m e k sono indipendenti dal tempo t.

Se si pone:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.8}$$

la (1.7) si può riscrivere:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \tag{1.9}$$

e viene detta equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice non smorzato, la cui soluzione può scriversi in varie forme.
Ad esempio:

$$u(t) = e^{\lambda t} \tag{1.10}$$

con λ costante non nota.
Derivando la (1.10) si ottiene:

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \tag{1.11}$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{1.12}$$

Sostituendo le (1.10) e (1.12) nella (1.9) si ottiene:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \tag{1.13}$$

Essendo $e^{\lambda t} \neq 0$ per ogni valore di t, per essere verificata la (1.13), deve soddisfare l'equazione

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.14}$$

Da cui

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \tag{1.15}$$

Dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria. Per le (1.10) e (1.15) le soluzioni particolari della (1.9) sono:

$$u_1(t) = e^{i\omega t} \quad , \quad u_2(t) = e^{i\omega t} \tag{1.16}$$

Anche $A_1 e^{i\omega t}$ e $A_2 e^{iwt}$ sono soluzioni della (1.9) con A_1 e A_2 costanti arbitrarie pertanto l'integrale generale della (1.9) risulta essere

$$u(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{iwt}$$

Per le formule di Eulero

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \tag{1.17}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t \cdot i \sin \omega t \tag{1.18}$$

la (1.7) diventa

$$n(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{1.19}$$

con $C_1 = A_1 + A_2$ e $C_2 = i(A_1 \cdot A_2)$.

Le costanti C_1 e C_2 si ottengono imponendo le condizioni iniziali del sistema, allora si fissa una posizione e una velocità per la massa al tempo $t = 0$

$$u(t = 0) = u_0 \tag{1.20}$$

$$\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$$

Introducendo la prima delle (1.20) nella (1.19) e poi la seconda delle (1.20) nella derivata prima della (1.19) si ottengono le costanti

$$C_1 = u_0$$

$$C_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \tag{1.21}$$

Introducendo nella (1.19) le costanti (1.21) si perviene a

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_o}{\omega} \sin \omega t \tag{1.22}$$

che rappresenta la legge di variazione dello spostamento dell'oscillatore elementare non smorzato in funzione del tempo. La risposta del l'oscillatore libero non smorzato con spostamento e velocità iniziali u_0 e $\dot{u}_0$ visibile (figura 1.2).

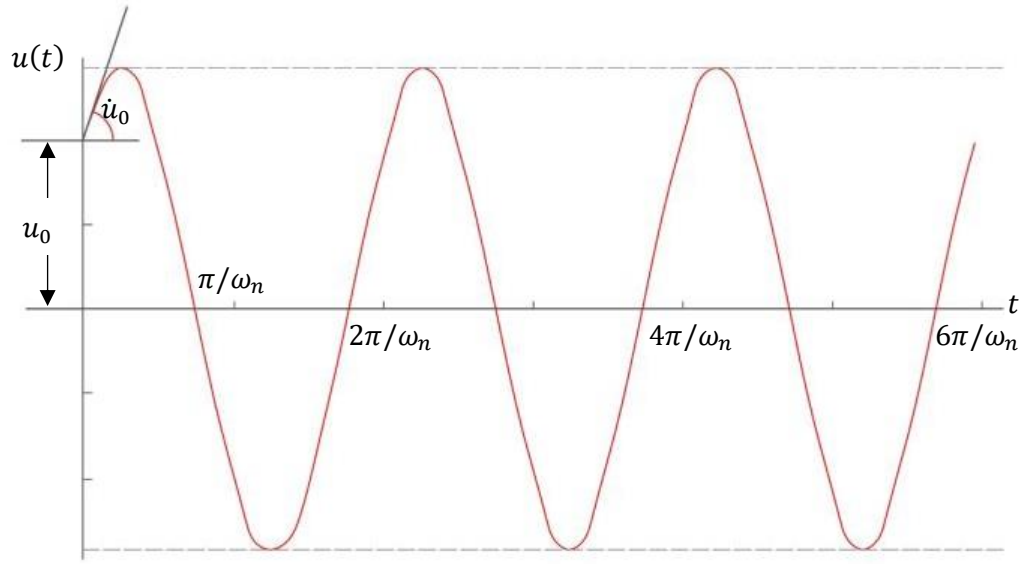


Figura 1.2 – Risposta dell'oscillatore libero non smorzato con spostamento e velocità iniziali

1.2.1.2 PERIODO E FREQUENZA

L'equazione (1.22) è un'equazione periodica, cioè si ripete in maniera identica in tutte le sue caratteristiche come posizione, velocità e accelerazione, ad un intervallo di tempo definito che prende il nome di periodo T.

L'equazione (1.22) rappresenta un *moto armonico e periodico*, in quanto $cos\ \omega t$ e $sin\ \omega t$ sono funzioni periodiche ed è una funzione periodica anche la loro combinazione lineare.

Il periodo T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.23}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ detta *pulsazione propria*.

Il periodo T è direttamente proporzionale alla massa e inversamente proporzionale alla rigidezza del sistema.

Noto il periodo, si può ricavare la *frequenza* poiché essa è l'inverso del periodo.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.24}$$

Si indica con T_n, periodo naturale, f_n, frequenza naturale e ω_n pulsazione naturale, le diciture riferite al caso di oscillazioni naturali o proprie del sistema. Per indicare le caratteristiche del sistema di dipendenza si utilizzano solo dai parametri m (massa) e k (rigidezza) e non dalle condizioni iniziali.

1.2.1.3 MOTO LIBERO SMORZATO

Nella realtà i sistemi in oscillazione libera subiscono una graduale diminuzione dell'ampiezza della vibrazione, dovuta all'energia dissipata, sotto varie forme, durante il movimento. Invece l'oscillatore semplice non smorzato rappresenta un sistema ideale.

A fronte di questa osservazione, si può riscrivere l'equazione differenziale (1.6) per sistemi smorzati, diventando

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{1.25}$$

che è l'*equazione del moto vibratorio libero dell'oscillatore smorzato*. È un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare ed omogenea a coefficienti costanti, essendo m e k, indipendenti del tempo t. Dividendo i termini della (1.25) per m e ponendo

$$\frac{c}{m} = 2v_\omega \Rightarrow v = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{1.26}$$

con c *coefficiente di smorzamento* e v *rapporto di smorzamento*.

La (1.25) diventa

$$\ddot{u}(t) + 2v\dot{\omega}u(t) + \omega^2 u(t) = 0 \tag{1.27}$$

Detta *equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice smorzato*, la cui soluzione può scriversi in varie forme, ad esempio

$$u(t) = e^{\lambda t} \tag{1.28}$$

con λ costante non nota. Derivando la (1.28) si ottiene

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \tag{1.29}$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \tag{1.30}$$

Sostituendo le (1.29) e (1.30) nella (1.27) si ottiene

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2v w\lambda + \omega^2) = 0 \tag{1.31}$$

Essendo $e^{\lambda t} \neq 0$ per ogni valore di t, per essere verificata la (1.31), λ deve soddisfare l'equazione

$$\lambda^2 + 2v\omega\lambda + \omega^2 = 0 \tag{1.32}$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = \left(-v \pm \sqrt{v^2 - 1}\right)\omega \tag{1.33}$$

Per le (1.28) e la (1.33) le soluzioni particolari della (1.27) sono

$$u_1(t) = e^{\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)\omega t}\ ,\ u_2(t) = e^{\left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} \tag{1.34}$$

Anche $A_1 e^{\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)\omega t}$ e $A_2 e^{\left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)\omega t}$ sono soluzioni della (1.27) con A_1 e A_2 costanti arbitrarie pertanto l'integrale generale della (1.27) risulta essere

$$u_1(t) = A_1 e^{\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} + A_2 e^{\left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} \tag{1.35}$$

dove le costanti A_1 e A_2 vengono definite in base alle condizioni iniziali.

Le soluzioni della (1.35) dipendono dal radicando $\sqrt{v^2 - 1}$, potendo verificarsi tre diversi casi poiché la quantità $(v^2 - 1)$ può essere nulla, positiva o negativa.

Il valore del coefficiente di smorzamento c che annulla il discriminante $(v^2 - 1)$, viene definito *coefficiente di smorzamento critico* c_{cr}

$$v^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{c}{2m\omega}\right)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow c = 2m\omega \tag{1.36}$$

per cui $c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km}$. Allora la (1.26) può essere riscritta

$$v = \frac{c}{c_{cr}} \tag{1.37}$$

In un sistema criticamente smorzato, $v = \frac{c}{c_{cr}}$=1, per cui le radici (1.33) della (1.32), sono reali e coincidenti

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -v\omega = -\omega \tag{1.38}$$

e l'integrale generale della (1.27) risulta

$$u(t) = (A_1 + A_2)e^{-wt} \tag{1.39}$$

Imponendo le condizioni iniziali è possibile determinare le due costanti arbitrarie che sostituisce nella (1.39), restituiscono l'*equazione del moto periodico con smorzamento critico*).

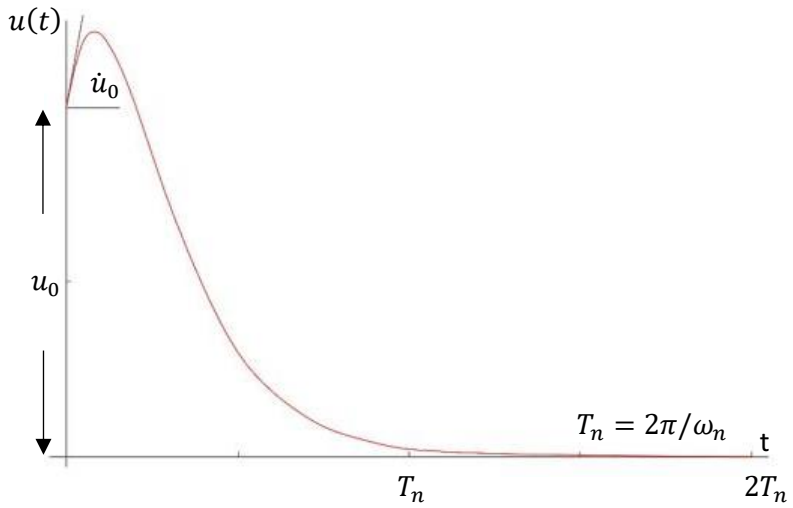


Figura 1.3 – Risposta dell'oscillatore libero criticamente smorzato con spostamento e velocità iniziali

In un sistema sovrasmorzato, $v = \frac{c}{c_{cr}} > 1$, per cui le radici (1.33) della (1.32), sono reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = \left(-v \pm \sqrt{v^2 - 1}\right)\omega \tag{1.40}$$

e l'integrale generale della (1.27) risulta

$$u(t) = A_1 e^{\left(-v+\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} + A_{2e}^{\left(-v-\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} \tag{1.41}$$

Imponendo le condizioni iniziali è possibile determinare le due costanti arbitrarie che sostituite nella (1.41), restituiscono l'equazione del modo aperiodico smorzato (Figura 1.4). La risposta $u(t)$ del sistema sovrasmorzato è simile a quella del sistema criticamente smorzato, ma il ritorno verso la posizione neutra richieda un tempo via via maggiore all'aumentare dell'indice di smorzamento v.

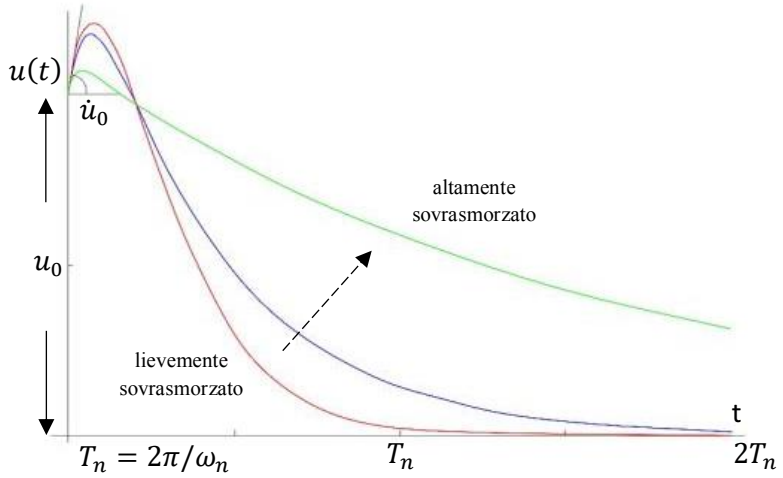


Figura 1.4 – Risposta dell'oscillatore sovrasmorzato con spostamento e velocità iniziali

In un sistema sottosmorzato, $v = \frac{c}{c_{cr}} < 1$, per cui le radici (1.33) della (1.32), sono complesse coniugate, con parte reale negativa.

$$\lambda_{1,2} = \left(-v \pm \sqrt{1 - v^2}\right) \omega \tag{1.42}$$

e l'integrale generale della (1.27) risulta

$$u(t) = A_1 e^{\left(-v + i\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} + A_{2^e}^{\left(-v - i\sqrt{v^2-1}\right)\omega t} \tag{1.43}$$

Indicando con ω_D la *pulsazione smorzata*

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - v^2} \tag{1.44}$$

Allora la (1.42) diviene

$$\lambda_{1,2} = -v\omega \pm i\omega_D \tag{1.45}$$

La (1.43) si può riscrivere

$$u(t) = A_1 e^{(-v\omega + i\omega_D)t} + A_2 e^{(-v\omega - iw_D)t} \tag{1.46}$$

Per le formule di Eulero risulta

$$\begin{aligned} e^{(-v\omega + i\omega_D)t} &= e^{-v\omega t} e^{iw_D t} = e^{-v\omega t}(\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) \\ e^{(-v\omega - i\omega_D)t} &= e^{-v\omega t} e^{-iw_D t} = e^{-v\omega t}(\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t) \end{aligned} \tag{1.47}$$

La (1.46) diviene

$$u(t) = e^{-v\omega t}(C_1 \cos \omega_D t + C_2 \sin \omega_D t) \tag{1.48}$$

con le nuove costanti

$$C_1 = A_1 + A_2 \text{ e } C_2 = i(A_1 - A_2) \tag{1.49}$$

I termini tra parentesi della (1.48), indicano che la massa oscilla intorno alla posizione di equilibrio con moto armonico. Il termine esponenziale che la precede, invece, indica che

l'ampiezza del moto decresce con la legge esponenziale anche se le oscillazioni si verificano con intervalli di tempo T_D uguali

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-v^2}} \tag{1.50}$$

È interessante rilevare come nelle strutture reali, il valore di v, sia molto piccolo, per cui il termine $\sqrt{1-v^2} \cong 1$ ed ω_D può essere assunto pari alla frequenza naturale del corrispondente sistema non smorzato. Ragionamento analogo può essere fatto per T_D e T. Imponendo le condizioni iniziali è possibile determinare le die costanti arbitrarie che sostituite nella (1.48), restituiscono l'*equazione del moto periodico smorzato* (Figura 1.5).

$$U(t) = i^{vwt}\left[x_0\, cos\ \omega_i\, , tT\left(\frac{\dot{u}_0 + v\omega \cup 0}{w_D}\right) m\omega_D t\right] \tag{1.51}$$

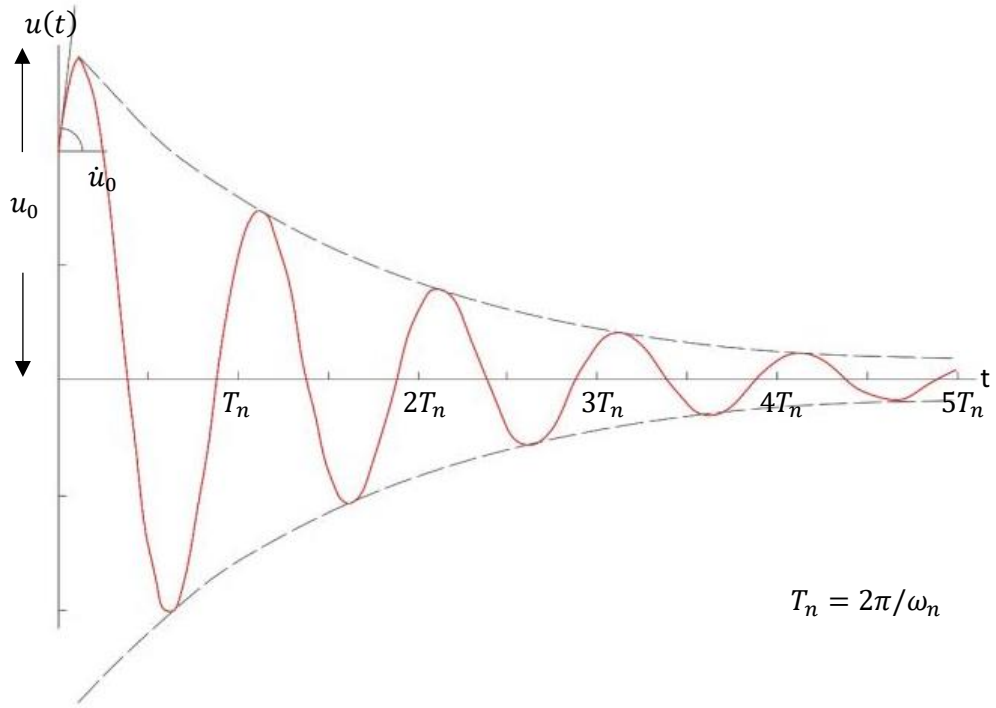


Figura 1.5 – Risposta dell'oscillatore libero sottosmorzato con spostamento e velocità iniziali

È da notare che lo smorzamento critico ($v = 1$), rappresenta una transizione tra la condizione oscillatoria e quella non oscillatoria. Le quattro situazioni di smorzamento sopra descritte e cioè oscillatore semplice non smorzato, sovrasmorzato, con smorzamento critico e sottosmorzato, sono riassunte in (Figura 1.6).

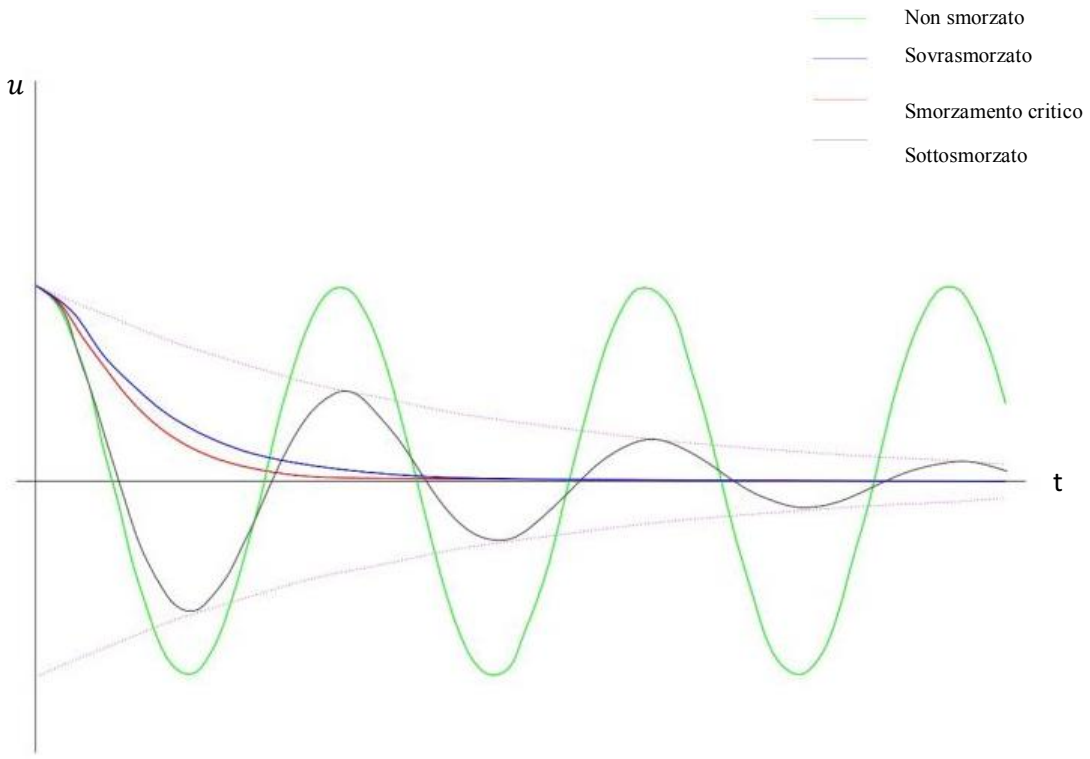


Figura 1.6 – Risposta dell'oscillatore semplice alle varie condizioni di smorzamento

1.2.1.4 MOTO CON FORZANTE ARMONICA, NON SMORZATO

Ammettiamo che l'oscillatore semplice non smorzato sia eccitato da un carico armonico

$$p(t) = P_0 cos\Omega t \tag{1.52}$$

con Ω *pulsazione della forzante* e P_0 *ampiezza della forzante armonica.*

In presenza della forzante, per sistemi non smorzati, l'equazione differenziale (1.6), si specializza nella

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0 cos\Omega t \tag{1.53}$$

La soluzione $u(t)$ dell'equazione differenziale (1.53), è nella forma

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \tag{1.54}$$

con $u_c(t)$, *soluzione generale* dell'omogenea associata alla (1.53) (la (1.7)), fornita dalla (1.19); $u_p(t)$, *soluzione particolare* che soddisfa la (1.53), denominata anche la *soluzione permanente* (o *a regime*).

Nel caso specifico di forzante armonica la soluzione particolare u_p(t) può essere scritta nella forma

$$u_p(t) = U\,cos\,\Omega t \tag{1.55}$$

Derivando la (1.55) si ottiene

$$\dot{u}_P(t) = \frac{du_p}{dt} = -U\Omega sin\Omega t \tag{1.56}$$

$$\ddot{u}_P(t) = \frac{d^2u_p}{dt^2} = -U\Omega^2 cos\Omega t \tag{1.57}$$

Sostituendo le (1.55) e (1.57) nella (1.53) si giunge a

$$-m\Omega^2 U + kU = P_0 \tag{1.58}$$

da cui è possibile ricavare *U ampiezza della soluzione permanente* (o *a regime*)

$$U = \frac{P_0}{k - m\Omega^2} = \frac{P_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{1.59}$$

Se il *rapporto di frequenza* (rapporto tra pulsazione del carico armonico e dal sistema non smorzato) è dato da

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \tag{1.60}$$

e ricordando che $\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2}$, la (1.59) può essere riscritta

$$U = \frac{P_0/k}{1 - r^2} \tag{1.61}$$

Si può notare come il rapporto

$$U_{st} = \frac{P_0}{k} \tag{1.62}$$

rappresenti lo *spostamento statico* cioè la variazione di lunghezza della molla di rigidezza k prodotta dal carico statico P_0, quindi la 81.55) si può anche scrivere

$$u_p(t) = \frac{U_{st}}{1 - r^2} cos\Omega t \tag{1.63}$$

con $r \neq 1$, cioè $\Omega \neq \omega$.

Introducendo le (1.63), (1.19) nella (1.54), si ottiene la risposta totale del sistema $u(t)$

$$u(t) = \underbrace{C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{\frac{U_{st}}{1-r^2} cos\Omega t}_{\text{Risposta permanente}} \tag{1.64}$$

Le costanti C_1 e C_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali del sistema. Ipotizzando che al tempo $t = 0$ siano nulli lo spostamento e la velocità del sistema risulta

$$\begin{aligned} u(t=0) &= u_0 = 0 \\ \dot{u}(t=0) &= \dot{u}_0 = 0 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Allora introducendo la prima delle (1.65) nella (1.64) e poi la seconda (1.65) nella derivata della (1.64) si ottengono le costanti

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{U_{st}}{1-r^2} \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Introducendo nella (1.19) le costanti (1.66) si perviene a

$$u(t) = \frac{U_{st}}{1-r^2}(cos\Omega t - cos\omega t) \tag{1.67}$$

con $r \neq 1$, che rappresenta la legge di variazione dello spostamento dell'oscillatore elementare non smorzato, con forzante armonica in funzione del tempo.

Il moto oscillatorio forzato risulta dalla sovrapposizione di due moti armonici di differenti frequenze, la *componente transitoria* caratterizzata da oscillazioni legate alla pulsazione naturale del sistema ω e la *componente permanente* caratterizzata da oscillazioni legate alla pulsazione della forzante Ω, pertanto la risposta totale del sistema, visibile (Figura 1.7), non è armonica. La *risposta transitoria* $u_c(t)$ dipende dalle condizioni iniziali del sistema mentre la *risposta permanente* $u_p(t)$ ne risulta indipendente. La risposta transitoria è rappresentata in (Figura 1.7) come la differenza tra la linea tratteggiata e quella continua. Nel caso ideale di smorzamento nullo in esame, il termine transitorio $u_c(t)$ non scompare, ma nei sistemi reali, l'inevitabile presenza di smorzamento tende a far decadere con il tempo le vibrazioni libere ed è proprio per questo che la componente $u_c(t)$ è chiamata risposta transitoria.

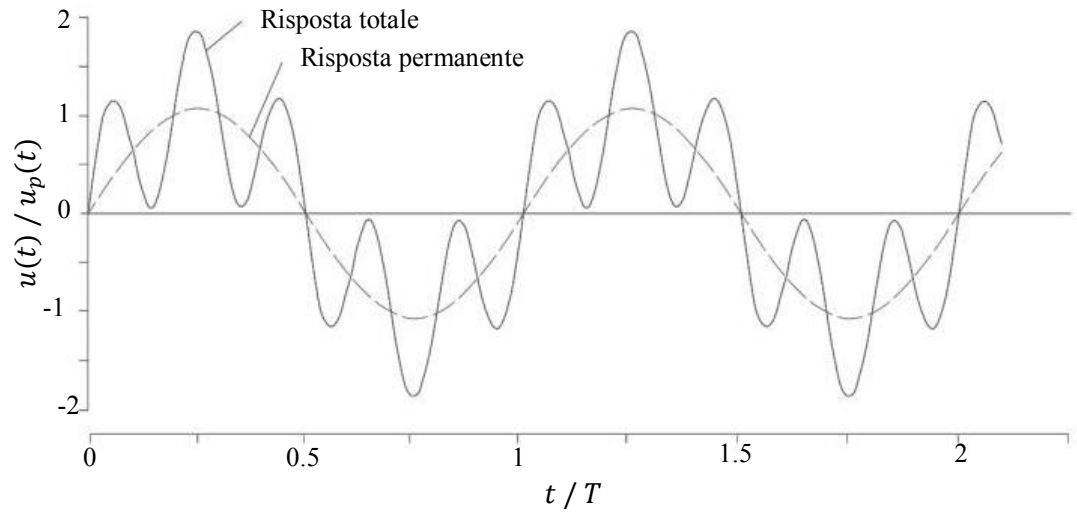


Figura 1.7 – Risposta dell'oscillatore con forzante armonica non smorzato con spostamento e velocità iniziali $u_0 = 0$ e $\dot{u}_0 = 0$

Dalla (1.64) si può notare come per $r = \frac{\Omega}{\omega} < 1$. Il termine che fornisce la risposta permanente sia positivo e concorde con i termini che forniscono la risposta transitoria, essendo $1 - r^2 > 0$; in questo caso si dice che lo spostamento del sistema è *in fase* con le forze applicate. Se $r = \frac{\Omega}{\omega} > 1$, il termine che fornisce la risposta permanete è negativo e discorde con i termini che forniscono la risposta transitoria, essendo $1 - r^2 < 0$; in questo caso si deve che lo spostamento del sistema è *fuori fase* rispetto alle forze applicate.

L'ampiezza della risposta di regime permanente è illustrata qualitativamente in (Figura 1.8).

Si definisce il *coefficiente di amplificazione dinamico D* come il rapporto tra l'ampiezza *U* delle oscillazioni permanenti e lo spostamento statico U_{st}

$$D = \frac{U}{U_{st}} = \frac{1}{1 - r^2} \tag{1.68}$$

Che è rappresentata qualitativamente in (Figura 1.9) (curva $v = 0$, smorzamento nullo).

Nel caso particolare in cui $r = 1$, il coefficiente di amplificazione dinamico (1.68) tende all'infinito e l'ampiezza della soluzione permanente U è infinitamente grande rispetto allo spostamento statico U_{st}. Allora definiamo la *frequenza di risonanza* quel valore della frequenza della forzante che rede massimo D. In questa particolare condizione le (1.64), (1.67) non sono più valide, in quanto la soluzione particolare $u_p(t)$ (1.55) è anche soluzione omogenea associata essendo per $r = 1$, $\Omega = \omega$. In condizioni di risonanza occorre assumere come soluzione particolare, in base a considerazioni fisiche, la funzione

$$u_p(t) = At\ sen\ \Omega t \tag{1.69}$$

Sostituendo la (1.69) e la sua derivata seconda nelle (1.53), si ottiene

$$A = \frac{P_0}{2m\Omega} = \frac{P_0/k}{2m\Omega/k} = \frac{U_{st}\Omega}{2} \tag{1.70}$$

Allora la (1.69) diventa

$$u_p(t) = \frac{U_{st}\Omega}{2} t\ sen\ \Omega t \tag{1.71}$$

Che rappresenta una oscillazione armonica con ampiezze linearmente crescenti inscritte tra le rette $u(t) = \pm \frac{U_{st}\Omega}{2} t$.

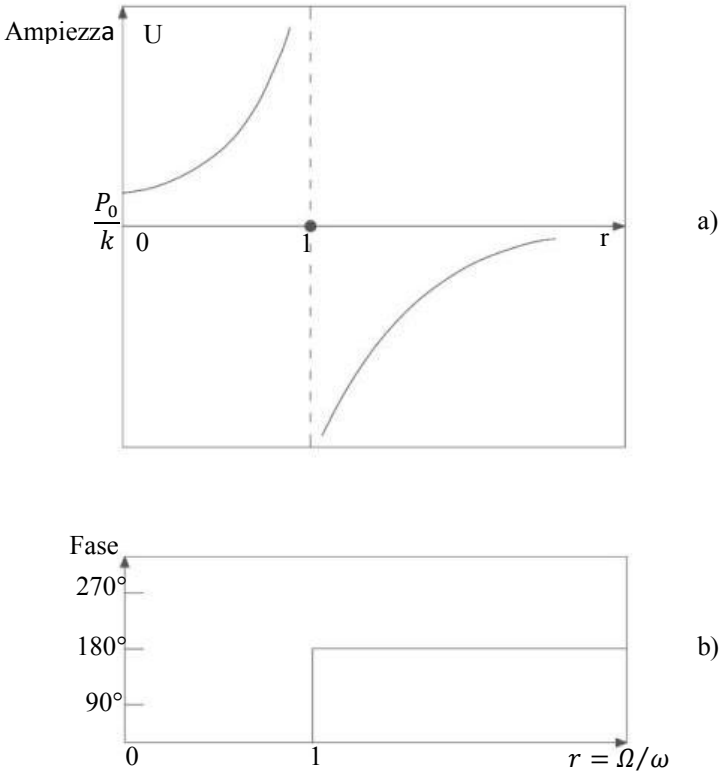


Figura 1.8 – Ampiezza e fase della risposta di regime permanente U in funzione del rapporto di frequenza $r = \frac{\Omega}{\omega}$

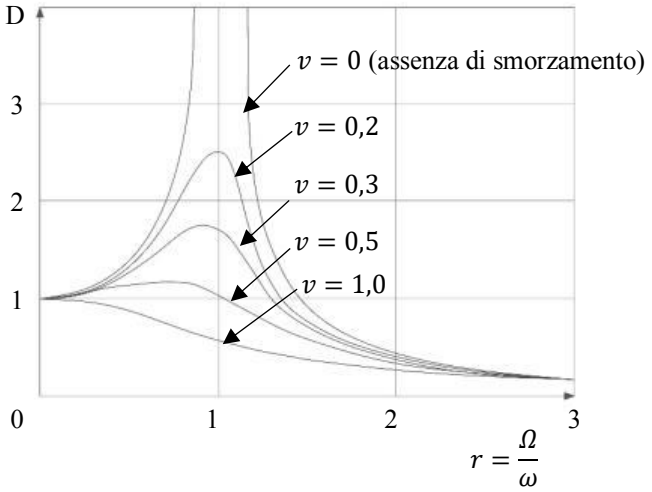


Figura 1.9 – Coefficiente di amplificazione dinamico D in funzione del rapporto di frequenza $r = \frac{\Omega}{\omega}$

1.2.1.5 MOTO CON FORZANTE ARMONICA, NON SMORZATO: RISPOSTA IN FREQUENA (FRF)

Dividendo l'ampiezza U della soluzione permanente (1.59) per l'ampiezza P_0 della forzante, si ottiene la *funzione di risposta in frequenza* $H(\Omega)$ detta anche *recettanza*

$$H(\Omega) = \frac{U}{P_0} = \frac{1}{k - m\Omega^2} \tag{1.72}$$

Allora relazione che lega il vettore spostamento $u_p(t)$ e la risposta in frequenza $H(\Omega)$ in virtù della (1.72) e della (1.55) diventa

$$u_p(t) = P_0 H(\Omega) cos\Omega t \tag{1.73}$$

Infine dalla (1.72) o uguagliando i secondi membri delle (1.55) e (1.73) si ottiene la relazione

$$U = P_0 H(\Omega) \tag{1.74}$$

dalla quale si evince che, una volta noto il vettore $H(\Omega)$, moltiplicato per lo scalare P_0 restituisce l'ampiezza della soluzione permanente U, attraverso la quale, applicando l'operatore $cos\ \Omega t$, si giunge alla risposta $u_p(t)$, soluzione dell'equazione vettoriale (1.53).

1.2.1.6 MOTO CON FORZANTE ARMONICA, SMORZATO

In presenza di forzante armonica già definita nella (1.52), per sistemi smorzati, l'equazione differenziale (1.6), si specializza nella

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0\, cos\Omega t \tag{1.75}$$

Dividendo i termini della (1.75) per m e imponendo le posizioni (1.8) e (1.26), si ottiene

$$\ddot{u}(t) + 2v\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{P_0}{m} cos\ \Omega t \tag{1.76}$$

La soluzione $u(t)$ dell'equazione differenziale (1.76), è nella forma (1.54). La soluzione generale $u_c(t)$ dell'omogenea associata alla (1.76) (la (1.27)) è fornita dalla (1.48) (soluzione relativa ad un sistema sottosmorzato).

La soluzione particolare $u_p(t)$ può essere scritta nella forma

$$u_p(t) = U\, cos(\Omega t - \varphi) \tag{1.77}$$

Con U ampiezza della risposta e φ la fase, ovvero lo sfasamento angolare tra la forzante e la risposta. Derivando la (1.77) si ottiene

$$\dot{u}_p(t) = \frac{du_p}{dt} = -U\Omega\ sen(\Omega t - \varphi) \tag{1.78}$$

$$\ddot{u}_p(t) = \frac{d^2u_p}{dt^2} = -U\Omega^2 cos(\Omega t - \varphi) \tag{1.79}$$

Sostituendo le (1.77), (1.78) e (1.79) nella (1.75) si giunge a

$$-mU\Omega^2 cos(\Omega t - \varphi) - cU\Omega sen(\Omega t - \varphi) + kUcos(\Omega t - \varphi) = P_0 cos\Omega t \tag{1.80}$$

da cui è possibile ricavare U ampiezza della soluzione permanente (o a regime) e tg φ

$$U = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4v^2 \frac{\Omega^2}{w^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.81}$$

$$tg\varphi = 2v \frac{\frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \tag{1.82}$$

In funzione del rapporto di frequenza r (1.60) e dello spostamento statico U_{st} (1.62), le (1.81) e (1.82) diventano

$$U = \frac{U_{st}}{[(1-r^2)^2 + 4v^2r^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.83}$$

$$tg\varphi = \frac{2vr}{1-r^2} \tag{1.84}$$

La soluzione particolare $u_p(t)$ (1.77) può ora essere riscritta

$$u_p(t) = \frac{U_{st}}{[(1-r^2)^2 + 4v^2r^2]^{\frac{1}{2}}} cos(\Omega t - \varphi) \tag{1.85}$$

L'integrale particolare $u_p(t)$ rappresenta la risposta permanente che risulta essere armonica di ampiezza U, con pulsazione Ω uguale a quella della forza eccitante, ma sfasata rispetto a questa a causa dello smorzamento.

Introducendo le (1.85), (1.48) nella (1.54), si ottiene la risposta totale del sistema $u(t)$

$$u(t) = \underbrace{e^{-v\omega t}(C_1 cos\omega_D t + C_2 sen\omega_D t)}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{\frac{U_{st}}{[(1-r^2)^2 + 4v^2r^2]^{\frac{1}{2}}} cos(\Omega t - \varphi)}_{\text{Risposta permanente}} \tag{1.86}$$

Le costanti C_1 e C_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali del sistema.

Definiamo il *coefficiente di amplificazione dinamico D* come il rapporto tra l'ampiezza *U* delle oscillazioni permanenti e lo spostamento statico U_{st}

$$D = \frac{U}{U_{st}} = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + 4v^2r^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.87}$$

Si può notare dalla (1.87) come in presenza del fenomeno della risonanza ($r = 1$), l'ampiezza della vibrazione risulti limitata dalla sola forza viscosa, come visibile in (Figura 1.9).

$$D(r=1) = \frac{U}{U_{st}} = \frac{1}{2v}$$

(1.88)

1.2.1.7 MOTO CON FORZANTE ARMONICA, SMORZATO: RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF)

Con il *metodo simbolico* è possibile rappresentare una grandezza armonica attraverso un vettore simbolico, ossia un vettore espresso tramite un esponenziale complesso, funzione del tempo *t*. Un moto armonico semplice è descritto sul piano cartesiano da un punto *P* che si muove lungo una generica circonferenza di raggio R e centro *O* con una velocità angolare $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ costante, come illustrato in (Figura 1.10)

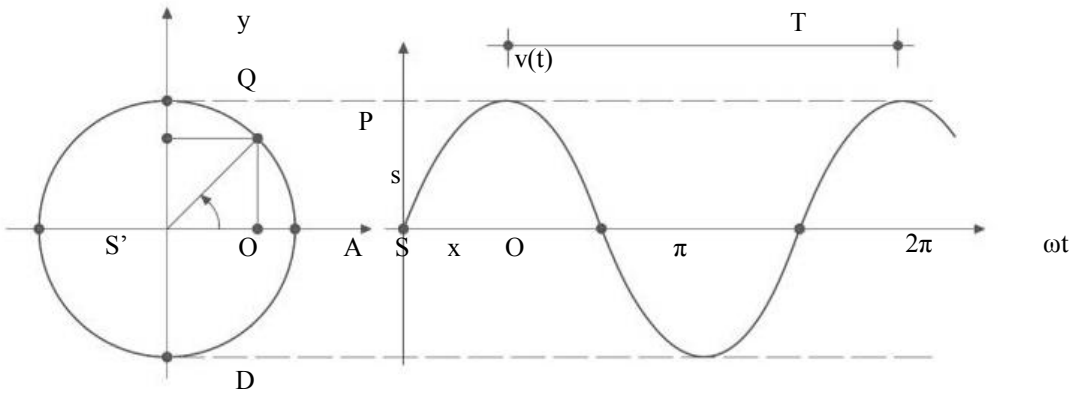


Figura 1.10 – Rappresentazione cartesiana del moto armonico

Se il piano cartesiano di rappresentazione è costituito da un asse complesso, allora il vettore posizione del punto P, si può rappresentare mediante un numero complesso (Figura 1.11)

$$P - O = |A - O| + i|B - O| = x + iy = \mathrm{z}$$
$$P - O = R\cos\omega t + iR\,sen\omega t = R(cos\omega t + i\,sen\omega t) \quad (1.89)$$

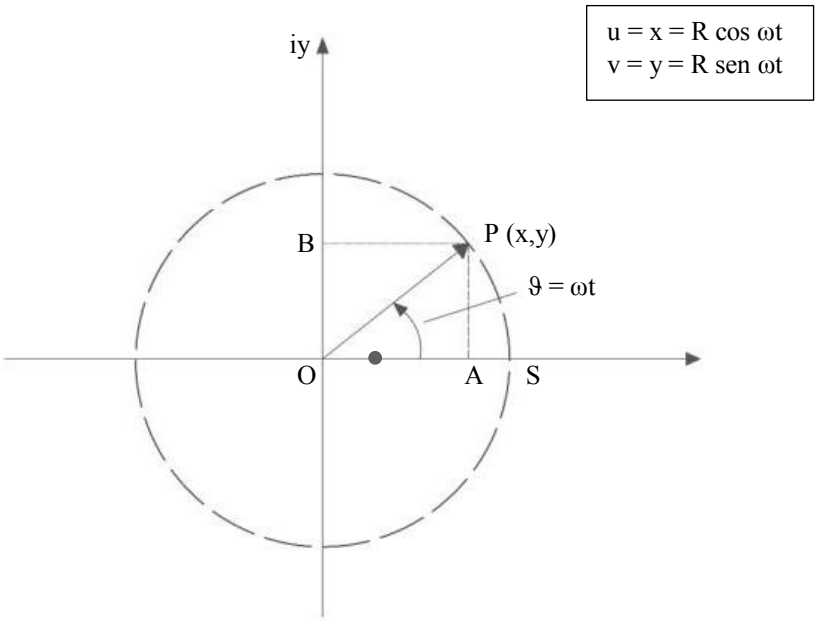


Figura 1.11 – Vettore di modulo |P - O| rotante con velocità angolare ω

Il vettore P – O, per la formula di Eulero (la prima delle (1.18)) può anche essere espresso in forma polare

$$P - O = x + iy = \mathrm{z} = \mathrm{R}e^{i\omega t} = R\,(cos\ \omega t + i\ sen\ \omega t) \tag{1.90}$$

Nella (1.90) $x = R\ cos\ \omega = Re$ z prende il nome di *parte reale del numero complesso z*, mentre $y = iR\ sen\ \omega = Im$ z, prende il nome di *parte immaginaria del numero complesso z.*

La derivata temporale di un vettore rappresenta n numero complesso, lo trasforma in un vettore ruotato in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ radianti e di modulo ω volte maggiore (o minore).

Sfruttando il metodo simbolico è possibile giustificare le (1.83) e (1.84).

Si consideri il vettore della *forzante complessa* (Figura 1.12).

$$p(t) = P_0 e^{i\Omega t} = P_0(cos\ \Omega t + i\ sen\ \Omega t) \tag{1.91}$$

da cui si nota come la forzante armonica (1.52) termine noto della (1.75) non sia alto che la sua parte reale; l'equazione del moto (1.75) può quindi essere scritta in forma complessa

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 e^{i\Omega t} \tag{1.92}$$

$\ddot{u}(t), \dot{u}(t), u(t)$ (scritti in grassetto per sottolineare il carattere vettoriale della grandezza), sono numeri complessi e rispettivamente i vettori accelerazione, velocità, spostamento

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}(t) = \ddot{u}_x(t) + i\ddot{u}_x(t) = \ddot{u}(t) + i\ddot{v}(t) \tag{1.93}$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}(t) = \dot{u}_x(t) + i\dot{u}_x(t) = \dot{u}(t) + i\dot{v}(t) \tag{1.94}$$

$$u(t) = u(t) = u_x(t) + iu_x(t) = u(t) + iv(t) \tag{1.95}$$

La (1.92) equivale a due equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_x(t) + c\dot{u}_x(t) + ku_x(t) &= P_0 \cos \Omega t \\ m\ddot{u}_y(t) + c\dot{u}_y(t) + ku_y(t) &= P_0 \, sen \, \Omega t \end{aligned} \tag{1.96}$$

Dove la seconda corrisponde alla (1.75), se si considera che le funzioni incognite per le (1.96) sono $u_x = u$ ed $u_y = v$. Lo spostamento complesso (1.95) risulta quindi essere soluzione dell'equazione differenziale complessa (1.92).

La soluzione particolare $u_p(t)$ della (1.92), in ritardo dell'angolo φ rispetto alla forzante, può essere scritta nella forma

$$u_p(t) = Ue^{i(\Omega t - \varphi)} = Ue^{i\Omega t}e^{-i\varphi} \tag{1.97}$$

con U ampiezza dello spostamento e Ω pulsazione della forzante esterna,

Derivando la (1.97) si ottiene il valore velocità $\dot{u}_p(t)$, che essendo la derivata temporale del vettore spostamento, è ruotata di 90° in senso antiorario rispetto ad $u_p(t)$

$$\dot{u}_p(t) = \frac{du_p}{dt} = i\Omega Ue^{i(\Omega t - \varphi)} = i\Omega u_p(t) \tag{1.98}$$

il cui modulo risulta essere $|\dot{u}_p| = \Omega U$. Derivando ulteriormente dalla (1.98) si ottiene il vettore accelerazione $\ddot{u}_p(t)$ diretto nel verso opposto dello spostamento

$$\ddot{u}_p(t) = \frac{d^2u_p}{dt^2} = -\Omega^2 Ue^{i(\Omega t - \varphi)} = -\Omega^2 u_p(t) \tag{1.99}$$

con modulo $|\ddot{u}_p| = \Omega^2 U$. La proiezione di questi vettori sull'asse reale restituisce la loro parte reale e quindi le (1.52), (1.77), (1.78), (1.79), forzante, spostamento, velocità ed accelerazione rispettivamente.

I vettori così ottenuti rappresentano le forze agenti durante il moto di una vibrazione forzata che rimangono fissi gli uni rispetto agli altri ruotando insieme con velocità angolare Ω Figura 1.12 (Figura 1.12 b). Il sistema risulta in equilibrio in ogni istante, per cui il poligono di equilibrio deve risultare chiuso (Figura 1.12 c).

Sostituendo le (1.97), (1.98), (1.99) nella (1.92), si ottiene

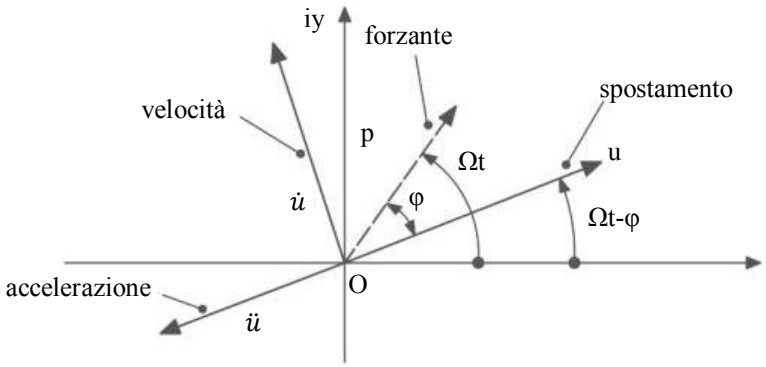
$$(-m\Omega^2 + ic\Omega + k)Ue^{i\Omega t}e^{-i\varphi} = P_0 e^{i\Omega t} \tag{1.100}$$

da cui si ricava l'*ampiezza complessa* U_0

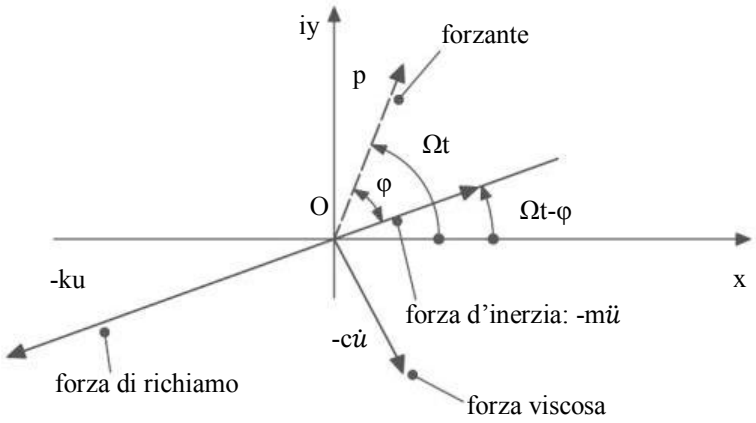
$$U_0 = Ue^{-i\varphi} = \frac{P_0}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} \tag{1.101}$$

Per la (1.101), la (1.97) può scriversi

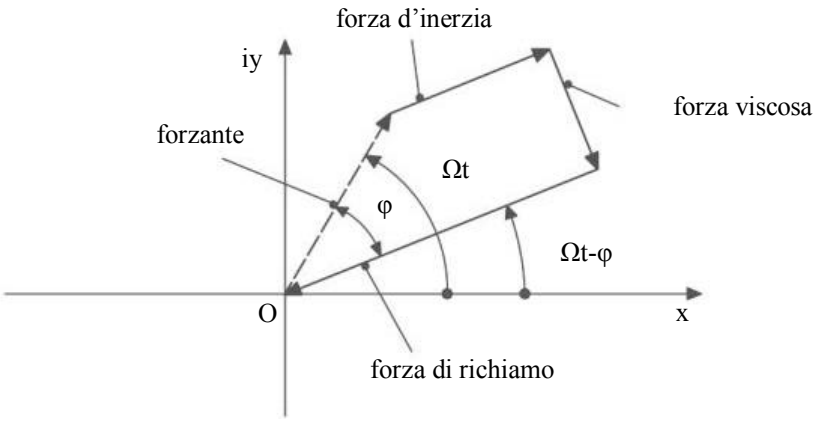
$$u_p(t) = U_0 e^{i\Omega t} \tag{1.102}$$



a) Vettori rotanti di p(t), u(t), $\dot{u}$(t), $\ddot{u}$(t)



b) Rappresentazione simbolica delle forze agenti nella vibrazione forzata con eccitazione armonica



c) Poligono di equilibrio simbolico

Figura 1.12 – Rappresentazione simbolica delle grandezze vettoriali nella vibrazione forzata

Dividendo l'ampiezza complessa U_0 (1.28) per l'ampiezza P_0 della forzante, si ottiene una quantità complessa, la *funzione di risposta in frequenza* $H(\Omega)$ detta anche *recettanza*

$$H(\Omega) = \frac{U_0}{P_0} = \frac{1}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} \tag{1.103}$$

Che per la (1.102) e (1.91) può anche scriversi

$$H(\Omega) = \frac{U_0}{P_0} = \frac{u_p(t)}{p(t)} \tag{1.104}$$

Il modulo dell'ampiezza complessa U_0 vale

$$U = |U_0| = \frac{P_0}{[(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.105}$$

che con alcune manipolazioni risulta essere uguale alla (1.81).

La soluzione particolare $u_p(t)$ (1.77), risulta essere la parte reale di $u_p(t)$ (1.97)

$$u_p(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{u_p(t)}] = \mathrm{Re}[Ue^{i(\Omega t - \varphi)}] \tag{1.106}$$

per la formula di Eulero

$$e^{i(\Omega t - \varphi)} = cos\ (\Omega t - \varphi) + i\ sen\ (\Omega t - \varphi) \tag{1.107}$$

allora

$$u_p(t) = U\ cos\ (\Omega t - \varphi) = \frac{P_0}{[(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}}\ cos\ (\Omega t - \varphi) \tag{1.108}$$

'angolo di fase φ risulta

$$tg\ \varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \tag{1.109}$$

La relazione che lega il vettore spostamento $u_p(t)$ e la risposta in frequenza $H(\Omega)$ in virtù della (1.102) e della (1.103) diventa

$$u_p(t) = P_0 H(\Omega) e^{i\Omega t} \tag{1.110}$$

Infine, dalla (1.103) o uguagliando i secondi membri delle (1.102) e (1.110) si ottiene la relazione

$$U_0 = P_0 H(\Omega) \tag{1.111}$$

dalla quale si evince che, una volta noto il vettore $H(\Omega)$, moltiplicato per lo scalare P_0 restituisce l'ampiezza complessa U_0, attraverso la quale, applicando la quale, applicando l'operatore $e^{i\Omega t}$, si giunge alla risposta $u_p(t)$, soluzione dell'equazione vettoriale (1.92).

1.2.1.8 FORME ALTERNATIVE DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF)

Abbiamo definito la recettanza come il rapporto tra lo spostamento armonico dell'oscillatore (smorzato e non) e la forzante armonica

$$H(\Omega) = \frac{u_{p(t)}}{p(t)} = \frac{U_0 e^{i\Omega t}}{P_0 e^{i\Omega t}} = \frac{U_0}{P_0} \tag{1.112}$$

ma è possibile esprimere la risposa dell'oscillatore anche in termini di velocità e accelerazione, ottenendo rispettivamente la *mobilità* $V(\Omega)$ e l'*inertanza* $A(\Omega)$

$$V(\Omega) = \frac{\dot{u}_p(t)}{p(t)} = i\Omega H(\Omega) \tag{1.113}$$

$$A(\Omega) = \frac{\ddot{u}_p(t)}{p(t)} = i\Omega V(\Omega) = -\Omega^2 H(\Omega) \tag{1.114}$$

Queste rappresentano le tre principali forme di FRF, tuttavia esistono ulteriori possibilità di rappresentazione, legate alle loro funzioni inverse denominate rispettivamente *rigidezza dinamica, impedenza meccanica e massa apparente* (1.115)

$$\frac{p(t)}{u_p(t)}, \frac{p(t)}{\dot{u}_p(t)}, \frac{p(t)}{\ddot{u}_p(t)} \tag{1.115}$$

1.2.1.9 RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE DELLE FUNZIONI DI RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF)

La principale difficoltà nel tracciare grafici relativi a dati di FRF, deriva dal fatto che sono grandezze complesse ed in quanto tali, composte da 3 quantità: frequenza, parte reale e parte immaginaria del numero complesso e per questo non rappresentabili completamente su di un grafico bidimensionale, esistono diverse possibilità; le più comuni forme di rappresentazione grafiche sono:

- Modulo (della FRF) vs. Frequenza e Fase vs. Frequenza, il *Diagramma di Bode* composto da due grafici; un classico diagramma di Bode di un oscillatore semplice non smorzato è rappresentato in (Figura 1.13) per le FRF recettanza, mobilità ed inertanza rispettivamente;
- Parte reale (della FRF) vs. Frequenza o Parte immaginaria (della FRF) vs. Frequenza: in (Figura 1.14) Figura 1.14 ne sono mostrati degli esempi relativi ad un oscillatore semplice debolmente smorzato per le FRF recettanza, mobilità ed inertanza rispettivamente;
- Parte reale (del reciproco della FRF) vs. Frequenza o Parte immaginaria (del reciproco della FRF) vs. Frequenza: questo tipo di rappresentazione, fornisce un quadro più chiaro delle caratteristiche del sistema descritto, in quanto, come evidente esempio dal reciproco della recettanza, la parte reale dipende interamente dalle proprietà di massa e rigidezza, mentre la parte immaginaria è solo funzione dello smorzamento; questa separazione delle proprietà fisiche costituenti, non è osservabile nella rappresentazione descritta in precedenza. In (Figura 1.15) è mostrato un esempio di questo grafico, relativo ad un sistema con una combinazione di smorzamento viscoso e strutturale;
- Parte reale (della FRF) vs. Parte immaginaria (della FRF), il *Diagramma di Argand* o *si Nyquist*, rappresentazione che non contiene esplicitamente informazioni riguardo la frequenza. Questa tipologia è ampiamente utilizzata per visualizzare in dettaglio la regione di risonanza. In (Figura 1.16) sono mostrati i diagrammi di Nyquist relativi ad un oscillatore semplice debolmente smorzato per le FRF recettanza ed inertanza rispettivamente.

Uno dei principali problemi riguardo la rappresentazione delle FRF, è l'ampia scala di valori che ci si trova ad analizzare (aspetto questo, che riguarda la maggior parte dei dati relativi a

problemi vibrazionali), risulta quindi appropriato l'utilizzo di scale logaritmiche per entrambi o uno dei due assi di rappresentazione delle prime due forme di rappresentazione grafiche in elenco.

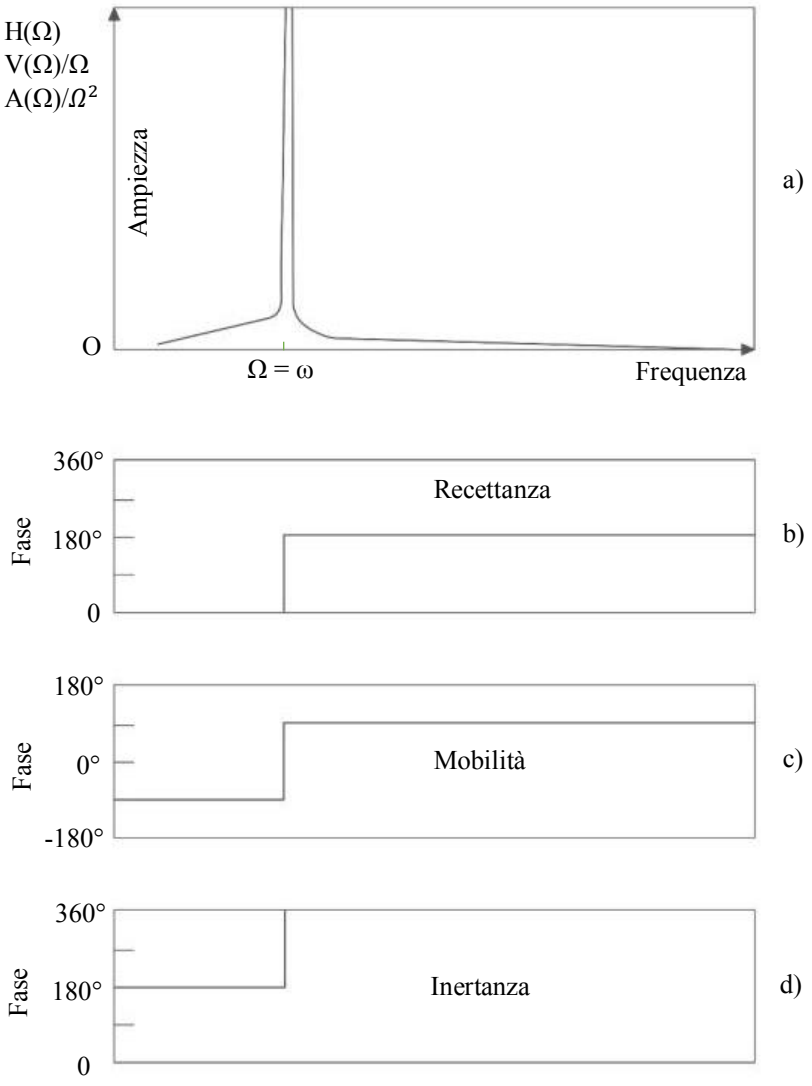


Figura 1.13 – Diagrammi di Bode: ampiezza e fasi della recettanza, mobilità ed inertanza, vs. frequenza di un oscillatore semplice non smorzato

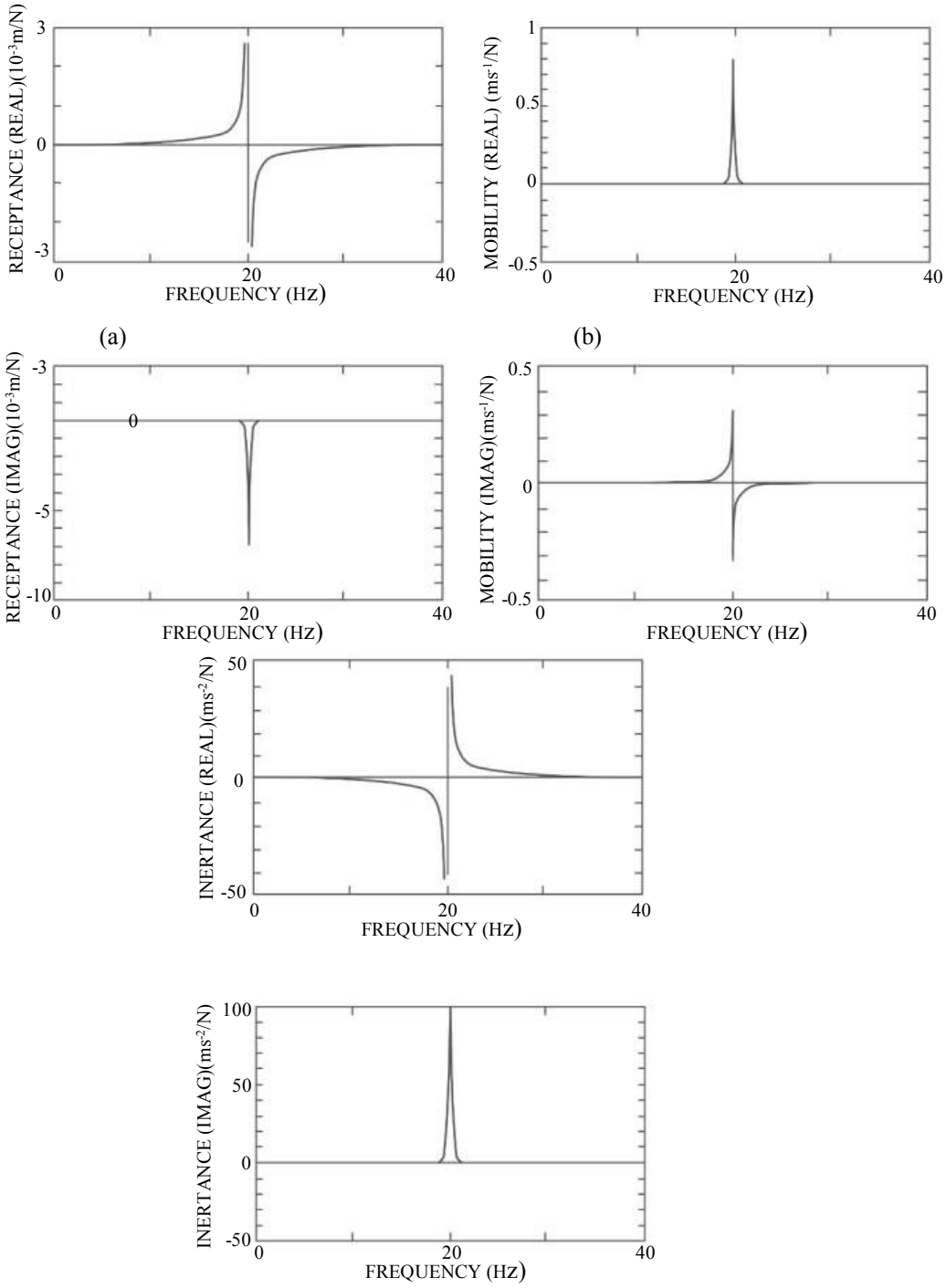


Figura 1.14 – Grafici relativi alla parte reale o immaginaria della recettanza, mobilità ed inertanza, vs. frequenza di un oscillatore semplice debolmente smorzato

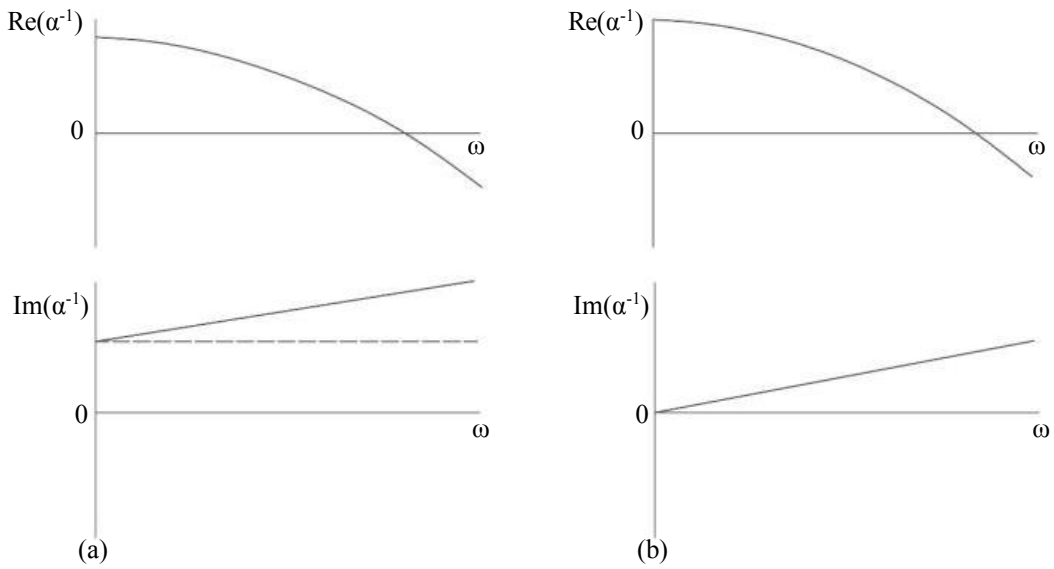


Figura 1.15 – Grafici relativi alla parte reale o immaginaria dell'inverso della recettanza, mobilità ed inertanza, vs. frequenza di un sistema con una combinazione di smorzamento viscoso e strutturale

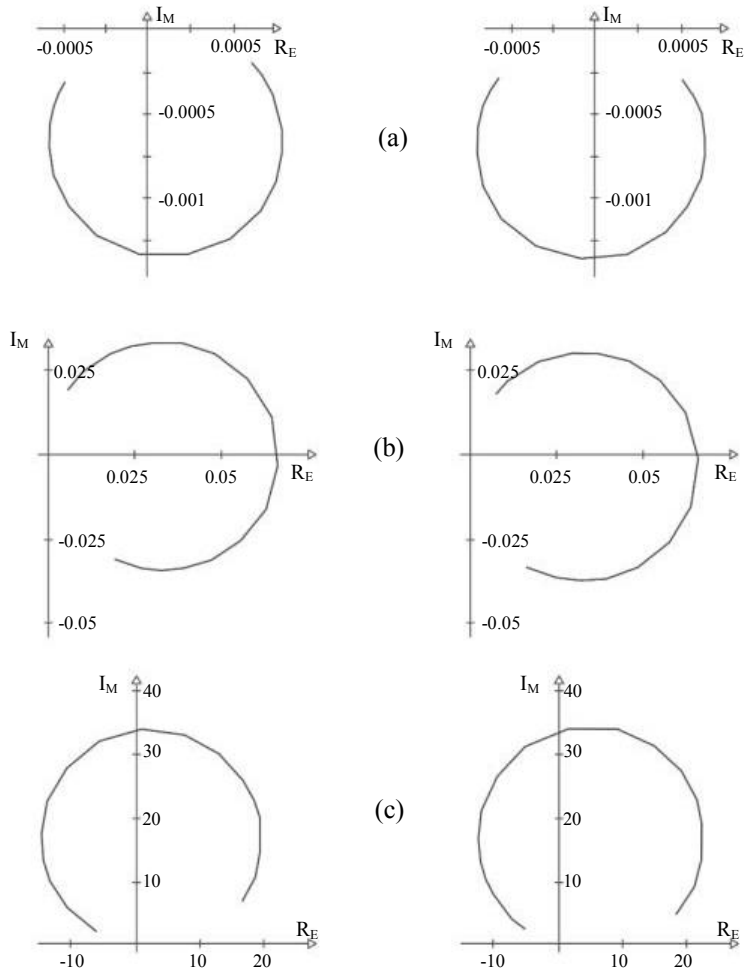


Figura 1.16 – Diagrammi di Nyquist: parte reale vs. parte immaginaria della recettanza, mobilità ed inertanza di un oscillatore semplice debolmente smorzato

Anche la rappresentazione tridimensionale contemporanea delle tre costituenti delle FRF è possibile: una proiezione isometrica della Parte reale (della FRF) vs. Parte immaginaria (della FRF) vs. Frequenza (Figura 1.17), dove è possibile visualizzare contemporaneamente le tre proiezioni piane Parte reale (della FRF) vs. Frequenza, Parte immaginaria (della FRF) vs. Frequenza, Parte reale (della FRF) vs. Parte immaginaria (della FRF) già descritte, nonché la curva tridimensionale.

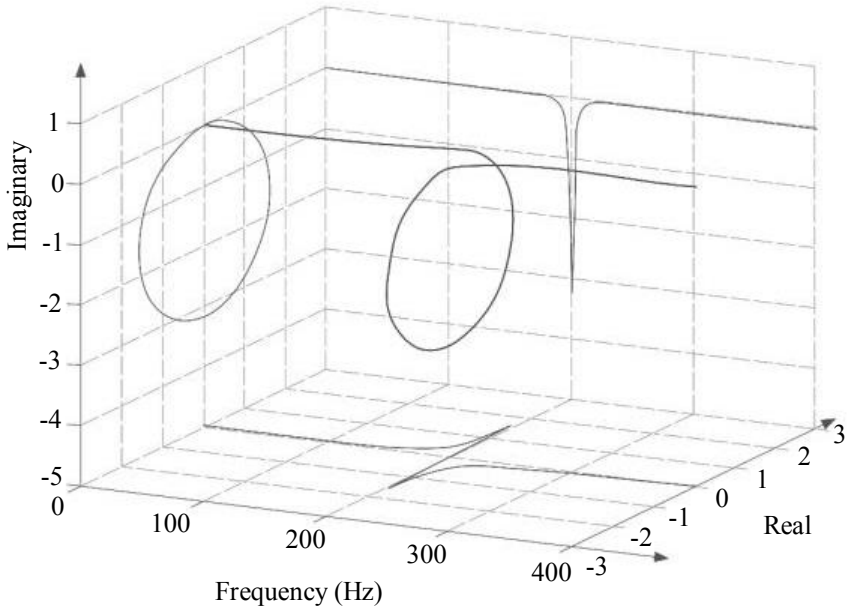


Figura 1.17 – Rappresentazione tridimensionale di un oscillatore semplice non smorzato

1.3 VIBRAZIONI FLESSIONALI DELLE TRAVI COME SISTEMI CONTINUI

1.3.1 MOTO FORZATO

La soluzione dell'equazione del moto forzato per travi interessate da carichi flessionali, viene ottenuta a partire dall'ipotesi di Eulero-Bernoulli, conosciuta anche come *principio di conservazione delle sezioni piane* (la sezione retta si conserva piana e ortogonale all'asse geometrico deformato).

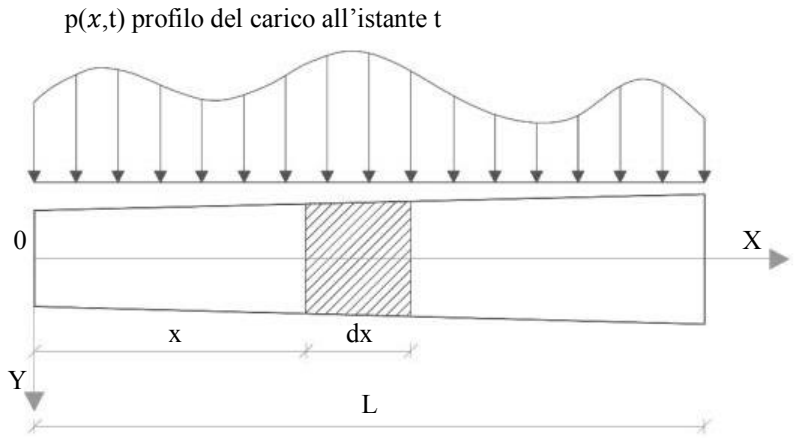


Figura 1.18 – Trave a flessione con massa e carico tagliante p(x,t) distribuiti

È data la trave di (Figura 1.18), comunque vincolata agli estremi, sollecitata dal carico distribuito p(x,t), applicato normalmente all'asse, nel piano della trave; la sollecitazione della trave è di flessione retta con il vettore momento ortogonale al piano x – y. Il carico p(x,t) dipende dalle variabili x e t; in (Figura 1.18) Figura 1.18 è rappresentato il profilo del carico alle varie ascisse x per un determinato istante t, in quanto generalmente cambia al variare di t, di conseguenza anche le caratteristiche di sollecitazione nelle varie sezioni dipendono da t.

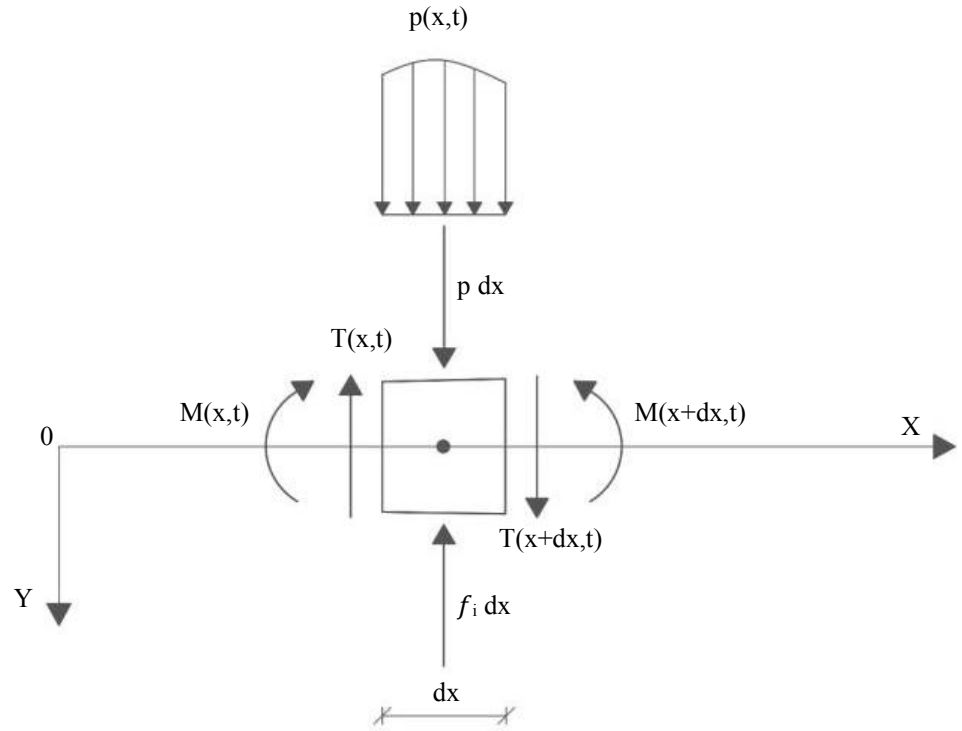


Figura 1.19 – Forze interne ed esterne agenti sul tronco di trave di lunghezza infinitesima *dx*, in condizioni dinamiche

In (Figura 1.19) è illustrata una porzione di trave di lunghezza infinitesima *dx* delimitata dalle facce piane ed ortogonali all'asse della trave. Sulla faccia di ascissa *x* agiscono il taglio *T(x,t)*, ed il momento flettente *M(x,t)*. A causa della presenza del carico distribuito *p*(*x,t*), lungo il tratto *dx*, sulla faccia di ascissa *x+dx*, agiscono il taglio *T(x+dx,t)* ed il momento *M(x+dx,t)*. Sulla porzione di trave è anche rappresentata la *forza di inerzia*

$$F_i = f_i dx = -dm\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\mu A\, dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.116}$$

con $dm = \mu A\, dx$, μ densità di massa, A area della sezione trasversale della porzione di trave, $v = v(x,t)$ spostamento dell'asse geometrico della trave nel piano principale $x - y$ in direzione y.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, uguagliando a zero la somma delle forze agenti sulla porzione di trave di (Figura 1.19), si perviene alla condizione di equilibrio dinamico per le forze in direzione y:

$$-T + p\, dx - \mu A dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T + dT = 0 \tag{1.117}$$

Da cui

$$\mu A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - dT = p\, dx \tag{1.118}$$

con

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx \tag{1.119}$$

ottenendo quindi l'*equazione indefinita di equilibrio dinamico*

$$\mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial x} = p(x,t) \tag{1.120}$$

Essendo la trave un continuo elastico, lineare, omogeneo ed isotropo, e potendo considerare cilindrica la porzione di trave, data la sua lunghezza infinitesima, è applicabile l'equazione differenziale della linea elastica dalla teoria della flessione retta del cilindro si *S. Venant*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI} \tag{1.121}$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1.122}$$

Con *E* modulo di elasticità normale e *I* momento di inerzia della sezione rispetto all'asse neutro. La condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di trave attorno al punto di intersezione del suo asse con le rette di azione delle risultanti delle forze esterne $p\, dx$ e delle forze di inerzia $f_i\, dx$, trascurando i contributi degli infinitesimi di ordine superiore al primo risulta

$$T\, dx + M - (M + dM) = 0 \tag{1.123}$$

Da cui si ricava la relazione tra momento flettente e taglio

$$T = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{1.124}$$

Sostituendo la (1.124) e successivamente la (1.122) nella (1.120), è possibile ottenere l'*equazione fondamentale del moto forzato* della trave ed asse rettilineo e a sezione variabile, vibrante nel piano principale $x - y$ sotto l'azione del carico trasversale $p(x,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{1.125}$$

Se la sezione trasversale della trave è costante il modulo di elasticità E=E(x) non dipendono da x, assume un valore costante per tutta la lunghezza del solido, e la (1.125) diventa

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\mu A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=p(x,t) \tag{1.126}$$

un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del quarto ordine, approssimata in quanto descrive il moto (vibrazione) forzato trascurando il contributo delle *deformazioni taglianti* e dell'*inerzia rotazionale*, ossia di quelle deformazioni prodotte dalle forze inerziali, indotte dalle rotazioni delle sezioni terminali delle porzioni infinitesime in cui può immaginarsi suddivisa la trave.

1.3.2 MOTO LIBERO

Nel caso di trave a sezione costante e in assenza di carico $p(\varkappa,t)$, l'equazione fondamentale si riduce all'omogenea della (1.126), nota come *equazione differenziale delle oscillazioni libere* della trave

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\mu A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \tag{1.127}$$

La soluzione $v=v(x,t)$ di questa equazione a variabili separabili si può scrivere come il prodotto di due funzioni, una funzione della sola x (detta *forma modale*) ed una solo del tempo t

$$v(x,t)=V(x)g(t) \tag{1.128}$$

Derivando la funzione $v(x,t)$ (1.128), rispetto alle variabili x e t e sostituendola nell'equazione del moto (1.127) divisa per EI, si ottiene

$$V'''(x)g(t)\frac{+\mu A}{EI}V(x)\ddot{g}(t)=0 \tag{1.129}$$

$$\frac{EI}{\mu A}\frac{V'''(x)}{V(x)}=-\frac{\ddot{g}(\tau)}{g(t)} \tag{1.130}$$

Dove gli apici e i puntini indicano rispettivamente le derivate rispetto alle variabili x e t. Il primo membro della (1.130) risulta essere funzione della sola x, mentre il secondo solo di t.

Affinché l'identità sussista, entrambi i membri devono essere uguali ad una costante che indicheremo con ω^2, ricavando le due equazioni differenziali ordinarie

$$V'''(x) - \lambda^4 V(x) = 0 \tag{1.131}$$

detta *equazione delle forme modali* e con

$$\lambda^4 = \frac{\mu A}{EI}\omega^2 \tag{1.132}$$

dalla quale è possibile ottenere la *pulsazione naturale*

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} \tag{1.133}$$

e

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0 \tag{1.134}$$

detta *equazione differenziale dei moti armonici*, la cui soluzione può scriversi in varie forme, ad esempio

$$g(t) = G\cos(wt - \varphi) \tag{1.135}$$

con G l'*ampiezza* e φ la *fase*, che si possono ottenere attraverso le condizioni iniziali del sistema a $t = 0$.

La (1.131) può essere risolta ponendo

$$V(x) = Be^{rx} \tag{1.136}$$

allora essendo

$$V''''(x) = r^4 Be^{rx} \tag{1.137}$$

la (1.131) diventa

$$(\dot{r}^4 - \lambda^d)Be^{rx} = 0 \tag{1.138}$$

Le radici dell'equazione caratteristica $(r^4 - \lambda^4) = 0$ sono

$$r_{12} = \pm\lambda \quad , \quad r_{3,4} = \pm i\lambda \tag{1.139}$$

la cui sostituzione nella (1.136) restituisce quattro soluzioni particolari distinte dall'equazione delle forme modali (1.131), quindi la sua *soluzione generale* si ottiene dalla combinazione lineare delle quattro soluzioni particolari

$$V(x) = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 e^{i\lambda x} + B_4 e^{-i\lambda x} \tag{1.140}$$

esprimendo le funzioni esponenziali in termini di funzioni trigonometriche ed iperboliche

$$\begin{aligned} e^{\pm\lambda x} &= cosh\,\lambda x \pm senh\,\lambda x \\ e^{\pm i\lambda x} &= cos\,\lambda x \pm i sen\,\lambda x \end{aligned} \tag{1.141}$$

la (1.140) diventa

$$V(x) = B_1' \, cos\,\lambda x + B_2' \, sen\,\lambda x + B_3' \, cosh\,\lambda x + B_4' \, senh\,\lambda x \tag{1.142}$$

Le quattro costanti arbitrarie che intervengono nella (1.140), le B_j e nella (1.142), le B_j' (j=1, …, 4), caratterizzano la forma modale e vengono calcolate in base alle condizioni al contorno della trave (condizioni di vincolo agli estremi).

Le condizioni al contorno permettono di determinare tre delle costanti in funzione della quarta e di ricavare l'*equazione delle frequenze* da cui si deduce il parametro λ, trattandosi di vibrazioni libere, infatti, non è possibile determinare la quarta costante che definisce l'ampiezza del moto e dipende dalle condizioni iniziali.

Abbiamo quindi che la soluzione stazionaria del moto libero a regime può esprimersi nella forma

$$v(\varkappa, t) = V(x)\cos(\omega t - \varphi) \tag{1.143}$$

con la costante G assorbita dalle costanti B_j' della (1.142), per la quale la (1.143), descrive il moto trasversale di una trave per qualsiasi condizione al contorno o condizioni iniziali.

Le B_j' si determinano attraverso le condizioni al contorno che sono soddisfatte solo per particolari valori di $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, detti *autovalori*, a ciascuno dei quali corrisponde la relativa pulsazione naturale $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}}$. All'autovalore λ_n corrisponde anche l'*autofunzione* $V_n(x)$ (funzione spaziale, modo di vibrare) che definisce la deformata della trace in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n, che può essere definita anche n-esimo modo di vibrare del

sistema. La soluzione dell'equazione differenziale dei moti armonici corrispondente all'autovalore λ_n è

$$g_n(t) = G\cos(\omega_n t - \varphi_n) \tag{1.144}$$

e l'integrale generale dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave (1.127) diventa l'espressione della deformata dell'asse geometrico della trave in vibrazione libera

$$v(x,t) = \sum_{\Pi=1}^{\infty} V_n(x)\, cos\ (\omega_n t - \varphi_n) \tag{1.145}$$

Nella (1.145) si può assumere per l'autofunzione $V_n(x)$, l'espressione relativa all'autovalore n-esimo he si ricava dalla (1.142)

$$V_n(x) = B_1'\, cos\ \lambda_n x + B_2'\, sen\ \lambda_n x + B_3'\, cosh\ \lambda_n x + B_4'\, senh\ \lambda_n x \tag{1.146}$$

1.3.2.1 SOLUZIONE CLASSICA TRAVE LIBERA

Le condizioni al contorno agli estremi liberi della trave si esprimono annullando i valori di taglio e momento per $x = 0$

$$M(0,t) = 0 \qquad T(0,t) = 0 \tag{1.147}$$

e $x = L$

$$M(L,t) = 0 \qquad T(L,t) = 0 \tag{1.148}$$

Per la teoria della flessione retta del cilindro di *S. Venant* (linea elastica) e dalla condizione di equilibrio alla rotazione della porzione di trave, possiamo esprimere il momento M(x,t) ed il taglio T(x,t) in termini di spostamento

$$\begin{aligned} M(x,t) &= -EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ T(x,t) &= -EI\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \end{aligned} \tag{1.149}$$

Essendo la funzione spostamento $v = v(x,t)$, soluzione dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere, nella forma (1.143), e le (1.149) diventano

$$M(x,t) = -\mathrm{E}IV''(x)cos(\omega t - \varphi)$$
$$T(x,t) = -EIV'''(x)cos(\omega t - \varphi) \tag{1.150}$$

L'autofunzione $V(x)$ è nella forma (1.142), derivandola otteniamo

$$V'' = \frac{d^2V}{dx^2} = -\lambda^2(B_1' \cos \lambda x + B_2' \, sen \, \lambda x \; - \; B_3' \cosh \lambda x \; - \; B_4' \, senh \, \lambda x) \tag{1.151}$$

$$V''' = \frac{d^3V}{dx^3} = -\lambda^3(B_1' \cos \lambda x + B_2' \, sen \, \lambda x \; - \; B_3' \cosh \lambda x \; - \; B_4' \, senh \, \lambda x) \tag{1.152}$$

Sostituendo le (1.151), (1.152) nelle (1.150) e applicando le condizioni al contorno (1.147), otteniamo

$$M(0,t) = EI\lambda^2(B_1' - B_3') \cos(\omega t - \varphi) = 0$$
$$T(0,t) = EI\lambda^3(B_2' - B_4') \cos(\omega t - \varphi) = 0 \tag{1.153}$$

da cui

$$B_1' = B_3'$$
$$B_2' = B_4' \tag{1.154}$$

quindi l'autofunzione $V(x)$ (1.142) diventa

$$V(x) = B_1'(cos\lambda x + cosh\lambda x) + B_2'(sen\lambda x + senh\lambda x) \tag{1.155}$$

derivandola otteniamo

$$V'' = \frac{d^2V}{dx^2} = \lambda^2[B_1'(-cos \, \lambda x + cosh \, \lambda x) + B_2'(-sen \, \lambda x + senh \, \lambda x)] \tag{1.156}$$

$$V''' = \frac{d^3V}{dx^3} = \lambda^3[B_1'(-cos \, \lambda x + cosh \, \lambda x) + B_2'(-sen \, \lambda x + senh \, \lambda x)] \tag{1.157}$$

Sostituendo le (1.156), (1.157) nelle (1.150) e applicando le condizioni al contorno (1.148), otteniamo

$$M(\mathrm{L,t}) = \mathrm{EI}\lambda^2[B_1'(-cos\,\lambda L + cosh\lambda L) + B_2'(-sen\,\lambda L + senh\,\lambda L)]\,cos\,(\omega t - \varphi) = 0$$

$$T(\mathrm{L,t}) = \mathrm{EI}\lambda^3[B_1'(-cos\,\lambda L + cosh\lambda L) + B_2'(-sen\,\lambda L + senh\,\lambda L)]\,cos\,(\omega t - \varphi) = 0 \tag{1.158}$$

da cui si ottiene il sistema di equazioni in B_1' e B_2'

$$\begin{cases} B_1'(-\cos\lambda L + \cosh\lambda L) + B_2'(-\operatorname{sen}\lambda L + \operatorname{senh}\lambda L) = 0 \\ B_1'(sen\,\lambda L + senh\,\lambda L) + B_2'(-cos\,\lambda L + cosh\,\lambda L) = 0 \end{cases} \tag{1.159}$$

Annullando il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (1.159) si ottiene

$$det\begin{bmatrix} -cos\,\lambda L + cosh\,\lambda L & -sen\,\lambda L + senh\,\lambda L \\ sen\,\lambda L + senh\,\lambda L & -cos\,\lambda L + cosh\,\lambda L \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-cos\,\lambda L + cosh\,\lambda L)^2 - (sen\,\lambda L + senh\,\lambda L)(-sen\,\lambda L + senh\,\lambda L) = 0 \tag{1.160}$$

$$\Rightarrow cos^2\lambda L + cosh^2\lambda L - 2cos\,\lambda L\,cosh\,\lambda L + sen^2\lambda L - senh^2\lambda L = 0$$

essendo $sen^2\lambda L + cos^2\lambda L = 1$ e $cosh^2\lambda L - senh^2\lambda L = 1$, dalla (1.160) si ricava l'equazione delle frequenze

$$cos\,\lambda L\,cosh\,\lambda L = 1$$

$$\Rightarrow cos\,\lambda L = \frac{1}{cosh\,\lambda L} \tag{1.161}$$

Non avendo a disposizione una semplice soluzione, la (1.161) è risolta numericamente tracciando i grafici delle funzioni $cos\,\lambda L$ e $\frac{1}{cosh\,\lambda}$ le cui intersezioni forniscono appunto i valori di λL che verificano l'uguaglianza (1.161), come è possibile vedere in (Figura 1.20).

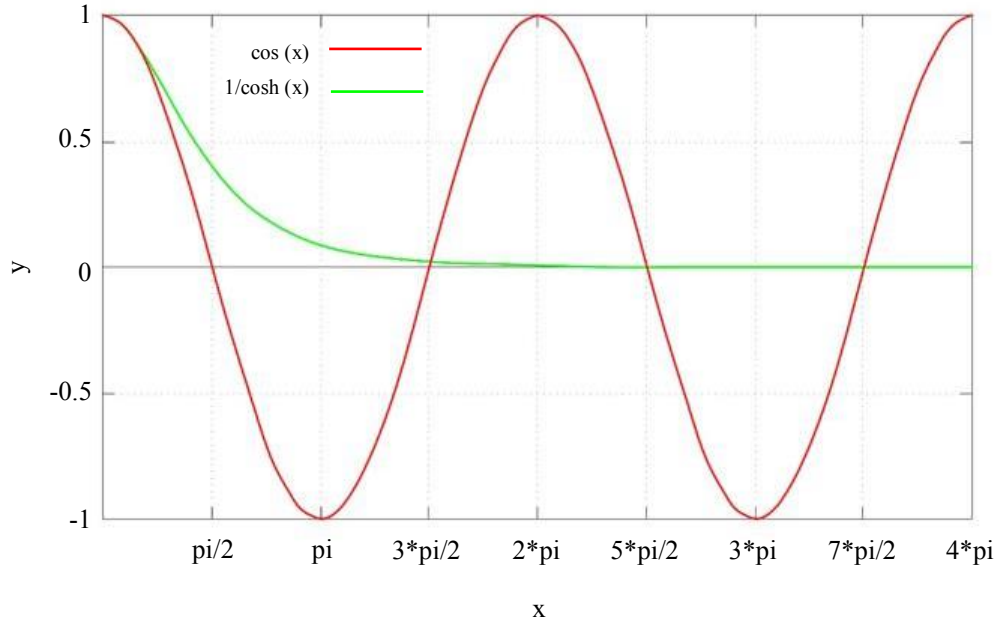


Figura 1.20 – Grafico delle funzioni $cos\ \lambda L$ e $\frac{1}{cosh}$

Le prima tre intersezioni si hanno per

$$\lambda_1 L = 1{,}506\pi \qquad \lambda_2 L = 2{,}5\pi \qquad \lambda_3 L = 3{,}5\pi \tag{1.162}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 L = 4{,}730 \qquad \lambda_2 L = 7{,}853 \qquad \lambda_3 L = 10{,}996 \tag{1.163}$$

Poiché la funzione $\frac{1}{cosh\ \lambda L}$ tende rapidamente a zero, per valori di $\lambda_n L$ sufficientemente elevati $(n \geq 4)$, i punti di intersezione corrispondono alle soluzioni dell'equazione $cos\ \lambda L = 0$, ovvero

$$\lambda_n L = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{per } n \geq 4 \tag{1.164}$$

Dalla (1.133) utilizzando i valori di $\lambda_n L$ forniti dalle (1.163) e (1.164), si possono ricavare i valori per le pulsazioni naturali ω_n (n=1, 2, 3, …) e le corrispondenti *frequenze cicliche* $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$.

Dalla (1.159), attraverso i valori di $\lambda_n L$ forniti dalle (1.163) e (1.164), è possibile determinare le costanti B_1' e B_2', che sostituite nella (1.155), ci forniscono le autofunzioni $V_n(x)$ (deformate della trave) in corrispondenza delle pulsazioni naturali ω_n.
Le costanti B_1' e B_2' sono legate dalla relazione

$$B_2' = B_1' \frac{(cos\ \lambda_n L\ -\ cosh\ \lambda_n L)}{(sen\ \lambda_n L\ -\ senh\ \lambda_n L)} \tag{1.165}$$

per cui le autofunzioni $V_n(x)$ dalla (1.155) diventano

$$V_n(x) = B_1'[(cos\ \lambda_n x + cosh\ \lambda_n x) + \frac{(cos\ \lambda_h L\ -\ cosh\ \lambda_n L}{(sen\ \lambda_n L\ -\ sen\ \lambda_n L)}\ (sen\ \lambda_n x + senh\ \lambda_n x)] \tag{1.166}$$

Le prima tre autofunzioni $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$, corrispondenti alle pulsazioni naturali ω_1, ω_2, ω_3, sono illustrate in (Figura 1.21).

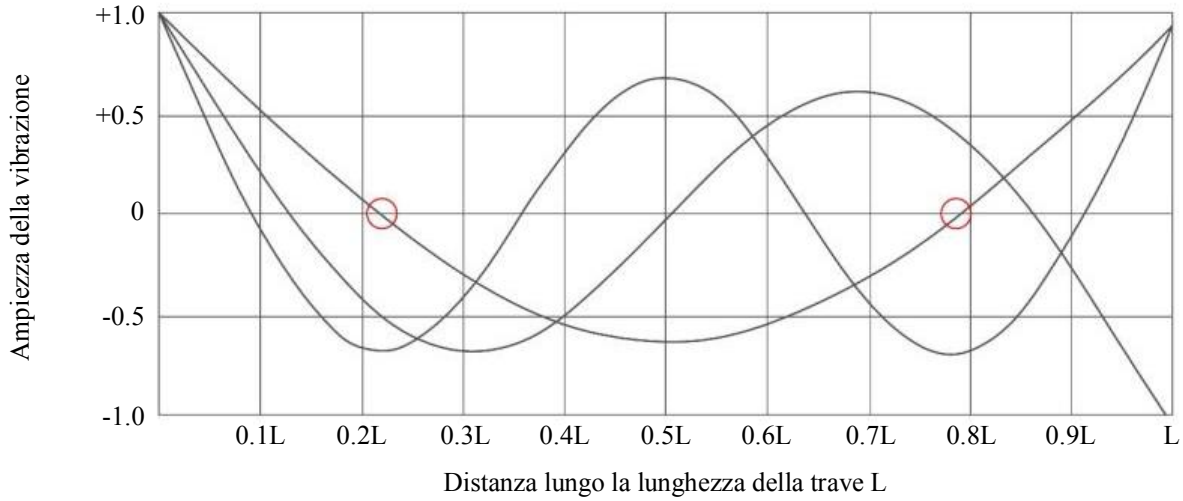


Figura 1.21 – Primi tre modi naturali di vibrare della trave con estremità libera

2. ANALISI DINAMICA SPERIMENTALE

Si analizzeranno le modalità e la strumentazione che è stata utilizzata per condurre lo studio e l'analisi modale sperimentale sulla trave integra, danneggiata e rinforzata con strisce di GFRP, con la finalità di ricavare i primi modi di vibrare della stessa. Si introduce il software Pulse BK CONNECT 2018, software utilizzato per la valutazione della risposta in frequenza.

2.1 TECNICHE SPERIMENTALI DI VIBRAZIONE

L'analisi modale di una struttura e la sua risposta sotto l'azione di una generica eccitazione impressa, è possibile attraverso la definizione di un modello matematico che metta in correlazione forzante, deformazioni e risposta della struttura in termini di spostamenti, velocità ed accelerazioni. L'approccio classico per correlare la risposta del sistema, lo spostamento, alla forzante, prevede la risoluzione di equazioni differenziali del moto con le opportune condizioni iniziali. Ma non tutti i problemi sono facilmente risolvibili con l'integrazione, perciò è conveniente cercare la soluzione mediante la definizione delle funzioni di risposta in frequenza FRF, costituite da matrici complesse, dalle quali si ricavano i parametri che caratterizzano il comportamento dinamico della struttura.

Le FRF sono tipicamente ottenute per mezzo di analisi del segnale mediante la Fast Fourier Transform.

L'intero processo di identificazione sperimentale dei parametri dinamici di una struttura è sinteticamente illustrato nel diagramma di flusso di (Figura 2.1).

Alla base delle tecniche sperimentali di analisi modale, c'è l'ipotesi della linearità delle strutture: questa ipotesi significa che i sistemi si comportano in modo lineare nel campo delle piccole deformazioni, con risposta sempre proporzionale all'eccitazione. È applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè la risposta ad una certa combinazione di ingressi al sistema è uguale alla medesima combinazione delle rispettive risposte.

Come conseguenza dell'ipotesi di linearità dei sistemi, le funzioni di risposta in frequenza godranno di tre importanti proprietà:

1. Sovrapponibilità: le FRF sono indipendenti dal tipo di eccitazione applicata (sinusoidale, a banda larga o ad impatto);
2. Omogeneità: le FRF sono indipendenti dal livello di eccitazione impartito;

3. Reciprocità: per la simmetria dei sistemi lineari (teorema di Maxwell) le FRF misurata tra due qualsiasi dei gradi di libertà è indipendente dal fatto che uno di essi venga usato per l'applicazione dell'eccitazione o per la misura adi risposta.

Oltre a tale ipotesi, si ipotizza che il comportamento delle strutture sia:

1. Causale: la vibrazione è causata solo dall'eccitazione;
2. Stabile: la vibrazione cesserà alla rimozione dell'eccitazione;
3. Osservabile: le misure di eccitazione e risposta che vengono effettuate, contengono una quantità di informazioni sufficienti per sviluppare un corretto modello di comportamento della struttura. L'inosservabilità di una struttura è dovuta, ad esempio, alla presenza di componenti "sciolti", il cui moto non può essere eccitato e "sentito" da sensori posizionati sul resto della struttura, oppure dall'esistenza di gradi di libertà di moto che non sono misurati;
4. Invariante: nel tempo: durante le misure le caratteristiche dinamiche rimarranno invariante, pertanto i coefficienti delle equazioni differenziali che reggono il problema, sono costanti rispetto al tempo.

Il comportamento dinamico della struttura è motivo di interesse perché è una sorta di "impronta digitale", nel senso che esso dipende dalle sue caratteristiche intrinseche (massa, rigidezza smorzamento, grado di vincolo) e non dall'entità e/o dal tipo di carico applicato: pertanto, se non intervengono modificazioni interne al manufatto, come ad esempio danni strutturali, il comportamento della struttura rimane inalterato; in caso contrario, si noterà una variazione delle frequenze e dei modi propri di vibrare.

In caso di strutture leggere, il peso stesso del trasduttore può incidere sulle proprietà dinamiche, provocando in genere un abbassamento delle frequenze modali, così come in caso di lunghi periodi di prova, alcune condizioni ambientali (ad esempio la diminuzione di temperatura) possono modificare le proprietà strutturali.

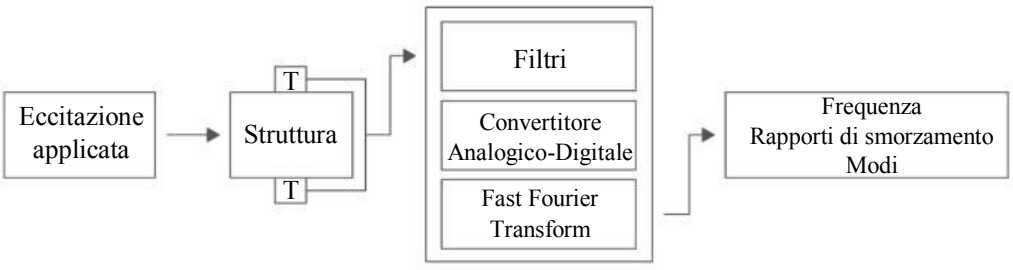


Figura 2.1 – Digramma di flusso dell'analisi modale sperimentale

2.2 CENNI SULLE TECNICHE DI CONTROLLO NON DISTRUTTIVO BASATO SULLE VARIAZIONI (CND-BV)

Le tecniche di controllo non distruttivo hanno come scopo la verifica dell'integrità di un componente o dell'intera struttura, identificando eventuali discontinuità geometriche quali fessure, cricche, porosità, senza invalidare la funzionalità del sistema esaminato. Questa valutazione riguarda sia la rilevazione di danni improvvisi o progressiva, sia il monitoraggio delle condizioni di esercizio o durante particolari situazioni ambientali quali, ad esempio, i terremoti a cui la struttura può essere soggetta. I metodi che analizzano la risposta dinamica della struttura sono delle tecniche globali di ispezione non distruttiva in quanto è possibile correlare la variazione dei parametri modali di una struttura, con la variazione del grado di integrità della struttura stessa.

Si consideri una struttura danneggiata, a parità di carico statico sollecitante: la struttura in oggetto si deforma maggiormente rispetto a quanto si sarebbe deformata da integra, il che equivale a dire che il danno ha incrementato la cedevolezza della struttura, incremento che è funzione delle sole caratteristiche geometriche del difetto.

Dalla relazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.1}$$

Essendo la rigidezza k il reciproco della cedevolezza c, si deduce che

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{cm}} \tag{2.2}$$

da cui è evidente come un aumento della cedevolezza della struttura, lasciando invariata la massa, si manifesti in una riduzione della pulsazione naturale della struttura stessa. Conseguentemente anche altre caratteristiche modali (smorzamento, modi propri di vibrare, …) subiscono una variazione in seguito alla presenza di un danno. Si può inoltre osservare che come la differenza tra la deformazione statica relativa alla struttura danneggiata e quella relativa alla struttura integra, a parità di carico, è solo funzione dell'incremento di cedevolezza, anche in campo dinamico la differenza tra la risposta della struttura danneggiata e quella della struttura

integra dipende solo dall'aumento di cedevolezza, e quindi dalle caratteristiche geometriche del danno.

Poiché le tecniche di CnD-BV correlano la variazione della risposta dinamica, dovuta a una variazione dei modi propri di vibrare e dello smorzamento, con le caratteristiche geometriche del danno, la maggior parte di queste tecniche tentano una stima di queste caratteristiche elaborando la risposta dinamica o la variazione dei parametri modali. È possibile stilare una classifica delle tecniche di CnD-BV in funzione delle informazioni che forniscono riguardo al danno.

2.3 CENNI DI TEORIA ALLA BASE DEL CND-BV

Attraverso i dati forniti dalle funzioni di risposta in frequenza si ha un mezzo che ci permette di calcolare la risposta di un sistema a più gradi di libertà ad una eccitazione costituita da un set di forze armoniche di differenti ampiezze e fasi, ma tutte alla stessa frequenza che nel caso generale si può scrivere

$$U(\Omega)e^{i\Omega t} = H(\Omega)P_0 e^{i\Omega t} \tag{2.3}$$

È necessario focalizzare l'attenzione su un diverso tipo di eccitazione-risposta diverso dal caso di eccitazione armonica, che esiste nella pratica e può essere analizzato con le stesse funzioni di risposta in frequenza. Si andranno a definire le basi matematiche di come le proprietà delle FRF possono essere ottenute a partire da misurazioni effettuate con prove di vibrazionali non sinusoidali, dove non esiste più una diretta relazione tra input e output. Il mezzo più semplice per calcolare la risposta in un caso come questo è la serie di Fourier.

2.3.1 ANALISI DI FOURIER PER VIBRAZIONI PERIODICHE E TRANSITORIE

Attraverso l'analisi di Fourier è possibile ricondurre una forzante $p(t)$ periodica di periodo T ad una combinazione lineare di forzanti armoniche. Utilizzando il principio di sovrapposizione è possibile determinare la risposta dinamica $u(t)$ del sistema lineare (sottoposto a forzante periodica) come la somma delle risposte dello stesso a ciascuna delle componenti armoniche in cui viene decomposta la forzante. È facile notare l'importanza dello studio della risposta

dell'oscillatore semplice all'azione di una forzante armonica. Una generica forzante $p(t)$ può essere espressa tramite una serie di funzioni trigonometriche di periodo T, detta *sviluppo in serie di Fourier*

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(n\Omega t) + b_n sen(n\Omega t)]$$

con

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.5}$$

definita *frequenza fondamentale*. L'n-esimo termine della serie

$$p_n(t) = a_n cos(n\Omega t) + b_n sen(n\Omega t) \tag{2.6}$$

è definito anche *armonica n-esima della funzione* $p(t)$. Le costanti a_0, a_n, b_n, che compaiono nella serie (2.4), sono denominati *coefficienti di Fourier* ed ammettono le seguenti rappresentazioni

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\, cos(n\Omega t)\, dt \tag{2.7}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\, sen(n\Omega t)\, dt$$

con t_0, che nei limiti dell'integrale, può assumere un qualsiasi valore della variabile t, solitamente uguale a $-\frac{T}{2}$, oppure 0. L'espressione di a_0 rappresenta il valore medio della funzione $p(t)$ nell'intervallo $[t_0, t_0 + T]$. È facile verificare che per una funzione periodica $p(t)$, di periodo T, vale la seguente relazione

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\, dt = \int_{0}^{T} p(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, dt \tag{2.8}$$

L'uguaglianza (2.4) è subordinata al verificarsi delle seguenti condizioni:

- La serie a destra della (2.4) deve essere convergente ad una somma finita per ogni valore di t appartenente al dominio di definizione della $p(t)$;

- La somma della serie deve essere uguale a $p(t)$.

I termini della serie (2.4) sono tutte funzioni periodiche di periodo T, quindi se tale serie è convergente, anche la sua somma è una funzione periodica di periodo T. Definita la funzione $p(t)$ nell'*intervallo fondamentale* (aperto), $]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[$ oppure $]0, T[$ è possibile dimostrare, sotto opportune condizioni, che la serie di Fourier è convergente in tale intervallo alla funzione $p(t)$ è la somma della serie ripete periodicamente, con periodo T, i valori assunti nell'intervallo fondamentale. È possibile utilizzare la serie di Fourier per rappresentare la funzione $p(t)$ anche esternamente a tale intervallo supponendo che la funzione sia prolungabile con periodo T. Nel caso di forzante non periodica (con $T \to \infty$) è necessario utilizzare al posto della *serie di Fourier,* l'*integrale di Fourier*, ossia passare dal caso discreto a quello continuo.

In questo processo al limite, le frequenze discrete si avvicinano sempre più l'una all'altra fino a diventare un'unica variabile continua e la serie di Fourier diventa appunto l'integrale di Fourier. Per ottenere l'integrale di Fourier è necessario partire dalla serie di Fourier nella sua forma complessa

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\Omega) e^{in\Omega t} \tag{2.9}$$

dove

$$A_n(\Omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-in\Omega t} dt \tag{2.10}$$

La coppia (2.9), (2.10) viene definita *trasformata discreta di Fourier*. Se si introducono le seguenti notazioni

$$n\Omega = \Omega_n \tag{2.11}$$

$$(n+1)\Omega - n\Omega = \Omega = \frac{2\pi}{T} = \Delta\Omega_n \tag{2.12}$$

la (2.9), (2.10) possono essere riscritte

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}(TA_n) e^{i\Omega_n t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (TA_n) e^{i\Omega_n t}\Delta\Omega_n \tag{2.13}$$

$$TA_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)e^{-i\Omega_n t}\,dt \tag{2.14}$$

Se si considera il limite per $T \to \infty$ e si elimina l'indice n, in modo che la variabile discreta Ω_n diventi la variabile continua Ω, si può sostituire con l'integrazione ottenendo

$$p(t) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\Omega_n \to \infty}} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(TA_n)e^{i\Omega_n t}\Delta\Omega_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \tag{2.15}$$

essendo

$$P(\Omega) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\Omega_n \to \infty}} (TA_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,e^{-i\Omega t}dt \tag{2.16}$$

In sintesi, per $T \to \infty$, l'intervallo tra le armoniche che compongono la sommatoria tende a zero e la sommatoria (2.13) tende all'integrale (2.15). La rappresentazione della $p(t)$ mediante un integrale è possibile purché l'integrale (2.15) sia convergente. Per le (2.15), (2.16) è possibile fare le seguenti affermazioni generali: una funzione $p(t)$ definita per $-\infty < t < +\infty$, che soddisfa in tale dominio le condizioni di Dirichelet e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|dt < \infty \tag{2.17}$$

ammette la seguente *rappresentazione integrale di Fourier*

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega \tag{2.18}$$

con

$$P(\Omega) = F[p(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e^{-i\Omega t}dt \tag{2.19}$$

La funzione $P(\Omega)$ è denominata *trasformata di Fourier della funzione* $p(t)$ e $p(t)$ è chiamata *trasformata inversa o antitrasfromata di Fourier della funzione* $P(\Omega)$.

$P(\Omega)$ analizza il contenuto in armoniche di $p(t)$, la (2.18) ricostruisce $p(t)$ sommando tutte le armoniche in cui era stata scomposta. Per analisi armonica di una funzione $p(t)$ si intende la determinazione dei coefficienti della sua serie di Fourier associata, ovvero quando si precisa il contributo delle armoniche alla composizione della funzione. Il grafico che rappresenta, in

corrispondenza dei valori (discreti) delle frequenze, il corrispondente valore del coefficiente, è definito *spettro della funzione* $p(t)$. È chiaro che se la serie converge rapidamente, i valori dei coefficienti delle armoniche vanno rapidamente diminuendo al crescere della frequenza; questo significa che le *armoniche superiori* hanno poca importanza rispetto alle *armoniche inferiori* nello studio della funzione.

La funzione $P(\Omega)$ (2.19) è in genere complessa

$$P(\Omega) = \mathrm{Re}\, P(\Omega) + \mathrm{Im}\, P(\Omega) = A(\Omega)e^{i\varphi(\Omega)} \tag{2.20}$$

con $A(\Omega)$ *spettro di Fourier* della funzione $p(t)$, $A^2(\Omega)$ *spettro d'energia* e $\varphi(\Omega)$ angolo di fase. È importante ricordare la proprietà della derivata n-esima della funzione $p(t)$: si può dimostrare che se esiste la trasformata di Fourier della derivata n-esima della funzione $p(t)$ questa soddisfa l'uguaglianza

$$F\left[\frac{d^n p(t)}{dt^n}\right] = (i\Omega)^n P(\Omega) \tag{2.21}$$

con $P(\Omega)$ definita nella (2.19).

È proprio nella soluzione dei problemi dinamici che si ha una importante applicazione della (2.21). Consideriamo ad esempio l'equazione del modo di un oscillatore semplice di massa m, costante elastica k con coefficiente di smorzamento c, sottoposto ad una forzante esterna $p(t)$ non necessariamente periodica, con $u(t)$ lo spostamento

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{2.22}$$

Se indichiamo la trasformata di Fourier di $u(t)$ con

$$U(\Omega) = F[u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-i\Omega t} dt \tag{2.23}$$

dalla (2.21) si ottiene

$$\begin{aligned} F[\dot{u}(t)] &= i\Omega U(\Omega) \\ F[\ddot{u}(t)] &= -\Omega^2 U(\Omega) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Considerando la trasformata di Fourier della (2.22) ed utilizzando le (2.23) e (2.24) si ha

$$[-m_\Omega^2 + iC\Omega + k]U(\Omega) = P(\Omega) \tag{2.25}$$

con $P(\Omega)$ definita nella (2.19). La (2.25) può anche scriversi

$$U(\Omega) = H(\Omega)P(\Omega) \tag{2.26}$$

con $U(\Omega)$ trasformata di Fourier della risposta e

$$H(\Omega) = \frac{1}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} \tag{2.27}$$

è la funzione complessa della risposta in frequenza. La (2.26) afferma che la risposta del sistema nel dominio della frequenza è uguale al prodotto della funzione di risposta in frequenza per la trasformata Fourier della forzante.

Per ottenere la risposta del sistema nel dominio del tempo occorre antitrasformare la (2.26), per cui

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\Omega)P(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \tag{2.28}$$

Si è visto come, definendo una forzante $p(t)$ in serie di Fourier, è possibile determinare la risposta del sistema soggetto a tale forzante, applicando il principio di sovrapposizione, come la sommatoria delle risposte alle singole armoniche forzanti; quindi utilizzando i corrispondenti dati delle FRF, calcolati alle specifiche frequenze presenti nello spettro della forzante, è possibile calcolare le corrispondenti di frequenza della risposta di interesse,

Va notto come, sebbene la risposta contenga nel suo spettro esattamente le stesse frequenze della forzante, le ampiezze relative delle carie componenti differiscono nei due casi in quanto i dati delle FRF variano considerabilmente con la frequenza. In questo modo si ottiene che le risposte nel dominio del tempo sono periodiche con lo stesso periodo T della forzante, avendo però una forma piuttosto diversa da essa e tra di loro (Figura 2.2).

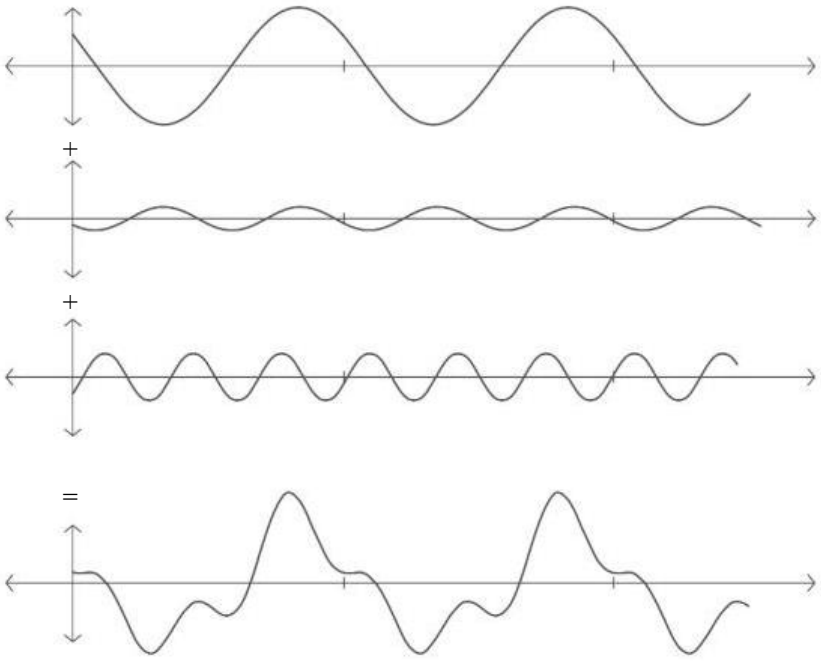


Figura 2.2 – Una risposta prodotta da un sistema ad una forzante periodica e sue componenti sinusoidali, con stesso periodo T ma diversa ampiezza per diversi valori delle frequenze Ω

In generale per valutare l'integrale (2.28) è necessario ricorrere agli integrali di contorni in campo complesso e questo può risultare una remora all'uso della trasformata di Fourier per la determinazione della risposta di un sistema dinamico. Tuttavia, tale trasformata è di particolare importanza quando si è interessati più alla risposta in frequenza che alla risposta nel tempo e ciò avviene nel caso di forza esterna di natura non deterministica, ad esempio nelle vibrazioni casuali. È in effetti possibile determinare le proprietà delle FRF di un sistema a partire dalle misurazioni di forzante e risposta, calcolando le trasformate di Fourier di entrambi i segnali di input e output. Una volta calcolate le due trasformate, il rapporto di queste due funzioni, entrambe nel dominio della frequenza, restituisce la FRF. Nella pratica è più comune calcolare le *trasformate discrete di Fourier (DFT)*.

2.3.2 ANALISI DI FOURIER PER VIBRAZIONI CASUALI

Non è possibile trattare il caso di vibrazioni casuali (il più complesso tipo di vibrazione) come il precedente in quanto le proprietà di un segnale casuale violano il teorema di Dirichlet. Come risultato si ha che né segnale di risposta, né quello di eccitazione possono essere soggetti a una valida definizione attraverso la trasformata di Fourier, per cui è necessario riferirsi ad un diverso

approccio. È necessario introdurre e definire due serie di parametri che sono utilizzati per descrivere i segnali casuali: le *funzioni di autocorrelazion*e (nel dominio del tempo) e le *funzioni di densità spettrale*.

2.3.2.1 FUNZIONI DI AUTOCORRELAZIONE E AUTOSPETTRO, CROSS-CORRELAZIONE E CROSS-SPETTRO

Se $x(t)$ e $y(t)$ (Figura 2.3) sono due funzioni della variabile t si definisce *correlazione* tra $x(t)$ e $y(t)$ il valore medio del prodotto $[x(t)y(t)]$ delle ordinate delle due funzioni

$$\text{à } \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t)\, dt \tag{2.29}$$

Se poniamo $x(t) = p(t)$ e $y(t) = p(t+\tau)$ nella (2.29) si ottiene la funzione dell'intervallo di tempo τ che prende il nome di *funzione di autocorrelazione* di $p(t)$ (Figura 2.4 b)

$$R_{pp}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)p(t+\tau)\, dt \tag{2.30}$$

Tale funzione dà un'informazione sulla dipendenza del valore della forzante $p(t)$ all'istante t, dal valore della stessa funzione ad un altro istante $t+\tau$.

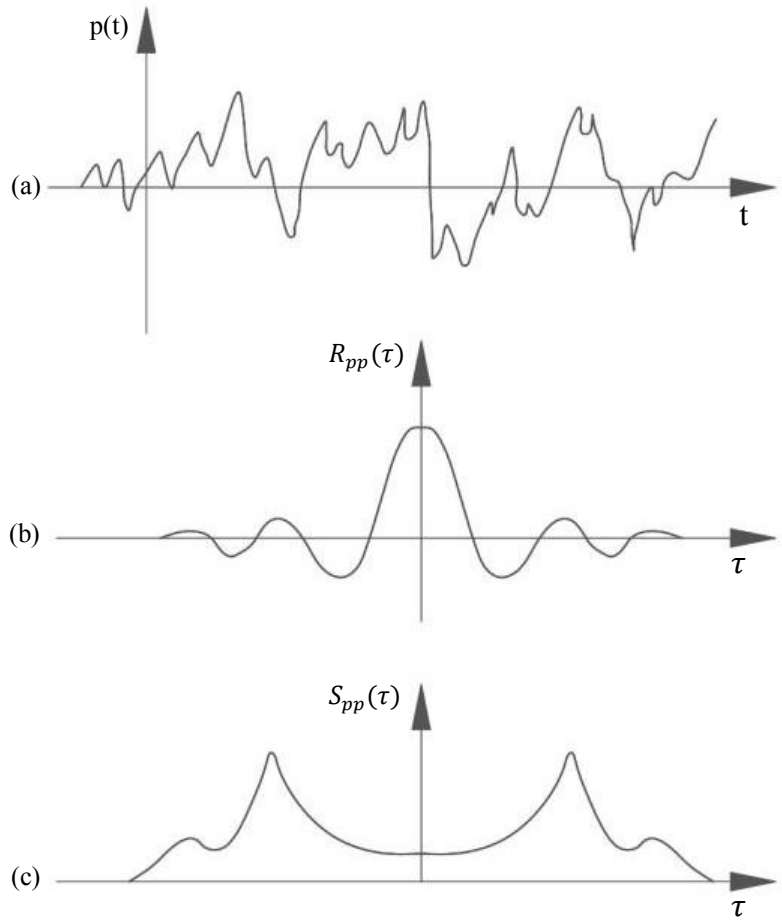


Figura 2.3 – a) Forzante casuale nel dominio del tempo; b) Funzione di autocorrelazione, c) Funzione di densità spettrale.

La funzione di correlazione al contrario della funzione $p(t)$ soddisfa i requisiti per la trasformazione di Fourier; è quindi possibile ottenere la trasformata di Fourier come precedentemente descritto al §2.3.1.

La funzione che si ottiene dalla trasformazione di Fourier è definita funzione di *densità spettrale, auto-spettro o densità di potenza spettrale* di $p(t)$ (Figura 2.4 c). Mentre la funzione di autocorrelazione dà un'informazione sulle proprietà della funzione $p(t)$ nel tempo, la funzione di densità spettrale fornisce tale informazione nel dominio della frequenza.

Essendo soddisfatte le condizioni per l'esistenza per l'esistenza della trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_{pp}(\tau)$ (2.30), allora la sua trasformata

$$S_{pp}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{pp}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau \tag{2.31}$$

è la funzione di densità spettrale di $p(t)$.

La funzione di autocorrelazione può anche scriversi come la trasformata inversa della funzione di densità spettrale.

$$R_{pp}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{pp}(\Omega)e^{i\Omega\tau}d\Omega \tag{2.32}$$

Un simile concetto può essere applicato se poniamo $x(t) = u(t)$ e $y(t) = p(t+\tau)$ nella (2.29) si ottiene la funzione dell'intervallo di tempo τ che prende il nome di *funzione di cross-correlazione:*

$$R_{up}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)p(t+\tau)\,dt \tag{2.33}$$

Tale funzione dà un'informazione sulla dipendenza del valore della risposta $u(t)$ all'istante t, dal valore della forzante $p(t)$ ad un altro istante $t+\tau$.

La funzione di cross-correlazione soddisfa i requisiti per la trasformazione di Fourier; è quindi possibile ottenere la trasformata di Fourier come precedentemente descritto al §2.3.1.

La funzione che si ottiene dalla trasformata di Fourier è definita *funzione di cross-densità spettrale o cross-spettro*

$$S_{up}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{up}(\tau)e^{-i\Omega\tau}\,d\tau \tag{2.34}$$

La funzione di cross-correlazione può anche scriversi come la trasformata inversa della funzione di cross-spettro

$$R_{up}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{up}(\Omega)e^{i\Omega\tau}\,d\Omega \tag{2.35}$$

Le funzioni di cross-correlazione sono reali, ma non sempre pari e le funzioni di cross-spettro diversamente da quelle di auto-spettro sono generalmente funzioni complesse della frequenza con la particolare proprietà che

$$S_{up}(\Omega) = S_{\mathrm{up}}^{*}(\Omega) \tag{2.36}$$

Ora che si sono stabiliti i parametri necessari a descrivere i processi causali in generale, è possibile definire le relazioni input-output per sistemi sottoposti a vibrazioni casuali. Non verrà presentata l'analisi completa che porta alla definizione dell'equazione finale che permette di

calcolare la risposta a partire da eccitazioni note, piuttosto si presenteranno i principali passaggi, trascurando i dettagliati procedimenti algebrici.

L'analisi è basata sulla generale relazione eccitazione-risposta nel dominio del tempo descritta dall'integrale di Duhamel

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t')p(t')\, dt' \tag{2.37}$$

che fornisce la risposta $u(t)$ al tempo t di un sistema, caratterizzato da una sua pulsazione naturale e da un suo smorzamento e soggetto ad una forzante qualsiasi $p(t')$. La funzione $h(t - t')$ che appare nella (2.37), rappresenta la risposta $u(t)$ ad un impulso unitario applicato al sistema al tempo $t'(t > t')$. Pertanto, la (2.37) dà la risposta di un sistema di caratteristiche dinamiche assegnate, ad una eccitazione di forma qualsiasi, come la sovrapposizione delle risposte di una successione continua di impulsi.

Si può dire che l'integrale di Duhamel definisce un legame diretta tra la forzante $p(t)$ e la risposta $u(t)$, ad ogni funzione $p(t)$ fa corrispondere una funzione $u(t)$, essendo $h(t - t')$ assegnata. Utilizzando l'integrale di Duhamel è possibile ottenere un'espressione per $u(t)$ ed una per $u(t + \tau)$ e così calcolare la funzione di autocorrelazione di $u(t)$

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t + \tau)\, dt \tag{2.38}$$

Manipolando questa equazione è possibile descrivere la funzione di autocorrelazione della risposta in termini della corrispondente proprietà della forzante $R_{pp}(\tau)$ ma il risultato è un complicato triplo integrale nel dominio del tempo il cui utilizzo risulta impraticabile.

Comunque, questa equazione può essere trasformata nel dominio della frequenza nella più agevole forma

$$S_{uu}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_{pp}(\Omega) \tag{2.39}$$

Sebbene la (2.39) appaia di semplice utilizzo non restituisce una descrizione completa delle condizioni di vibrazione casuali; inoltre non può essere utilizzata per determinare le funzioni di risposta in frequenza a partire dalle misurazioni di eccitazione-risposta in quanto contiene solamente il modulo $H(\Omega)$, omettendo le informazioni riguardo alla fase. È necessaria quindi

una seconda equazione che si può ottenere a partire da un'analisi simile, basata sulla cross-correlazione tra eccitazione e risposta, la cui forma nel dominio della frequenza è

$$S_{pu}(\Omega) = H(\Omega)S_{pp}(\Omega) \tag{2.40}$$

o in alternativa

$$S_{uu}(\Omega) = H(\Omega)S_{up}(\Omega) \tag{2.41}$$

2.3.2.2 DERIVAZIONE DELLE FRF DA SEGNALI DI VIBRAZIONE CAUSUALI

Le equazioni (2.40), (2.41) forniscono le basi per un metodo che consente di determinare le proprietà delle FRF di un sistema a partire dalla misurazione e conseguente analisi di un test di vibrazione casuale. Utilizzando, indifferentemente, una delle due è possibile ottenere una semplice formula per determinare le funzioni di risposta in frequenza a partire da una stima delle principali densità spettrali.

Dalla (2.40) si ottiene

$$H_1(\Omega) = \frac{S_{pu}(\Omega)}{S_{pp}(\Omega)} \tag{2.42}$$

mentre dalla (2.41) si ottiene

$$H_2(\Omega) = \frac{S_{uu}(\Omega)}{S_{up}(\Omega)} \tag{2.43}$$

La formulazione della FRF nel caso di eccitazioni casuali è estremamente più complicata rispetto a quello di vibrazioni periodiche, questo perché la risposta ad una eccitazione periodica in ogni istante può essere correlata all'eccitazione stessa nello stesso istante; mentre nelle eccitazioni casuali la risposta in ogni istante non è interamente legata alla forzante nello stesso istante. Per questo motivo la FRF non è semplicemente il rapporto delle trasformate di Fourier per ogni istante discretizzato.

2.3.2.3 COERENZA

L'analizzatore ha il compito di stimare le varie densità spettrali o auto spettri, sebbene si debba ricordare che questi parametri non possono essere misurati con esattezza avendo a disposizione

soltanto un numero finito di dati. Si ha comunque la possibilità di effettuare un controllo incrociato sui risultati utilizzando più di una tra le equazioni (2.39), (2.40) e (2.41): si può ad esempio calcolare sia $H_1(\Omega)$ (2.42) che $H_2(\Omega)$ (2.43), preparati all'eventualità di non ottenere due risultati identici (come dal punto di vista teorico dovrebbero essere), in quanto vengono utilizzati dati diversi per ottenere le due funzioni. A questo proposito è opportuno introdurre la quantità γ^2, denominata *coerenza*

$$\gamma^2 = \frac{H_1(\Omega)}{H_2(\Omega)} \tag{2.44}$$

valore sempre inferiore o uguale a 1.

Al fine di valutare la bontà delle misurazioni è opportuno verificare che il valore della coerenza sia prossimo all'unità, in tal caso si ha la conferma della correttezza delle misurazioni effettuate.

2.4 GENERALITÀ

L'ipotesi fondamentale che sta alla base dell'analisi delle tecniche sperimentali è quella di linearità, ossia la supposizione che le strutture testate si comportino in modo lineare, con risposta sempre proporzionale al grado di eccitazione. Tale ipotesi implica:

- Sovrapponibilità: una FRF è indipendente dal tipo di eccitazione usata (sinusoidale, a banda larga o ad impatto;
- Omogeneità: una FRF è indipendente dal livello di eccitazione impartito;
- Reciprocità: legata alla simmetria dei sistemi lineari, descritta dal teorema di Maxwell, implica che la FRF misurata tra due qualsiasi dei gradi di libertà, è indipendente dal fatto che uno di essi venga usato per l'applicazione dell'eccitazione o per la misura di risposta.

Questa sono tre importanti proprietà delle funzioni di risposta in frequenza FRF misurate sperimentalmente.

In genere, l'ipotesi di linearità risulta valida nel campo di piccole deformazioni. Oltre a tale ipotesi, si ipotizza che le strutture esaminate siano:

- Stabili: la vibrazione cesserà alla rimozione dell'eccitazione;
- Causali: la vibrazione è causata solo dall'eccitazione;

- Invariabili nel tempo: durante le misure le caratteristiche dinamiche rimarranno invariate. Tuttavia, nel caso di strutture leggere, il peso stesso del trasduttore può incidere sulle proprietà dinamiche, provocando in genere un abbassamento delle frequenze modali, mentre, in caso di lunghi periodi di prova, alcune condizioni ambientali (per esempio la diminuzione di temperatura) possono modificare le proprietà strutturali.

Si procede di seguito all'analisi delle tecniche sperimentali di misura delle FRF, con particolare attenzione a quella utilizzata nel presente lavoro di tesi.

2.5 TECNICHE DI MISURA DELLE FRF

Le principali tecniche di misurazioni delle vibrazioni possono essere divise in due gruppi in base al tipo dato registrato:

- Misurazione di un solo parametro (di solito la risposta);
- Misurazione dei parametri di input e output.

Il primo gruppo contiene metodi che non permettono di effettuare un'analisi completa, in quanto, misurando solo la risposta, non si è in grado di affermare se un livello di risposta particolarmente elevato sia dovuto al livello di eccitazione impartito o alla risonanza della struttura.

Il secondo gruppo contiene metodi capaci di dedurre le proprietà dinamiche del sistema direttamente dall'analisi dei dati misurati. Secondo il rapporto di base:

INGRESSO	RISPOSTA	=	PROPRIETÀ

è chiaro che solo quando due dei tre termini in questa equazione sono stati misurati, può essere definito del tutto ciò che sta accadendo nella vibrazione di un oggetto di prova. Se misuriamo solo la risposta, non siamo in grado di dire se un livello di risposta particolarmente elevato è dovuto a una forte eccitazione o ad una risonanza della struttura.

Tuttavia, entrambi i tipi di misurazione hanno le loro applicazioni e gran parte delle attrezzature e degli strumenti utilizzati sono gli stessi in entrambi i casi.

Il metodo dell'eccitazione del punto singolo, che permette di ricavare le funzioni di risposta FRF semplicemente dividendo le risposte misurate per la forza di eccitazione misurata è stato il metodo utilizzato nella presente tesi. Nello specifico, le funzioni di risposta in frequenza sono

state ricavate con un analizzatore bicanale FFT, fornito dal programma PULSE BK CONNECT 2018.

La disposizione generale di un sistema di misura delle FRF è riportata nello schema illustrato in Figura 2.4.

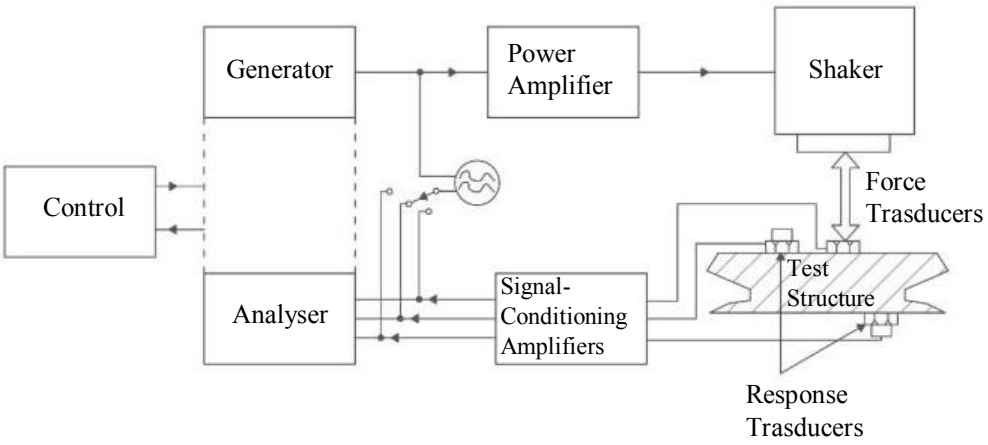


Figura 2.4 – Sistema generale di misura delle FRF (D.J. Ewins, 2000)

Gli elementi fondamentali che costituiscono il sistema sono:

- Meccanismo di eccitazione;
- Sistema di trasduzione;
- Analizzatore.

Un altro aspetto da considerare per ottenere risultati accurati è la corretta preparazione della struttura, ovvero il tipo di supporto su cui vengono effettuate le prove.

I seguenti aspetti richiedono particolare attenzione in modo da garantire un'elevata qualità di acquisizione di dati:

a) gli aspetti meccanici di supporto e di eccitazione della struttura
b) corretta trasduzione delle grandezze da misurare – forza di ingresso e di risposta
c) trattamento del segnale appropriato per il tipo di test utilizzato.

Tipologia di supporto

Prima di un test modale, dobbiamo prendere in considerazione diversi modi di sostenere la struttura misurata. In generale, vi sono tre opzioni di supporto corrispondenti a lo scopo della prova modale e le limitazioni causate dalle condizioni operative, esse non rispettivamente:

- Libero;
- Messa a terra;
- In situ (in condizioni operative).

Meccanismo di eccitazione

La modalità di eccitazione della struttura dipende dalla prova modale, dai requisiti di precisione e l'intervallo di frequenza in cui i parametri modali devono essere determinati. Il meccanismo di eccitazione è in genere costituito da:

- Amplificatore di potenza: per azionare il dispositivo utilizzato per mettere in vibrazione la struttura;
- Eccitatore: i due più comuni modi di eccitare una struttura si basano sull'utilizzo di un generatore di vibrazione (*shaker*), ancorato alla stessa o di un martello strumentato.

Trasduttore di forza e amplificatori

Fanno parte di questo sistema di trasduzione i trasduttori e amplificatori di condizionamento. I trasduttori usati per il rilevamento della forza applicata e la risposta della struttura dovrebbero incidere il meno possibile sui risultati e la loro efficacia deve essere adeguata al campo di frequenza da misurare. La misura delle forze eccitanti e delle risposte può essere effettuata con diversi tipi di trasduttori. Attualmente, i trasduttori piezoelettrici sono i più utilizzati in entrambe le applicazioni, anche se gli *strain gauges* sono spesso più efficaci. Infatti, il problema principale dei trasduttori piezoelettrici è associato al fatto di dover assicurare un'interferenza minima con la struttura insieme alla capacità di fornire misurazioni adeguate nel campo di frequenza richiesto dal test.

La forza determinata dai traduttori è sempre leggermente diversa da quella trasmessa dalla struttura, in quanto una frazione di forza percepita viene impiegata per il movimento e l'innesco del funzionamento del trasduttore.

Gli amplificatori di condizionamento servono per rafforzare i segnali generati dai trasduttori, in genere deboli.

Analizzatore

La funzione dell'analizzatore è quella di misurare i vari segnali sviluppati dai trasduttori. Esistono molti tipi di analizzatori, la cui scelta dipende dal tipo di eccitazione impartita alla struttura. Per le prove sperimentali oggetto della presente tesi è stato utilizzato un analizzatore bicanale FFT (*Fast Fourier Trasformation*).

2.6 CONDIZIONI DI VINCOLO

Prima di un test modale, un'operazione preliminare alla misurazione delle FRF è considerare i diversi modi per sostenere la struttura misurata, scegliendo se testare il sistema in condizione libera o vincolata a terra. La scelta dipende da numerosi fattori, come per esempio la necessità di correlare i risultati della prova alla teoria.

2.6.1 STRUTTURA LIBERA

Tale metodologia è la più semplice da realizzare ed è preferibilmente utilizzata ogni volta che si vuole correlare il modello sperimentale con quello teorico. Per struttura libera si intende una struttura i cui modi di corpo rigido sono determinati solamente dalle proprietà di inerzia e di massa, essa sospesa nello spazio, non vincolata al suolo in nessuna delle sue coordinate. In analisi teorica, un corpo sostenuto liberamente esibisce 6 modi del corpo rigido, cioè 3 spostamenti in direzione di 3 coordinate e 3 rotazioni intorno agli assi delle coordinate. Questi sei modalità hanno la frequenza naturale pari a zero. In pratica, il supporto libero è realizzato sia mettendo il corpo su un pad molto morbida (per esempio schiuma) o sospenderlo su molle morbide. È ovvio che le frequenze di modi del corpo rigido non saranno pari a zero in quel caso, ma i valori sono molto bassi. Tale supporto è considerata libero se la massima frequenza naturale di modi del corpo rigido è inferiore al 10% del valore della più bassa deformazione frequenza naturale.

In tal modo, in queste condizioni è possibile determinare i modi di corpo rigido e le proprietà di massa e inerzia. Nella realtà è possibile creare un sistema di sospensione che approssima

molto bene la condizione libera tramite l'utilizzo di leggere molle elastiche. Per assicurare la minima interferenza del sistema di sospensione sulle condizioni di vincolo della struttura occorre posizionare le sospensioni il più vicino possibile ai punti nodali del modo. Inoltre, è opportuno che i cavi di sospensione siano posizionati in modo ortogonale alla direzione di vibrazione del primo modo.

La condizione libera presenta evidenti vantaggi, dovuti principalmente alla facilità di realizzazione in ambito pratico, la scelta di come testare la struttura dipende da una serie di fattori, tra cui le:

- dimensione dell'oggetto da testare;
- l'ambiente cui la struttura sarà sottoposta nella sua vita utile;
- rispondenza alle reali condizioni di installazione.

2.6.2 STRUTTURA VINCOLATA

Per struttura vincolata a terra si intende una struttura con alcuni punti selezionati ancorati al suolo. Si richiede rigida chiusura del test in alcuni punti. Questa condizione di prova risulta più complicata da realizzazione nel caso pratico, poiché è difficile trovare una base sufficientemente rigida che garantisca la necessaria messa a terra, infatti un fissaggio ideale è impossibile da realizzare, contrariamente al caso teorico, in cui è sufficiente eliminare alcune coordinate. Tutte le strutture hanno un'impedenza finita (mobilità diversa da zero) e quindi non possono essere considerate completamente rigide. Le differenze tra modello teorico e dati sperimentali provengono in gran parte da ineguali condizioni al contorno.

Occorrono molte precauzioni nella progettazione della struttura di supporto per approssimare correttamente le condizioni di vincolo, inoltre è importante assicurarsi che l'ancoraggio non danneggi la struttura, provocando irrigidimenti locali o altre distorsioni. A tal proposito basta effettuare semplici controlli, facendo in modo di ottenere risultati ripetibili.

2.7 ECCITAZIONE DELLA STRUTTURA

La modalità di eccitazione della struttura dipende dallo scopo della prova modale, dai requisiti di precisione e l'intervallo di frequenza in cui i parametri modali devono essere determinati. La

scelta della forma di eccitazione (sinusoidale, transitoria, casuale) dipende da una serie di parametri:

- Applicazioni: se la prova è svolta con il solo scopo di misurare le frequenze proprie della struttura la precisione richiesta è molto inferiore a quella necessaria in caso di definizione di un modello matematico. Ciò si traduce anche nel minor tempo richiesto per la prova
- Controllo dello spettro: è la capacità di limitare l'eccitazione nella gamma di frequenza di interesse. Eccitando la struttura solo nella gamma di frequenza di interesse, la gamma dinamica della misura viene ridotta al minimo, con i vantaggi di un migliore rapporto segnale – rumore e dati più puliti;
- Fattore di cresta: è il rapporto tra il picco e la deviazione standard del segnale. Alti fattori di cresta causano perdita di parte del segnale, poiché il rapporto segnale – rumore diminuisce, e non linearità nella struttura;
- Linearità della struttura: se una struttura mostra comportamento non lineare si cerca in genere di fare la migliore approssimazione lineare;
- Velocità di prova.

I vari eccitatori utilizzabili possono essere suddivisi in eccitatori con contatto e senza contatto. Il primo gruppo comprende eccitatori di diversi tipi, che rimangono applicati alla struttura per tutta la durata della prova, mentre il secondo include strumenti in grado di provocare la vibrazione della struttura senza contatto con la stessa (eccitatore elettromagnetico) o rimanendo in contatto per poco tempo (martello). Un'altra suddivisione viene fatta prendendo in considerazione il tipo di impatto. L'eccitazione può avvenire tramite eccitatori dinamici (dal segnale armonico, segnale casuale o altri tipi), o eccitatori ad impulso. Ma una più chiara classificazione suddivide gli eccitatori come fissi e non fissi.

I principali tipi di eccitatori non fissi sono:

- Martelli;
- Pendoli d'impatto.

I principali tipi di eccitatori fissi sono:

- Eccitatori elettromagnetici;
- Eccitatori elettroidraulici;
- Masse rotanti eccentriche.

Misura della forza

L'esatta forza applicata può essere misurata solo se il trasduttore è direttamente applicato sulla struttura: nel caso di eccitazione ad impatto, infatti, la forza misurata non è esattamente uguale alla forza realmente applicata.

La forza di eccitazione viene in genere misurata da un trasduttore piezoelettrico, in cui viene trasmessa una frazione di forza. In particolare, la forza d'impatto fornita dal martello è sempre più grande di quella misurata dal trasduttore a causa dell'inerzia della punta. La massa effettiva è definita come la massa rigida che deve avere la stessa accelerazione lineare della massa sotto la medesima forza.

I trasduttori di forza piezoelettrici offrono diversi vantaggi, tra cui:

- Pesi e dimensioni ridotte (minore smorzamento aggiunto);
- Linearità;
- Ampia gamma dinamica (120dB);
- Ampia gamma di frequenza.

Installazione dell'eccitatore

L'istallazione dell'eccitatore sulla struttura deve avvenire in modo tale che la forza di eccitazione agisca sul solo punto desiderato e nella direzione voluta. Nel punto di applicazione la struttura deve essere libera di vibrare negli altri cinque gradi di libertà, senza impedimenti.

Quando si utilizza un eccitatore elettromagnetico o elettroidraulico, è necessario collegare lo shaker guida alla struttura, solitamente incorpora un trasduttore di forza. Devono essere prese alcune precauzioni al fine di evitare l'introduzione di eccitazioni indesiderati o modifica involontaria della struttura.

2.7.1 ECCITAZIONE AD IMPATTO

Le prove dinamiche sperimentali oggetto della presente tesi, sono state eseguite tramite la tecnica di eccitazione ad impatto, tramite l'utilizzo di un apposito martello strumentato (Figura 2.7). Pertanto, maggiore attenzione viene conferita a questo tipo di eccitazione. Sebbene questo tipo di prova abbia esigenze maggiori nella fase di analisi del processo di misurazioni, risulta

essere un mezzo relativamente semplice per mettere in vibrazione la struttura; infatti richiede un'attrezzatura minima e tempi di set-up limitati che la rendono adatta a test rapidi o a misure sul campo.



Figura 2.5 – Martello strumentato Brüel & Kjær, Type 8202 nella sua confezione, con le 3 punte disponibili e la massa aggiuntiva

L'eccitazione ad impatto presenta diversi vantaggi:

- Velocità (sono necessarie poche medie);
- Facilità di realizzazione;
- Economicità;
- Nessuna apparecchiatura elaborata;
- La struttura non è caricata da nessuna massa variabile, senza spostamenti delle frequenze modali da una misura all'altra.

Tuttavia, questo tipo di eccitazione ha anche diversi svantaggi:

- Altro fattore di cresta, che comporta la non idoneità di questo tipo di eccitazione per sistemi non lineari;
- Nel caso di grandi strutture è necessario applicare forze con picchi molto elevati, con pericolo di danneggiamento della struttura nel punto di impatto;
- Segnale deterministico, che obbliga ad avere una funzione di coerenza senza dispersioni o comportamenti non lineari;
- La tecnica non è adatta all'analisi con zoom.

L'apparecchiatura è costituita da un martello, fornito con una serie di punte e teste differenti, aventi la funzione di estendere i range di frequenza e di forza. A seconda della struttura testata esistono anche martelli di diverse dimensioni.

Il martello strumentato risulta composto da una cella di carico Bruel & Kjaer (per la precisione si tratta della Force Transducer/Impact Hammer Type 8202 dell'azienda Bruel & Kjaer), la quale presenta elevata sensibilità ai carichi bassi. I materiali di cui è composta sono titanio e acciaio e per questo ha un peso minore rispetto agli altri sensori disponibili.

Esternamente si presenta come un cilindro alle cui basi sono avvitati alcuni bulloni di precarico con fori filettati, utilizzati nell'alloggiamento degli afferraggi per l'astina eccitatrice.

L'errore di linearità rimane sempre dell'ordine dell'1% sia in eccesso che in difetto.

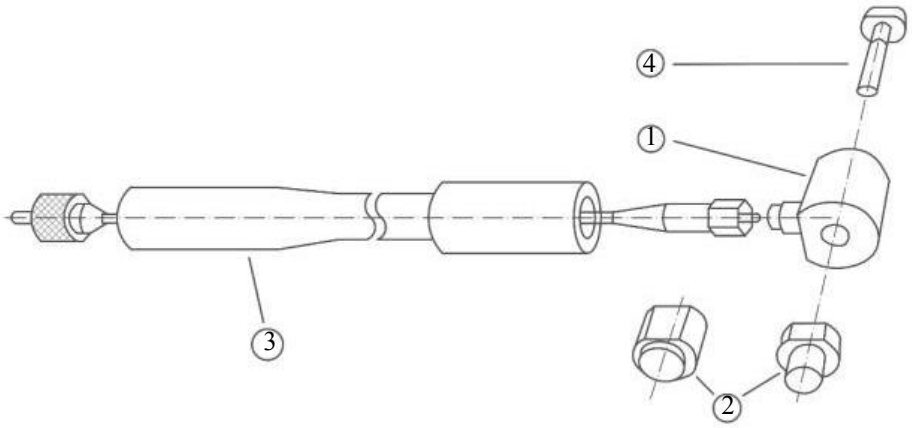


Figura 2.6 – Configurazione martello strumentato: 1) cella di carico; 2) testa del martello; 3) impugnatura; 4) vite di fissaggio

Il martello è fornito già di un trasduttore di forza, che permette di misurare la forza applicata dalla punta, supposta uguale ed opposta a quella subita dalla struttura, mentre all'estremità del trasduttore viene applicata una massa aggiuntiva, per favorire il controllo della rigidità.

È importante sottolineare che la forza misurata dal trasduttore di forza, data dal prodotto della massa di impatto (dietro il trasduttore) per l'accelerazione, è leggermente inferiore rispetto alla forza realmente impartita, pari al prodotto tra la massa totale del martello (inclusi trasduttore di forza e punta) e l'accelerazione di impatto.

La forza reale è quindi la forza misurata, moltiplicata per il rapporto massa totale / massa dietro il trasduttore piezoelettrico.

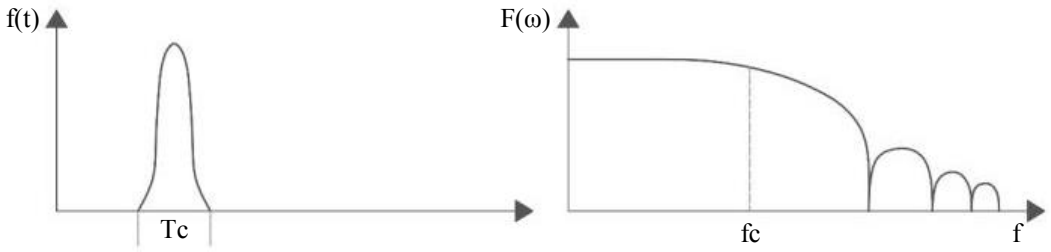


Figura 2.7 – Andamento nel tempo e spettro in frequenza di un tipico impulso dovuto a impatto da martello

La forma d'onda prodotta da un impatto è un evento transiente, mentre lo spettro ha un'ampiezza massima a 0 Hz, decrescente con l'aumentare della frequenza, ma con un andamento più o meno piano fino alla frequenza f_c, che segue il termine della gamma di frequenza utile.

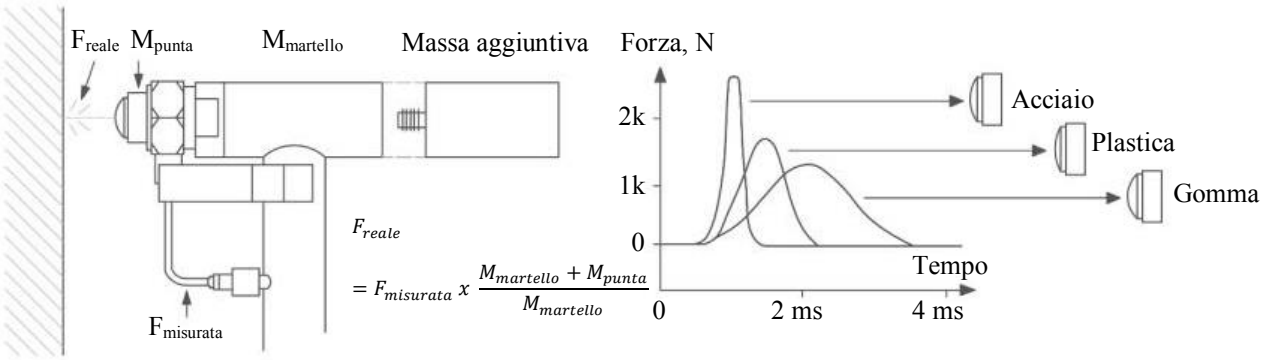


Figura 2.8 – Martello strumentato ed andamento dell'impulso in relazione alla punta (Brüel & Kjær).

Per innalzare l'intervallo di frequenza occorre indurre un impulso di minore durata. La durata dello spettro di un impatto è strettamente collegata alla massa e alla rigidità del martello e della struttura da testare. Maggiore è la rigidità delle superfici, minore è la durata dell'impatto e maggiore è l'intervallo di frequenza (Figura 2.8). Per questo motivo il martello è fornito con diversi tipi di punta (acciaio, plastica, gomma) e teste. Nel caso si usi un martello piccolo su una struttura solida, il tipo di spettro sarà determinato dalla rigidità della punta del martello.

2.7.2 FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

Quando i segnali A e B rappresentano input e output del sistema fisico, funzione di risposta in frequenza $H(f)$ nel dominio della frequenza e funzione di risposta all'impulso $h(t)$ nel tempo sono utilizzati per descrivere la relazione tra questi due segnali (Figura 2.9).

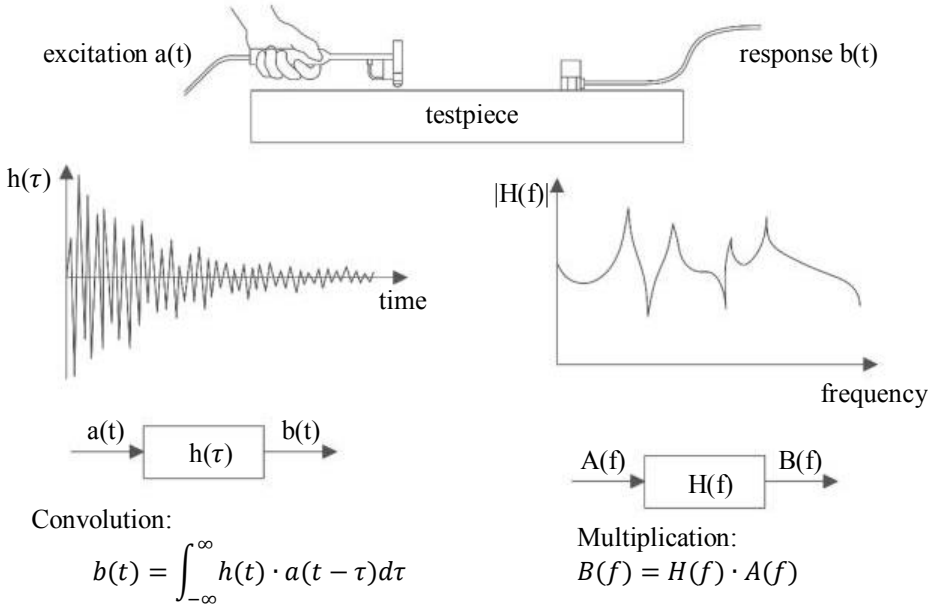


Figura 2.9 – Descrittori del sistema

Funzione di risposta in frequenza e la funzione di risposta all'impulso sono i cosiddetti descrittori di sistema. Essi sono indipendenti dai segnali coinvolti. Il motivo principale dell'utilizzo della FRF è la semplicità con la quale può essere descritta la risposta del sistema.

In una struttura lineare l'auto-spettro di risposta X(ω) è espresso come il prodotto tra l'auto-spettro d'eccitazione F(ω) e lo spettro di risposta in frequenza H(ω).

Tale funzione descrive le proprietà della struttura e rappresenta il rapporto complesso tra l'uscita e l'ingresso, in funzione della frequenza ω. La H(ω) è definita dalla magnitudine H(ω) e dalla fase $\phi(\omega)$.

Considerando una struttura sottoposta ad eccitazione armonica caratterizzata dalla frequenza ω_0 si definisce:

$$f(t) = F(\omega_0)\ sen\ (\omega_0 t + \vartheta) \tag{2.45}$$

da cui si ottiene una risposta armonica con la stessa frequenza

$$x(t) = |H(\omega_0)F(\omega_0)|\ sen\ (\omega_0 t + \phi(\omega_0) + \vartheta) \tag{2.46}$$

L'ampiezza della risposta risulta dal prodotto tra l'ampiezza dell'eccitazione e la magnitudine $H(\omega_0)$, mentre la fase della risposta risulta spostata di $\phi(\omega_0)$.

Trattando esclusivamente strutture lineari ogni spettro di FRF può essere considerato come somma di sinusoidi.

2.7.3 PROVA AD IMPATTO E FUNZIONE DI COERENZA

La più importante applicazione della funzione di coerenza è la verifica delle altre funzioni e la verifica se sono interessate dal rumore o dalla presenza di non linearità. Una bassa coerenza non significa automaticamente che la misura non è valida, ma a volte è un segno che dovrebbe essere eseguite molte medie per ottenere un risultato valido.

Le cause della ridotta coerenza possono essere:

- Misure difficili:
  - Rumore nel segnale di uscita misurato;
  - Rumore nel segnale d'entrata;
  - Altri ingressi non correlati con segnale letto;
  - Non linearità del sistema.
- Cattive misure:
  - Perdite;
  - Sistemi di variabili nel tempo;
  - DOF jitter (mentre eccitazione impatto, quando non ha colpito esattamente nella stessa posizione in tutti i colpi).

Per controllare quanto ciascun impatto del martello strumentato con la struttura si discosta dal precedente, e quindi per verificare la bontà dell'eccitazione, si ricorre alla funzione di coerenza. Questa funzione permette di stabilire il grado di linearità tra i segnati di ingresso ed uscita. La funzione di coerenza costituisce un mezzo per stabilire il grado di linearità tra i segnali d'ingresso e di uscita. Stabilisce che se un'auto spettro contiene del rumore, il valore del cross spettro elevato a quadrato sarà minore del prodotto degli auto-spettri. Ciò dà origine alla seconda definizione:

$$\gamma(\omega)^2 = \frac{|G_{XF}(\omega)|^2}{G_{XX}(\omega) \cdot G_{FF}(\omega)}, \qquad 0 \leq \gamma(w)^2 \leq 1 \tag{2.47}$$

dove:

$G_{XX}(\omega) =$ auto-spettro della risposta;

$G_{FF}(\omega) =$ auto-spettro del segnale di eccitazione;

$G_{XF}(\omega) =$ cross-spettro tra la risposta e la forza applicata.

La funzione di coerenza assume valore pari a 1 nel caso di assenza di rumore, pari a 0 nel caso di rumore puro. Per avere buone misure, la coerenza dovrebbe essere pari all'unità; in caso contrario è necessario stabilire la causa di tale rumore e valutare l'esatto valore della FRF.

Il carattere deterministico dell'eccitazione ad impatto è dovuto alla difficoltà di applicare

sempre la stessa forza, non tanto come magnitudine, ma piuttosto come posizione e orientazione perpendicolare alla superficie di impatto.

Nelle prove ad impatto la funzione di coerenza deve avere un valore perfetto di 1, a meno che:

- La struttura venga sollecitata in modo sparso, sia in termini di posizione che di orientazione. La funzione di coerenza in ogni caso deve essere superiore a 0,95 alle risonanze. Se il punto di impatto avviene in prossimità di un nodo, la coerenza può essere molto bassa ($\approx 0{,}1$), ma risulta comunque accettabile, perché la resistenza modale nel punto di impatto ha poca rilevanza per l'analisi.
- Presenza di rumore nel segnale misurato, un anti-risonanza nella quale il rapporto segnale/rumore sia piuttosto basso.

Come già accennato la funzione di coerenza costituisce un mezzo per stabilire il grado di linearità tra i segnali d'ingresso e di uscita che possono contenere un rumore nel segnale.

Rumore delle misure d'uscita

Il segnale di risposta contiene la risposta causata dall'eccitazione casuale prodotta dall'ambiente, oltre che la risposta dell'eccitazione misurata, essa contiene del rumore nel segnale misurato d'uscita.

Per ridurre gli effetti del rumore all'uscita tramite l'utilizzo del metodo dei minimi quadrati, si trova che il miglior estimatore della FRF è:

$$H = \frac{\sum F * X}{\sum F * F} \tag{2.48}$$

Il valore di tale estimatore sarà uguale al cross spettro, tra la risposta e la forza applicata, diviso l'auto spettro della forza stessa.

$$H_1(\omega) = \frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \tag{2.49}$$

dove $G_{fx}(\omega)$ è il cross spettro tra la risposta e l'eccitazione, e $G_{ff}(\omega)$ è l'auto spettro dell'eccitazione.

Rumore delle misure d'entrata

Un'altra sorgente di rumore nelle misure pratiche può avvenire quando si usa un eccitatore, può succedere infatti che un eccitatore utilizzi tutta la sua energia per accelerare le sue particelle meccaniche, non disponendo più di alcuna forza per eccitare la struttura. Tale situazione può essere definita come rumore all'ingresso. Lo stimolatore che riduce al minimo l'effetto di tale rumore è:

$$H_2(\omega) = \frac{G_{xx}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} \tag{2.50}$$

Dove $G_{xx}(\omega)$ è l'auto spettro della risposta e $G_{xf}(\omega)$ è il cross spettro tra la risposta e l'eccitazione. Quando il rumore si presenta sia all'ingresso che all'uscita, $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ formano generalmente l'intervallo di confidenza del valore reale H.

2.7.4 TECNICHE DI FINESTRATURE NELLA PROVA AD IMPATTO

Le tecniche di finestratura sono due: la finestra transiente e la finestra di risposta.

Finestra transiente

La durata di un impatto è in genere molto breve rispetto alla durata della registrazione, la finestra transiente, per il segnale di impatto, permette di selezionare i dati di ingresso ritenuti utili ai fini della prova. La registrazione in sé è caratterizzata non solo dal picco di forza, ma anche da una parte rimanente che costituisce rumore (vibrazione del martello o rumore elettrico), l'introduzione della finestra transiente permette di considerare i dati, non ponderati, durante la prova dell'impatto, escludendo tutti gli altri all'infuori della finestra. La lunghezza della finestra transiente deve essere scelta in modo tale da includere l'intero segnale. Tale parametro viene in genere impostato prima di procedere alla registrazione definitiva, eseguendo una prima battuta di prova.

Quando si esamina l'evoluzione nel tempo della forza d'impatto si possono rilevare dei segnali di segno negativo, non ammessi dal punto di vista fisico, ma piche la forza misurata è all'interno

di una gamma di frequenze limitata, effetto del troncamento, questo evento è una rappresentazione corretta della particolare gamma di frequenze.
Un problema che può verificarsi è la presenza di doppi impatti, 'Double Hits', dovuti in larga parte alla non abilità dell'operatore. In caso di impatti doppi le registrazioni vanno annullate, poiché lo spettro conterrà dei punti a valore zero spaziati di n/t_r , con n numero intero e t_r ritardo tra i due impatti.

Finestra di risposta

La risposta ad un impatto è caratterizzata da uno smorzamento libero di tutti i modi di vibrare. Se si considerano due situazioni tipiche si può comprendere come una registrazione troppo breve può provocare errori nelle frequenze.
In una struttura molto smorzata, la risposta decade molto rapidamente, e presenta un valore nullo della risposta dopo un breve intervallo di tempo. Se la lunghezza di registrazione è molto più lunga del tempo di decadimento, otterremo un rapporto segnale-rumore molto basso, e la misura verrà cosi contaminata dal rumore. Viceversa, se la struttura è leggera, richiederà un tempo di decadimento maggiore, se l'intervallo di registrazione è minore del tempo richiesto dalla struttura, vi sarà il troncamento prematuro delle risonanze con una conseguente dispersione delle frequenze.

Finestra di esponenziale

La finestra esponenziale sarà ugualmente utile in entrambi i casi, essa aggiunge dello smorzamento alla risposta, con il seguente effetto:

- In una struttura molto smorzata il rumore è attenuato dalla finestra e quindi una correzione dello smorzamento non è richiesta poiché il normale decadimento è generalmente più veloce di quello della funzione finestra.
- In una struttura poco smorzata, la risposta deve decadere completamente all'interno della registrazione, per evitare le dispersioni dovute al troncamento. L'effetto potrebbe essere quello di una risonanza troppo alta o di uno smorzamento troppo ampio. In una fase di post-elaborazione può essere facilmente applicata una correzione di smorzamento.

I trasduttori adottati per la misura della risposta, in termini di spostamento, velocità o accelerazione, possono essere individuati in diversi dispositivi, tra cui trasduttori piezoelettrici (trasduttori di forza, accelerometri, teste di impedenza) o trasduttori laser (LVD – Laser Doppler Velocimeter; SLDV – Scanning Laser Doppler Velocimeter). L'attenzione verrà posta

sugli accelerometri, trasduttori piezoelettrici più comuni ed usati, impiegati anche nelle prove sperimentali della presente tesi.

In generale i trasduttori piezoelettrici funzionano con il principio in base al quale un elemento di un materiale piezoelettrico (cristallo naturale o sintetico) genera una carica elettrica intorno alle sue facce di estremità se sottoposto ad un carico meccanico. Questo cristallo può venire inglobato all'interno di un dispositivo che fa in modo di indurre su di esso uno stress proporzionale alla grandezza fisica da misurare (forza o accelerazione).

Gli accelerometri piezoelettrici, presentano una serie di vantaggi:

1. Buona linearità;
2. Semplicità di montaggio;
3. Peso ridotto (anche meno di 1g);
4. Ampia gamma dinamica (160 dB);
5. Robustezza;
6. Ampia gamma di frequenza (da 0,2 Hz a oltre 10 kHz);
7. Resistenza agli agenti ambientali;
8. Bassa sensibilità trasversale (accelerometri *shear type*).

Si tratta dei più semplici trasduttori piezoelettrici in cui la forza F trasmessa è applicata attorno al cristallo genera una carica q proporzionale ad F. Particolare attenzione deve essere prestata alla rigidezza relativa tra i cristalli e la scatola in direzione assile, nel progetto dei misuratori di forza, poiché la frazione di forza trasmessa dai cristalli dipende proprio da tale grandezza. La forza determinata dalla carica è sempre leggermente diversa da quella trasmessa alla struttura in quanto una frazione della forza percepita dai cristalli serve per muovere una piccola quantità di materiale tra cristalli e la struttura.

In un accelerometro la trasduzione è indiretta e ottenuta utilizzando una massa sismica o massa ausiliaria, in modo tale che la forza esercitata sui cristalli sia la forza d'inerzia della massa sismica (m$\ddot{z}$) (Figura2.11).



Figura 2.10 – Elementi costitutivi e modello dinamico di un accelerometro (D.J. Ewins, 2000)

In tale configurazione, poiché la struttura e la massa sismica si muovono insieme (z. = x.), l'output del trasduttore è proporzionale all'accelerazione del corpo e della struttura.

In un esteso intervallo di frequenza il rapporto x/z è pari all'unità. Dunque, per poter definire il campo di lavoro dell'accelerometro è quindi molto importante conoscere il valore della frequenza più bassa, che dipende anche dalle caratteristiche della struttura su cui è fissato e dalla tipologia di fissaggio. In genere i produttori forniscono una serie di dati tecnici che comprende il valore della frequenza di risonanza ad accelerometro montato, che rappresenta il limite superiore per gli accelerometri, la più bassa frequenza naturale della massa sismica rispetto alla rigidezza del cristallo, perché in molte applicazioni il trasduttore è fissato ad un elemento meno rigido, cosicché la frequenza di risonanza del trasduttore è in realtà più bassa di quella fornita. Esistono diverse tecniche di montaggio dell'accelerometro alla struttura da testare. In ogni caso la direzione principale di misura deve coincidere con il suo asse principale di sensibilità e la base dell'accelerometro deve risultare perfettamente accoppiata meccanicamente alla superficie di applicazione.

Le principali tecniche di montaggio sono:

1. Perno filettato in acciaio;
2. Montaggio magnetico;
3. Incollaggio (strato sottile di nastro bi-adesivo);
4. Cera d'api.

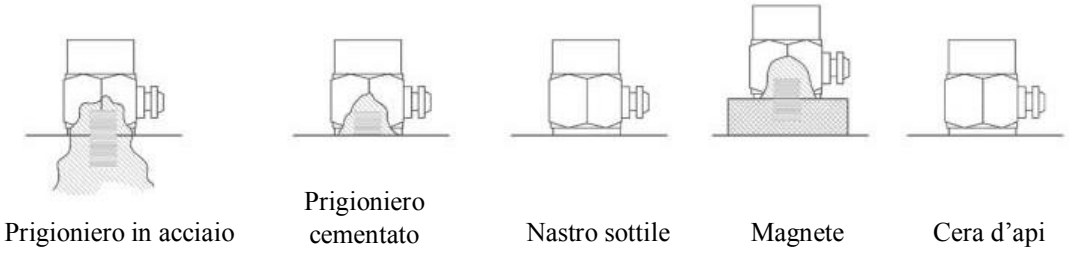


Figura 2.11 – Tecniche di montaggio di un accelerometro alla struttura (Brüel & Kjær)

La prima tecnica è indubbiamente la migliore, anche se non sempre conveniente o di facile esecuzione. Le altre tecniche possono abbassare la gamma di frequenza dell'accelerometro, ma in genere ciò non crea problemi per l'analisi modale. In ogni caso, il fissaggio alla struttura deve essere il più rigido possibile. Una considerazione importante riguarda l'estensione della zona irrigidita della struttura dovuta all'applicazione del trasduttore: se la superficie di contatto è particolarmente flessibile la rigidezza locale può aumentare considerevolmente. In questi casi l'unica soluzione è cambiare punto di applicazione, scegliendone uno più resistente. La tecnica di montaggio utilizzata nella presente tesi è il fissaggio tramite l'utilizzo della cera d'api.

2.7.5 PUNTI DI INSTALLAZIONE

La scelta del punto in cui applicare l'accelerometro può condizionare il tipo di risposta ricevuta e la leggibilità stessa dei dati. Infatti, se l'accelerometro viene posizionato in prossimità di un nodo di uno o più modi di vibrare della struttura, la misura effettiva di quel modo sarà molto difficile. Nel caso di una prova modale, per la quale si devono ottenere delle forme di modo in scala, è necessario che l'accelerometro sia posizionato nel punto di applicazione della forza. Questa configurazione si può ottenere con tre possibilità (Figura 2.13):

1. Utilizzando una testa di impedenza;
2. Applicando i trasduttori di forza e il traduttore sulle due facce opposte dello stesso punto di applicazione dell'eccitazione, possibile solo se il materiale è sufficientemente sottile;
3. Posizionando l'accelerometro il più vicino possibile al punto di applicazione della forza.

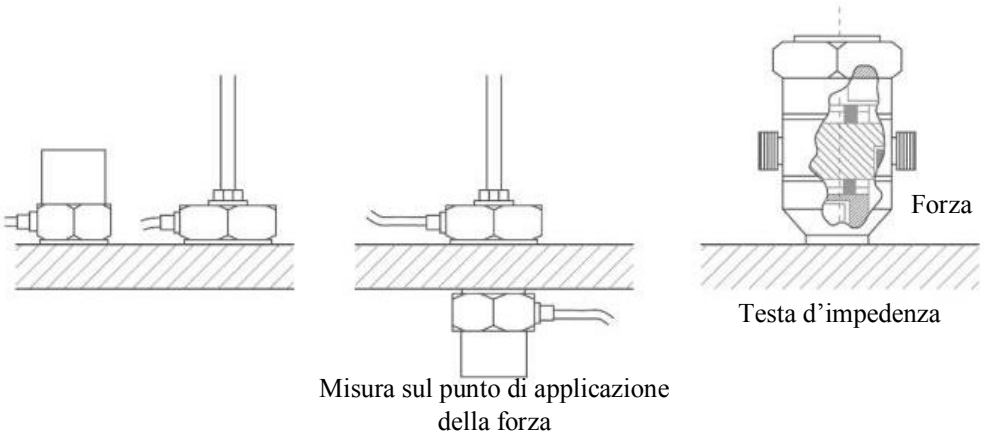


Figura 2.12 – Punti di applicazione di trasduttori: a) sulla stessa faccia; b) sul punto di applicazione della forza e sul lato opposto; c) testa d'impedenza (Brüel & Kjær)

2.8 ANALIZZATORI BICANALE FFT

Ogni sistema di misurazione delle funzioni di risposta in frequenza necessita di un analizzatore per poter misurare gli specifici parametri di interesse (livelli di forza e di risposta). I dati registrati vengono forniti all'analizzatore in forma analogica, ma è necessaria una conversione analogico – digitale (A-D) in modo tale che le quantità processate siano nella forma di serie di valori discreti, in opposizione a funzioni continue. attività di analisi di sistema funzionano sul principio di un'analisi doppio canale.

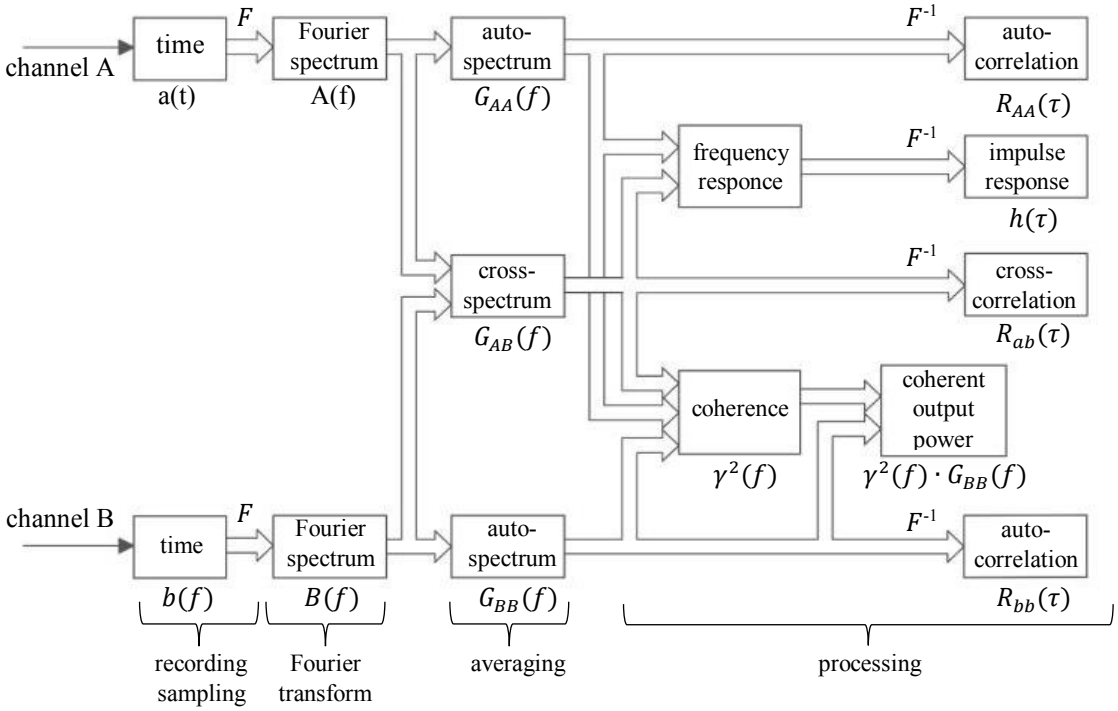


Figura 2.13 – Schema di analizzatore a due canali

Lo schema base di due canali FFT (Fast Fourier Transform) analizzatore in Figura 2.13 durante l'analisi simultanea di segnali in almeno due canali, i segnali stessi non sono più in prima linea, ma piuttosto vi sono le proprietà del sistema fisico, responsabili delle differenze tra i segnali.

I metodi possono essere teoricamente implementati per qualsiasi numero di canali, ma fondamentalmente ogni volta vengono elaborati simultaneamente due di essi.

Per le prove dinamiche sperimentali oggetto della presente tesi è stato utilizzato un analizzatore bicanale FFT (Fast Fourier Trasformation), tramite il programma di elaborazione Pulse BK CONNECT 2018.

L'equazione fondamentale di Fourier afferma che una funzione periodica $x(t)$ nel tempo T può essere espressa sotto forma di una serie con termini infiniti:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos\left(\frac{2\pi n\tau}{T}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

dove i coefficienti a_n e b_n possono essere ricavati dalla conoscenza di $x(t)$.

Le funzionalità dell'analizzatore FFT sono le seguenti:

1. I segnali di ingresso analogico sono filtrati, campionati e digitalizzati, per fornire una serie di registrazioni in forma digitale;
2. Ogni registrazione può essere moltiplicata e ponderata per una funzione finestra, che tratta i dati rendendoli più adatti per un'analisi a blocchi;
3. La sequenza ponderata viene trasformata, tramite la trasformazione discreta di Fourier, reversibile, in uno spettro complesso;
4. Moltiplicando uno spettro per il suo numero complesso coniugato viene calcolato un auto-spettro;
5. Il cross spettro viene calcolato moltiplicando il numero complesso coniugato di un spettro per un auto-spettro diverso. Il cross spettro indica la differenza di fase tra uscita e ingresso.

La determinazione degli auto-spettri della forza e del cross spettro tra forza e risposta permettono la stima delle FRF e della funzione di coerenza.

2.9 ERRORI DI CALIBRAZIONE

Per poter ottenere risultati validi in uscita è necessario che le registrazioni dei dati in ingresso siano affidabili ed accurate. Si riportano le proprietà principali da tenere sotto controllo per poter effettuare una buona misura ed una buona analisi dei risultati:

1. Qualità del segnale: chiaro e forte e privo di rumore eccessivo;

Se $x(t)$ è discretizzata e di durata finita, definita da una serie di N valori di tempo t_k, la serie di Fourier diventa

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} \left[a_n cos\left(\frac{2\pi nt_k}{T}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt_k}{T}\right) \right] \quad ; \quad k = 1, N$$

In ogni caso il segnale di input viene digitalizzato e registrato come una serie di N valori discreti, spaziati nel periodo di misurazione T. Assumendo che T sia periodico viene poi calcolata da trasformata di Fourier.

2. Affidabilità della registrazione;
3. Fedeltà del segnale: rispondenza del segnale ottenuto alla reale quantità da misurare;
4. Ripetibilità della misurazione;
5. Consistenza dei risultati.

La misura della mobilità, la misura della risposta ed il calcolo dello spettro della forza e della risposta, non comporta solo l'eccitazione della struttura tramite una forza nota, poiché possono spesso presentarsi dei problemi che possono pregiudicare la qualità delle misurazioni. Tra gli errori più ricorrenti vi sono:

1. Errori di *Aliasing*, risolvibili con un filtro anti-aliasing;
2. Errori di dispersione, risolvibile aumentando la durata di registrazione, o utilizzando tecniche di finestratura.

2.9.1 ERRORI DI ALIASING

Questo tipo di errore è associato alla discretizzazione della storia temporale, originariamente continua. In questo processo frequenze molto elevate del segnale originale possono essere mal interpretate in caso di velocità di campionamento eccessivamente bassa. In tal modo la trasformazione di Fourier apparirà come distorta. La soluzione a questo tipo di problema è usare un filtro anti-aliasing, che sottopone all'analizzatore una storia temporale modificata.

2.9.2 ERRORI DI DISPERSIONE

L'errore di dispersione è legato alla durata di registrazione e al tipo di struttura analizzata. deriva dalla necessità di considerare una durata finita di registrazione, accoppiata all'assunzione di periodicità. Poiché vengono raccolti dati solo su un limitato tempo di registrazione, è possibile che il segnale di risposta venga troncato. La dispersione di frequenze generata dal troncamento, si rivela principalmente nei picchi misurati, troppo ampi e bassi. Questo effetto può anche essere causato da una risoluzione in frequenza insufficiente. Questo tipo di errore può essere risolto con varie possibilità:

1. Aumentando la durata della registrazione;
2. Utilizzando tecniche di finestratura, con l'imposizione di un profilo prescritto al segnale nel tempo prima della trasformazione di Fourier. Esistono diverse funzioni di finestratura: per la finestratura di risposte ad impatto la più idonea è la funzione esponenziale.

2.9.3 CALIBRAZIONE E MISURAZIONE

Per ottenere risultati affidabili, occorre effettuare un processo di averaging con una serie di registrazioni ripetute, il cui numero dipende essenzialmente dall'attendibilità statistica e dall'eliminazione del rumore random non originale dai segnali.

Se viene usata sia una finestra per la forza che una finestra esponenziale per la risposta, la sensibilità apparente della risposta può risultare inferiore a quella della risposta teorica. Ciò è dovuto all'attenuazione causata dalla finestra esponenziale, ma questa è comunque la corretta calibrazione della sensibilità dell'intero sistema di misura.

La misurazione avviene eccitando la struttura con il numero di colpi di martello pari a quello immesso nell'analizzatore e si controlla sullo schermo i valori della coerenza, l'auto-spettro dell'intervallo di eccitazione e la funzione di frequenza.

2.10 ESTRAZIONE DEI PARAMETRI MODALI

Nell'estrazione dei parametri modali (frequenze modali, smorzamenti, forme dei modi) le diverse tecniche partono dall'analisi di una singola curva della FRF, passando poi ad una curva completa che comprende le relative risonanze, ed infine di una serie di diagrammi della FRF, basandosi sulla ricerca di un'espressione teorica per ogni FRF. Esistono diversi metodi di estrazione dei parametri modali. Ci sono diversi metodi di analisi modale che sfruttano lo stesso presupposto di base: che in prossimità della risonanza, l'intera risposta del sistema è dominata dalla modalità più vicino.

Questi metodi possono essere ulteriormente suddivisi in:

- Quelle basate su un presupposto che tutta la risposta è data da questo singolo modo (ad esempio il metodo più semplice chiamata picco di ampiezza)

- Quelle basate su un presupposto che il contributo di altre modalità sono rappresentate da una singola approssimazione (ad esempio il metodo del circle-fit).

Tra i diversi metodi utilizzabili, si considera un metodo valido nel caso di modi leggermente accoppiati, in cui la struttura può essere vista come un sistema ad un singolo grado di libertà, e un metodo valido per modi fortemente accoppiati o in caso di contaminazione da rumore, basata sulla costruzione di una curva interpolante.

2.10.1 METODO DI PICCO

Questo è un metodo che funziona adeguatamente per strutture i cui la FRF espone ben separatamente i modi che non sono così leggermente smorzate da rendere difficile una lettura accurata delle risonanze, ma anche non sono così pesantemente smorzato da rendere la risposta di risonanza fortemente influenzato da più di un modo. L'applicabilità di questo metodo è limitata, ma può essere utile in casi più difficili per ottenere stime iniziali dei parametri richiesti, in modo da accelerare le procedure di carattere più generale delle curve che richiedono stime di partenza. Tale metodo è utilizzabile quando la struttura si comporta come un sistema ad un singolo grado di libertà intorno alle sue frequenze modali, dove si può ipotizzare che tutta la risposta sia dovuta a quel particolare modo. In tal caso da ogni FRF si possono ricavare le frequenze modali e gli smorzamenti, ottenendo le posizioni dei poli. Nel metodo picco l'ampiezza di tali valori è ricavata nel seguente modo:

1. Le frequenze modali sono le frequenze associate alla massima magnitudine sulla FRF;
2. Gli smorzamenti sono calcolati dalla curva FRF trovando il massimo valore $|\widehat{H}|$, corrisponde alla frequenza modale considerata ω_r, e determinando la larghezza di banda $\Delta\omega$ che delimita i punti della FRF associati al valore $|\widehat{H}|/\sqrt{2}/(2\text{^}(1/2))$. Le due frequenze ω_a e ω_b sono dette "half power points". Lo smorzamento può essere calcolato tramite una delle due formule %:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_r^2} \cong \frac{\Delta\omega}{\omega_r}$$

$$2\xi = n_r$$

3. Una stima della costante modale del modo considerato può essere ottenuta ipotizzando che la risposta totale nella regione di risonanza sia attribuita ad un singolo termine della serie generale delle FRF%.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{A_{jk}}{\Omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\Omega_r^2}$$

Tale metodo si basa sull'assunzione che tutta la risposta possa essere attribuita al modo locale, ignorando qualsiasi effetto dovuto ad altri modi.

Esso presenta diverse limitazioni:

- Il valore dello smorzamento e della costante modale dipende pesantemente dall'accuratezza del massimo valore della FRF $|\widehat{H}|$, parametro di non sicura determinazione nel caso di strutture leggermente smorzate.
- L'assunzione alla base di questo metodo non è perfettamente applicabile: anche con modi leggermente accoppiati, spesso i modi vicini contribuiscono considerevolmente alla risposta totale alla risonanza del modo analizzato.

2.10.2 METODO CIRCLE-FIT

Il metodo circle-fit sfrutta il fatto che in prossimità di una risonanza, il comportamento dei maggior parte dei sistemi è dominato da un singolo modo. Algebricamente, questo significa che l'ampiezza della FRF è effettivamente controllata da uno dei termini della serie, che essere quello relativo alla modalità di cui risonanza che viene osservato. Tale metodo è utilizzato nel caso di strutture con modi fortemente accoppiati o contaminazione da rumore, o se viene richiesta un'elevata precisione, per la stima dei parametri modali come processo analitico per la determinazione dei parametri matematici che diano un'approssimazione, più precisa possibile, dei dati misurati.

Dopo la stima dei parametri, viene generata una curva analitica che viene poi sovrapposta ai dati misurati, per poterne valutare la vicinanza ai dati sperimentali. Esistono diverse tipologie di curve interpolanti:

1. Curve interpolanti SDOF: per modi leggermente accoppiati, in cui possono essere ipotizzate le caratteristiche dei sistemi SDOF intorno alle frequenze modali;
2. Curve interpolanti MDOF: per modi fortemente accoppiati.

2.11 FASI PRINCIPALI DI UNA PROVA DINAMICA

Si riportano le fasi principali da seguire nello svolgimento di una prova dinamica su una qualsiasi struttura:

1. Preparazione della struttura: sospensione nello spazio per simulare le condizioni libere o svincolamento della struttura a terra;
2. Scelta del tipo di eccitazione;
3. Posizionamento e collegamento dell'eccitatore e del trasduttore di forza alla struttura (nel caso di prova ad impatto con martello strumentato tale fase viene saltata);
4. Montaggio del trasduttore di risposta (scelta del tipo di montaggio e dei punti di applicazione);
5. Condizionamento e calibrazione del trasduttore;
6. Impostazione dell'analizzatore (tipo di media, trigger, ampiezza di banda di frequenza, frequenza centrale, ponderazione);
7. Verifica della regolazione delle misure su una misura preliminare assicurandosi che:
   a. Lo spettro della forza sia sufficientemente piatto;
   b. La coerenza sia accettabile;
   c. Si ottengano dei picchi positivi;
8. Esecuzione delle misure (questa fase è la più importante e critica dell'intera operazione, la cui qualità dipende dalla precisione di questa fase);
9. Estrazione dei parametri modali (frequenze, smorzamenti, forme dei modi).

2.12 SOFTWARE PER ANALISI DINAMICHE

Il software utilizzato per l'acquisizione dei dati nel corso della sperimentazione è il *Pulse BK CONNECT 2018*. Quest'ultimo esegue l'analisi modale estraendo i parametri modali delle funzioni di risposta in frequenza (FRF) acquisite mediante martello a percussione. Si descrivono in seguito le fasi per il setup di un progetto *PULSE*.

Per il setup di un progetto ci sono quattro finestre:

- Model: permette di creare la geometria di prova, inserendo le dimensioni, per poi proseguire con l'assegnazione di N punti nodali.

- Setup: questa finestra è divisa in varie fasi per procedere all'installazione delle configurazioni riguardanti la strumentazione (martello ed accelerometro)
- Measure: questa finestra permette di svolgere la prova.
- Analyse: permette di visualizzare i risultati della prova modale tramite dei grafici e di estrapolare i modi di vibrare. Inoltre, è possibile avere una visualizzazione animata dei modi di vibrare.

Di seguito vengono analizzate le singole finestre.

Model

Il punto di partenza per un progetto con il software PULSE è la finestra "Model" che viene utilizzata per creare la geometria del provino. Nel caso della presente tesi, l'elemento trave viene creare in maniera tridimensionale. Si indicano prima le caratteristiche dimensionali, poi si assegnano dei punti nodali tramite delle mesh. Le mesh sono state assegnate ogni 5cm prendendo come sistema di riferimento x-y-z avente origine in uno degli estremi della trave.

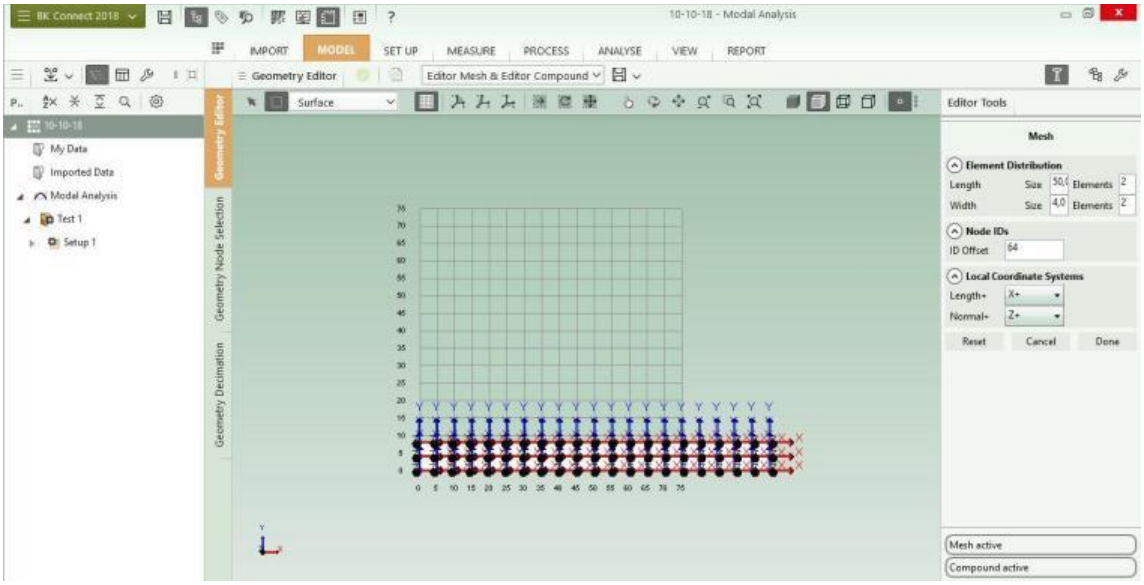


Figura 2.14 – Creazione della geometria di prova – Brüel & Kjær Pulse

Setup

La seconda finestra, TRANSDUCER MANAGER, viene visualizzata attraverso una grafica interattiva, l'hardware fisico. Questo tipo di visualizzazione offre una selezione dei canali e la verifica dei trasduttori per una chiara panoramica di eventuali problemi potenziali come, ad esempio, sovraccarichi dei trasduttori e interruzioni dei cavi.

Attraverso il comando “type”, si seleziona dalla lista i diversi trasduttori in ingresso e inserire successivamente la rispettiva sensibilità.

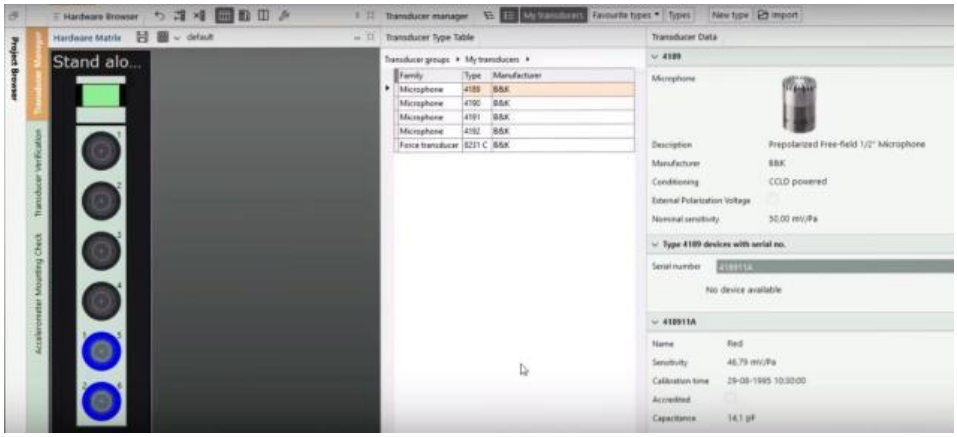


Figura 2.15 – Selezione del trasduttore e delle caratteristiche – Brüel & Kjær Labshop

Nella presente tesi, vengono utilizzati:

- ACCELERATION 4508 con sensibilità 10,08 mV/s
- IMPACT HAMMER 8202+2646 con sensibilità -1 mV/s

Successivamente, nella finestra DOF setup, devono essere selezionati sulla geometria quali nodi corrispondono alla posizione dell’accelerometro e il punto in cui verranno effettuate le battute con il martello. È molto importante modificare l’asse d’orientamento in z+ per l’accelerometro e in z- per il martello.

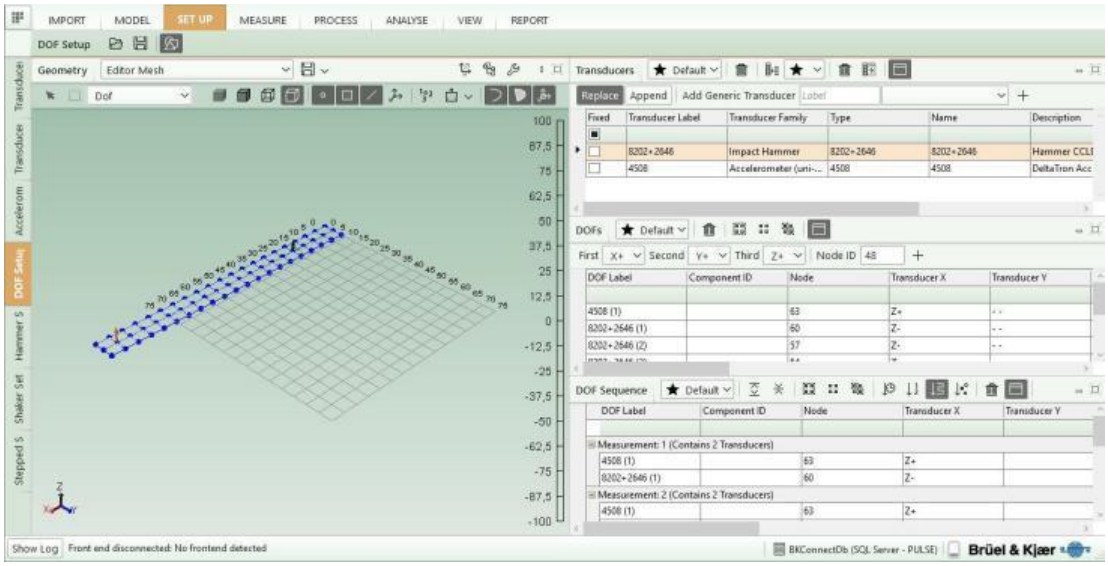


Figura 2.17 – Visualizzazione dell’accelerometro e del martello sulla geometria di prova – Brüel & Kjær Pulse

La finestra di Hammer Setup è divisa in tre step:

- Trigger: vengono effettuati alcuni colpi di martello per settare di conseguenza il livello del trigger. Un trigger è una condizione che deve essere impostata prima di una misurazione. Il

trigger in questo caso, è quando il segnale supera un certo livello. Il livello di trigger e l'isteresi è impostata usando una serie di prove di impatti (grafico superiore) e gli effetti di trigger variabile impostati, come pre-delay, sono osservati in modo interattivo (grafici inferiori).

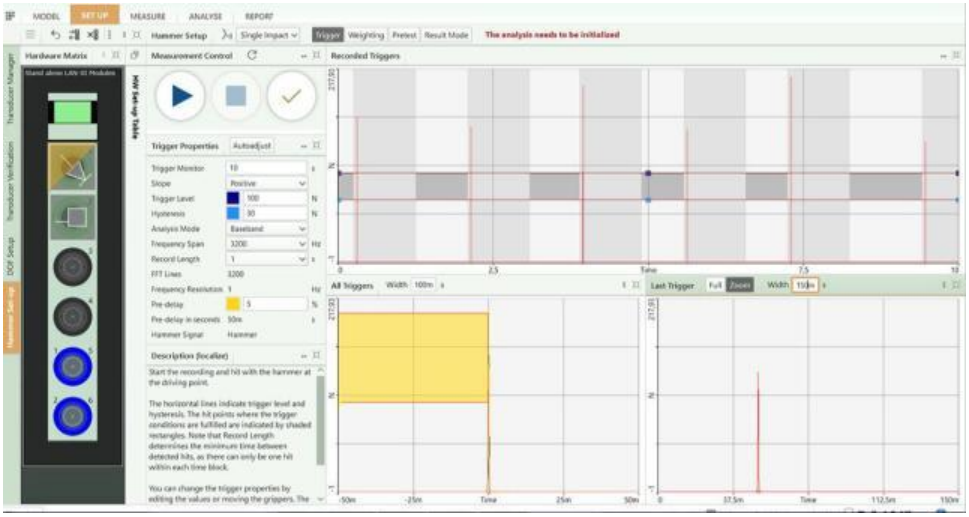


Figura 2.17 – Configurazione del Trigger – Brüel & Kjær Pulse

- Weighting: dopo il colpo con il martello, il software acquisisce dati attraverso un analizzatore di spettro, quindi bisogna eliminare il rumore di fondo. Graficamente, è possibile osservare due finestre, una per il martello e una per l'accelerometro. La risposta dell'accelerometro è una curva di decadenza e tramite la linea tratteggiata presente nel grafico si spostano i valori al 66% del segnale.

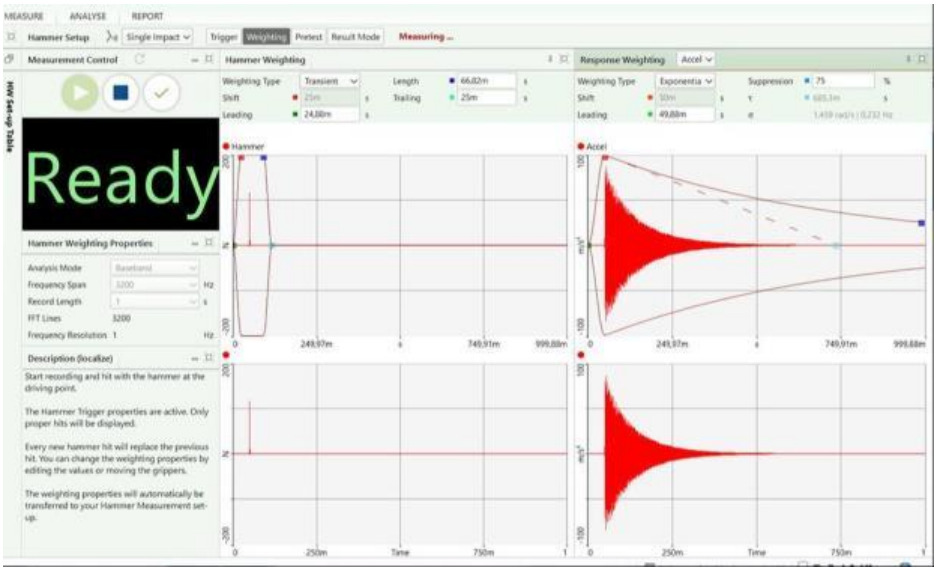


Figura 2.18 – Configurazione della risposta del martello Brüel & Kjær Pulse

- Pretest: svolge una simulazione della prova modale per capire il corretto funzionamento.

Measure

A questo punto si può dare inizio alla prova premendo il tasto “start”. Nella finestra “Impact” le diciture “Ready”, “trigged”, “double-hit” e “overload”, servono a tenere sotto controllo la prova di misurazione. La dicitura “proper hit” indica che il colpo considerato è corretto. Inoltre, in questa finestra è possibile visualizzare lo spettro del tempo e del martello strumentato.

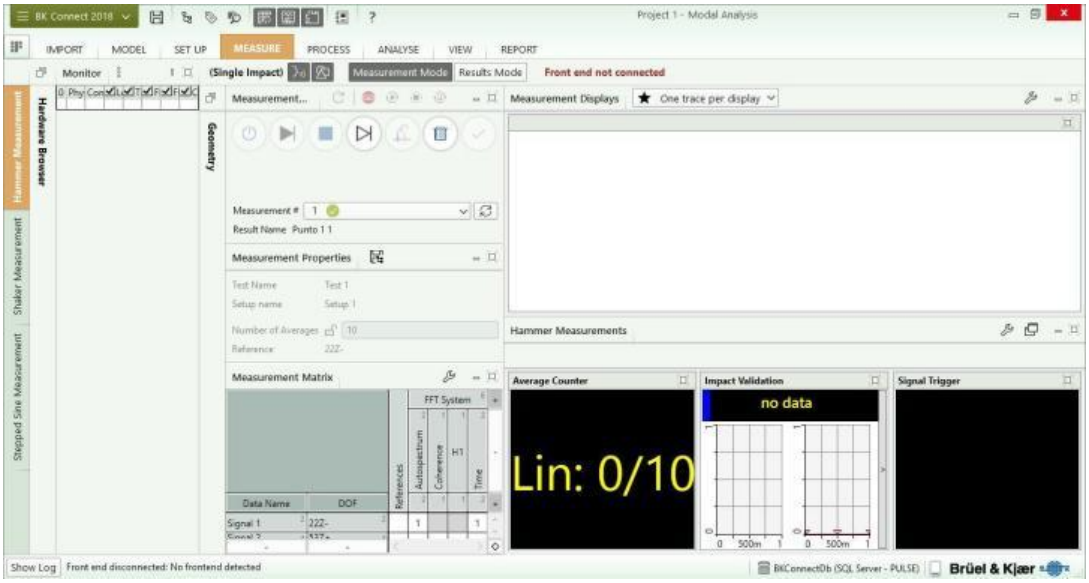


Figura 2.19 – Interfaccia della misurazione – Brüel & Kjær Pulse

Analyse

In measurement validation bisogna trascinare la cartella Hammer measurement a destra per visualizzare i grafici. Qui bisogna fare la verifica della regolazione delle misure assicurandosi che:

a. Lo spettro della forza sia sufficientemente piatto;
b. La coerenza sia accettabile;
c. Si ottengano dei picchi positivi;

Salvataggio ed esportazione

A questo punto, si salva il progetto e per salvarlo è sufficiente selezionare “Save Project” dal menù principale, assegnando un nome al file di progetto.

Per il seguente lavoro di tesi è interessante esportare i valori dei grafici corrispondenti alle FRF e i valori relativi alla coerenza. Questi valori devono essere aperti attraverso dei fogli di calcolo e per il presente lavoro è stato utilizzato il programma “Microsoft Office Excel”, con il quale è

possibile elaborare i dati e riprodurre il grafico attraverso il comando “Inserisci grafico” e ponendo in ascissa la frequenza (0-2500 Hz) e in ordinata la misura dell’ampiezza.

Occorre inoltre selezionare il tipo di scala secondo la quale deve essere visualizzato il grafico. Nel caso in esame, per le Funzioni di Frequenza, la scala deve essere logaritmica.

3. DESCRIZIONE E CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPIONI

Le prove sperimentali sulle travi in scala sono state eseguite su modelli di trave in calcestruzzo armato in scala ridotta, rinforzate con la stessa tecnologia, GFRP, fibre di materiali compositi ma in maniera differente. I tre provini sono stati danneggiati e successivamente rinforzati per studiarne i diversi comportamenti.

3.1 DESCRIZIONE DEI CAMPIONI

Le prove sperimentali sono state condotte su tre provini di calcestruzzo armato in scala ridotta di sezione rettangolare 80x120 mm e lunghezza 1100 mm. I campioni hanno 2 barre di armatura longitudinale Ø6 nervati superiormente e due barre di armatura longitudinale Ø6 nervati inferiormente. Sono state predisposte delle staffe Ø6 nervati anch'essi, secondo lo schema di carpenteria riportati in Figura 3.1 e in Figura 3.2.

La tipologia di armatura è stata concepita per ottenere un modello in scala rispetto ad un modello in scala reale, con l'accortezza che la venga garantita la rottura per flessione e non per taglio.

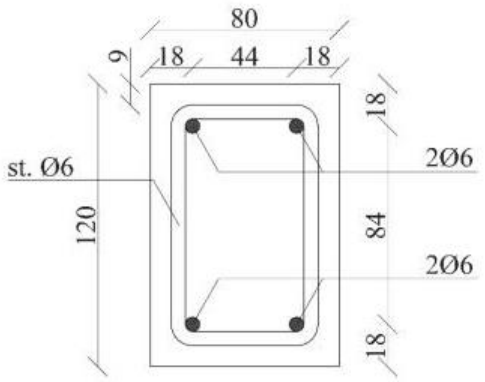


Figura 3.1 – Sezione trasversale del campione della sperimentazione

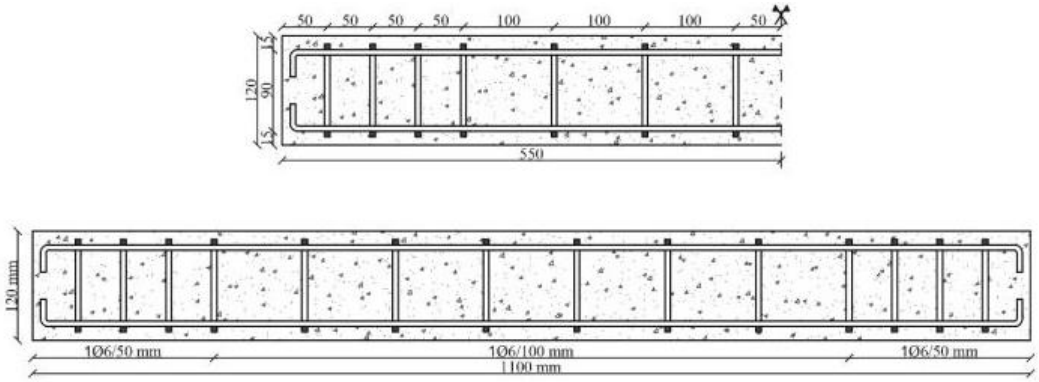


Figura 3.2 – Sezione longitudinale del campione della sperimentazione

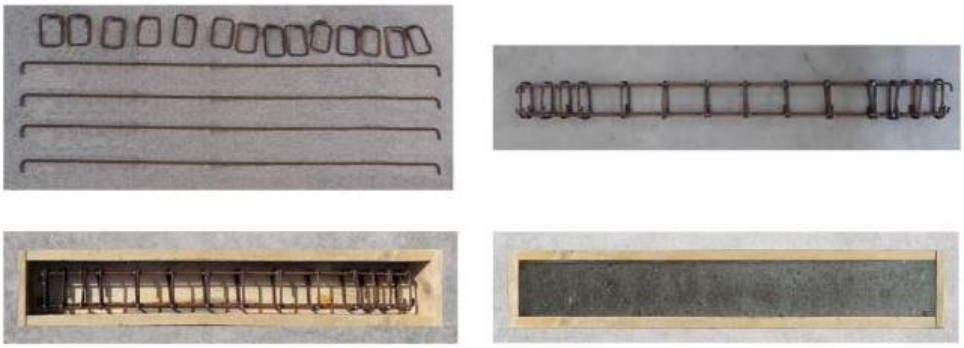


Figura 3.3 – Armatura e getto delle travi in c.a.

Le travi sono state costruite esternamente all'università, mentre le prove sono state fatte all'interno del laboratorio del dipartimento DICEA.

Le caratteristiche del calcestruzzo sono descritte nella Tabella 3.1 e le fasi costruttive delle travi sono mostrate in Figura 3.2.

Classe di resistenza normale	C25/30
Classe di esposizione	XC1 - XC2
Lavorabilità	S4
Classe di resistenza	42.5 R

Tabella 3.1 – Caratteristiche calcestruzzo utilizzato nei provini

Le dimensioni e le caratteristiche dei campioni sono illustrati nella Tabella 3.2:

Base - B	80	mm
Altezza - H	120	mm
Lunghezza - L	1100	mm
Area - A	9600	mm^2
Volume - V	10560000	mm^3
Mometno di inerzia - I	11520000	mm^4

Tabella 3.2 – Caratteristiche nei provini

Dopo esser trascorsi i 28 giorni di maturazione dal getto del calcestruzzo, le travi sono state sottoposte ad analisi dinamiche in condizioni integre. I risultati di tali analisi sono analizzati successivamente.

3.2 VALUTAZIONE DEL MODULO DINAMICO E DEL MODULO ELASTICO STATICO DEL CALCESTRUZZO

Per la valutazione del modulo elastico, E, considerata l'assenza di un provino cubico che permette il calcolo diretto del modulo di Young, si è deciso di valutare il modulo elastico dinamico E_d e di conseguenza valutare il modulo elastico "statico" attraverso il metodo degli ultrasuoni (Figura 3.4) e la relazione di Weber-Hermenn Wesde.

Per modulo di elasticità dinamico E_d, si intende il modulo elastico tangente all'origine del legame costitutivo del materiale. Il suo valore può essere stimato mediante espressioni analitiche che derivano dalla teoria di propagazione delle onde in mezzi omogenei, isotropi e linearmente elastici. L'estensione di tali espressioni al calcestruzzo, materiale che in generale non ha le suddette proprietà, deve essere assunta quindi con qualche cautela.

Per gli elementi solidi tridimensionali si assume:

$$E_d = \rho \cdot V_L^2 \cdot \frac{(1 + v_d) \cdot (1 - 2v_d)}{(1 - v_d)}$$

Per gli elementi bidimensionali si assume:

$$E_d = \rho \cdot V_L^2 \cdot (1 - v_d^2)$$

Infine, per gli elementi monodimensionali si assume:

$$E_d = \rho V_L^2$$

con:

v_d = coefficiente di Poisson (dinamico) del calcestruzzo in opera: normalmente si considera 0,15 per calcestruzzi ad alta resistenza e 0,30 per calcestruzzi a bassa resistenza, come nel caso in esame.

$\rho = \frac{\gamma}{g}$ = densità volumetrica del calcestruzzo.





Figura 3.4 – UTD 1004 dsp ultrasonic

TRAVE	L (m)	TUT (msec)	VUT (m/sec)	VUT (cm/sec)	Peso (kg)
1	1,097	268,100	4091,757	409175,681	25,8
2	1,100	271,300	4054,552	405455,216	25,3
3	1,099	270,000	4070,370	407037,037	25,8

	Tridimensionale	Bidimensionale	Monodimensionale
TRAVE	Ed (N/mm^2)	Ed (N/mm^2)	Ed (N/mm^2)
1	31059,737	38048,177	41811,184
2	29824,878	36535,476	40148,875
3	30679,970	37582,963	41299,96

Tabella 3.3 – Calcolo modulo elastico dinamico

Il modulo elastico "statico" E_0, il cui valore è generalmente assunto per il calcolo della deformabilità di una struttura, si può valutare con la relazione di Weber-Hermenn Wesde:

$$E_0 = \frac{E_d}{1{,}062}$$

da cui ne derivano i risultati espressi nella Tabella 3.4:

	Tridimensionale	Bidimensionale	Monodimnsionale
TRAVE	E0 (N/mm^2)	E0 (N/mm^2)	E0 (N/mm^2)
1	29246,456	35826,909	39370,230
2	28083,690	34402,520	37804,967
3	28888,861	35388,855	38888,851

Tabella 3.4 – Calcolo modulo elastico statico

Il valore del modulo elastico statico che da adesso in poi sarà chiamato semplicemente modulo elastico E, preso come riferimento nella presente tesi è 28000 N/mm^2.

3.3 DESCRIZIONE DELLE COMPONENTI DEL RINFORZO

Una volta danneggiate, le travi vengono rinforzate con strisce di GFRP che vengono fatte aderire alla trave attraverso una resina bifasica.

3.3.1 GFRP

Come elemento di rinforzo è stato utilizzato un tessuto in fibra di vetro, GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymers). Le caratteristiche geometriche e meccaniche del tessuto sono riassunte in Tabella 3.5, considerando i dati della scheda tecnica riferita al tessuto utilizzato.

Proprietà geometriche e meccaniche		
Fibra secca (singolo filmento)		
Tensione caratteristica a trazione, σ_{fibra}	2500	Mpa
Modulo elastico, E_{fibra}	73	Gpa
Deformazione a rottura, ε_{fibra}	3,42	%
Densità	2,5	g/cm^3
Tessuto impregnato (valori per il calcolo)		
Titolo filato	1200	Tex
n°fili/cm	2,50	Fili/cm
Massa (comprensico di termosaldatura)	300	g/m^2
Spessore equivalente del rinforzo FRP, t_f	0,120	mm
Resistenza caratteristica del rinforzo FRP, f_{fk}	1400	MPa
Modulo di elasticità normale del rinforzo FRP, E_f	70	GPa
Deformazione a rottura del rinforzo FRP, ε_f	2	%

Tabella 3.5 – Proprietà geometriche e meccaniche GFRP

Il tessuto è costituito da fibre di vetro unidirezionali ed viene realizzato tramite termosaldatura che è un processo che impedisce la sfilacciatura delle fibre e che ne migliora l'installazione. È un tessuto che è adatto ad incrementare la resistenza al taglio, a flessione e a compressione dell'elemento danneggiato.

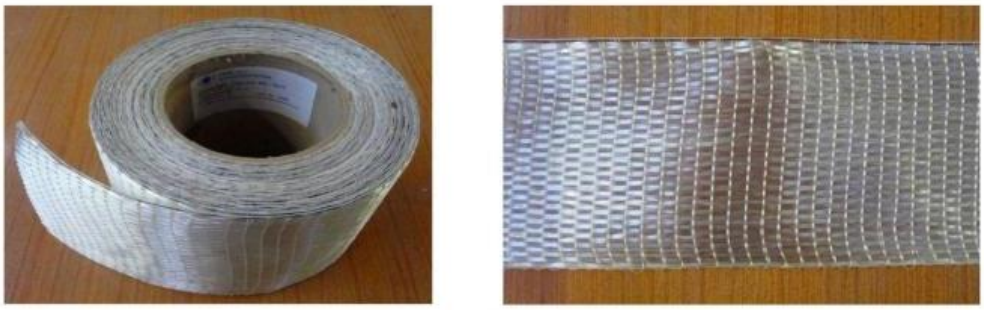


Figura 3.5 – Tessuto in fibra di vetro GFRP

3.3.2 RESINA EPOSSIDICA

Per far aderire la striscia di rinforzo alla trave, si è utilizzati una resina. In particolare, quella utilizzata in questo caso specifico è la KIMIA KIMITECH EP-IN RES E KIMIA KIMITECH EP-IN IND.

Si tratta di una resina epossidica fluida a due componenti a bassa viscosità, elevata adesione, estremamente bagnante, ideale per impregnare tessuti e nastri di alta grammatura e per penetrare facilmente in fessure e microfessure (fino a 0,3 mm di spessore), con ottime proprietà dielettriche. Viene fornita in due contenitori predosati (A resina + B indurente), di cui la parte "A" è sovradimensionata per permettere con gli stessi una facile miscelazione. I vantaggi nell'utilizzo di questa resina è l'elevata adesione, la caratteristica di essere estremamente bagnante, la bassa viscosità e la capacità di essere applicata manualmente. Si presta ad essere utilizzata in specifiche tipologie di lavorazione.
La miscela segue un rapporto 2:1, con due parti di resina e una parte di indurente.
Nella Tabella seguenti, Tabella 3.6 vengono illustrate le caratteristiche della resina.

Caratteristiche	**Valore**
Tempo di gelo (200 g a 25°C)	25 minuti
Indurimento completo a 25°C	7 giorni
Colore	Trasperente
Viscosità (poises a 25°C)	8 - 10 (A+B)
Residuo a secco (A+B) UNI 8309	> 98 %
Resistenza a compressione a 7 gg ASTM D695-02a	> 50 MPa
Massima tensione si trazione ASTM D 638	> 30 MPa
Modulo tangente a trazione ASTM D 638	1760 MPa

Resina di impregnazione	Kimitech EP - IN
Tipo di resina	Epossidica
Densità (g/cm3)	1,08 ± 0,05 g/cm^3
Rapporto di catalisi in peso	A:B=2:1
Modulo di elasticità in compressione [Mpa] EN 13412	3406
Pot Life a 10 °C (min) misurata come tempo di lavorabilità EN ISO 9514	Lavorabilità a 10°: 30 min A 0 min = 3,6 Mpa; A 15 min = 3,6 Mpa; A 30 min = 3,6 MPa
Pot Life a 35 °C (min) misurata come tempo di lavorabilità EN ISO 9514	Lavorabilità a 35°: 5 min A 0 min = 3,7 Mpa; A 5 min = 3,6 Mpa
Range di temperature di applicazione consigliate	10°C - 35°C
Coefficiente di espansione termica [µm/m°C] EN 1770	98,5
Temperatura di transizione vetrosa [°C] EN 12614	43,7
Ritiro totale per agenti adesivi strutturali EN 12617-1	0,06%

Tabella 3.6 – Caratteristiche resina epossidica bifasica



Figura 3.6 – I due bidoni di componendi, uno di resina e l'altro di indurente (A+B=6kg)

4. DESCRIZIONE DEI TEST SPERIMENTALI

In questo capitolo verranno descritte le prove sperimentali eseguite presso il laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura – Sezione Strutture dell'Università Politecnica delle Marche.

Le prove sperimentali statiche e dinamiche sono state condotte su tre travi in calcestruzzo armato e poi rinforzata con strisce in fibra di vetro GFRP. Le prove statiche consistono nell'applicazione di cicli di carico e scarico durante i quali si sono misurati deformazioni e abbassamenti, mentre le prove dinamiche condotte hanno lo scopo di determinare le frequenze proprie di vibrazione delle tre travi all'incremento del livello di danno.

4.1 MESSA IN OPERA

Il rinforzo, striscia di GFRP, di diversa lunghezza in base alla prova effettuata, viene applicata con la tecnica NSM, Near Surface Mounted, ed è stata alloggiata seguendo le seguenti fasi:

a. Pulizia della superficie con spazzola con setole metalliche;
b. Preparazione della resina epossidica;
c. Stesura della resina epossidica sulla superficie da coprire con la striscia in GFRP;
d. Posizionamento della striscia in GFRP;
e. Copertura della striscia in GFRP con resina epossidica;
f. Indurimento e stagionatura della resina per minimo 24 ore.



Figura 4.1 – Fasi messa in opera della striscia in GFRP

4.2 PROVA A FLESSIONE

Lo scopo di questa sperimentazione è la caratterizzazione sia dal punto di vista teorico, prima, e dal punto di vista sperimentale poi, determinando il diagramma momento-curvatura, valutando l'incidenza di danni a trave non rinforzata e a trave rinforzata con strisce in GFRP.

4.2.1 STRAIN GAUGES E ESTENSOMETRI

Gli estensimetri, detti anche Strain Gauges, hanno la capacità di rilevare le variazioni di distanza relativa fra due qualsiasi punti dell'elemento in prova lungo la loro congiungente, misurandone la deformazione pari al rapporto fra la variazione subita dai due punti considerati a causa del carico applicato e la loro distanza prima del carico.

Vengono utilizzati, in questa sperimentazione, estensimetri di tipo elettrico per ottenere informazioni riguardo alle deformazioni dell'acciaio, del calcestruzzo e della barra in GFRP, per l'analisi delle sollecitazioni.

gli estensimetri elettrici effettuano la misura indiretta della deformazione grazie alla variazione di resistività che subiscono. Il valore della resistenza elettrica è direttamente proporzionale alla resistività del materiale in uso e alla lunghezza del conduttore considerato e inversamente proporzionale all'area della sezione del conduttore stesso. Gli estensimetri, però, necessitano di essere collegati ad un compensatore, ovvero un ulteriore estensimetro incollato su una porzione del materiale, in quanto sono molto sensibili alla temperatura, che potrebbe falsare la misurazione.

Nel presente lavoro di tesi sono stati predisposti due estensimetri per la configurazione rinforzata, uno in mezzeria dell'intradosso e il secondo in mezzeria dell'estradosso, entrambi applicati sopra la striscia di GFRP (Figura 4.2)

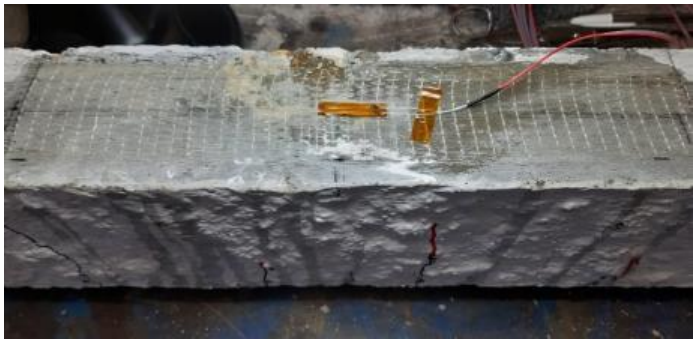


Figura 4.2 – Estensimetro incollato sulla striscia in GFRP

Gli step seguiti per l'applicazione degli estensimetri sono:

a. Levigare la superficie della striscia in GFRP con carta vetrata;
b. Pulizia della superficie interessata con un pennello e con un solvente per preparare il supporto all'incollaggio;
c. Posizionamento dell'estensimetro
d. Stesura della colla bicomponente al di sotto dell'estensimetro;
e. Applicazione di una pressione uniforme fino alla completa asciugatura della colla;
f. Fissaggio dei fili fuoriuscenti dall'estensimetro tramite un nastro adesivo.

Oltre agli estensimetri, detti anche Strain Gauges, vengono anche predisposti degli estensometri che permettono la misurazione della deformazione media dei provini, con particolare attenzione alla deformazione del calcestruzzo. Vengono predisposti aderenti alla trave, lateralmente in mezzeria all'altezza delle armature compresse (Figura 4.3).

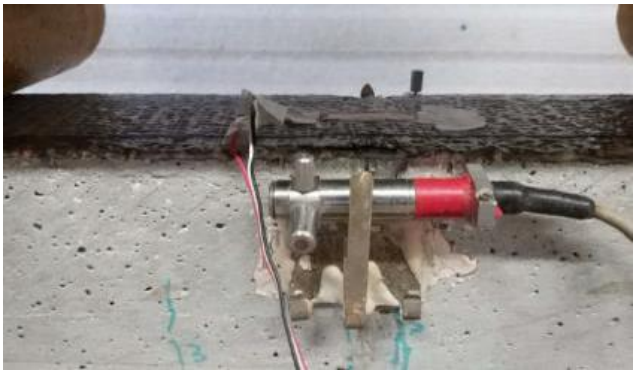


Figura 4.3 – Estensimetro incollato sulla striscia in GFRP

4.2.2 TRASDUTTORI DI SPOSTAMENTO

I trasduttori di spostamento vengono utilizzati per la misurazione della freccia durante la prova a flessione. I traduttori di spostamento vengono disposti o in mezzeria oppure in maniera

simmetrica rispetto alla mezzeria della trave. La capacità massima di registrazione dei trasduttori utilizzati è 100 mm ed una sensibilità di 0,01 mm. Il trasduttore è stato messo in comunione con la trave attraverso la colla a caldo e lo zero viene fissato lo zero come posizione iniziale della trave prima del ciclo di carico (Figura 4.4).



Figura 4.4 – Trasduttore di spostamento verticale in mezzeria e in maniera simmetrica rispetto alla simmetria della trave

4.2.3 PREPARAZIONE DEL TEST

Per l'esecuzione del test della prova di flessione semplice, si sono predisposte due cerniere con interasse 1000 mm e due carichi con interasse 300 mm disposti simmetricamente in mezzeria. Il sistema viene schematizzato in Figura 4.5.

Una volta predisposta la trave, si procede con il cablaggio dei cavi di collegamento con estensimetri, estensometri e trasduttori di spostamento con lo strumento acquisitore chiamato "Spider 8" della HBM, e con i compensatori creando dei circuiti detti a mezzo ponte di Wheatstone. Il carico viene applicato attraverso un martinetto idraulico collegato ad una macchina oleodinamica posto sopra il ripartitore. Il martinetto è composto da un cilindro idraulico metallico che scarica la forza al centro del ripartitore. Il ripartitore ha un interasse di 300 mm disposo al centro della trave e i due punti di applicazione del carico si trovano disposti in maniera simmetrica rispetto alla simmetria della trave.

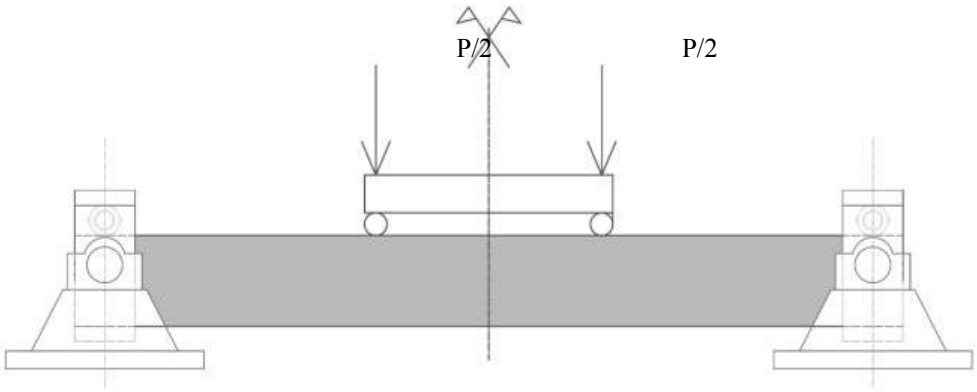


Figura 4.5 – Schema di preparazione della sperimentazione e di applicazione del carico

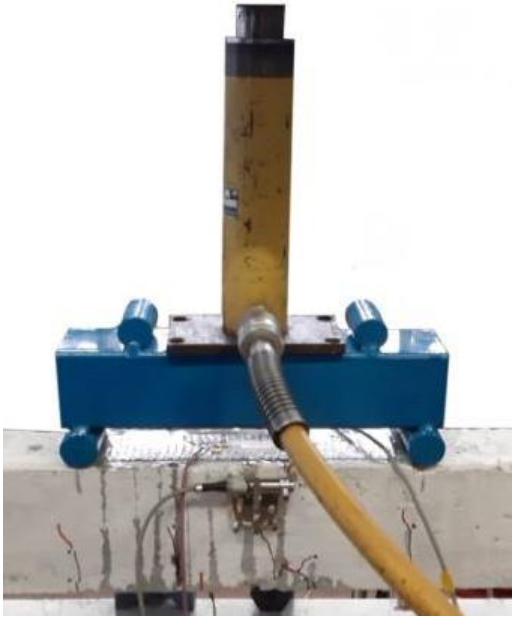


Figura 4.6 – Martinetto idraulico

4.2.4 DEFINIZIONE STEP DI CARICO: DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA TEORICO DELLA SEZIONE DI MEZZERIA

Nel fare la prova sperimentale ci si basa su dei valori teorici. Il primo ciclo di carico corrisponderà circa alla fase di prima fessurazione della trave, il secondo ciclo corrisponderà allo snervamento delle batte e il terzo ciclo corrisponderà alla configurazione a rottura.

Quindi si è calcolato il diagramma momento curvatura teorica della sezione della trave in c.a., in particolare i tre punti che interessa calcolare sono:

1) Momento di prima fessurazione e relativa curvatura;
2) Momento di snervamento e relativa curvatura;

3) Momento ultimo e relativa curvatura.

Per ogni fase si calcolano le deformazioni teoriche e il momento facendo gli equilibri alla traslazione e alla rotazione conoscendo la dimensione e le armature della sezione in esame.

SEZIONE TRAVE		
b	80	mm
h	120	mm
A_s	57	mm^2
A_s'	57	mm^2
d	102	mm
d'	18	mm
d_0	60	mm
ε_{cu}	0,0035	%0
ε_y	0,0019	%0

CALCESTRUZZO		
Rck	30	N/mm^2
fck	24,9	N/mm^2
fctm	2,56	N/mm^2
fcm	32,9	N/mm^2
γ	1	-
fcd	32,9	N/mm^2
E	31447,16	N/mm^2

BARRE IN ACCIAIO		
fyd	391	N/mm^2
E	210000	N/mm^2

FASE I - FESSURAZIONE					
	Bracci (mm)	ε	σ (Mpa)	+	-
Cls compresso	40	0,000081	2,56	0	-6139,5
Cls teso	28	0,000081	2,56	6139,49	0
A_s'	42	0,000057	11,96	0	-681,6
A_s	42	0,000057	11,96	681,6	0
				6821,09	-6821,1

FASEI I - FESSURAZIONE	
Mcr (kNm)	0,47
χcr (1/mm)	1,36E-06
Pcr (kN)	2,37

FASE II - SNERVAMENTO					
	Bracci (mm)	ε	σ (Mpa)	+	-
Cls compresso	17,06	0,000624	19,61	0	-20072,99
A_s'	7,59	0,000185	38,84	0	-2214,01
A_s	76,41	0,0019	391,00	22287,00	0
				22287,00	-22287,00

FASEI II - SNERVAMENTO	
My (kNm)	2,06
χy (1/mm)	2,44E-05
Py (kN)	10,31

FASE III - ROTTURA					
	Bracci (mm)	ε	σ (Mpa)	+	-
Cls compresso	7,06	0,0035	110,07	0	-22287
A_s'	-7,42	-0,00245	-514,93	-29350,75	29350,75
A_s	91,42	0,0019	391,00	22287,00	0
				-7063,75	7063,75

FASEI III - ROTTURA	
Mu (kNm)	2,63
χu (1/mm)	3,31E-04
Pu (kN)	13,15

Tabella 4.1 – Riepilogo caratteristiche dei materiali, calcolo momento di prima fessurazione, relativa curvatura e carico relativo al momento di prima curvatura, calcolo momento di snervamento, relativa curvatura e carico relativo allo snervamento, calcolo momento di rottura, relativa curvatura e carico relativo al momento di rottura

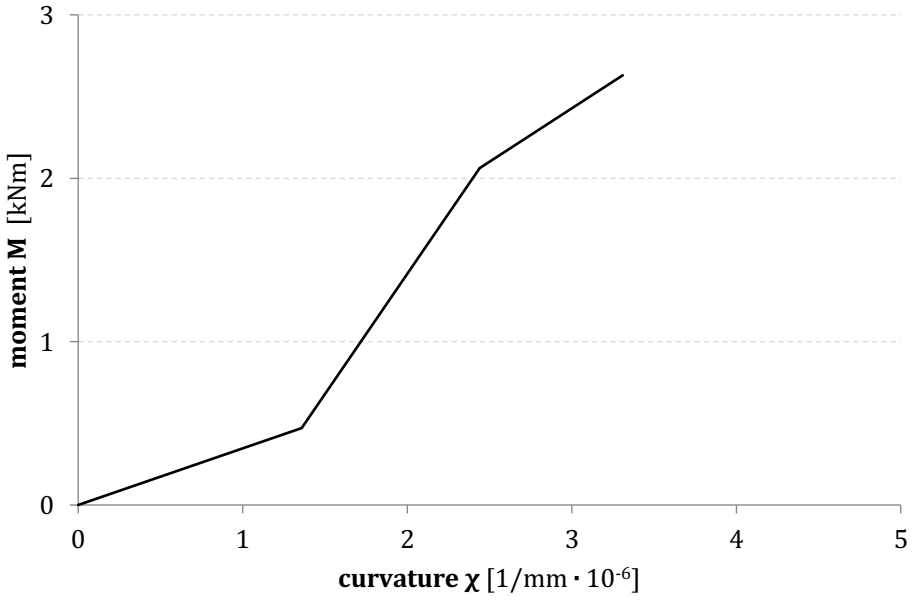


Figura 4.7 – Diagramma momento-curvatura

4.2.5 ESECUZIONE DEL TEST

Per la sperimentazione sono stati applicati dei cicli di carico scarico, nella presente tesi, sono tre cicli di carico, di entità di ordine crescente, e ad ogni step di carico corrisponde una configurazione del danno, che verranno così indicati:

Configurazione D0 – trave integra

Configurazione D1 – trave non rinforzata sottoposta al primo step di carico;

Configurazione D2 – trave non rinforzata sottoposta al secondo step di carico;

Configurazione D3 – trave non rinforzata sottoposta al terzo step di carico.

Una volta danneggiata la trave attraverso gli step di carico sopra descritti, il provino viene rinforzato con striscia di fibra GFRP e successivamente ri-applicati gli stessi step di carico:

Configurazione R-D0 – trave rinforzata non sottoposta a carico;

Configurazione D1 – trave rinforzata sottoposta al primo step di carico;

Configurazione D2 – trave rinforzata sottoposta al secondo step di carico;

Configurazione D3 – trave rinforzata sottoposta al terzo step di carico;

Configurazione Rottura – trave rinforzata sottoposta alla rottura.

In relazione ai calcoli fatti per definire il momento di fessurazione, il momento di snervamento e il momento ultimo, e ai carichi necessari per raggiungere tali momenti, si sono presi come riferimento tre valori ai quali corrispondono i tre step di carico:

D1= 3 kN

D2= 6 kN

D3= 9kN

4.3 PROVA DINAMICA

4.3.1 PROCEDURA DI ESECUZIONE DELLA PROVA

Di seguito si elencano le operazioni previste per la realizzazione di un'analisi modale:

- Pianificazione: le prove vanno programmate sulla base delle informazioni note e priori circa l'intervallo di frequenze ed i nodi modali. In particolare, vengono eseguite le seguenti operazioni:
  a) Scelta dei punti di misurazione;
  b) Impostazione condizioni di vincolo;

c) Predisposizione strumenti per l'acquisizione dei dati sperimentali;
d) Esecuzione della misura.

- Elaborazione dei dati sperimentali;
- Validazione dei modelli modali.

4.3.2 STRUMENTAZIONE

Martello strumentato

Il martello strumentato è lo strumento utilizzato per provocare una eccitazione dovuta all'impatto. Il martello strumentato utilizzato nella seguente prova è quello della Brüel & Kjær, type 8202 (Figura 4.8).

L'apparecchio è composto da un martello fornito di 3 punte e una massa aggiuntiva che serve per estendere i range di forza e frequenza. Ad esempio, un martello della punta dura e dal peso contenuto genera un contatto per un tempo molto limitato, con un ampio contenuto in frequenza per analizzare strutture dal basso peso e relativamente rigide.

Nella presente sperimentazione viene individuato un unico punto di battitura che viene mantenuto costante nella posizione per ogni prova.



Figura 4.8 – Martello strumentato

Accelerometro

L'accelerometro utilizzato nel test dinamico in questa sperimentazione è il modello 4508 – Piezoeletric CCLD accelerometer, 100 mV/g, 1 slot, top connector, della Brüel & Kjær, un trasduttore piezoelettrico già descritto precedentemente.

L'accelerometro in esame presenta un peso ridotto e copre un range di frequenze che va da 0,3 Hz a 8000 Hz con una sensibilità di 10,09 mV/g.

La determinazione dei punti viene scelta in base alle dimensioni del provino e perciò in questo caso, sono stati utilizzati 5 punti di misura in cui verrà posto l'accelerometro, disponendolo a distanza regolare tra loro.

Si sono determinati teoricamente, per una trave continua della dimensione del campione, i primi quattro modi di vibrare. Questi vengono determinati tramite il modello di Eulero – Bernoulli i punti nodali (Capitoli 1.3.1, 4.3.6).

Successivamente si sono decise le 5 posizioni degli accelerometri (Figura 4.9), distanziati 200 mm l'uno dall'altro e 150 mm dalle estremità. Ogni posizione dell'accelerometro è denominata MARK e ogni MARK è affiancato da un numero che indica il numero della posizione dell'accelerometro. Questa nomenclatura è quella che deriva dal software e si decide di mantenere tale dicitura.

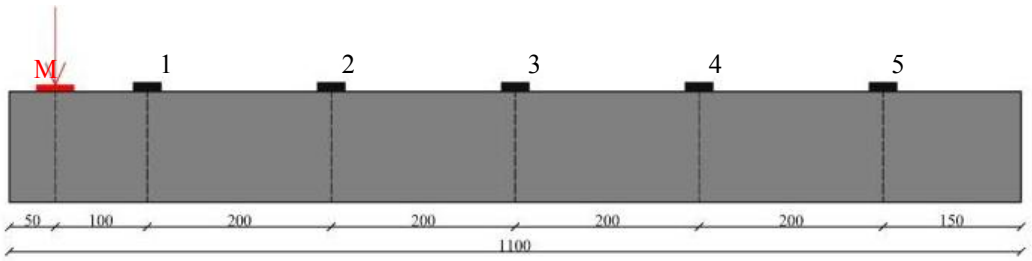


Figura 4.9 – Disposizione dei punti di rilevazione (Mark)



Figura 4.10 – Posizione accelerometro

4.3.3 PREPARAZIONE DEL TEST

Per la sperimentazione si è stabilito di porre la trave vincolata a terra, cioè incernierata. La trave è posta all'interno di due cerniere costruite appositamente (Figura 4.11).



Figura 4.11 – Cerniera

La cerniera si può così schematizzare:

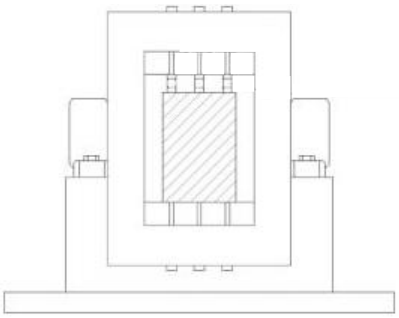


Figura 4.12 – Schema cerniera

4.3.4 ESECUZIONE DEL TEST

Nella prova dinamica la trave viene sollecitata attraverso il martello strumentato con 10 colpi su un unico punto fisso precedentemente fissato in fase di predisposizione della prova stessa. L'accelerometro viene posto di volta in volta su un punto diverso di misura chiamati MARK e tale tecnica è definita come tecnica dell'accelerometro errante. In questo modo si acquisiscono le misure FRF e queste vengono poi trasmesse all'analizzatore.

Il computer, con il software installato, memorizza le informazioni riguardanti i gradi di libertà misurati, la regolazione dell'analizzatore, la calibrazione, la data e l'ora. Ogni misurazione effettuata vengano controllate la funzione di coerenza che è un indicatore che permette di definire se la misura è accettabile oppure è il caso di ripetere tale misurazione.

I dati ottenuti andranno rielaborati in modo da renderli leggibili e tradotti in maniera grafica o tabellare così da mettere in relazione i parametri modali: frequenze, smorzamenti, forme dei modi, estratti.

In particolare, i parametri ottenuti vengono messi in relazione con gli effetti della progressione del danno provocato sui provini dalla prova statica. Quindi per ogni livello di carico e con il conseguente danno, viene effettuata la prova dinamica.

4.3.5 COMPORTAMENTO TEORICO DELLA TRAVE INCERNIERATA

Si delinea il modello teorico da utilizzare per il confronto con i risultati derivanti dall'analisi modale sperimentale. Introducendo ipotesi semplificative, si otterranno dalle equazioni generali illustrate al §1 delle soluzioni che permettono di ricavare modi, frequenze e periodi di vibrazione teorici del campione oggetto di studio. Le travi elastiche sono considerate come elementi snelli e pertanto possono essere studiate all'interno dell'analisi delle vibrazioni, considerando la massa e le proprietà di deformazione distribuite in modo continuo.

Nelle schematizzazioni viste finora massa, smorzamento e rigidezza sono possedute da uno specifico elemento. In pratica, la molla è una molla ideale, priva di massa e priva di ogni dissipazione energetica. Allo stesso modo, l'elemento smorzante è privo di massa e presenta uno smorzamento viscoso, ma nei sistemi reali (continui) ciascuna parte infinitesima di un corpo possiede caratteristiche sia inerziali, elastiche e dissipative.

Quindi un sistema caratterizzato da un continuo elastico è composto da infiniti gradi di libertà, per cui sono necessarie infinite coordinate di spostamento per definirne la configurazione spaziale. Queste coordinate sono espresse da funzioni continue nel dominio del tempo. Poiché la massa non è più concentrata, ma distribuita, il sistema ha infiniti modi naturali di vibrare e la risposta dinamica è data dalla somma di tutti questi infiniti contributi.

Imponendo delle ipotesi particolari, le travi snelle possono essere considerati continui monodimensionali e le vibrazioni flessionali possono essere studiate secondo modelli semplificati, facendo riferimento al modello di Eulero – Bernoulli, modello basato sulla conservazione della sezione piana normale all'asse della trave.

Di seguito si riporta lo studio delle vibrazioni flessionali per travi prismatiche, che rappresenta la base teorica alla quale si è fatto riferimento per il calcolo delle frequenze naturali proprie di travi integra sottoposte a controllo dinamico.

Le ipotesi alla base del modello di Eulero-Bernoulli sono:

- Materiale omogeneo e comportamento elastico lineare, quindi validità della legge di Hooke;
- Stato tensionale di flessione prevalentemente descritto dalle tensioni normali nella direzione dell'asse della trave; stato tensione trascurabile nelle direzioni normali ($\sigma_x \neq 0;\ \sigma_z = \sigma_y = 0$)
- Piano di flessione coincidente con il piano della trave;
- Inerzia rotazionale trascurabile;
- Conservazione della sezione piana normale all'asse della trave nella configurazione deformata.

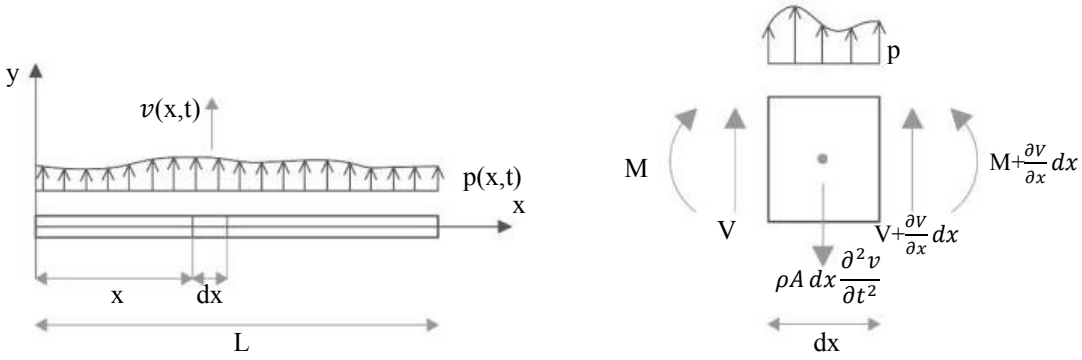


Figura 4.13 – Concio infinitesimo di trave

La figura di cui sopra, rappresenta un concio infinitesimo di trave di lunghezza *dx* in cui sono riportate:

- Le azioni esterne rappresentate dal carico *p(x,t)*;
- Le azioni interne: taglio *V(x,t)*, momento *M(x,t)*;
- Le azioni inerziali: la quantità $\rho A\, dx$ è la massa del concio infinitesimo, con ρ densità;
- La funzione di spostamento trasversale di un generico punto appartenente all'asse della trave: funzione *v(x,t)*.

Con riferimento alla generica massa *m* si applica la legge di Newton $\sum F = ma$, nella direzione *y*, si perviene alla condizione di equilibrio dinamico per le forze in direzione *y*, data da:

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + p\, dx = \rho A\, dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Se si trascurano le inerzie rotazionali cioè $\sum M = 0$, si ottiene:

$$-V\,dx + \frac{\partial M}{\partial x}dx = 0 \;\rightarrow V = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{4.2}$$

Sostituendo V nell'equazione di equilibrio delle forze di ottiene:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}dx + p\,dx = \rho A\,dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.3}$$

Poiché la trave è costituita da materiale elastico lineare, il momento flettente legato alla curvatura:

$$M = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{4.4}$$

dove:

- $E =$ modulo elastico;
- $I =$ momento di inerzia.

La curvatura nell'ambito di piccoli spostamenti è assimilabile alla derivata seconda dello spostamento. Pertanto, si perviene all'equazione differenziale:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx + p\,dx = \rho A\,dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx + \rho A\,dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p\,dx \tag{4.6}$$

Tale equazione permette di descrive il moto trasversale della trave in regime flessionale.

Nel caso di vibrazioni flessionali libere ($p(x,t) = 0$), l'equazione generale del moto diventa:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx + \rho A\,dx\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{4.7}$$

Ammettendo che la rigidità flessionale non vari con *x*, l'equazione può essere riscritta:

$$\left(EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right) + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{4.8}$$

Si tratta di un'equazione differenziale omogenea alle derivate parziali del quarto ordine. La soluzione di tale equazione può essere scritta nella forma di un'onda stazionaria, separando la variabile spaziale e temporale:

$$v(x,t) = X(x)cos(\omega t - a) \tag{4.9}$$

Sostituendo all'equazione del moto si ottiene:

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - K^4 X = 0 \tag{4.10}$$

In questo modo è possibile ricavare l'equazione caratteristica che lega la frequenza circolare ω al numero d'onda *k*.

La soluzione generale dell'omogenea associata può essere quindi scritta nella seguente forma:

$$X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx} + A_3 e^{ikx} + A_4 e^{-ikx} \tag{4.11}$$

Che può essere espressa in forma equivalente:

$$X(x) = C_1 sen\ kx + C_2 cos\ kx + C_3 senh\ kx + C_4 cosh\ kx \tag{4.12}$$

Questa equazione definisce il moto trasversale (le vibrazioni) di una trave omogenea senza carichi distribuiti, comunque siano le condizioni al contorno o le condizioni iniziali. I parametri incogniti sono cinque: C_1, C_2, C_3, C_4 e l'autovalore k, determinati mediante equazioni di equilibrio e al contorno, cioè dai vincoli assegnati agli estremi della trave: variando quest'ultimi si avranno diverse soluzioni. Di seguito si riporta lo studio di vibrazioni flessionali relativamente al caso particolare di trave incernierata agli estremi. Quest'ultimo caso è stato preso come modello per il calcolo delle frequenze proprie degli elementi sottoposti a sperimentazione dinamica nella presente tesi. Modi propri per la condizione di trave doppiamente incernierata Per una trave incernierata alle estremità le condizioni al contorno indicano che gli spostamenti e i momenti sono nulli, quindi si avranno le seguenti condizioni:

$$[v]_{x=0} = 0;\ [M]_{x=0} = 0 \rightarrow \left[\frac{d^2x}{dx^2}\right]_{x=0} = 0 \tag{4.13}$$

$$[v]_{x=L} = 0;\ [M]_{x=L} = 0 \rightarrow \left[\frac{d^2x}{dx^2}\right]_{x=L} = 0 \tag{4.14}$$

Imponendo le condizioni al contorno e sostituendole nell'equazione si ottengono:

$$X(0) = C_2 + C_4 = 0 \tag{4.15}$$

$$X(L) = C_1 sen\ kL + C_2 cos\ kL + C_3 senh\ kL + C_4 cosh\ kL = 0 \tag{4.16}$$

$$X''(0) = k^2(-C_2 + C_4) = 0 \tag{4.17}$$

$$X''(L) = k^2(-C_1 sen\ kL - C_2 cos\ kL + C_3 senh\ kL + C_4 cosh\ kL) = 0 \tag{4.18}$$

$$C_2 + C_4 = 0 \tag{4.19}$$

$$C_1 sen\ kL + C_2 cos\ kL + C_3 senh\ kL + C_4 cosh\ kL = 0 \tag{4.20}$$

$$-C_2 + C_4 = 0 \tag{4.21}$$

$$-C_1 sen\ kL - C_2 cos\ kL + C_3 senh\ kL + C_4 cosh\ kL = 0 \tag{4.22}$$

In altra forma questo sistema si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ sen\ kL & cos\ kL & senh\ kL & cosh\ kL \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -sen\ kL & -cos\ kL & senh\ kL & cosh\ kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Questo sistema omogeneo ha soluzioni non banali solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, ossia se:

$$-4 sen\ kL\ sen\ kL\ = 0 \tag{4.24}$$

Che risulta soddisfatta se $kL = n\pi$, si riportano le prime quattro radici:

k_1L	k_2L	k_3L	k_4L
3,14	6,28	9,42	12,56

La frequenza angolare propria di ogni modo sarà:

$$\omega_r = n^2\pi^4 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \tag{4.25}$$

Di conseguenza le frequenze di ogni modo saranno:

$$f_r = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n^2\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \tag{4.26}$$

mentre i corrispettivi periodi di vibrazione saranno:

$$T_r = \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{2}{n^2\pi} \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \tag{4.27}$$

I modi di vibrazione flessionale di una trave elastica di sezione costante sono sinusoidi la cui "lunghezza d'onda" è un sottomultiplo di l: sen $(n\pi x/l)$.

Per trovare i punti di nullo dei primi modi di vibrare di una trave appoggiata, utilizziamo la seguente relazione $v(x) = sen\,(n\pi x\,/\,l)$ imponendo nullo lo spostamento al variare di $n = (1, 2, 3, \ldots, n)$. Dall'equazione così ottenuta si ricava il valore di x che rappresenta la distanza da un estremo per la quale si annulla lo spostamento.

$$v(x) = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{n\pi x}{L}\right) = j\pi\ (j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{4.28}$$

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	L			
2	0	L/2	L		
3	0	L/3	2L/3	L	
4	0	L/4	L/2	3L/4	L

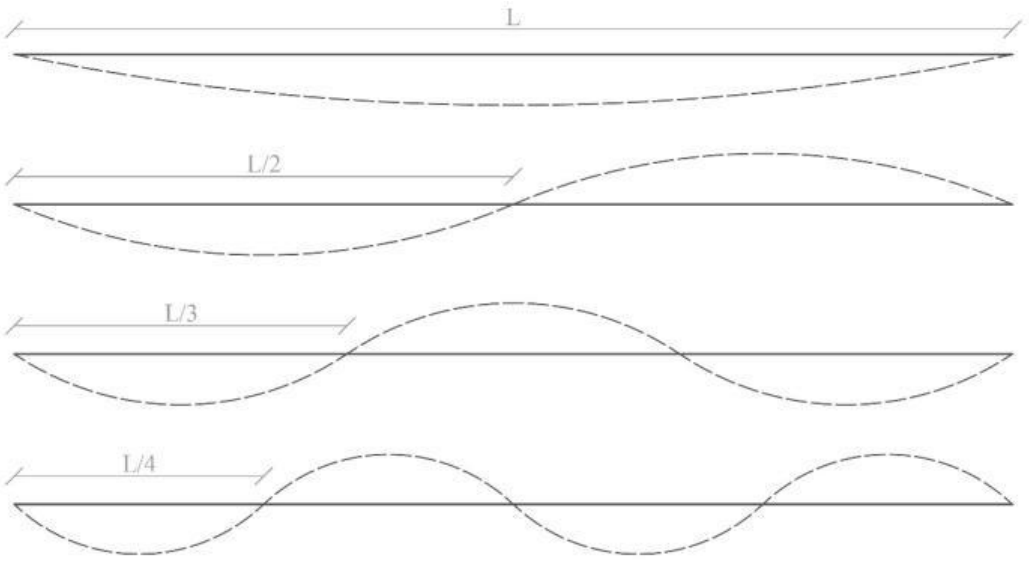


Figura 4.14 – Rappresentazione dei primi quattro modi di vibrare per una trave con estremi incernierati

4.3.6 CALCOLO FREQUENZE TEORICHE TRAMITE IL MODELLO BERNOULLI - EULERO

Il calcolo teorico delle frequenze naturali è stato effettuato prima dell'analisi sperimentale, per i primi quattro modi di vibrare per travi incernierate.

Il calcolo delle frequenze naturale sarà funzione della geometria del provino, delle sue caratteristiche di densità e modulo elastico, dal sistema di vincolo e del numero di modi di vibrare considerati.

Una volta determinate le frequenze proprie del provino, queste verranno confrontate con le frequenze acquisite sperimentalmente, per la trave integra e per la trave fessurata ad ogni livello di carico applicato.

Nel presente capitolo si riportano solo i risultati delle prove dinamiche effettuate sul campione non danneggiato in condizione libera e vincolata incernierata.

Il valore delle frequenze naturali per una trave snella, omogenea, di rigidezza flessionale *EJ* e densità ρ, può essere calcolato mediante l'espressione di Eulero-Bernoulli, valida sempre qualsiasi siano le condizioni al contorno:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{r a_r \pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{4.29}$$

dove:

- r= 1, 2, 3, 4 che indica i primi 4 modi di vibrare;
- a_r dipende da particolari condizioni al contorno. A seconda delle condizioni al contorno, si avranno diverse frequenze proprie e di conseguenza diversi modi di vibrare. In letteratura esistono valori già tabulati (Tabella 4.2):

	I MODO	II MODO	III MODO	IV MODO
a_r	a_1	a_2	a_3	a_4
Libero - Libero	1,506	1,25	1,167	1,125
Appoggio - Appoggio	1	1	1	1
Incastro - Incastro	1,507	1,507	1,166	1,122
Incastro - Appoggio	1,249	1,122	1,081	1,063
Incastro - Libero	0,6	0,74	0,83	0,87

Tabella 4.2 – Dati in letteratura di particolari condizioni al contorno

Nella tabella seguente vengono evidenziati i parametri utili delle travi esaminate per il calcolo delle frequenze teoriche (Tabella 4.3):

L	1100	mm
b	120	mm
s	80	mm
E	28000	N/mm^2
J	11520000	mm^4
ρ	2,36E-09	Ns^2/mm^4
A	9600	mm^2

Tabella 4.3 – Parametri caratteristici dei provini

Ne risultano i valori della frequenza naturale per i primi tre modi di vibrare (Tabella 4.4):

f1	351,316	Hz
f2	968,118	Hz
f3	1898,600	Hz

Tabella 4.4 – Primi quattro modi di vibrare

5. RISULTATI SPERIMENTALI

La trave dopo essere studiata in condizione integra, D0, subisce dei cicli di carico progressivamente crescente D1, D2, D3 che porteranno la trave fino allo snervamento dell'acciaio.

Una volta effettuato il danno, viene applicato il rinforzo con due strisce in GFRP e la trave viene nuovamente sottoposta a cicli di carico, RD1, RD2, RD3 fino a rottura.

I test che vengono effettuati sono:

- Prove di tipo statiche, cioè attraverso i cicli di carico, vengono misurati gli abbassamenti e le deformazioni;
- Prove di tipo dinamiche, che vengono eseguite nell'intervallo di ogni prova statica e hanno lo scopo di determinare le frequenze modali di vibrazione proprie della trave attraverso i diagrammi delle risposte in frequenza FRF.

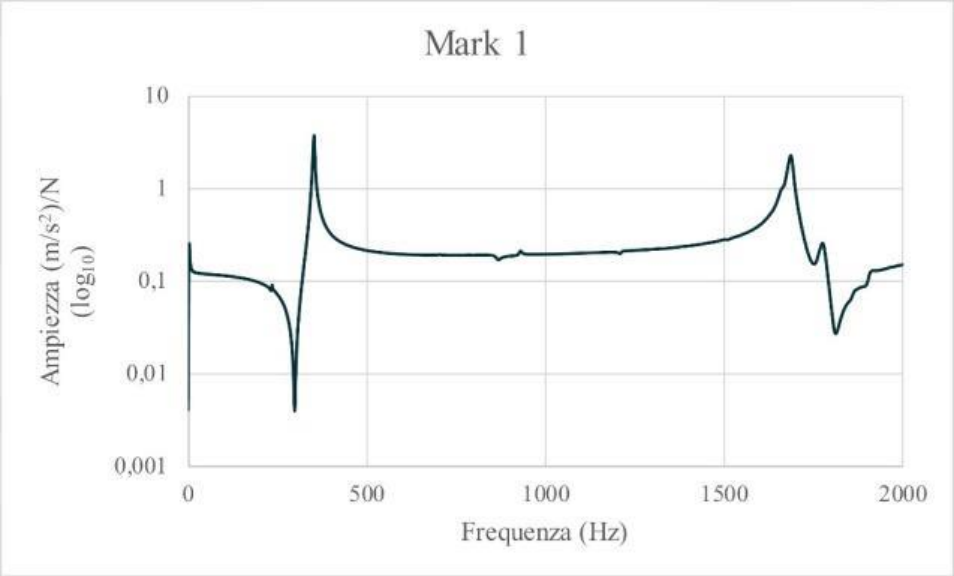
5.1 TRAVE B1 E STATI DI DANNO

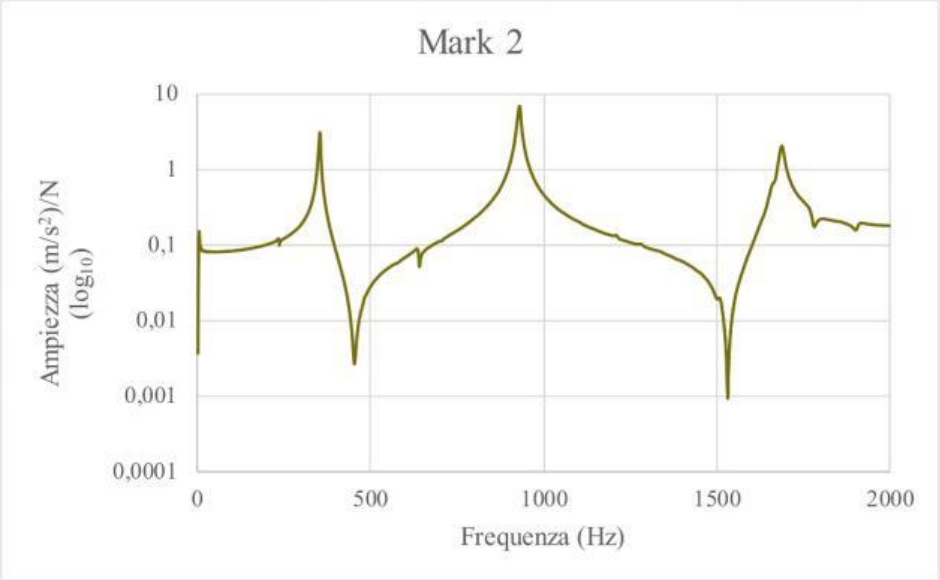
Stato di danno B1_D0

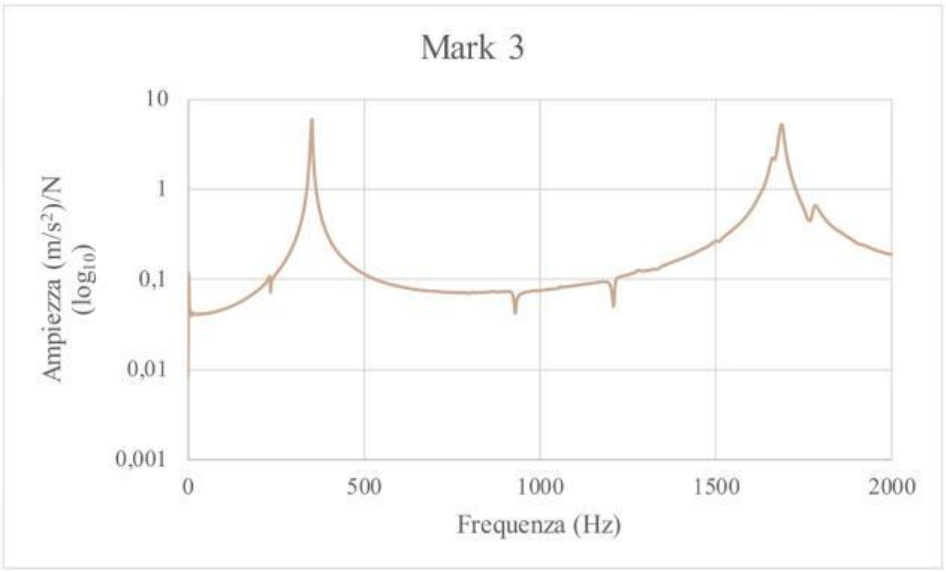
La trave denominata B1 è la prima trave che ha subito la sperimentazione.

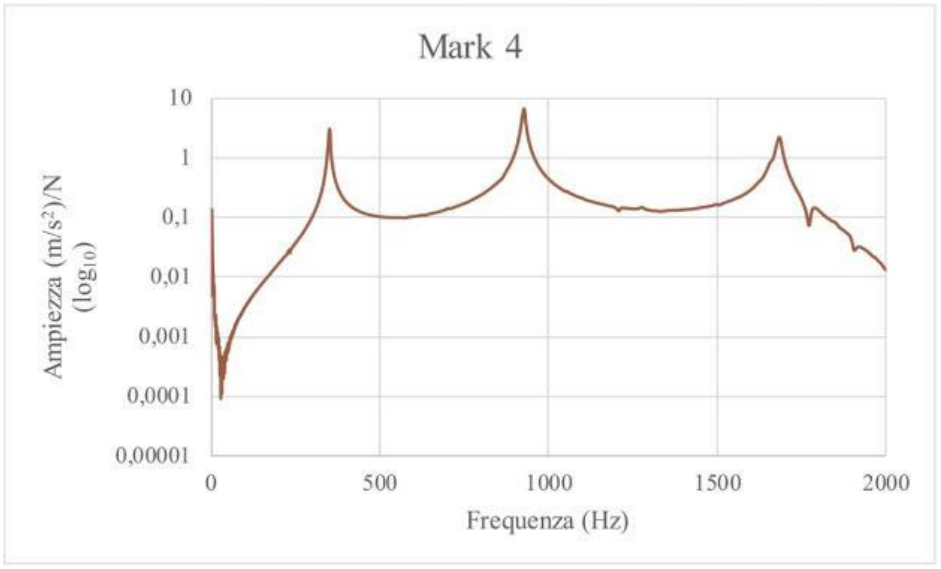
Inizialmente è stata eseguita una prova di tipo dinamico e si sono determinate le FRF e la coerenza a trave integra.

In figura (Figura 5.1) sono riportati i grafici delle FRF per ogni singolo mark posizionati come descritto nel §4.3.2.2 relative alla trave in condizioni integre:


Mark 1
10
1
0,1
0,01
0,001
Ampiezza (m/s²)/N
(log10)
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 2
10
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
Ampiezza (m/s²)/N
(log10)
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)





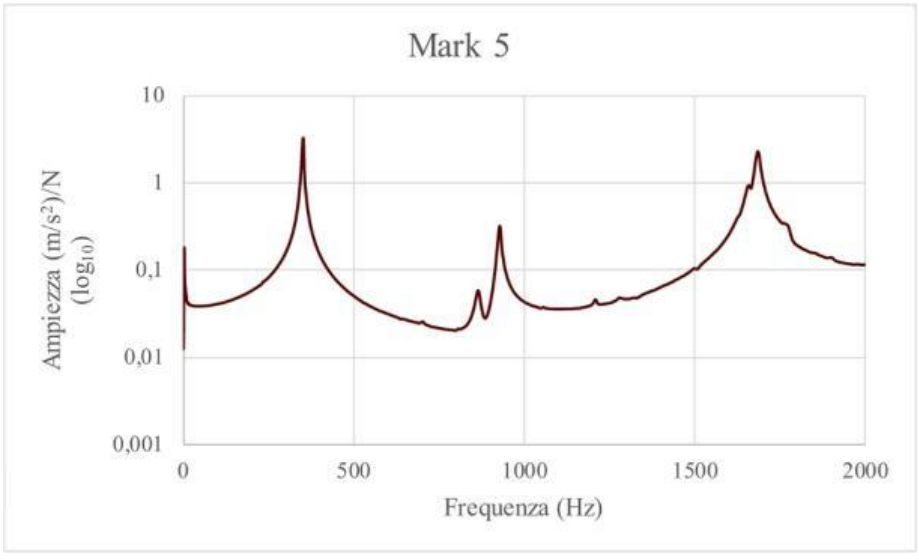


Figura 5.1 – Grafico delle FRF – trave B1_D0

Sovrapponendo i grafici di ogni singolo mark (Figura 5.2), si ricavano i valori delle FRF per i primi 3 modi di vibrare (Tabella 5.1). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.2). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

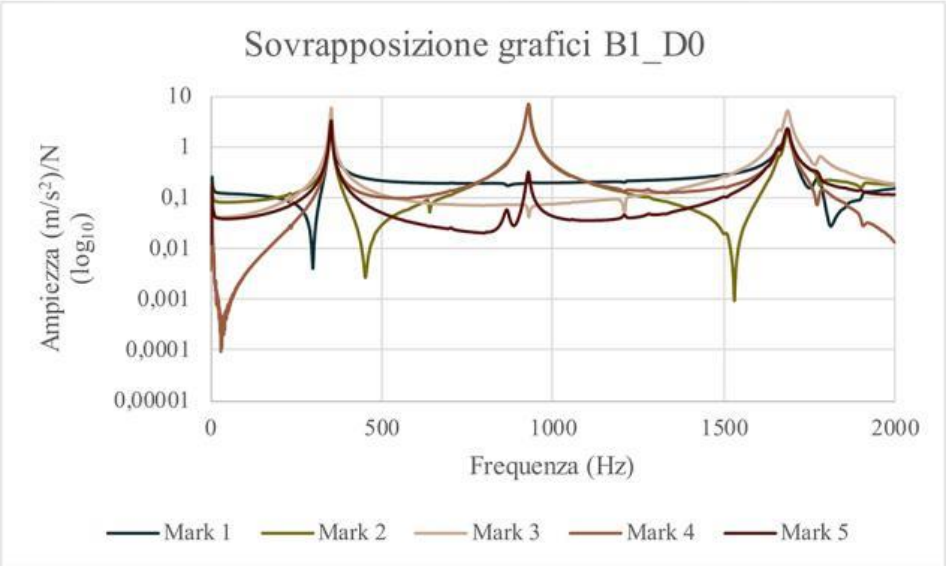


Figura 5.2 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B1_D0

	Hz
modo 1	352,344
modo 2	931,250
modo 3	1690,625

Tabella 5.1 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B1_D0

	Hz da B&K
modo 1	351,497
modo 2	927,237
modo 3	1684,935

Tabella 5.2 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 3, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.3)

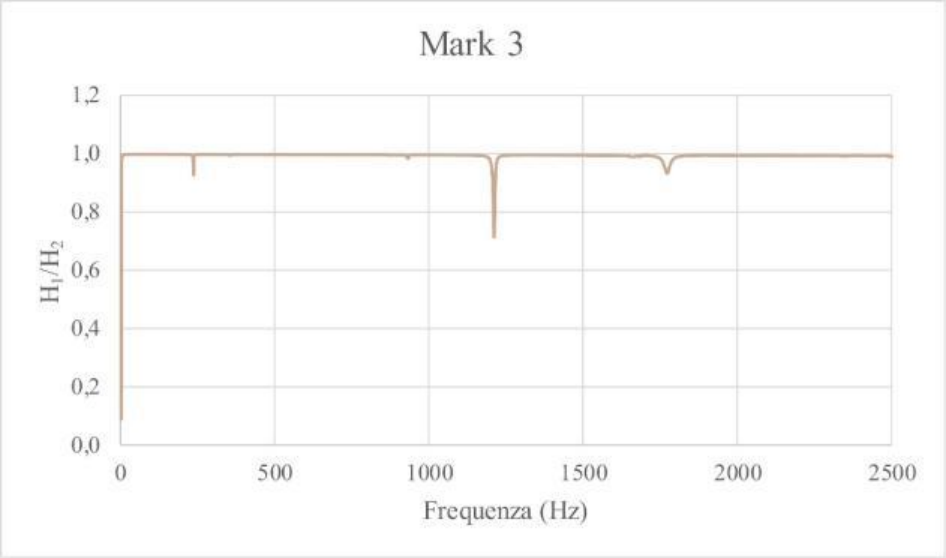


Figura 5.3 – Coerenza corrispondente al mark 3 – trave B1_D0

Stato di danno B1_D1

Dopo aver misurato le FRF della trave integra, si è passati alla prova di tipo statico applicando il primo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 3 kN.

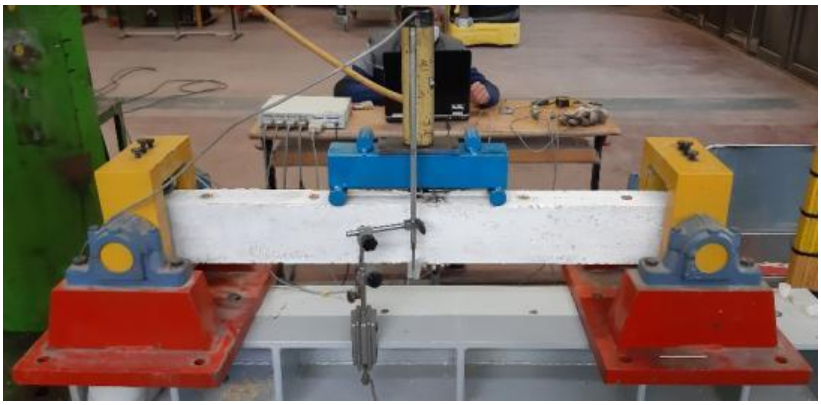
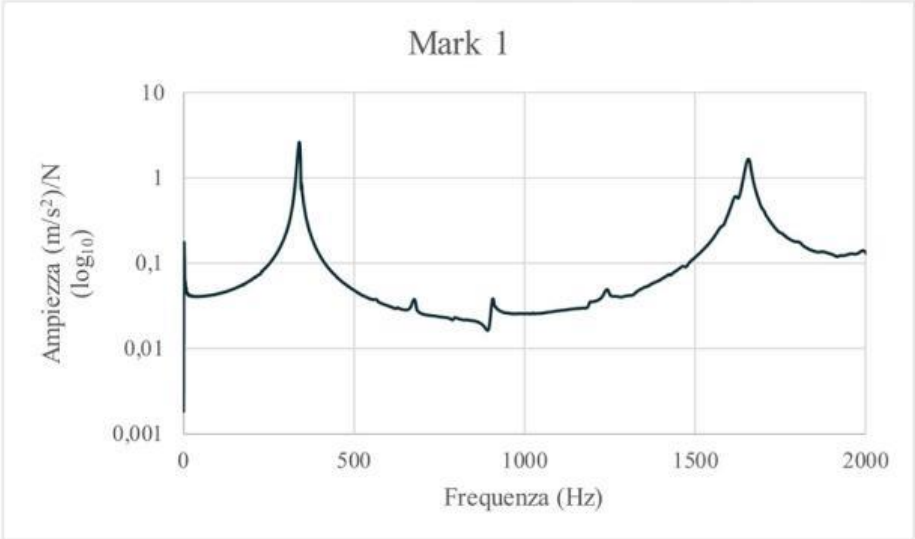
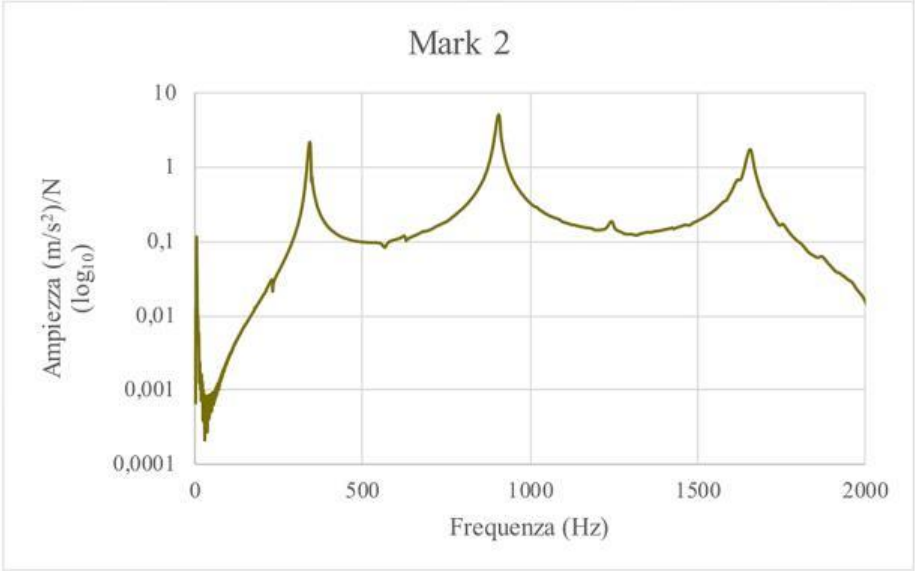


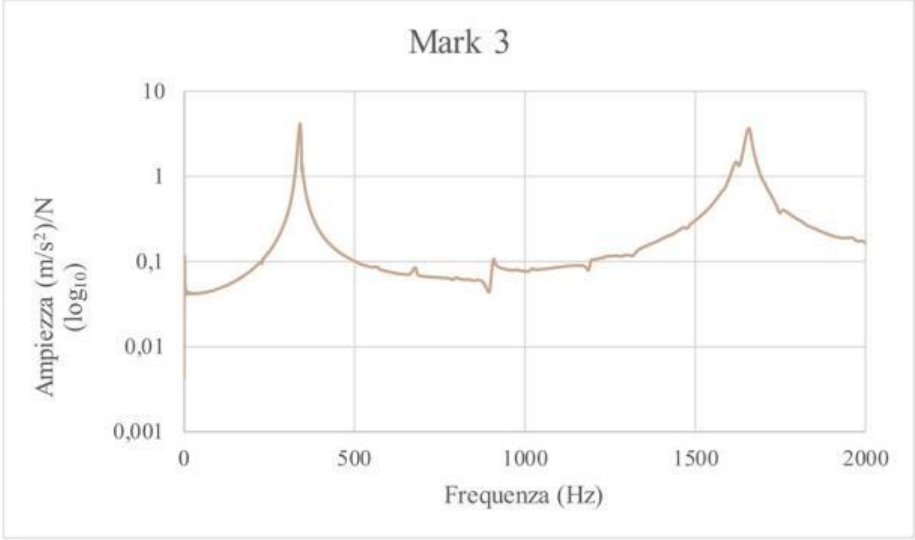
Figura 5.4 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica – trave B1_D1

Con un carico di 3kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.5) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.6) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.3).


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)

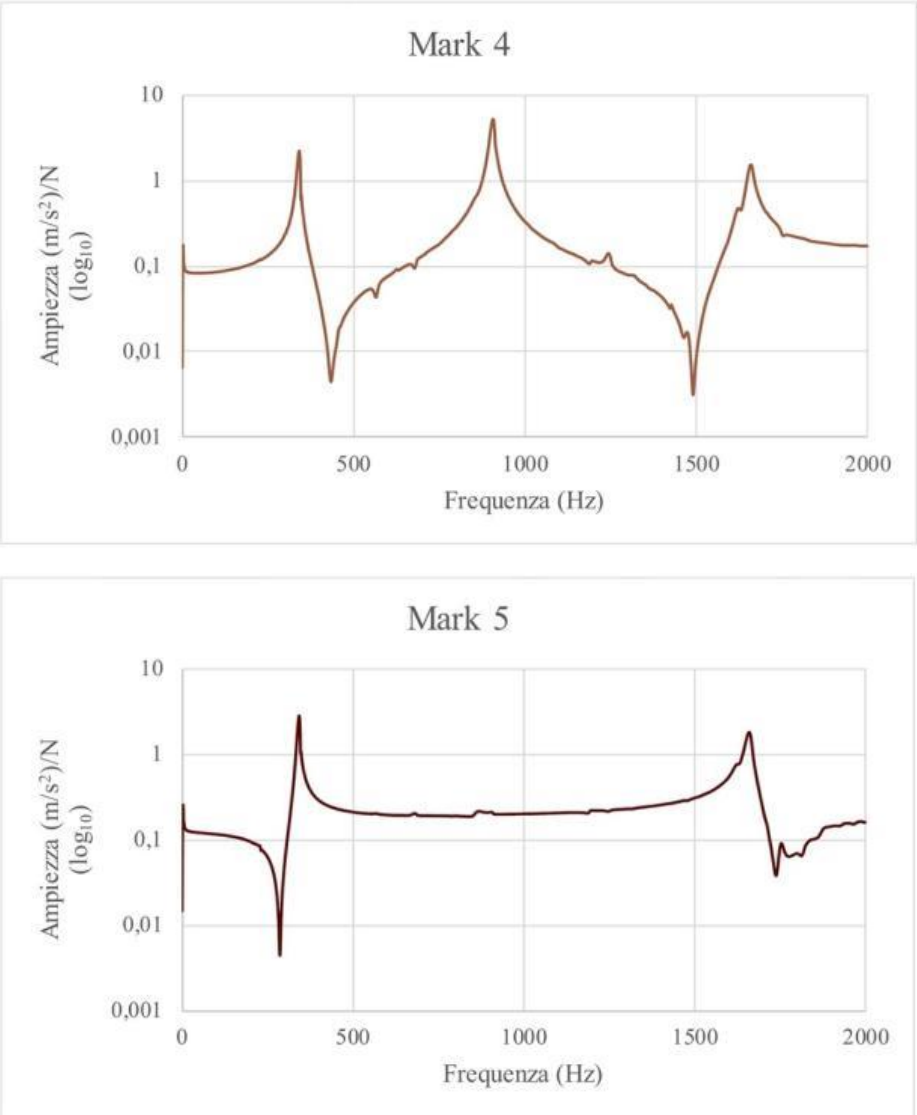


Figura 5.5 – Grafico delle FRF – trave B1_D1

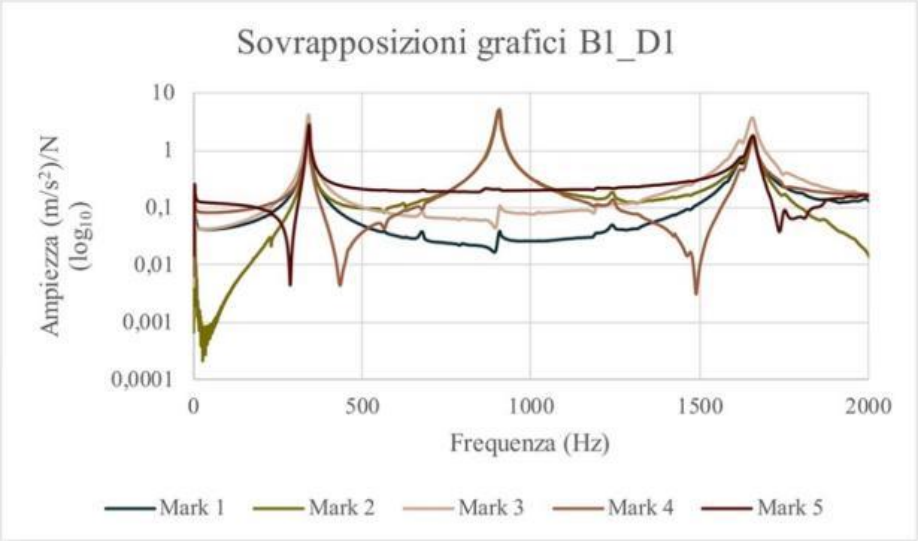


Figura 5.6 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B1_D1

	Hz
modo 1	342,969
modo 2	911,719
modo 3	1654,687

Tabella 5.3 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B1_D1

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra, le funzioni di risposta in frequenza non variano di molto, in quanto la differenza tra i valori è minima (Tabella 5.16).

Stato di danno B1_D2

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 6 kN.



Figura 5.7 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica con danneggiamento – trave B1_D2

Con il secondo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.8) vengono schematizzati i due lati della trave dove sono visibili i danni.

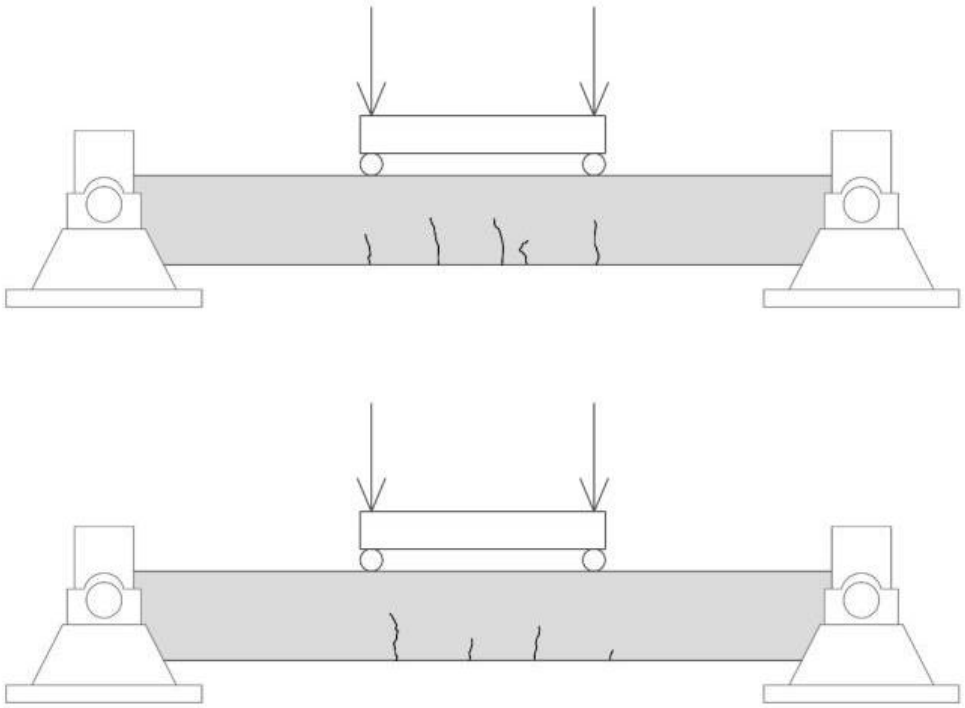
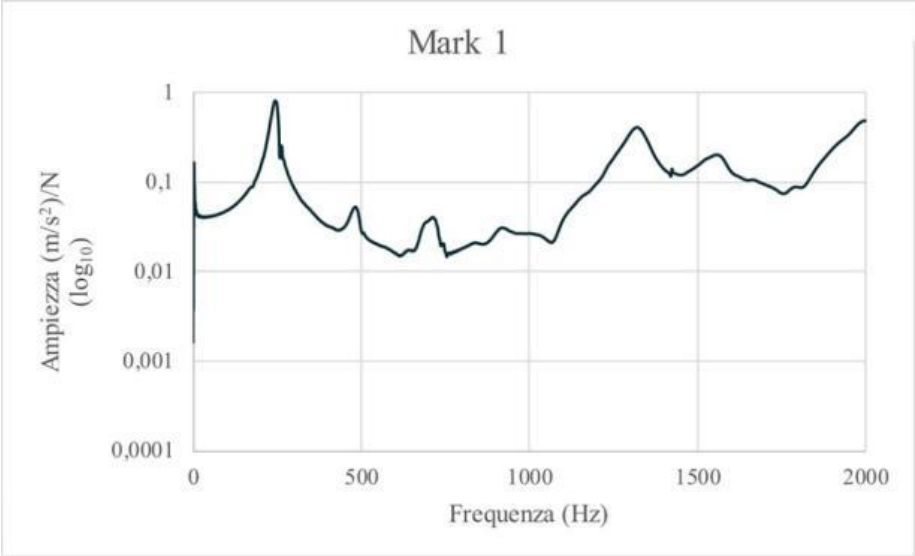
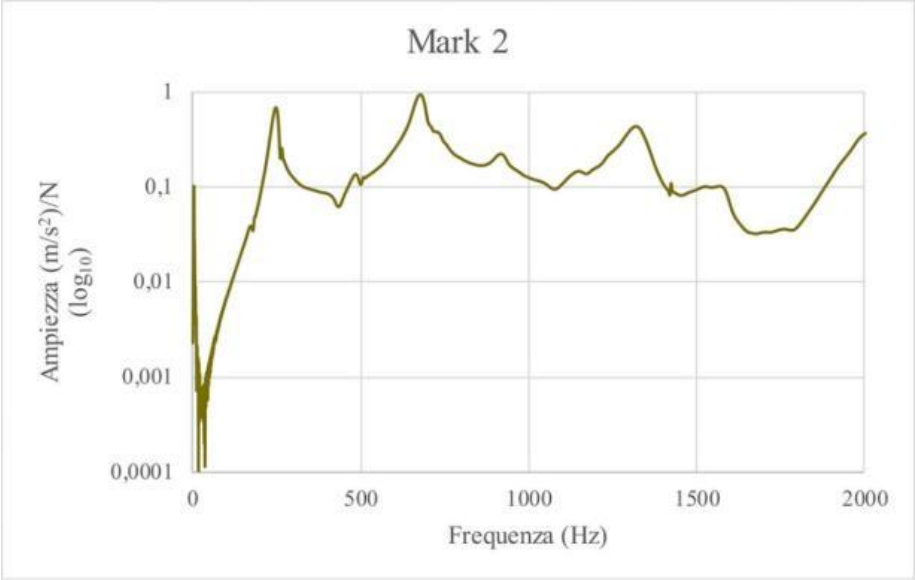
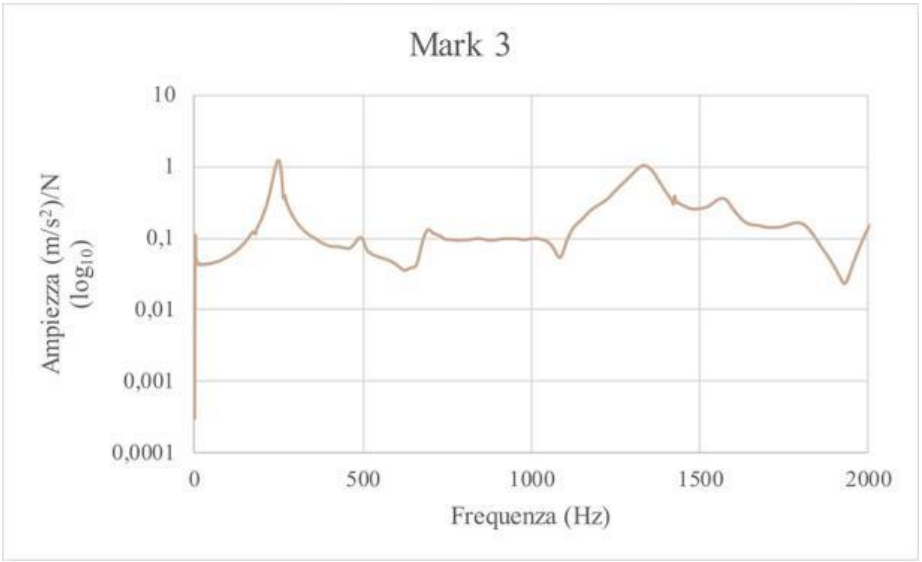


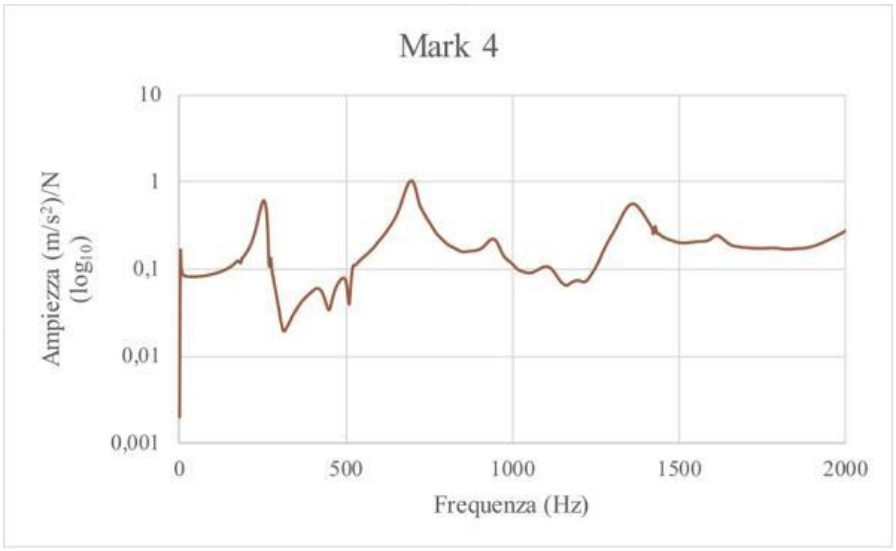
Figura 5.8 –Schematizzazione danni – trave B1_D2

Vengono mostrati in (Figura5.9) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.10) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.4).


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)



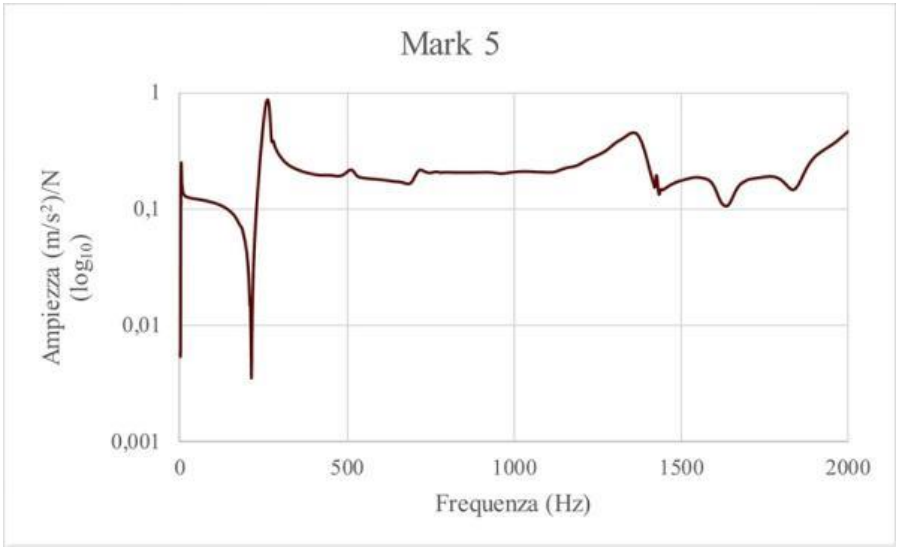


Figura 5.9 – Grafico delle FRF – trave B1_D2

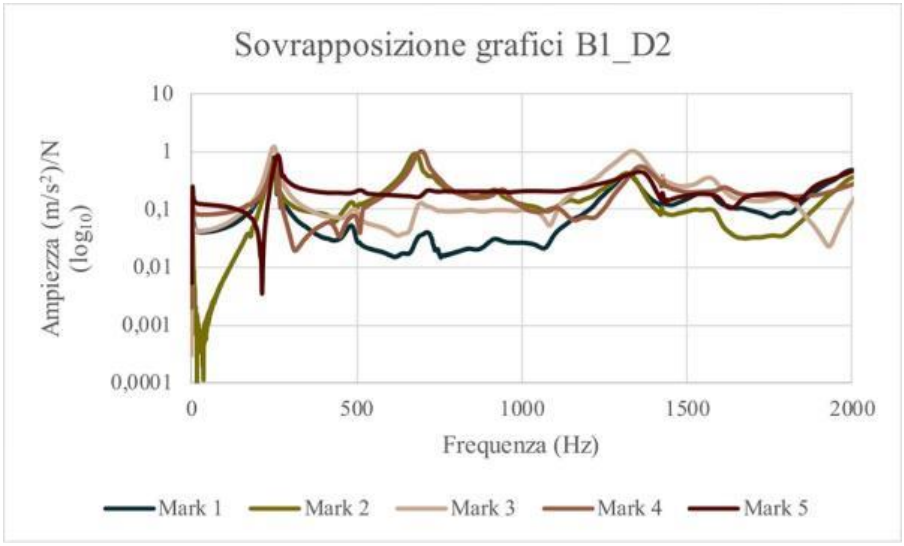


Figura 5.10 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B1_D2

	Hz
modo 1	259,375
modo 2	708,594
modo 3	1339,062

Tabella 5.4 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B1_D2

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra e alla trave che ha subito il danno D1, le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

Stato di danno B1_D3

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 9 kN.



Figura 5.11 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica con danneggiamento (in rosso danni relativi a carico 9 kN e in grigio danni relativi a 6kN) – trave B1_D3

Con il secondo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.12) vengono schematizzati i due lati della trave dove sono visibili i danni.

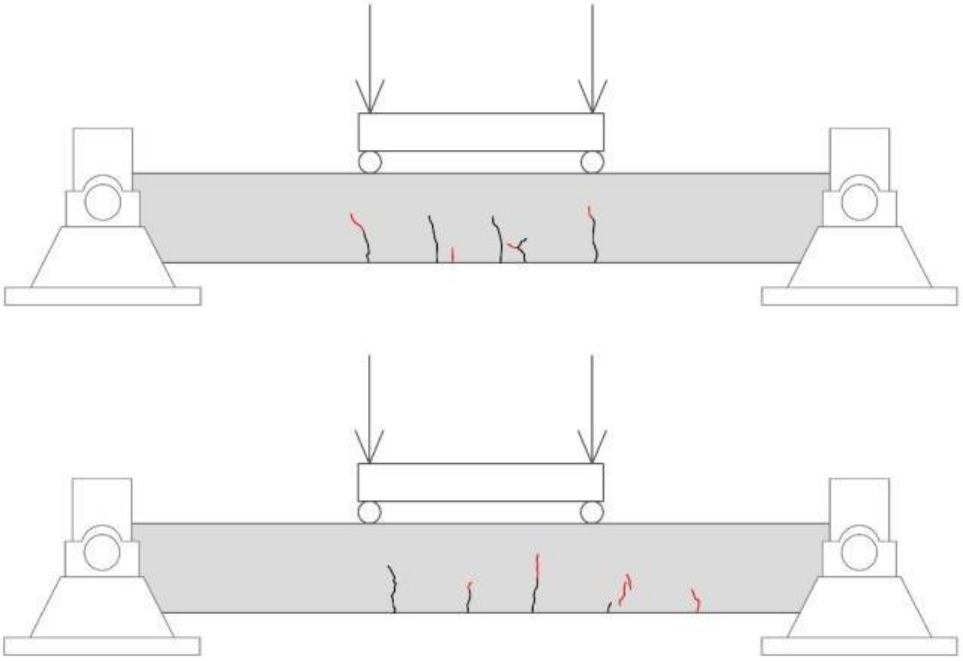
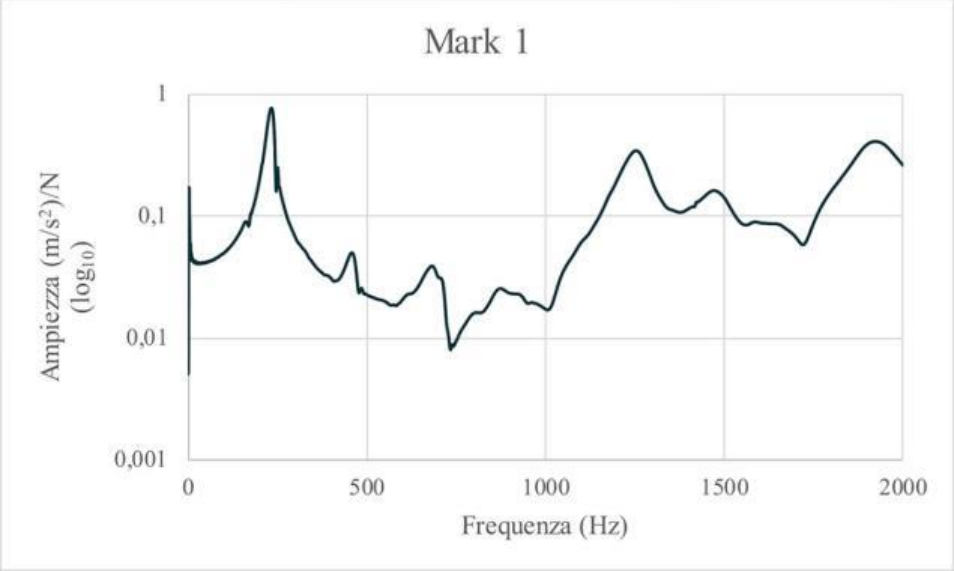
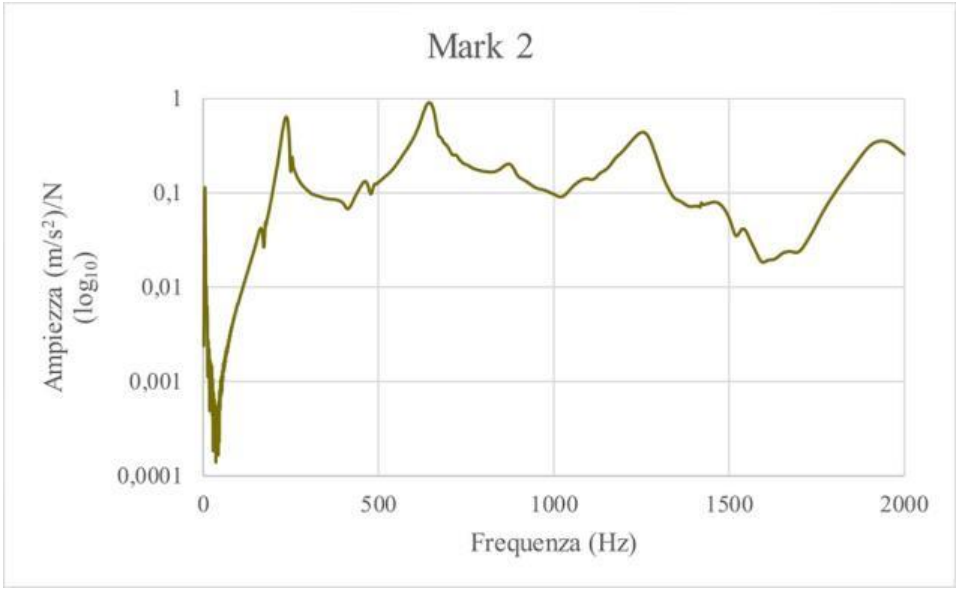
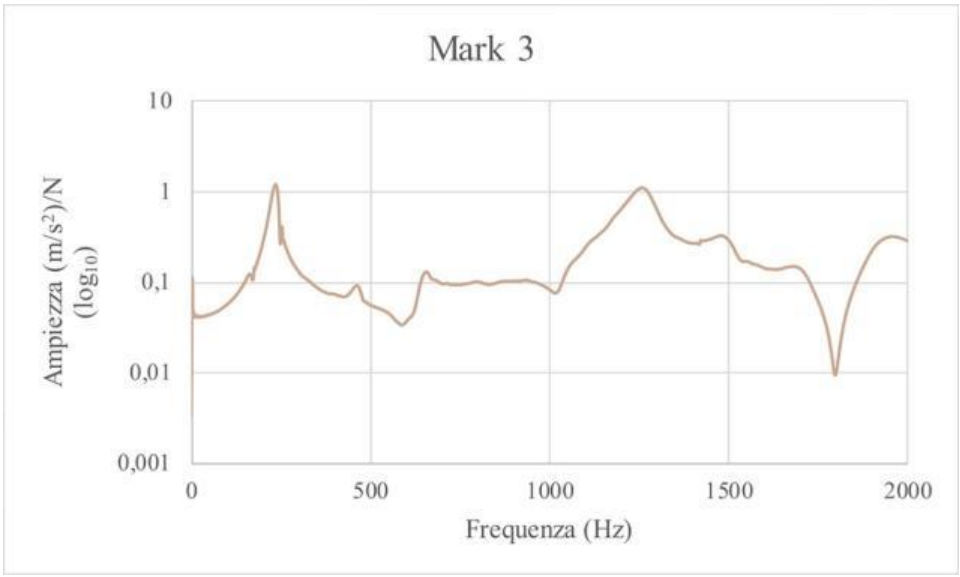


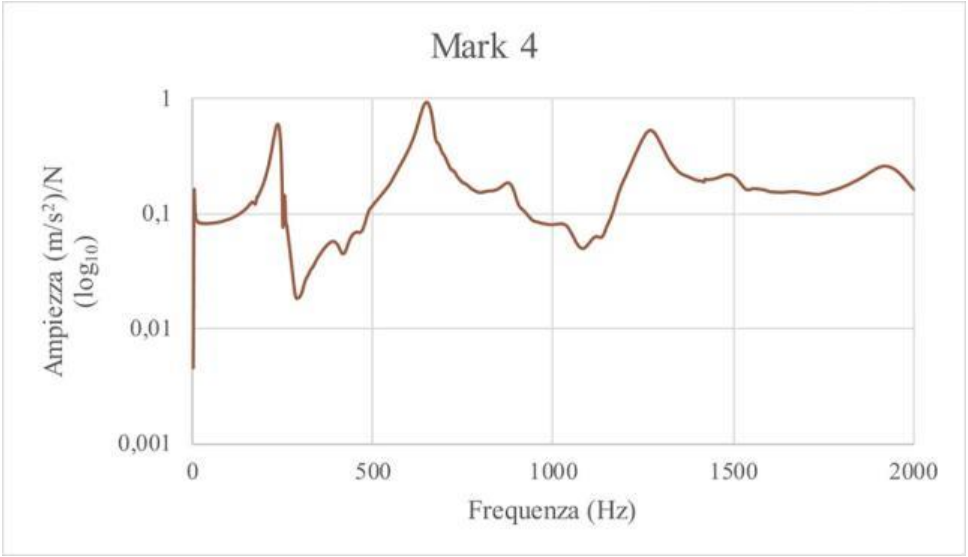
Figura 5.12 –Schematizzazione danni – trave B1_D3

Vengono mostrati in (Figura5.13) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.14) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.5).




Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
500
1000
1500
2000
Frequenza (Hz)

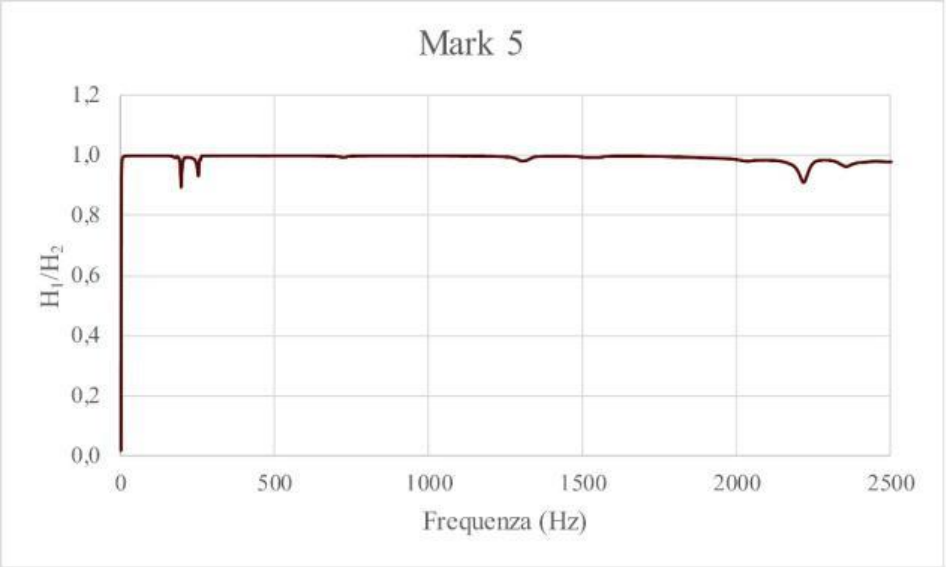


Figura 5.13 – Grafico delle FRF – trave B1_D3

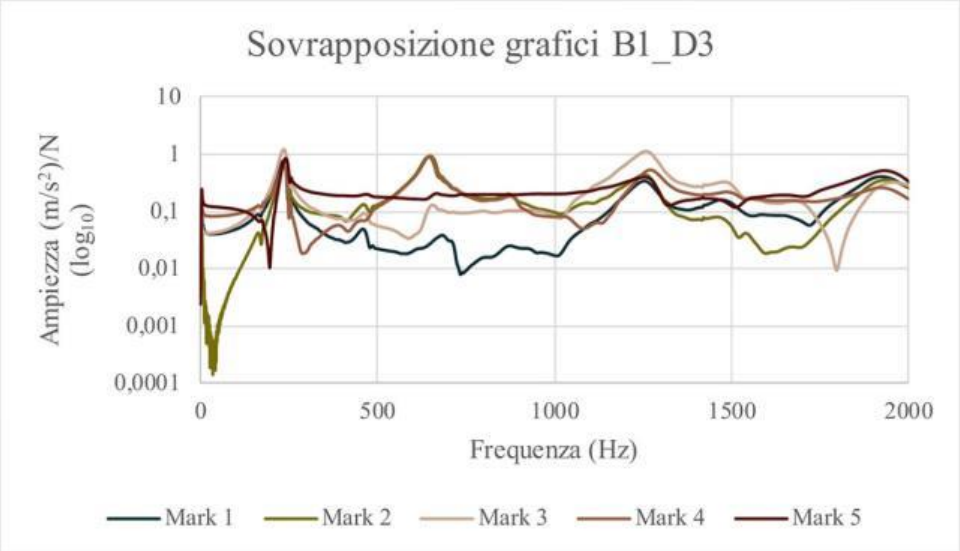


Figura 5.14 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B1_D3

	Hz
modo 1	240,625
modo 2	667,187
modo 3	1259,375

Tabella 5.5 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B1_D3

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra e alla trave che ha subito il danno D1, le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa ma se si fa il confronto

con la condizione di danno precedente la variazione è minore. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 5, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.15)

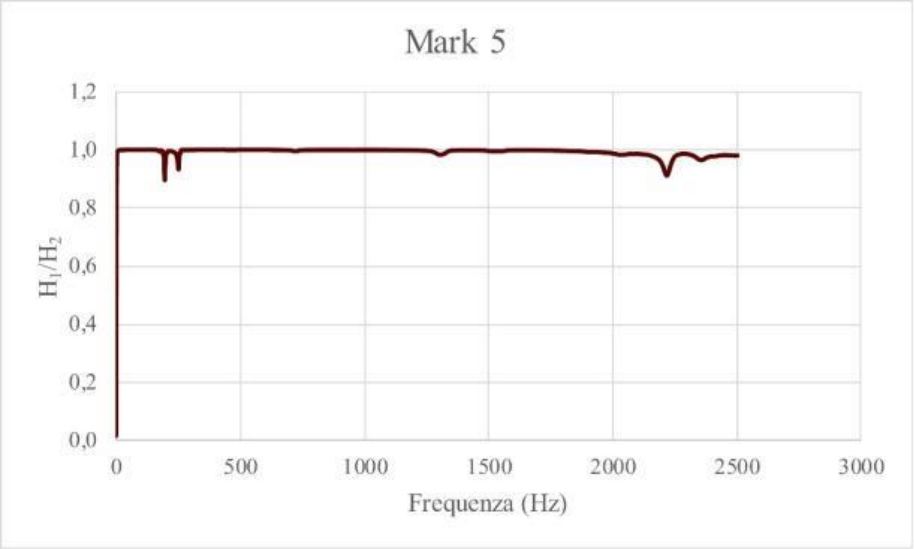


Figura 5.15 – Coerenza corrispondente al mark 5 – trave B1_D3

Stato di danno B1_R1_D0

Una volta sottoposta la trave allo stato di danno che corrisponde al danno D3, 9 kN, si è provveduto ad applicare il rinforzo in GFRP. Nella trave B1 è stata applicata una striscia di rinforzo da 30 cm in intradosso ed una striscia di rinforzo da 30 cm in estradosso come schematizzato in (Figura 5.16). Successivamente sono stati applicati gli strain gauges, sulla striscia in GFRP in mezzeria sia in intradosso che in estradosso, gli estensometri in corrispondenza della mezzeria ma applicati lateralmente sul calcestruzzo ed infine viene predisposto il trasduttore di spostamento. La configurazione di rinforzo descritta viene indicata con "R1".

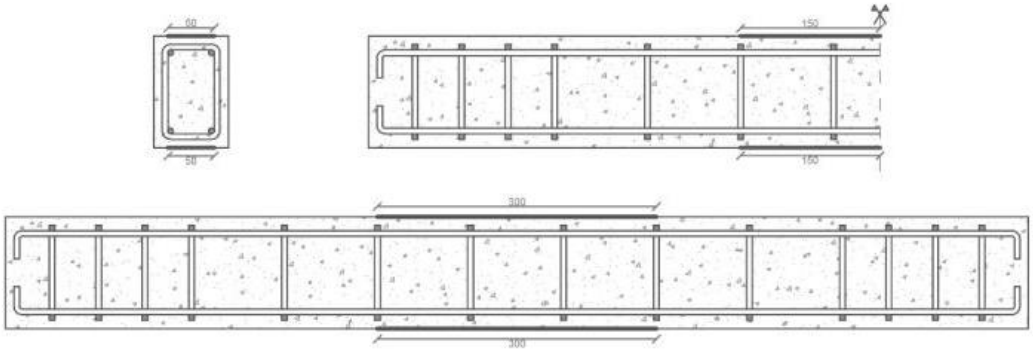
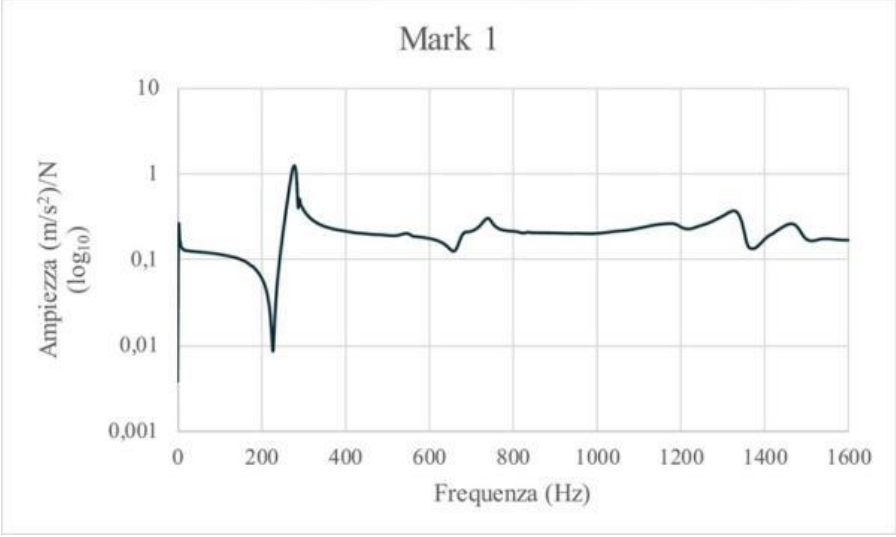


Figura 5.16 – Schema posizione applicazione strisce di GFRP – trave B1_R1_D0

Dopo aver applicato il rinforzo è stata ripetuta la prova dinamica. Di seguito sono riportati i grafici delle FRF (Figura 5.17), il grafico della sovrapposizione dei grafici delle FRF (Figura 5.18) in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.6). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.7). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

È importante notare come i mark considerati non sono più 5 ma 4 in quanto nella posizione 3 del mark è stato impossibile posizionare l'accelerometro a causa della presenza dello strain gauge.



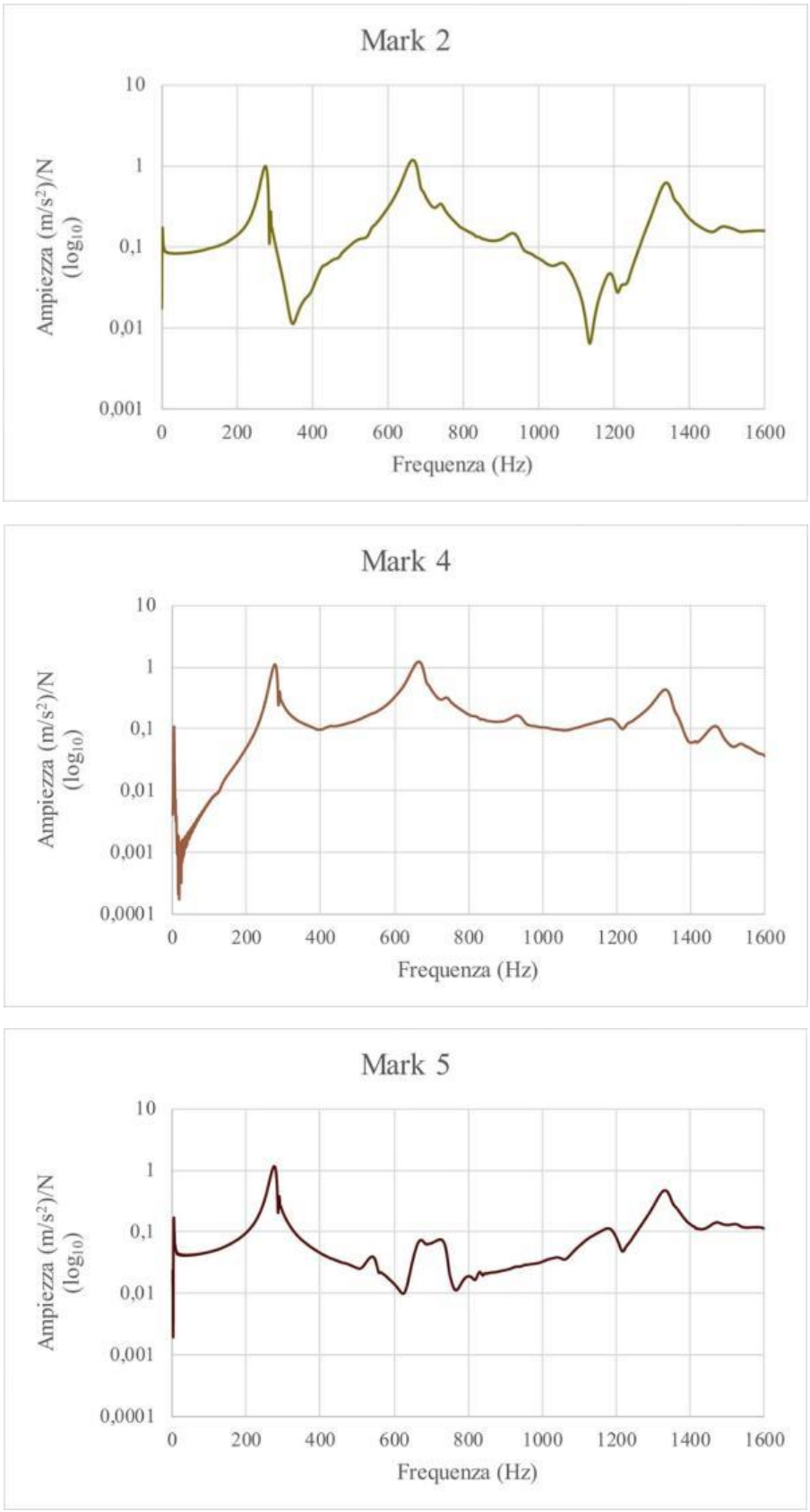


Figura 5.17 – Grafico delle FRF – trave B1_R1_D0

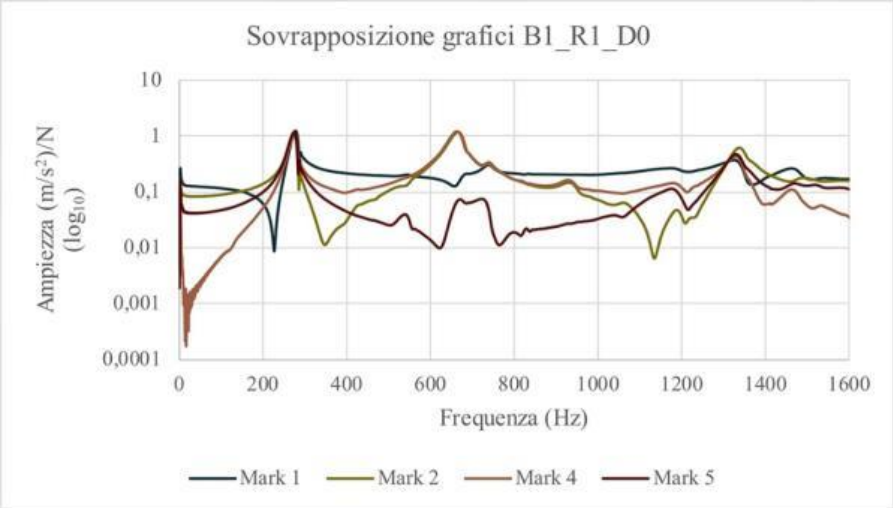


Figura 5.18 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B1_R1_D0

	Hz
modo 1	276,562
modo 2	671,875
modo 3	1335,156

Tabella 5.6 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D0

	Hz da B&K
modo 1	273,316
modo 2	662,009
modo 3	1330,870

Tabella 5.7 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra, la trave che ha subito i tre cicli di carico e poi rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa e i valori si aggirano intorno ai valori corrispondenti alla condizione di trave B1 a cui è stato applicato il secondo ciclo di carico D2. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 1, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.19)

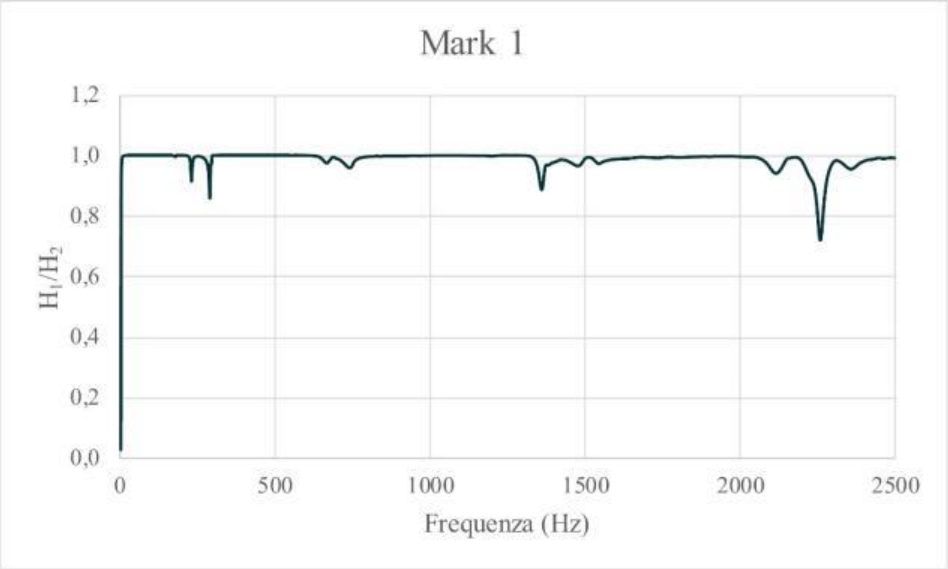


Figura 5.19 – Coerenza corrispondente al mark 1 – trave B1_R1_D0

Stato di danno B1_R1_D1

Dopo aver misurato le FRF della trave integra e rinforzata, si è passati alla prova di tipo statico applicando il primo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 3 kN.

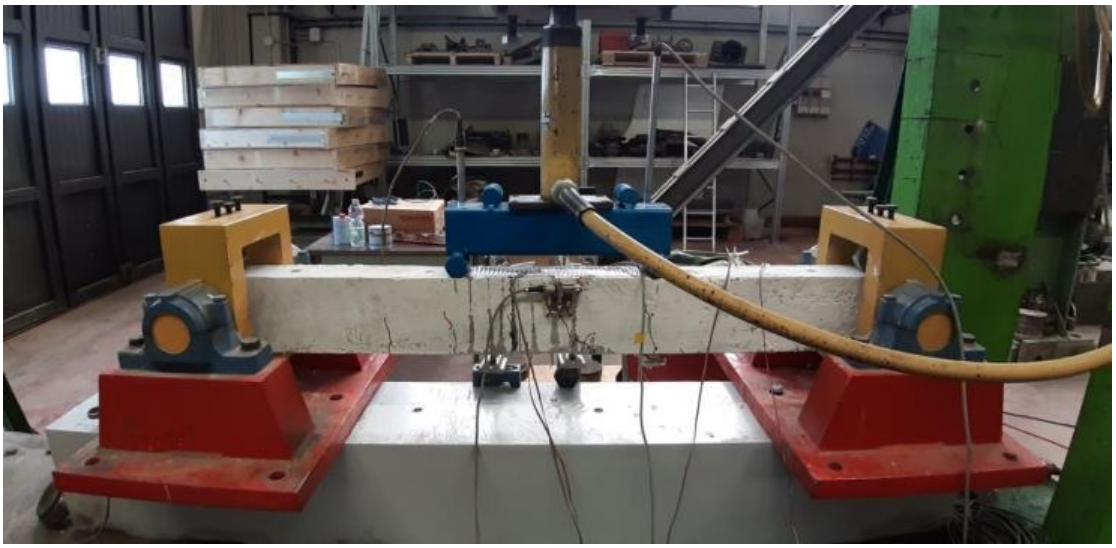
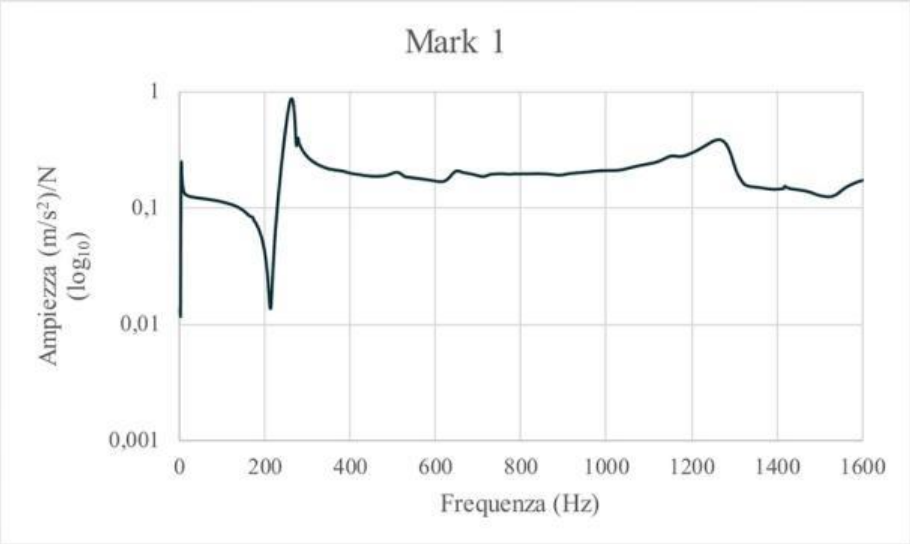


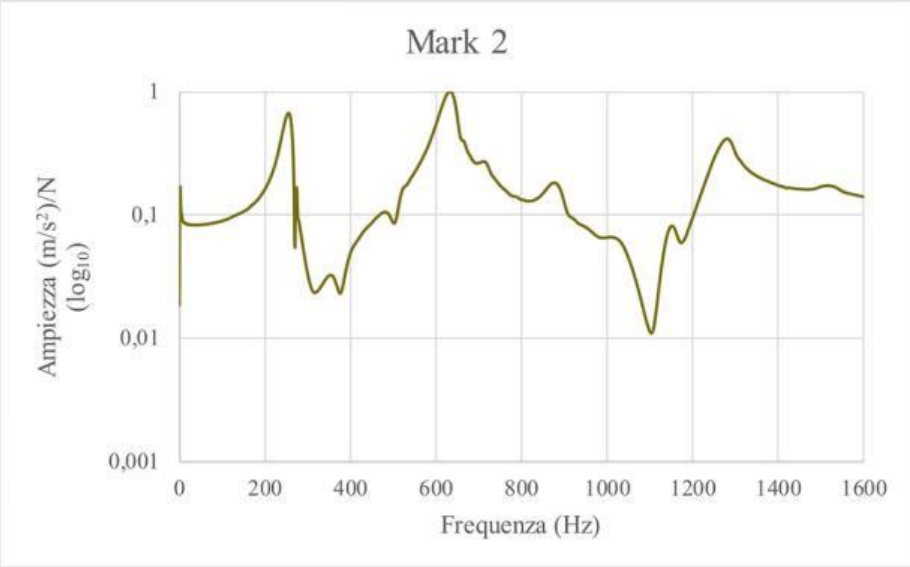
Figura 5.20 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica – trave B1_R1_D1

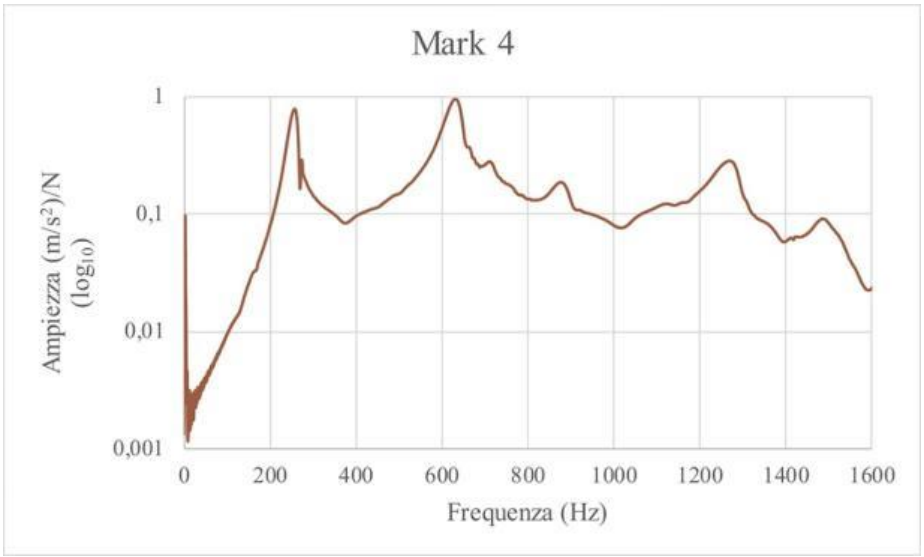
Con un carico di 3kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.21) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.22) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad

individuare i valori sperimentali (tabella 5.8). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.9). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.







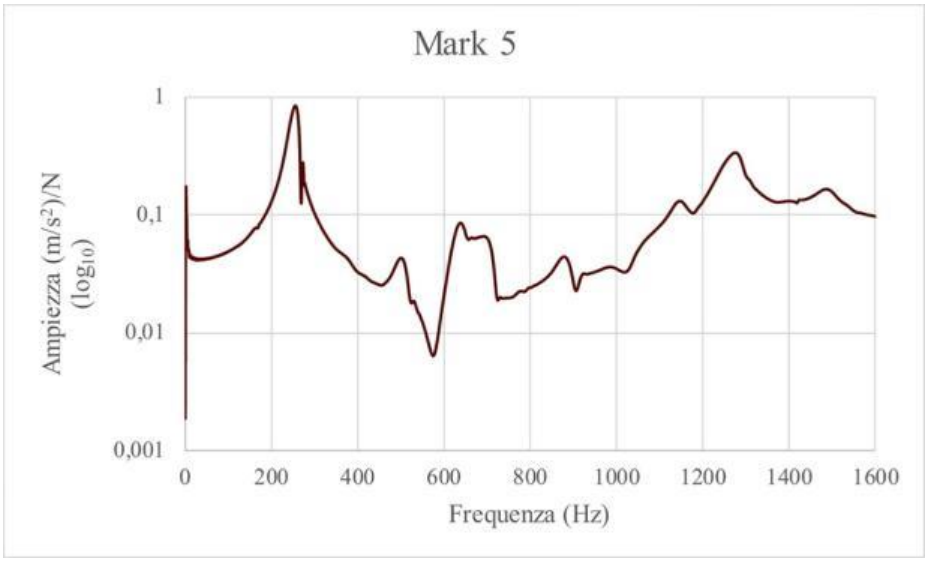


Figura 5.21 – Grafico delle FRF – trave B1_R1_D1

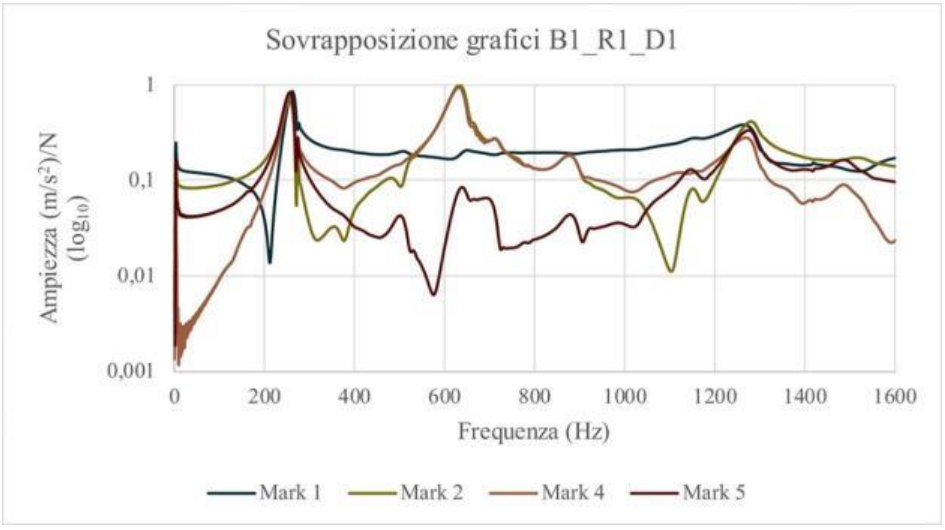


Figura 5.22 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B1_R1_D1

	Hz
modo 1	259,375
modo 2	639,844
modo 3	1267,969

Tabella 5.8 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D1

	Hz da B&K
modo 1	251,132
modo 2	629,165
modo 3	1267,493

Tabella 5.9 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

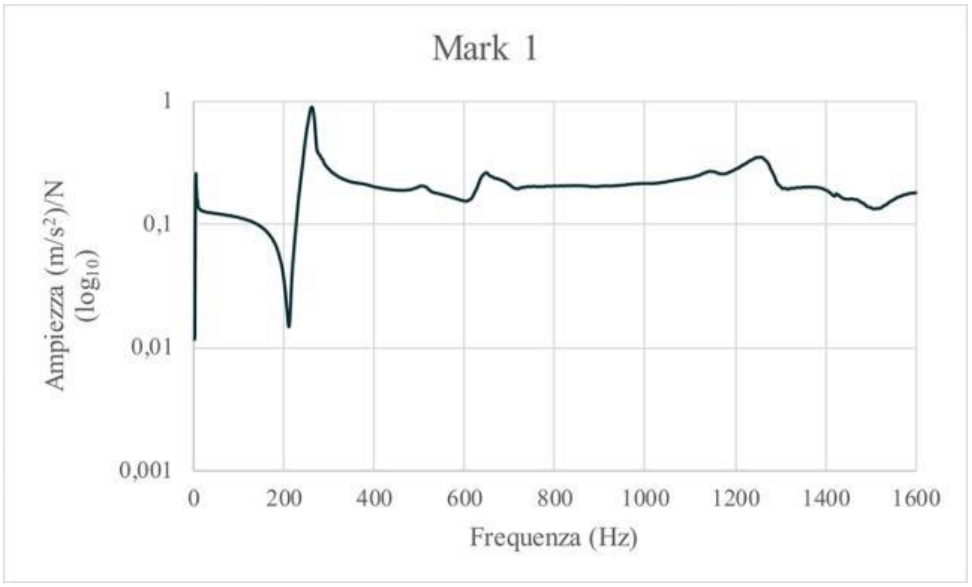
Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata ma non sottoposta ad alcun ciclo di carico, la trave che ha subito il primo dei tre cicli di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

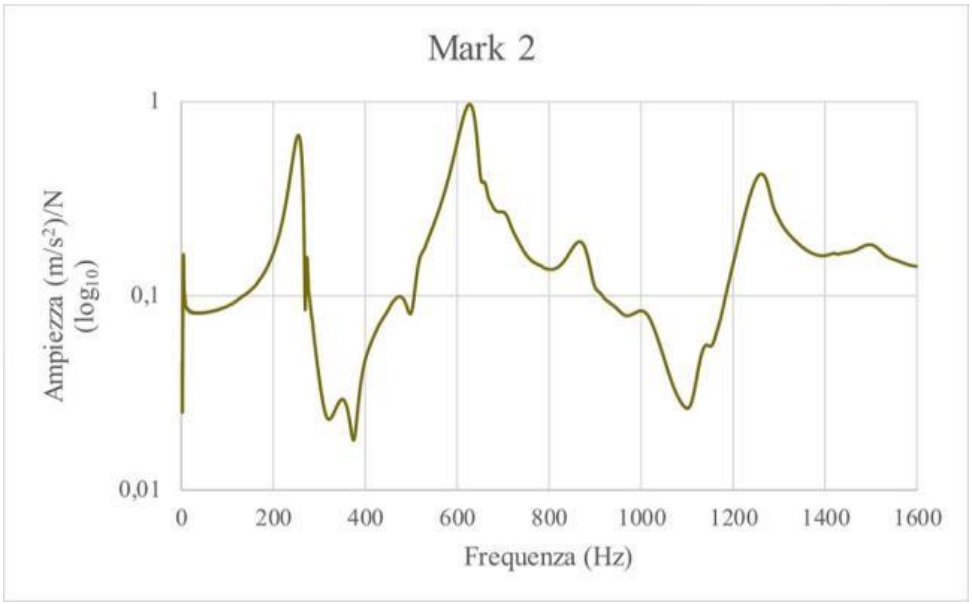
Stato di danno B1_R1_D2

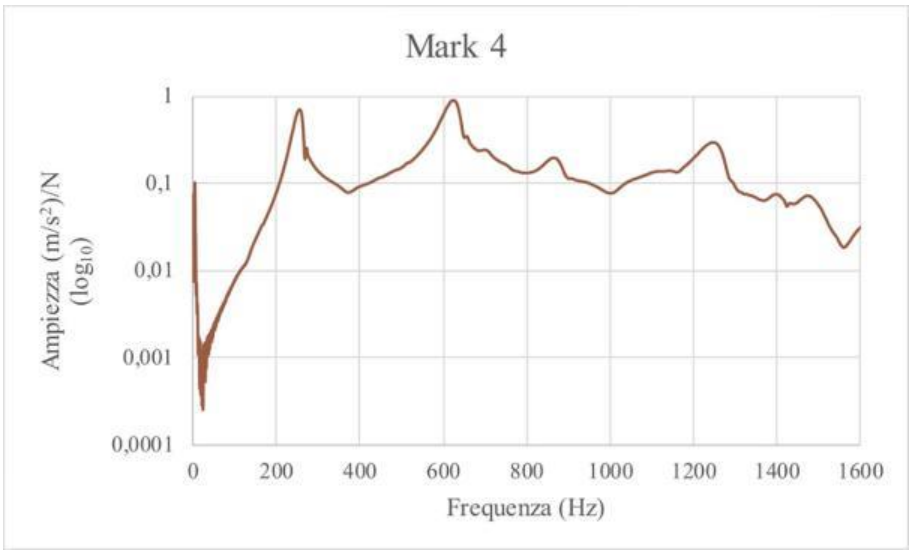
Si è passati alla prova di tipo statico applicando il secondo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 6 kN.

Anche con un carico di 6kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.23) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.24) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.10). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.11). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)

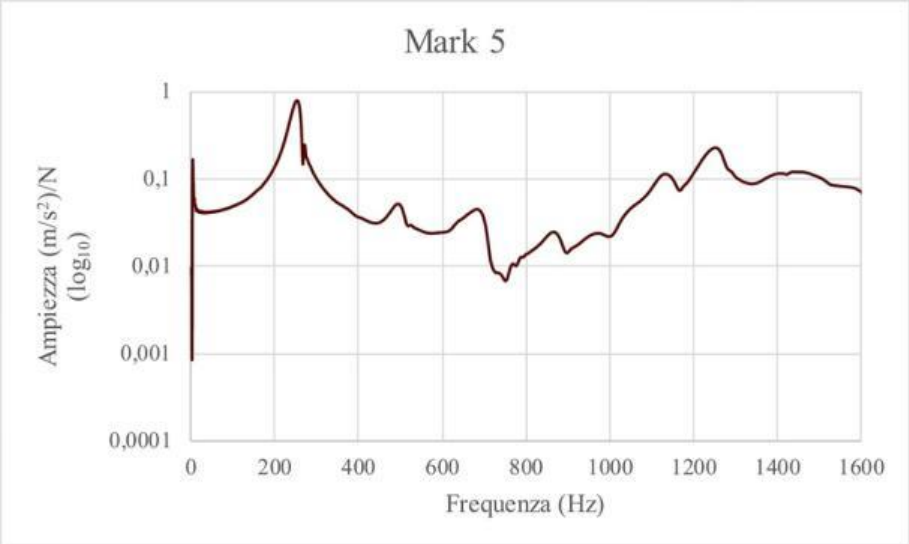


Figura 5.23 – Grafico delle FRF – trave B1_R1_D2

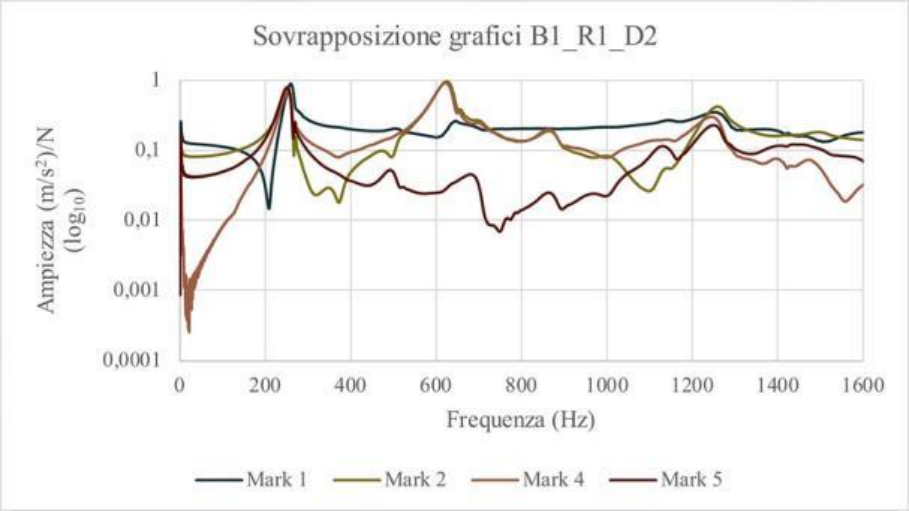


Figura 5.24 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B1_R1_D2

	Hz
modo 1	251,562
modo 2	631,250
modo 3	1260,937

Tabella 5.10 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D2

	Hz da B&K
modo 1	246,841
modo 2	620,601
modo 3	1246,958

Tabella 5.11 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

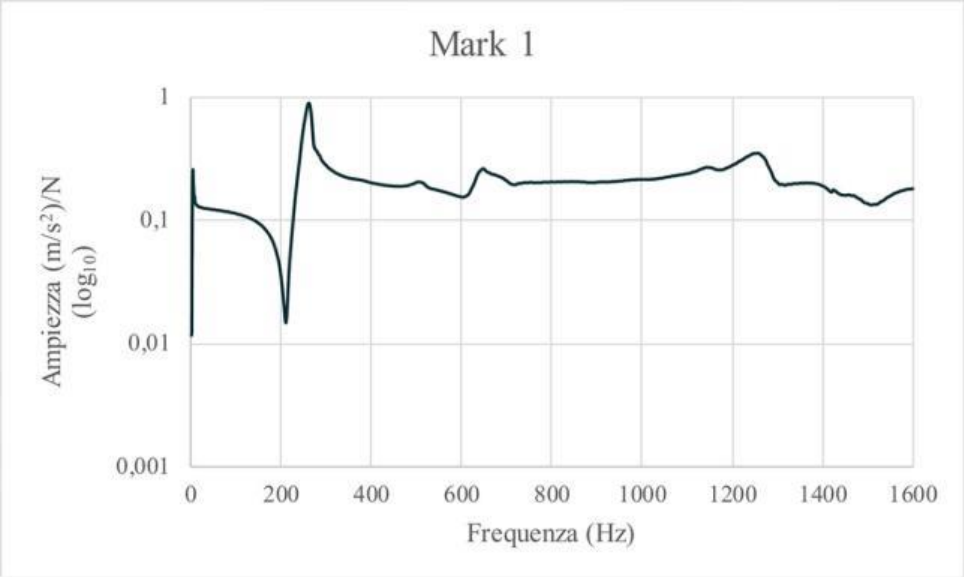
Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata sottoposta al primo ciclo di carico, la trave che ha subito il secondo ciclo di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

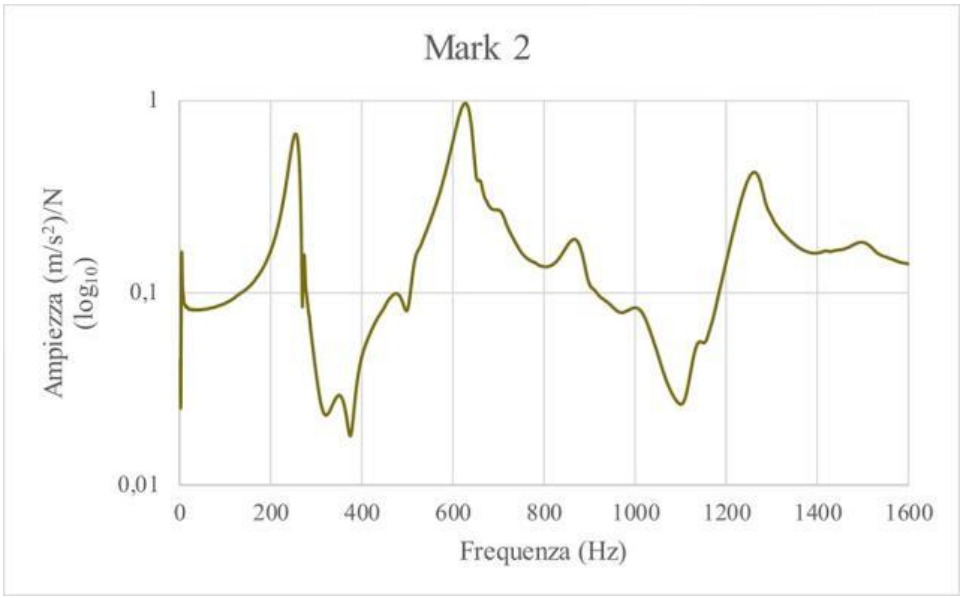
Stato di danno B1_R1_D3

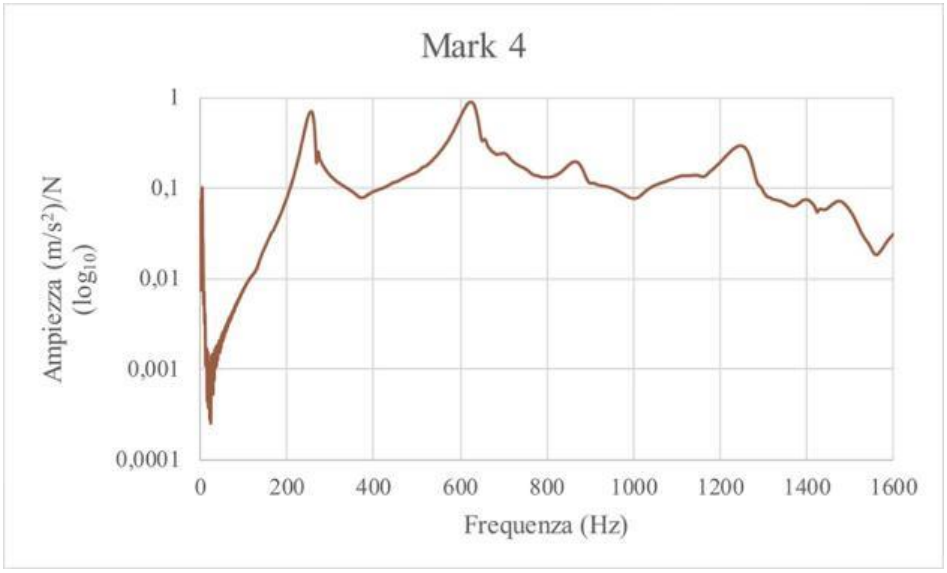
Si è passati alla prova di tipo statico applicando il terzo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 9 kN.

Anche con un carico di 9 kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.25) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.26) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.12). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.13). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.







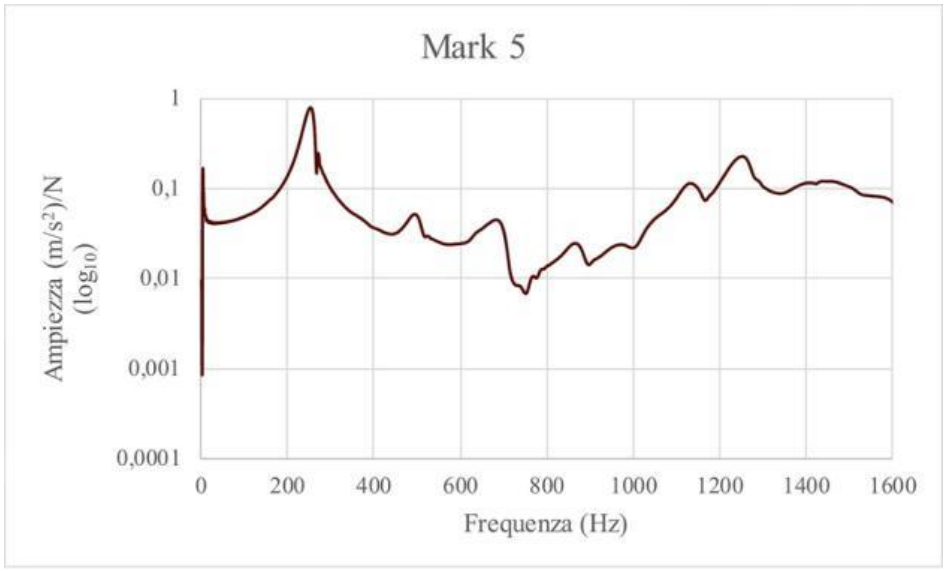


Figura 5.25 – Grafico delle FRF – trave B1_R1_D3

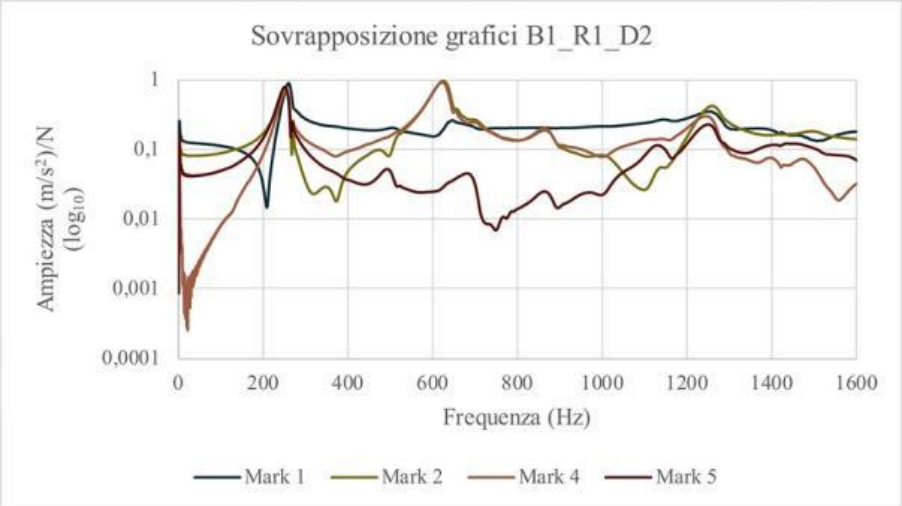


Figura 5.26 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B1_R1_D3

	Hz
modo 1	255,469
modo 2	621,094
modo 3	1230,468

Tabella 5.12 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D3

	Hz da B&K
modo 1	245,566
modo 2	613,460
modo 3	1230,099

Tabella 5.13 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata sottoposta al primo e al secondo ciclo di carico, la trave che ha subito il terzo ciclo di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente rispetto alle precedenti. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.16).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 4, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.27)

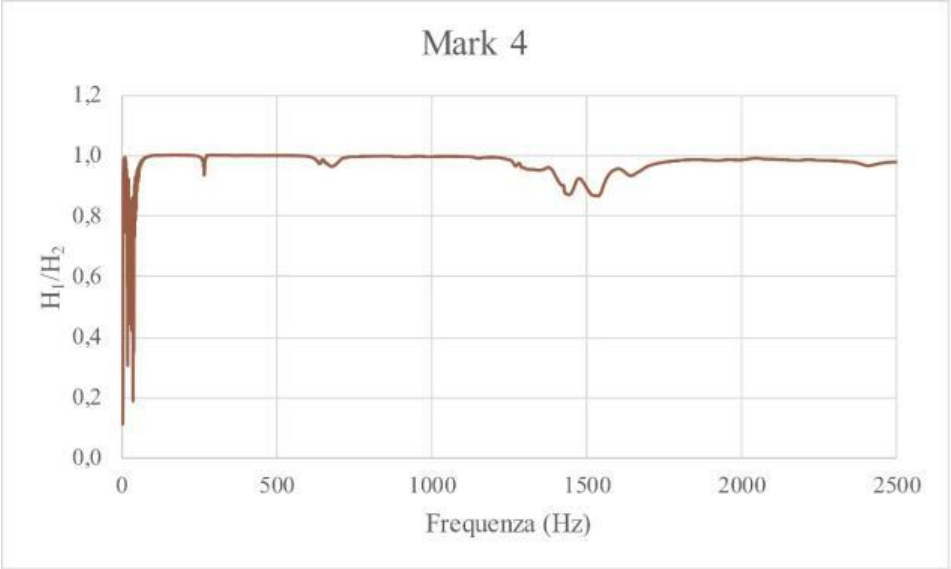


Figura 5.27 – Coerenza corrispondente al mark 4 – trave B1_R1_D3

Condizione di rottura B1

Per completare la prova, il provino viene portato a rottura. Durante la prova a rottura vengono misurati le deformazioni attraverso la strumentazione prima descritta.

In particolare, i danni si ripresentano a partire da un carico di 10 kN ed tendono ad aumentare ma non in maniera veloce. Nello schema seguente (Figura 5.28) si mostrano i danni che si sono evidenziati per i carichi corrispondenti a 10 kN (in azzurri) e 11 kN (in verde).

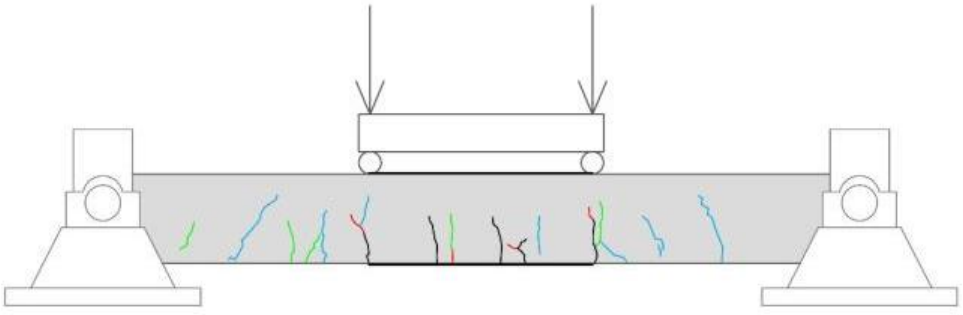


Figura 5.28 – Schematizzazione danni – trave B1

La rottura è avvenuta a circa 19 kN ed è avvenuta in corrispondenza dell'estremità della fibra di verto posta all'intradosso (Figura 5.29) e per questa ragione, nella seconda trave si è deciso di cambiare la lunghezza della striscia di fibra di vetro nell'intradosso.





Figura 5.29 – Rottura provino – trave B1

Risultati statici trave B1 non rinforzata

Dalle misurazioni effettuate sulla trave non rinforzata sono stati ricavati i seguenti valori e diagrammi che caratterizzano il comportamento del campione prima di applicare il rinforzo.

Nella tabella vengono riportati i valori acquisiti da ogni strumentazione utilizzata per ogni step di carico.

	Carico	Spostamento	Deformazione cls a compressione	Deformazione cls a trazione
Damage Steps	[kN]	[mm]	[um/m]	[um/m]
B1_D0	–	–	–	–
B1_D1	3	0,03875	93,1344	208,4673
B1_D2	6	2,06821	275,025	1330,804
B1_D3	9	1,53058	449,553	2446,523

Tabella 5.14 – Valori spostamenti e deformazioni ricavati da prove statiche – B1

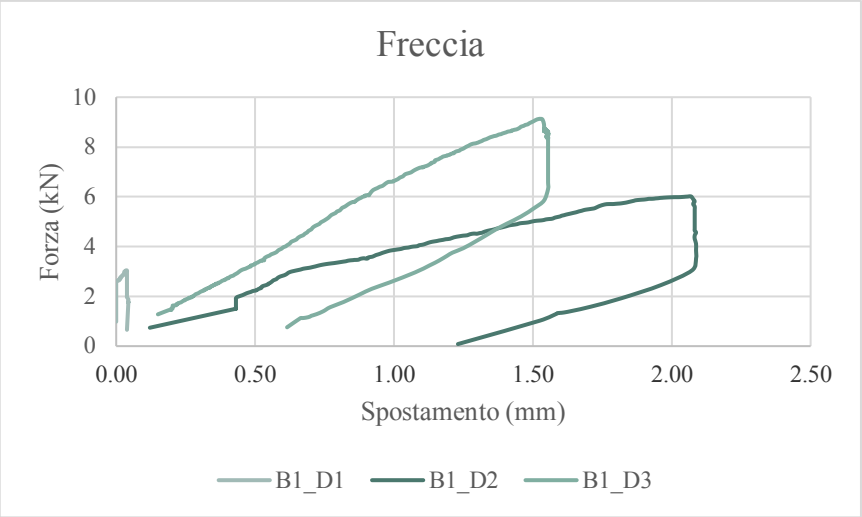


Figura 5.30 – Diagramma Forza-Freccia – trave B1 non rinforzata

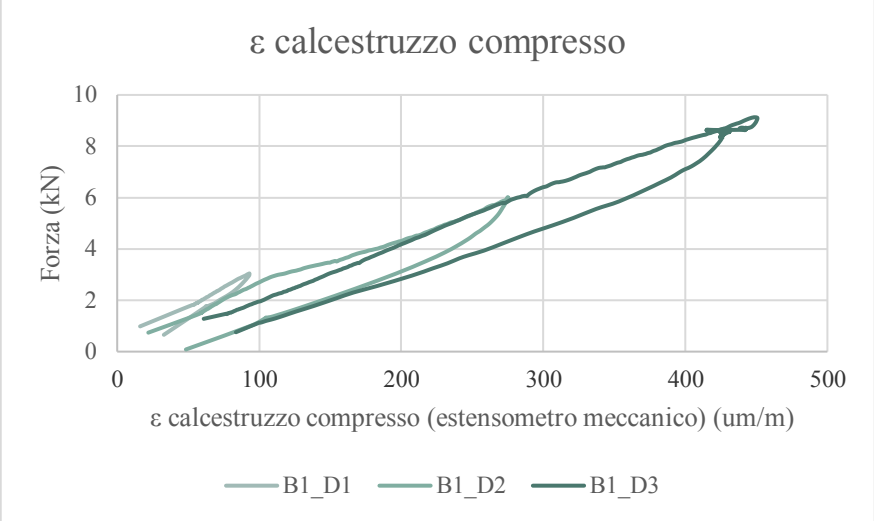


Figura 5.31 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo compresso – trave B1 non rinforzata

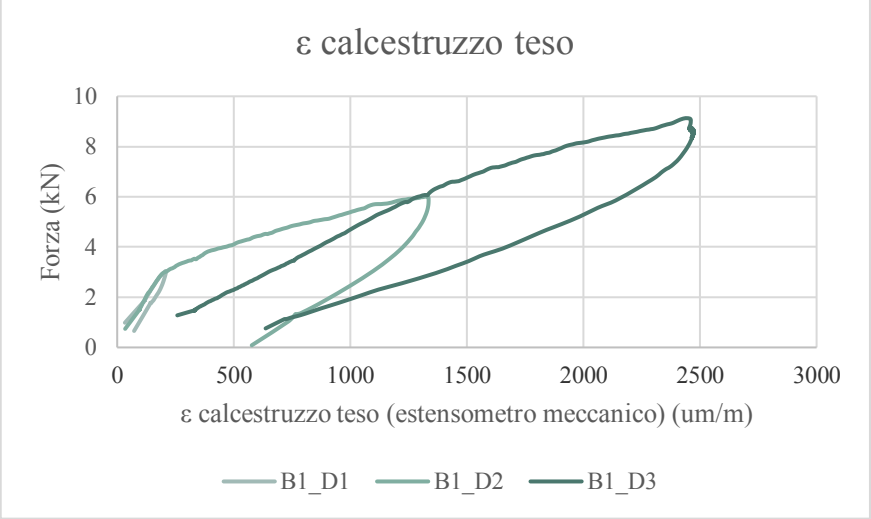


Figura 5.32 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo teso – trave B1 non rinforzata

Risultati statici trave B1 rinforzata

Dalle misurazioni effettuate sulla trave rinforzata sono stati ricavati i seguenti valori e diagrammi che caratterizzano il comportamento del campione prima di applicare il rinforzo.

Nella tabella vengono riportati i valori acquisiti da ogni strumentazione utilizzata per ogni step di carico.

Nella presente prova, sono stati predisposti due trasduttori di spostamento verticale in maniera simmetrica, infatti i valori sono molto simili tra loro e il valore indicato in tabella è unico e valutato in base ai risultati. Anche gli estensometri per il controllo della deformazione del calcestruzzo compresso sono stati messi in maniera simmetrica portando così un risultato molto simile tra i due e quindi ne è stato preso un valore unico.

	Carico	Spostamento 1	Spostamento 2	Deformazione GFRP a compressione (strain gauges)	Deformazione GFRP a trazione (strain gauges)
Damage Steps	[kN]	[mm]	[mm]	[um/m]	[um/m]
B1_R1_D0	–	–	–	–	–
B1_R1_D1	3	0,63451	0,62812	171,12	330,96
B1_R1_D2	6	1,33199	1,26563	362,64	822,24
B1_R1_D3	9	1,89869	1,87188	564	1189,44

	Carico	Deformazione cls a compressione (estensometro)	Deformazione cls a compressione
Damage Steps	[kN]	[um/m]	[um/m]
B1_R1_D0	–	–	–
B1_R1_D1	3	147,071	81,5572
B1_R1_D2	6	264,647	206,91
B1_R1_D3	9	234,546	319,611

Tabella 5.15 – Valori spostamenti e deformazioni ricavati da prove statiche – B1

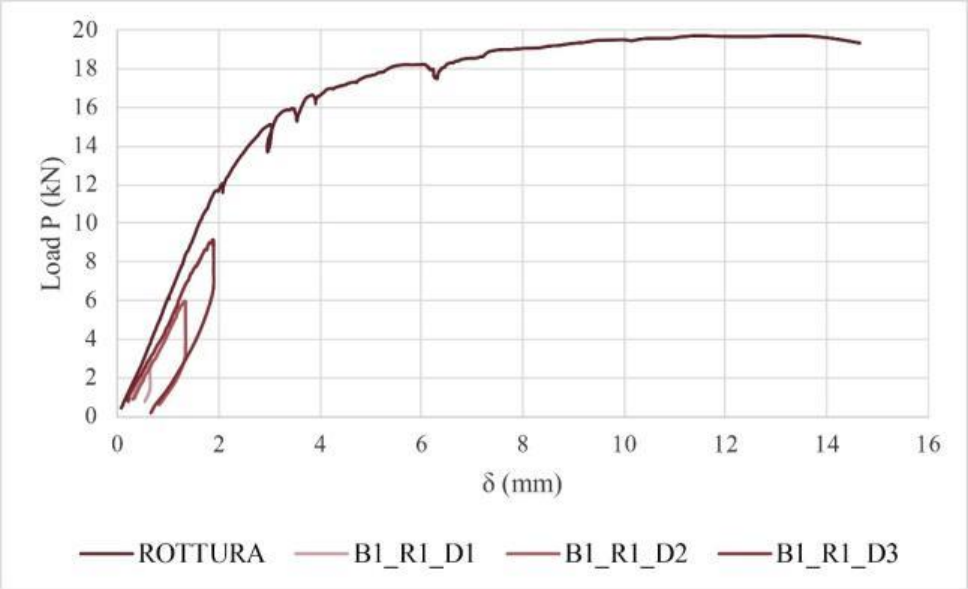


Figura 5.33 – Diagramma Forza-Freccia – trave B1 rinforzata

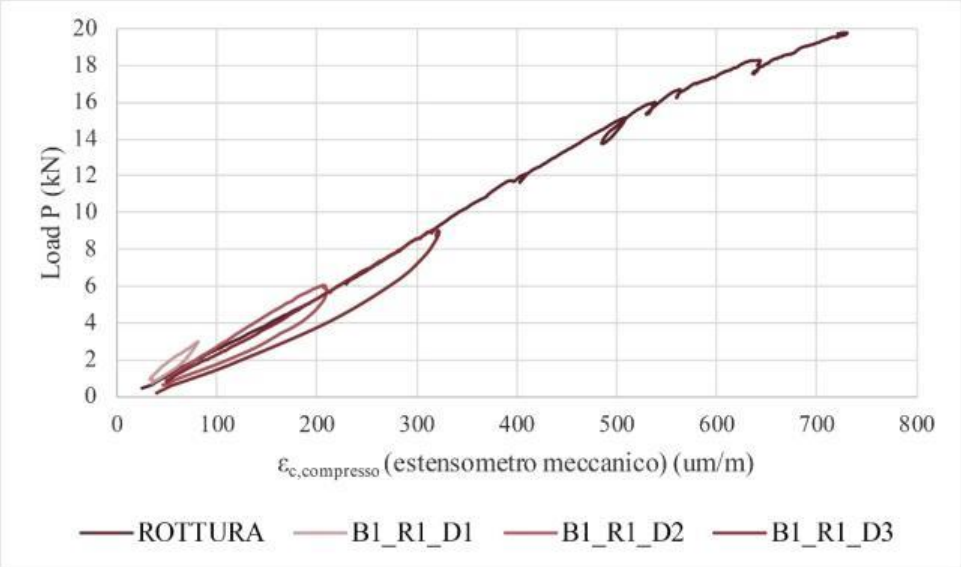


Figura 5.34 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo compresso – trave B1 rinforzata



Figura 5.35 – Diagramma Forza-Deformazione striscia di GFRP – trave B1 rinforzata

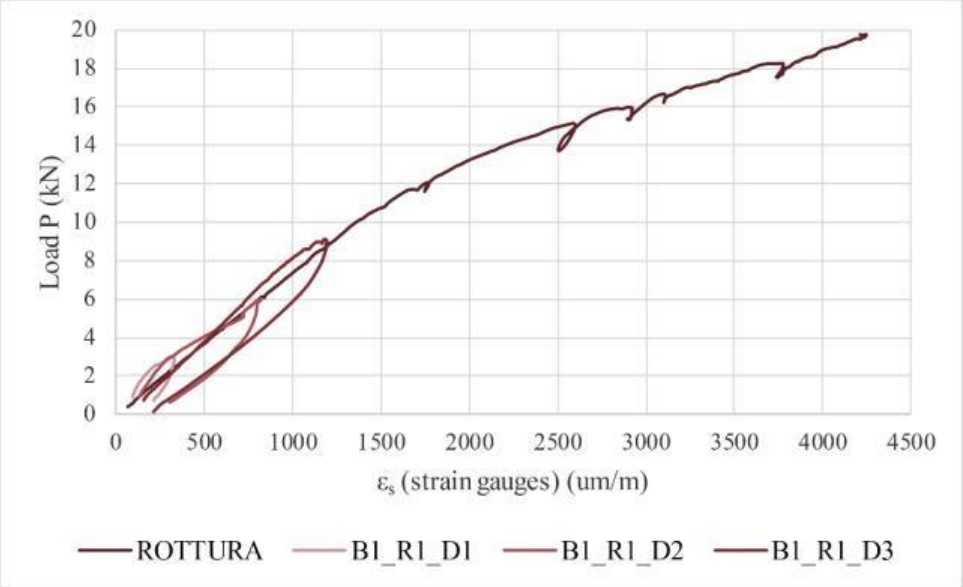


Figura 5.36 – Diagramma Forza-Deformazione acciaio – trave B1 rinforzata

Risultati dinamici trave B1

Dalle prove dinamiche, vengono riassunti nelle tabelle seguenti i risultati forniti in relazione alle FRF

La tabella 5.16 contiene i dati delle frequenze sperimentali registrate per travi non rinforzate (B1_D0, B1_D1, B1_D2, B1_D3) e per travi rinforzate (B1_R1_D0, B1_R1_D1, B1_R1_D2, B1_R1_D2, B1_R1_D3) e sono visibili i confronti percentuali tra la frequenza sperimentale per ogni grado di danneggiamento e la trave integra.

	f1	$\Delta f1/f_{D0}$	f2	$\Delta f2/f_{D0}$	f3	$\Delta f3/f_{D0}$
Damage Degree	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]
B1_D0	353,125	–	932,885	–	1688,280	–
B1_D1	342,969	2,876	911,719	2,269	1654,687	1,990
B1_D2	259,375	26,549	708,594	24,043	1339,062	20,685
B1_D3	240,625	31,858	667,187	28,481	1259,375	25,405
B1_R1_D0	276,562	21,682	671,875	27,979	1335,156	20,916
B1_R1_D1	259,375	26,549	639,844	31,412	1267,969	24,896
B1_R1_D2	251,562	28,761	631,25	32,334	1260,937	25,312
B1_R1_D3	255,469	27,655	621,094	33,422	1230,468	27,117

Tabella 5.16 – Valori FRF ricavati da prove dinamiche

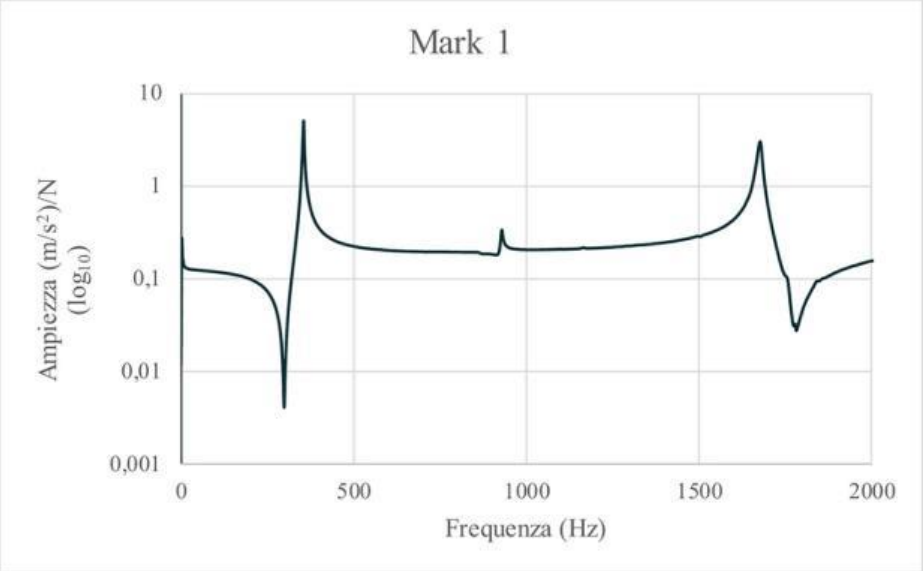
5.2 TRAVE B2 E STATI DI DANNO

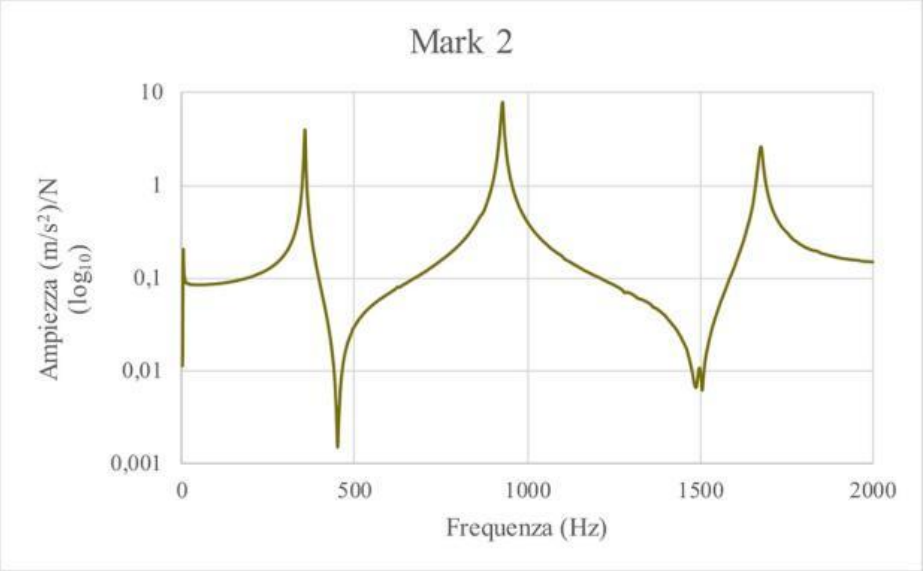
Stato di danno B2_D0

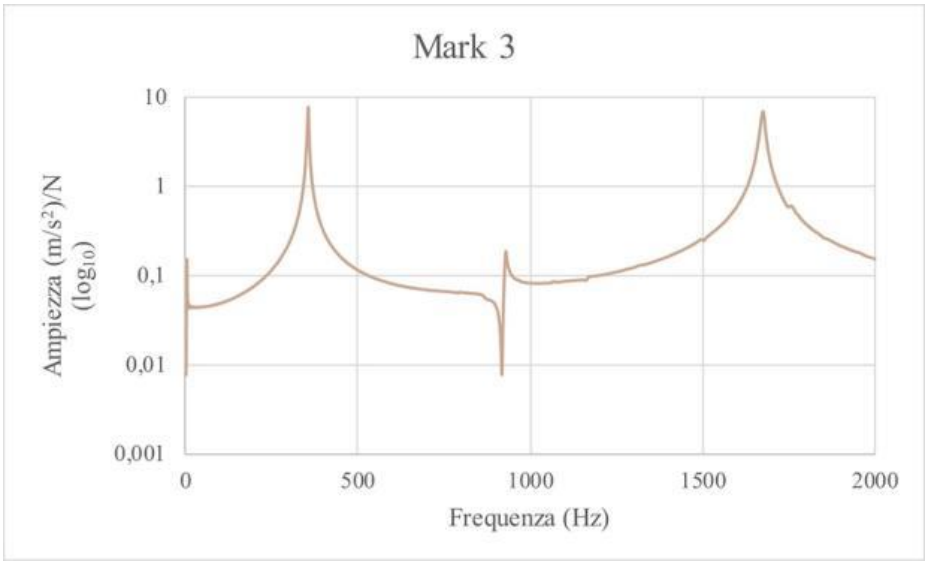
La trave denominata B2 è la seconda trave che ha subito la sperimentazione.

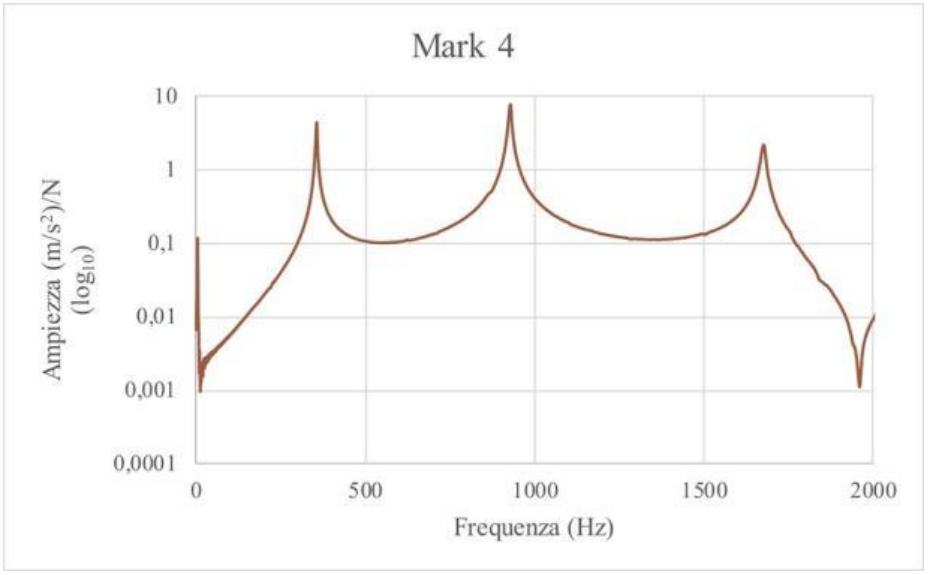
Inizialmente è stata eseguita una prova di tipo dinamico e si sono determinate le FRF e la coerenza a trave integra.

In figura (Figura 5.37) sono riportati i grafici delle FRF per ogni singolo mark posizionati come descritto nel §4.3.2 relative alla trave in condizioni integre:









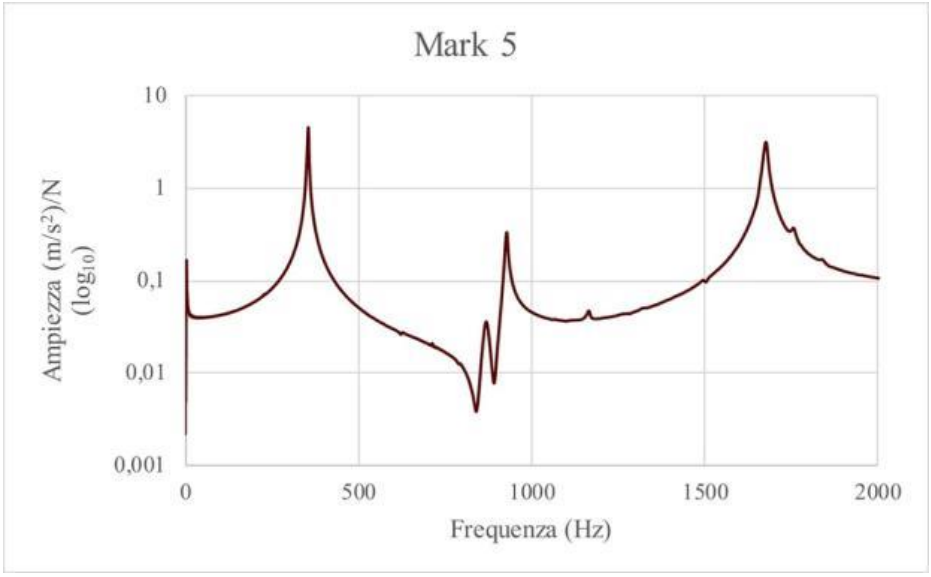


Figura 5.37 – Grafico delle FRF – trave B2_D0

Sovrapponendo i grafici di ogni singolo mark (Figura 5.38), si ricavano i valori delle FRF per i primi 3 modi di vibrare (Tabella 5.17). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.18). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

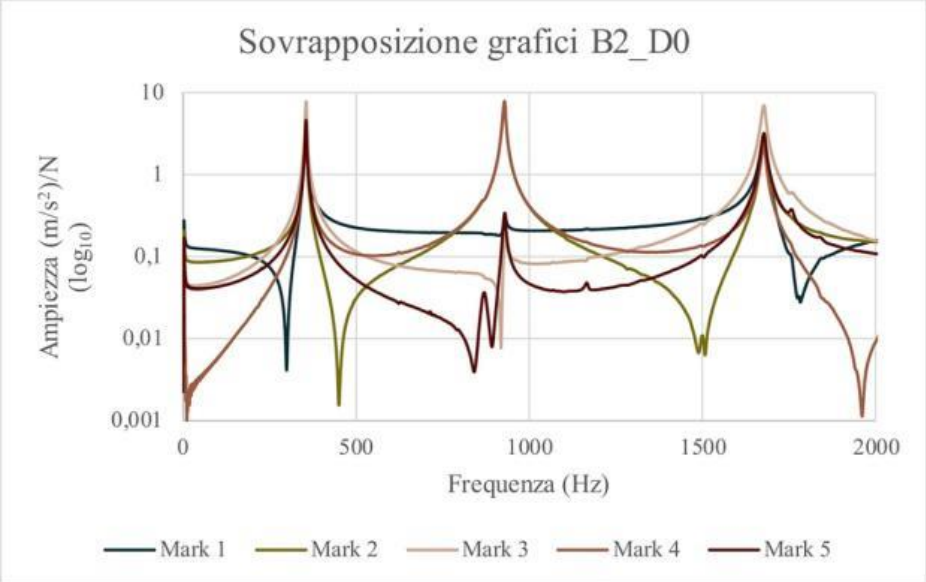


Figura 5.38 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B2_D0

	Hz
modo 1	354,687
modo 2	926,562
modo 3	1674,219

Tabella 5.17 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B2_D0

	Hz da B&K
modo 1	356,630
modo 2	926,910
modo 3	1675,760

Tabella 5.18 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 3, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.39)

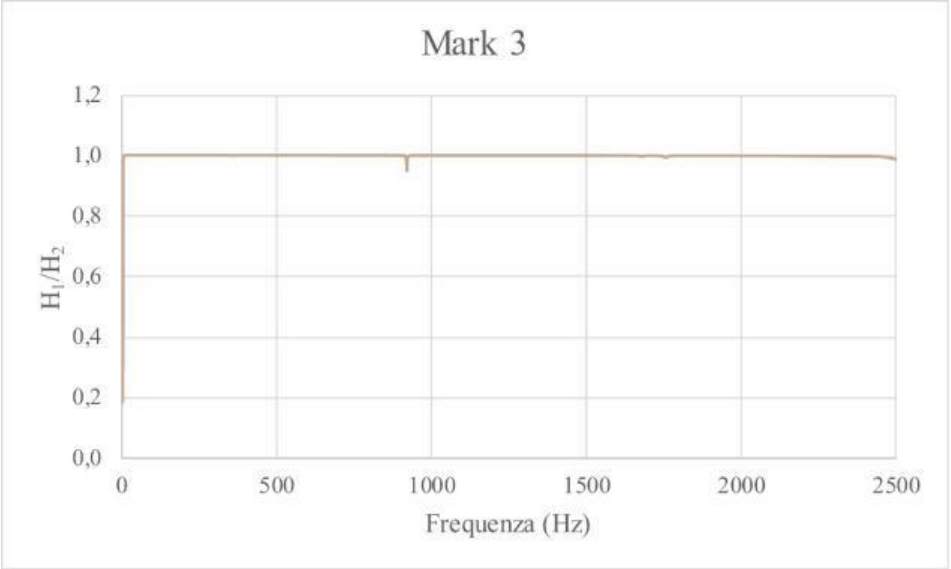


Figura 5.39 – Coerenza corrispondente al mark 3 – trave B2_D0

Stato di danno B2_D1

Dopo aver misurato le FRF della trave integra, si è passati alla prova di tipo statico applicando il primo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 3 kN.

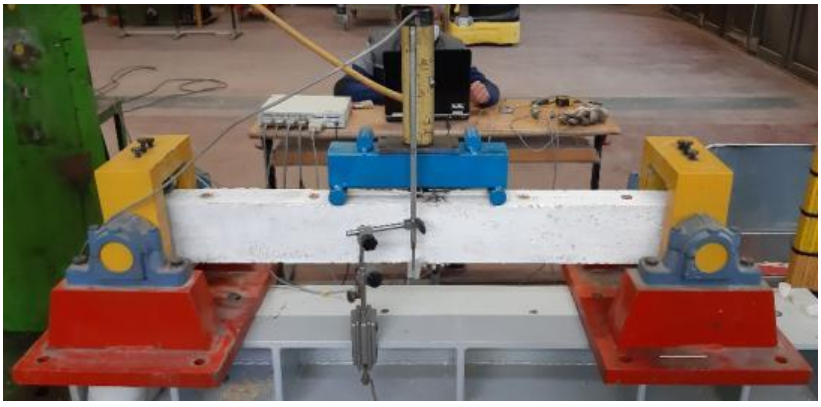
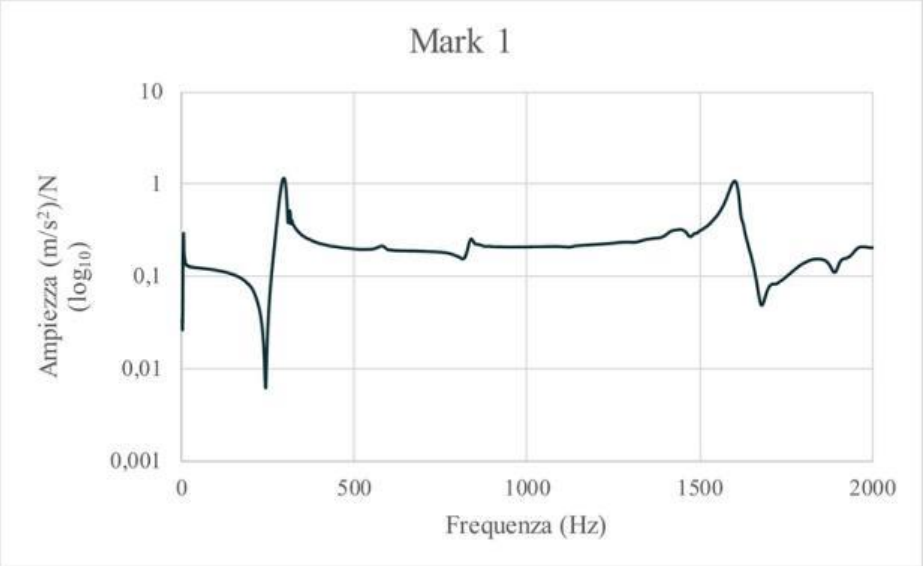


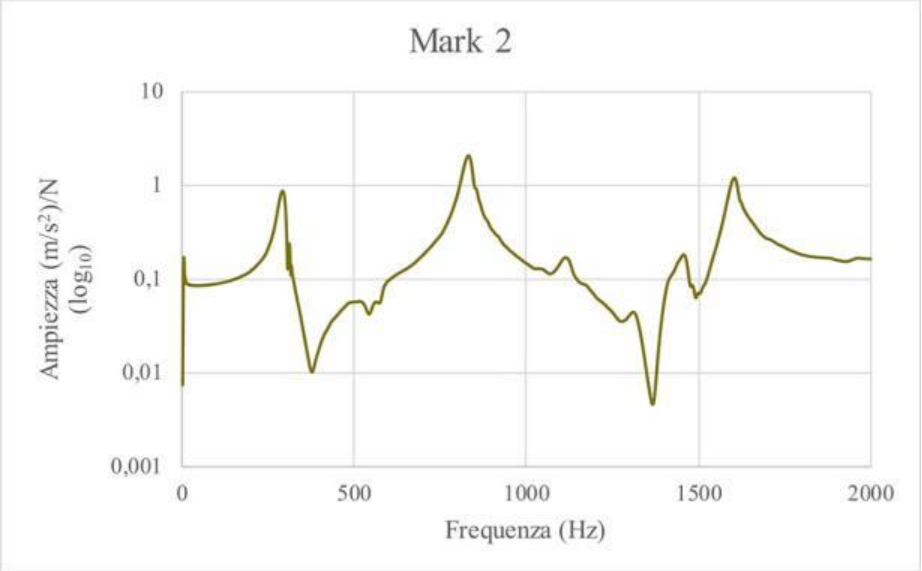
Figura 5.40 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica – trave B2_D1

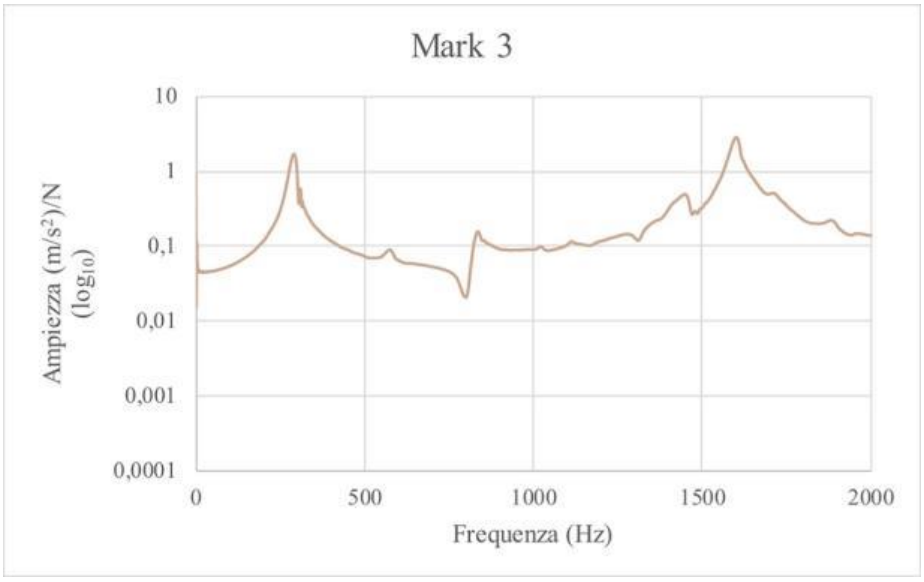
Con un carico di 3kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo.

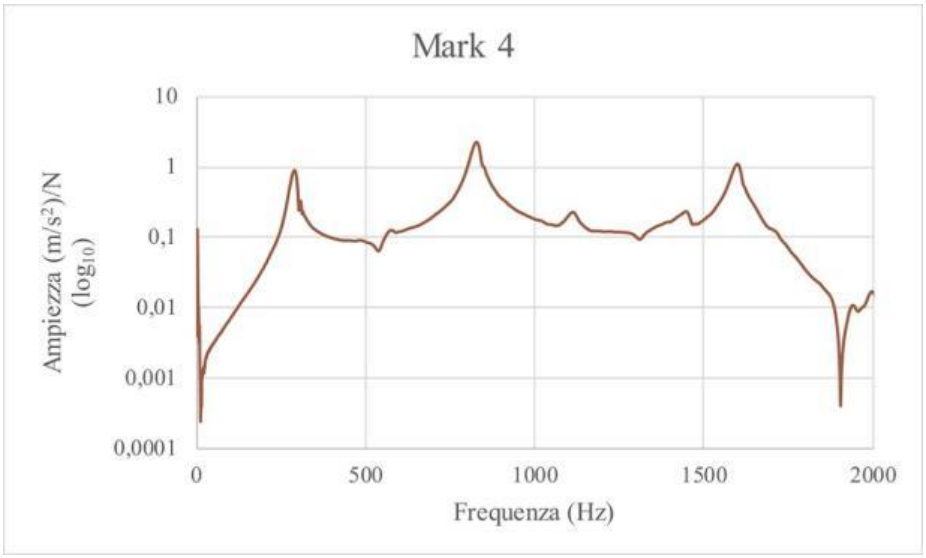
Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.41) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.42) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.19). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.20). Questi dati forniscono un'ulteriore

comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.









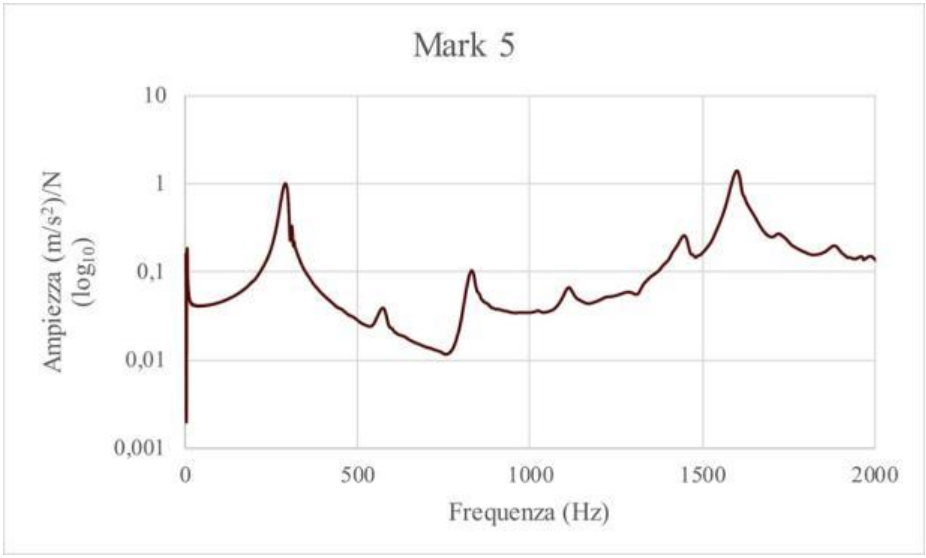


Figura 5.41 – Grafico delle FRF – trave B2_D1

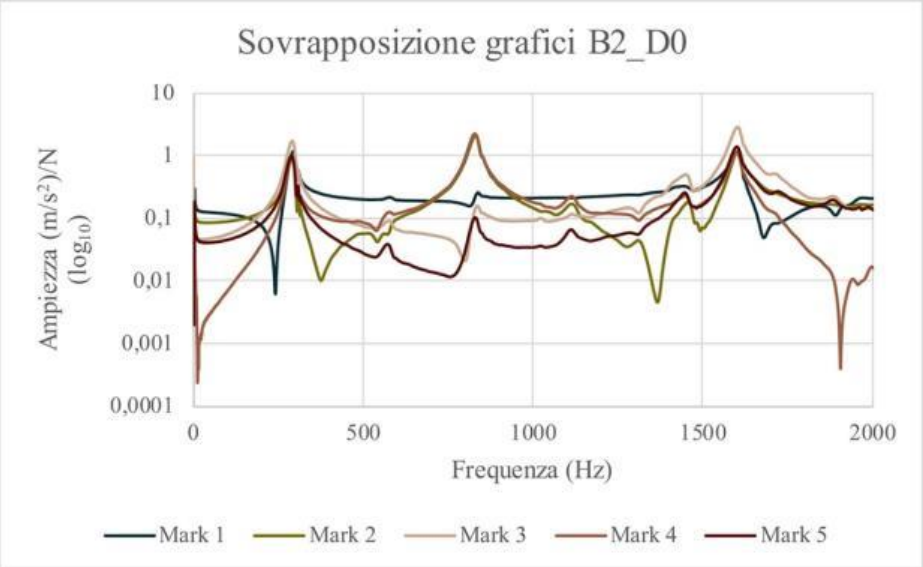


Figura 5.42 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B2_D1

	Hz
modo 1	296,094
modo 2	837,500
modo 3	1612,500

Tabella 5.19 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B2_D1

	Hz da B&K
modo 1	285,190
modo 2	827,920
modo 3	1600,240

Tabella 5.20 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra, le funzioni di risposta in frequenza non variano di molto, in quanto la differenza tra i valori è minima (Tabella 5.35)

Stato di danno B2_D2

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 6 kN. Con il secondo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.43) vengono schematizzati i danni visibili.

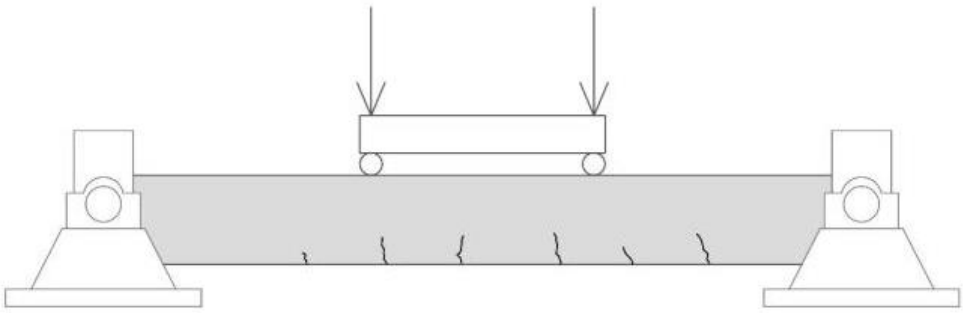
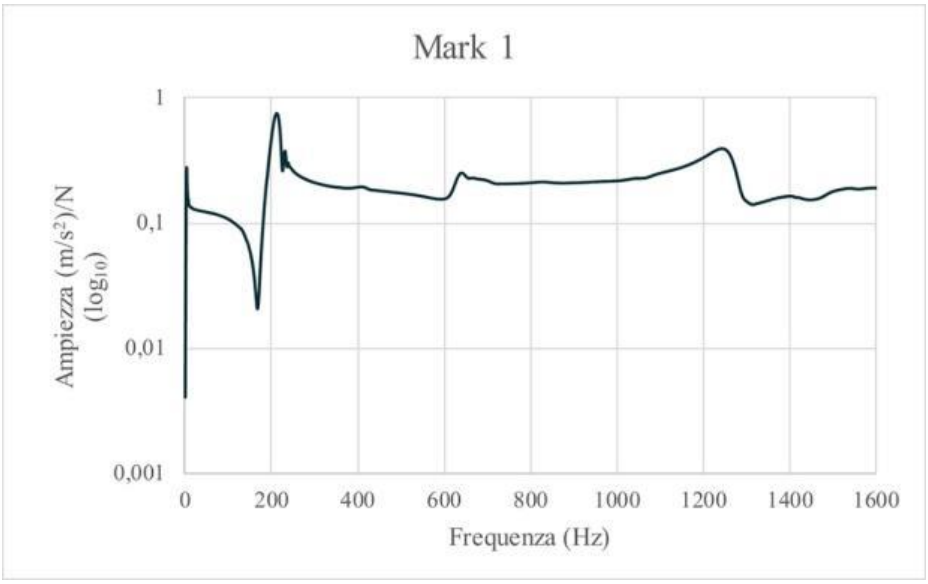
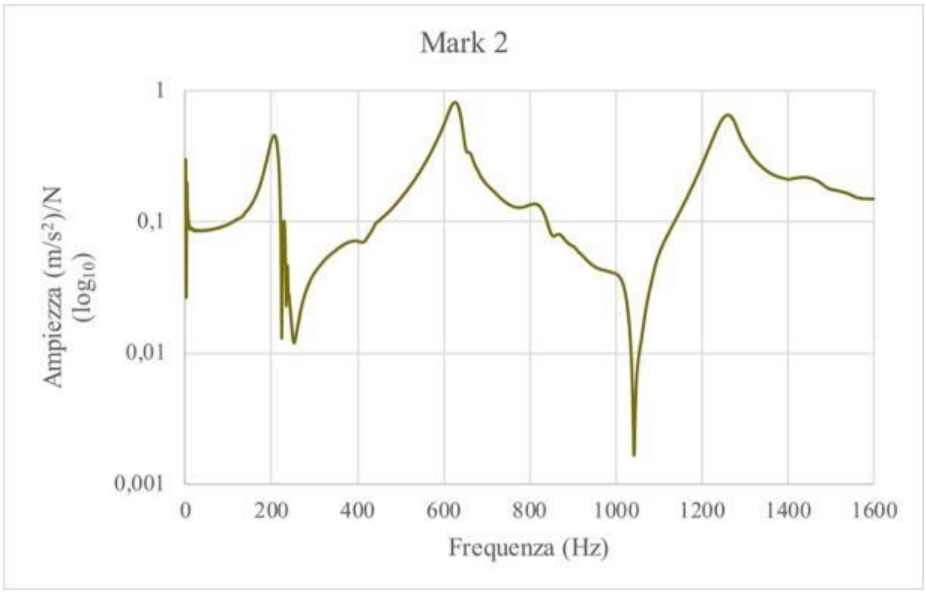
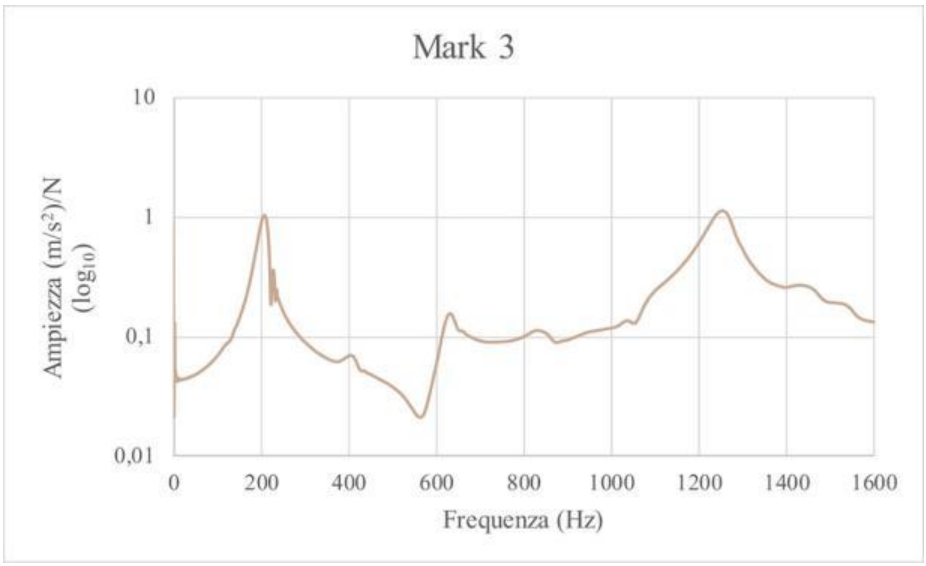


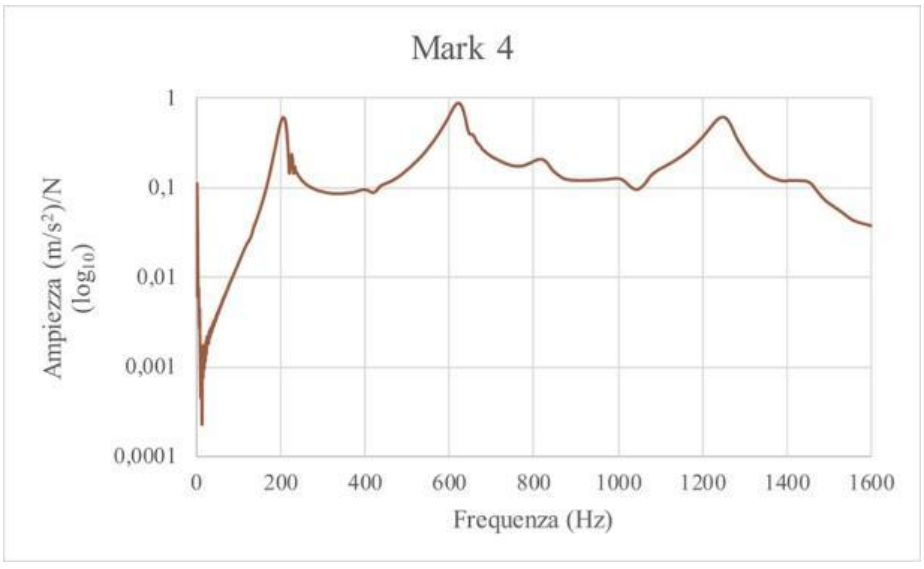
Figura 5.43 –Schematizzazione danni – trave B2_D2

Vengono mostrati in (Figura5.44) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.45) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.21). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.22). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.




Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)

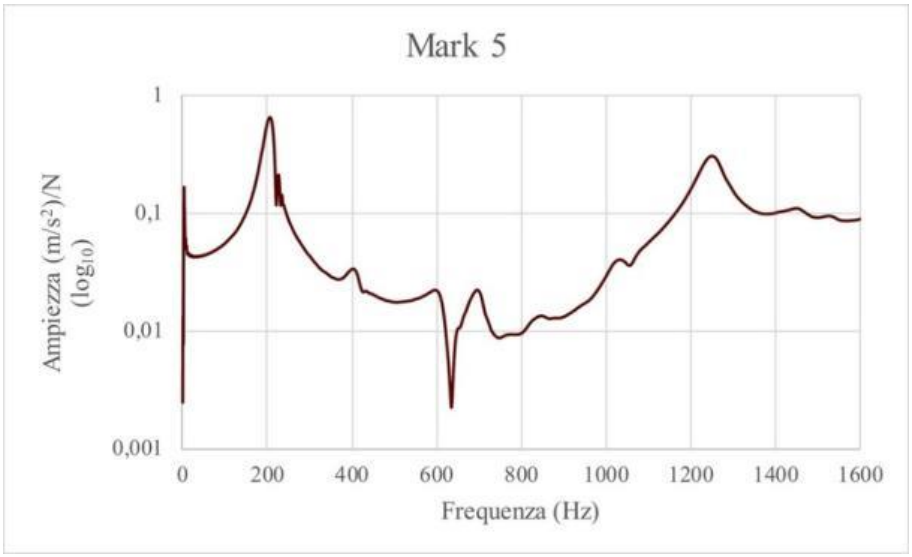


Figura 5.44 – Grafico delle FRF – trave B2_D2

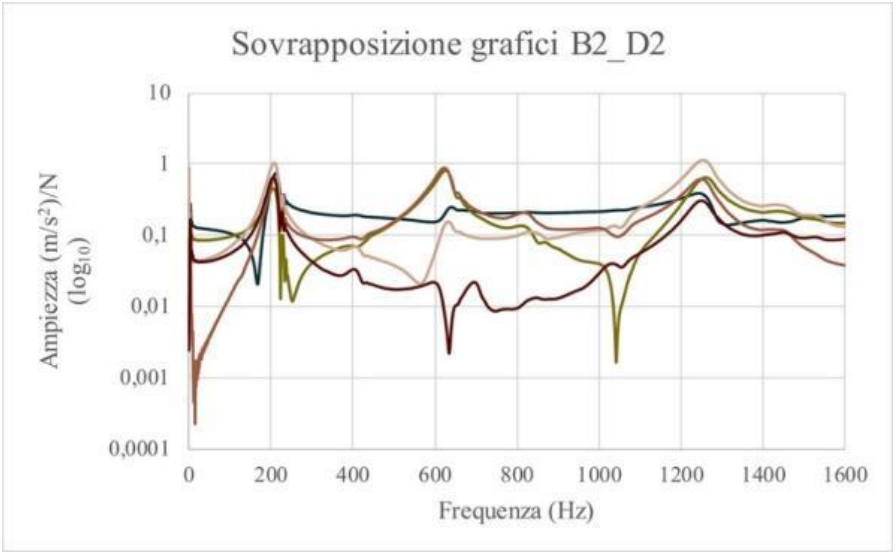


Figura 5.45 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B2_D3

	Hz
modo 1	206,375
modo 2	634,375
modo 3	1267,187

Tabella 5.21 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B2_D2

	Hz da B&K
modo 1	200,400
modo 2	619,670
modo 3	1248,510

Tabella 5.22 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra e alla trave che ha subito il danno D1, le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

Stato di danno B2_D3

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 9 kN.

Con il secondo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.46) vengono schematizzati i danni visibili.

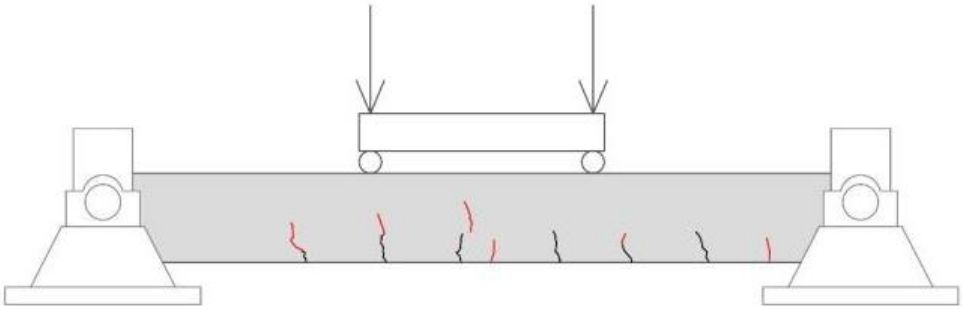
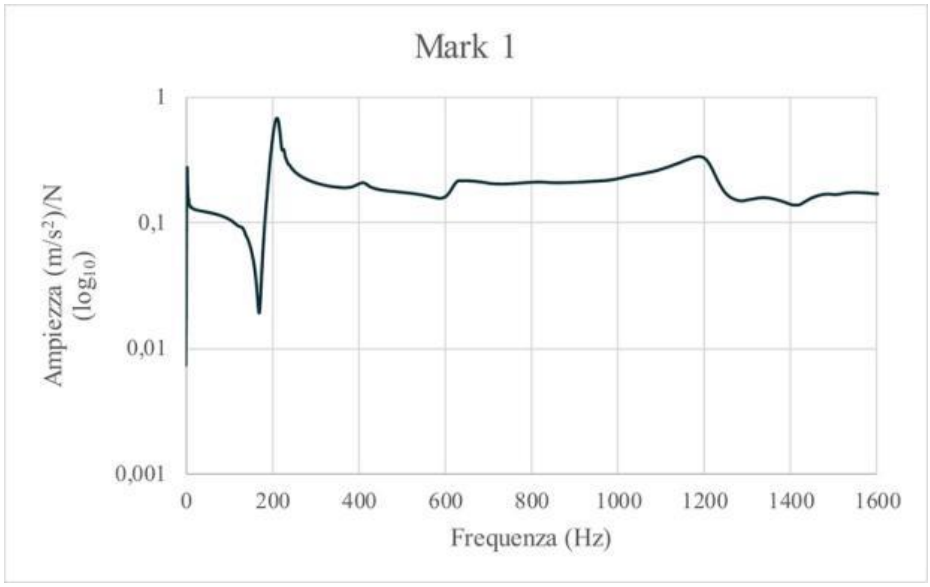
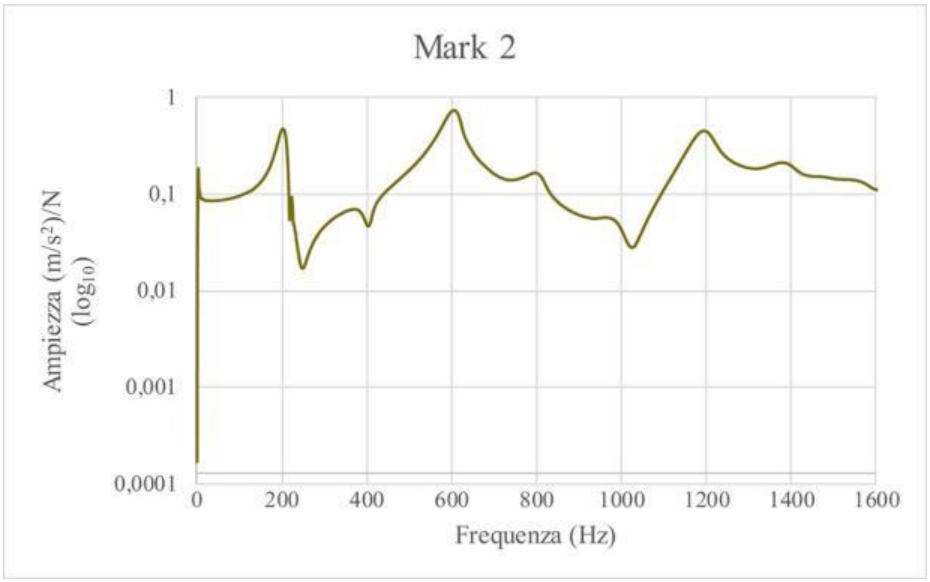
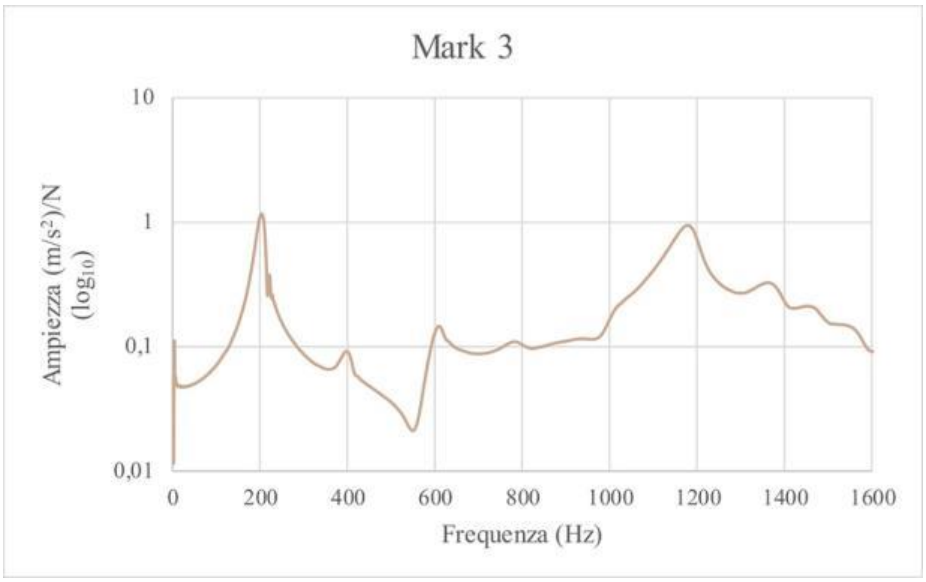


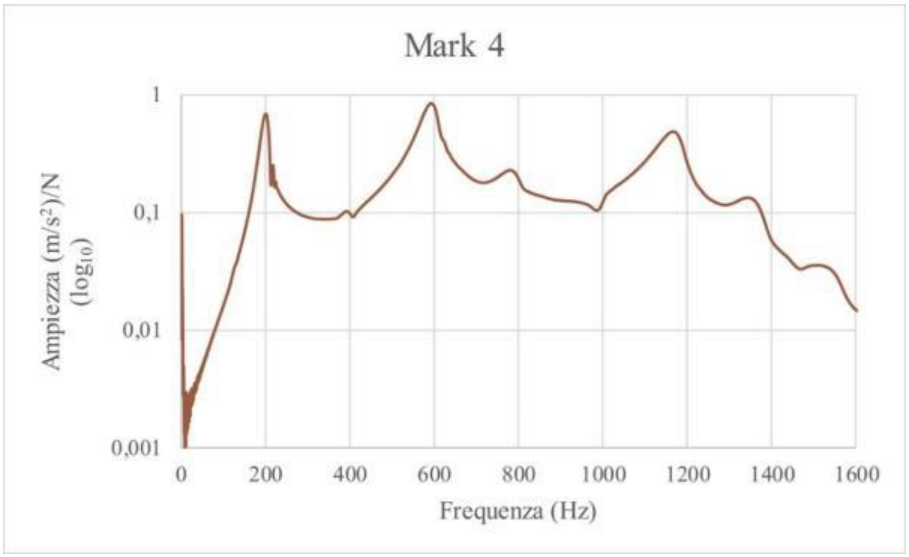
Figura 5.46 –Schematizzazione danni – trave B2_D3

Vengono mostrati in (Figura5.47) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.48) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.23). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.24). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)



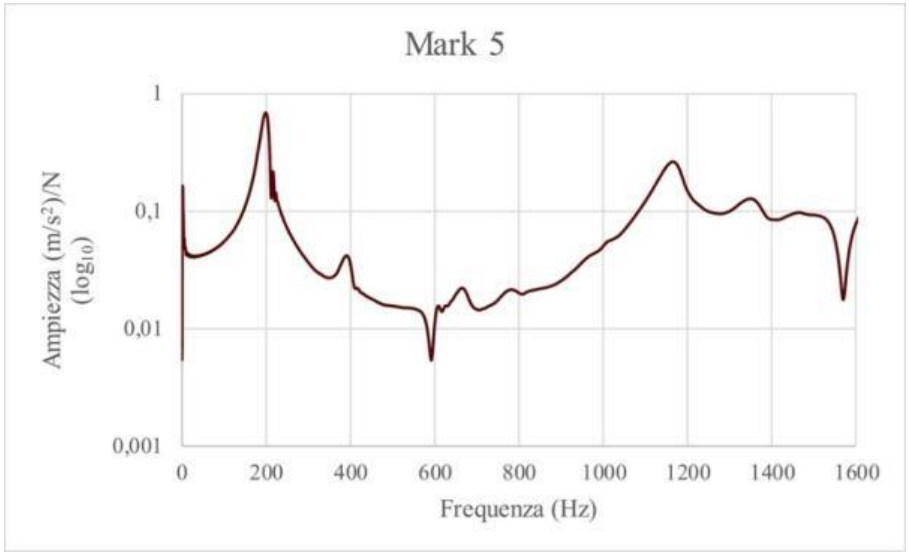


Figura 5.47 – Grafico delle FRF – trave B2_D3

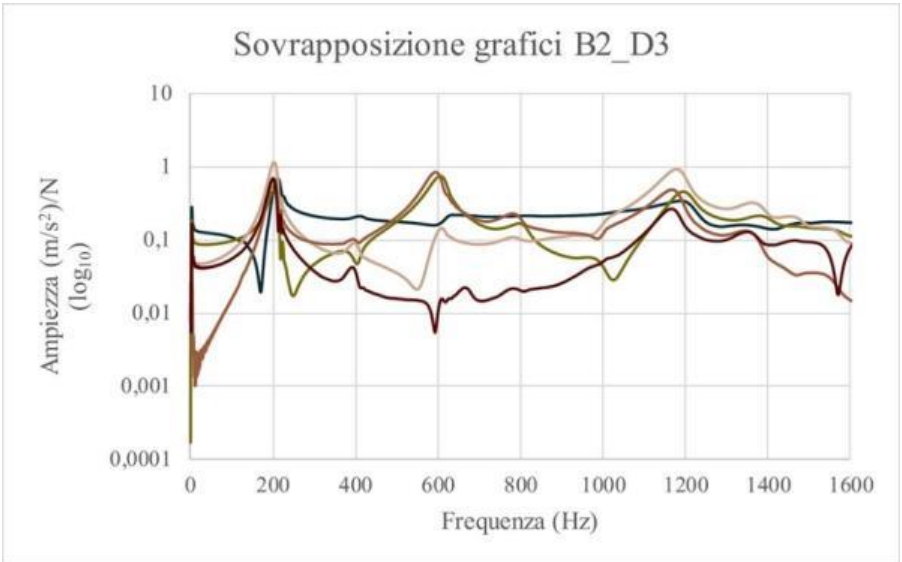


Figura 5.48 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B2_D3

	Hz
modo 1	207,812
modo 2	607,031
modo 3	1194,531

Tabella 5.23 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B2_D3

	Hz da B&K
modo 1	197,540
modo 2	593,150
modo 3	1173,970

Tabella 5.24 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra e alla trave che ha subito il danno D1, le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa ma se si fa il confronto con la condizione di danno precedente la variazione è minore. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 4, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.49)

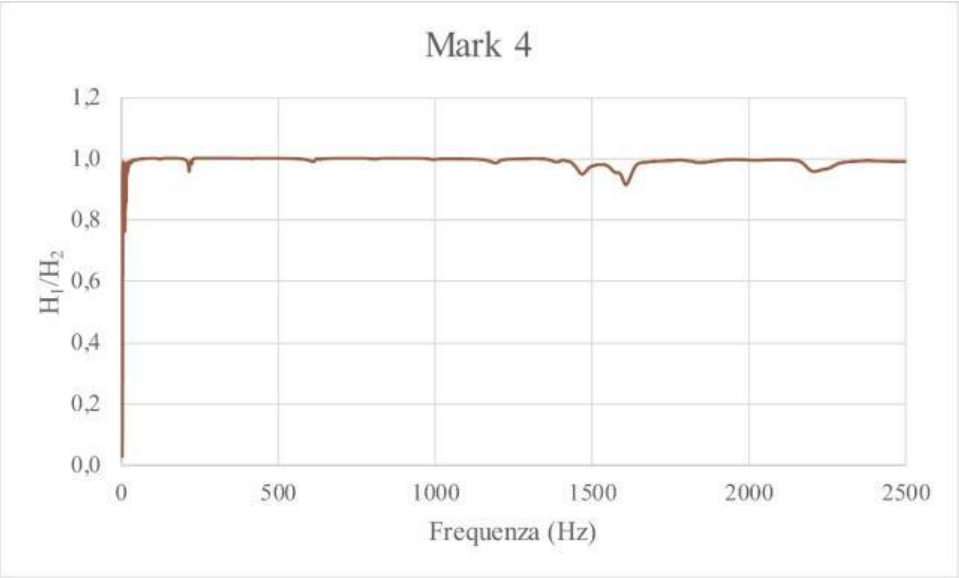


Figura 5.49 – Coerenza corrispondente al mark 4 – trave B2_D3

Stato di danno B2_R2_D0

Una volta sottoposta la trave allo stato di danno che corrisponde al danno D3, 9 kN, si è provveduto ad applicare il rinforzo in GFRP. Nella trave B2 è stata applicata una striscia di rinforzo da 100 cm in intradosso ed una striscia di rinforzo da 30 cm in estradosso come schematizzato in (Figura 5.50). Successivamente sono stati applicati gli strain gauges, sulla striscia in GFRP in mezzeria sia in intradosso che in estradosso, gli estensometri in corrispondenza della mezzeria ma applicati lateralmente sul calcestruzzo ed infine viene predisposto il trasduttore di spostamento. La configurazione di rinforzo descritta viene indicata con "R2".

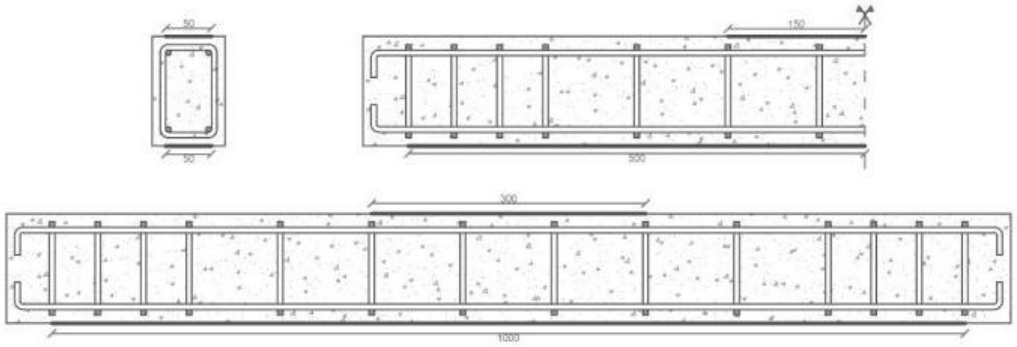
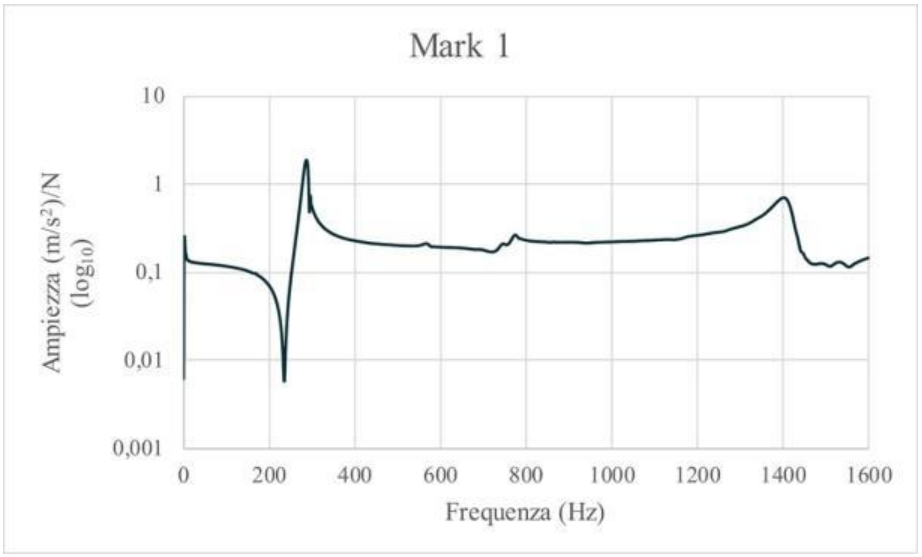
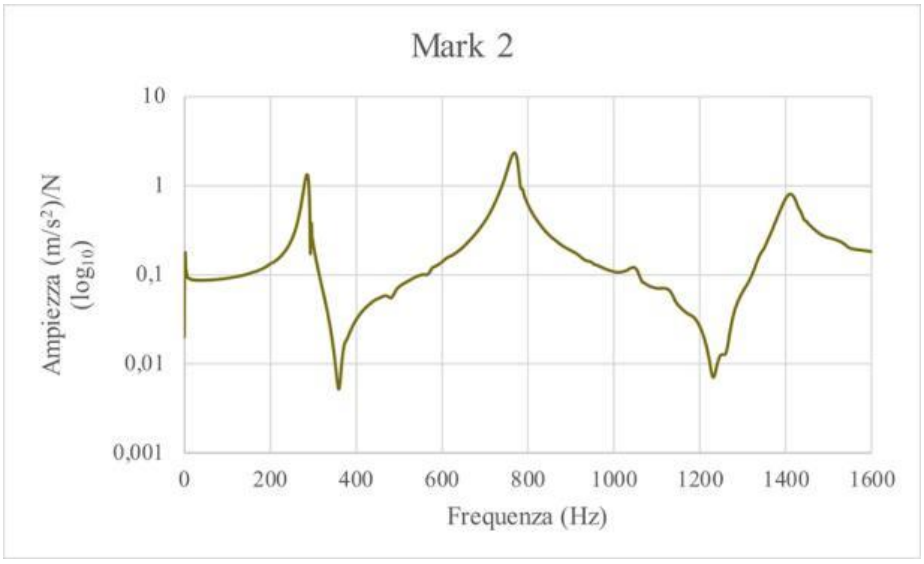


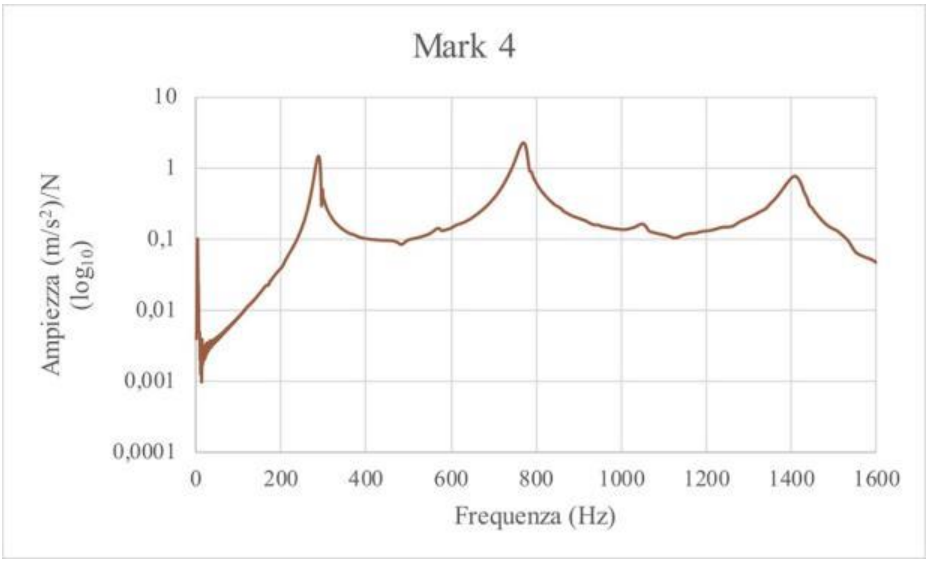
Figura 5.50 – Schema posizione applicazione strisce di GFRP – trave B2_R2_D0

Dopo aver applicato il rinforzo è stata ripetuta la prova dinamica. Di seguito sono riportati i grafici delle FRF (Figura 5.51), il grafico della sovrapposizione dei grafici delle FRF (Figura 5.52) in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.25). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.26). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

È importante notare come i mark considerati non sono più 5 ma 4 in quanto nella posizione 3 del mark è stato impossibile posizionare l'accelerometro a causa della presenza dello strain gauge.


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)

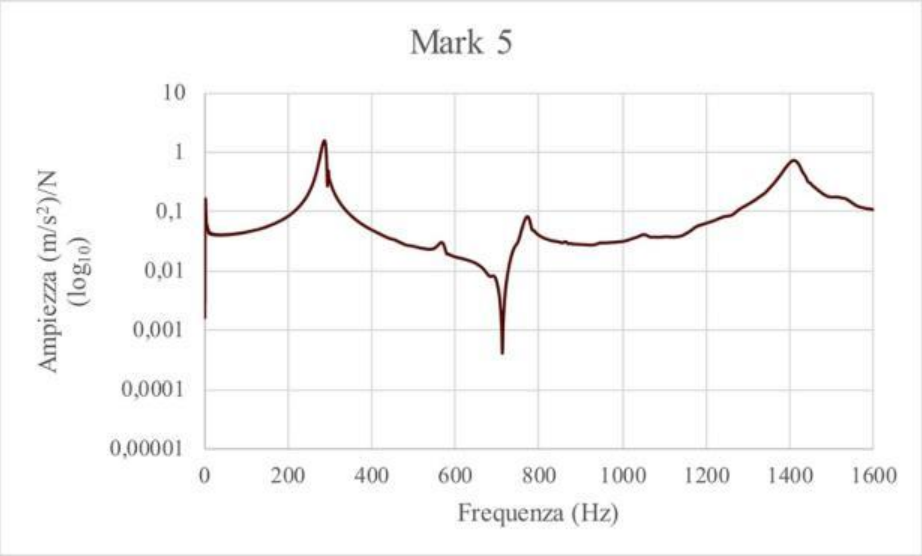


Figura 5.51 – Grafico delle FRF – trave B2_R2_D0

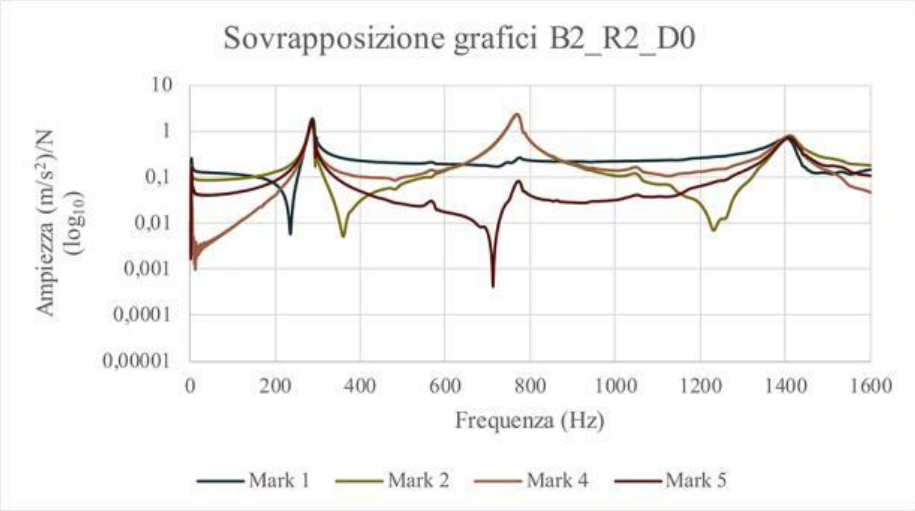


Figura 5.52 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B2_R2_D0

	Hz
modo 1	285,937
modo 2	777,344
modo 3	1420,312

Tabella 5.25 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D0

	Hz da B&K
modo 1	288,687
modo 2	772,024
modo 3	1403,349

Tabella 5.26 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione integra, la trave che ha subito i tre cicli di carico e poi rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza variano in maniera significativa e i valori si aggirano intorno ai valori corrispondenti alla condizione di trave B2 a cui è stato applicato il secondo ciclo di carico D2. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 4, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.53)

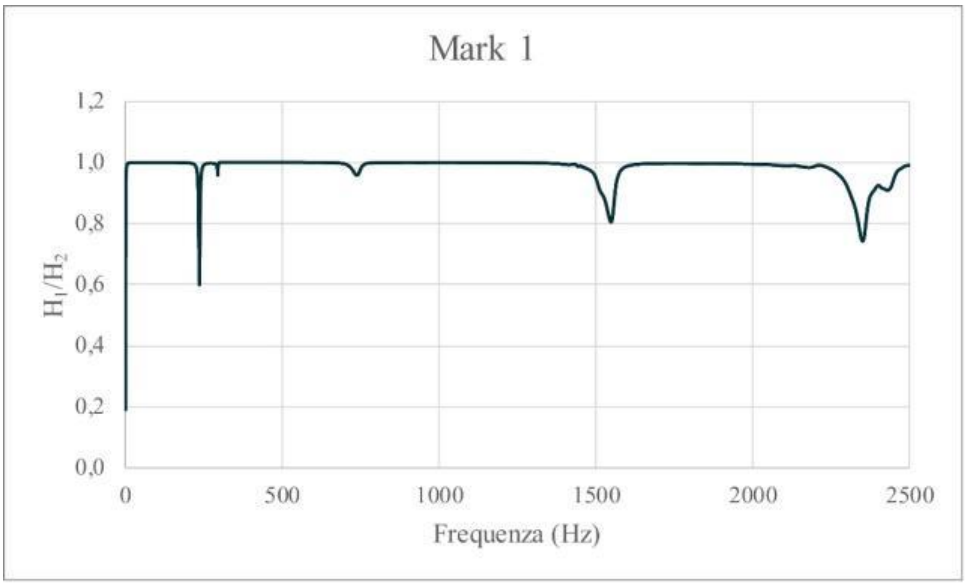


Figura 5.53 – Coerenza corrispondente al mark 1 – trave B2_R2_D0

Stato di danno B2_R2_D1

Dopo aver misurato le FRF della trave integra e rinforzata, si è passati alla prova di tipo statico applicando il primo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 3 kN.

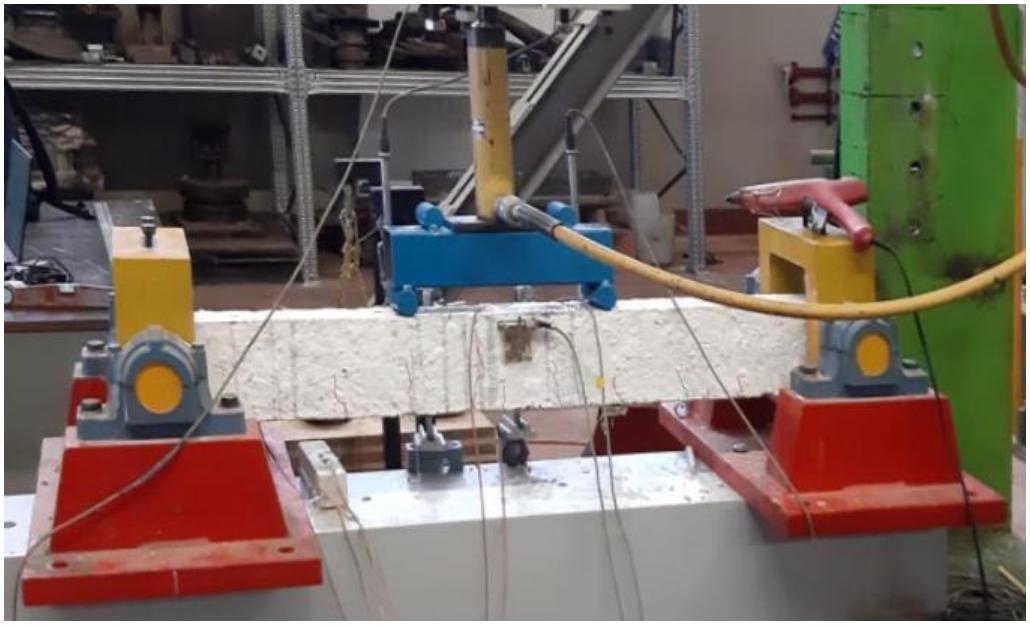
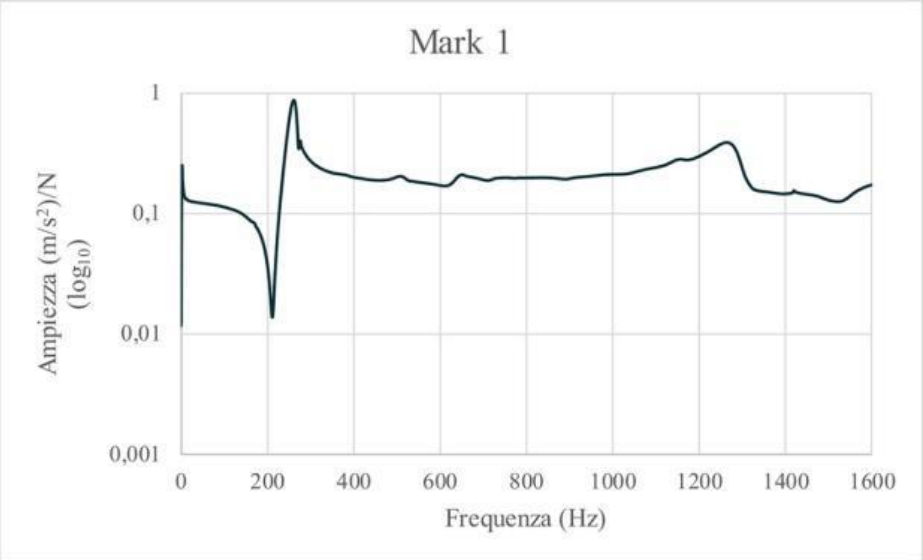
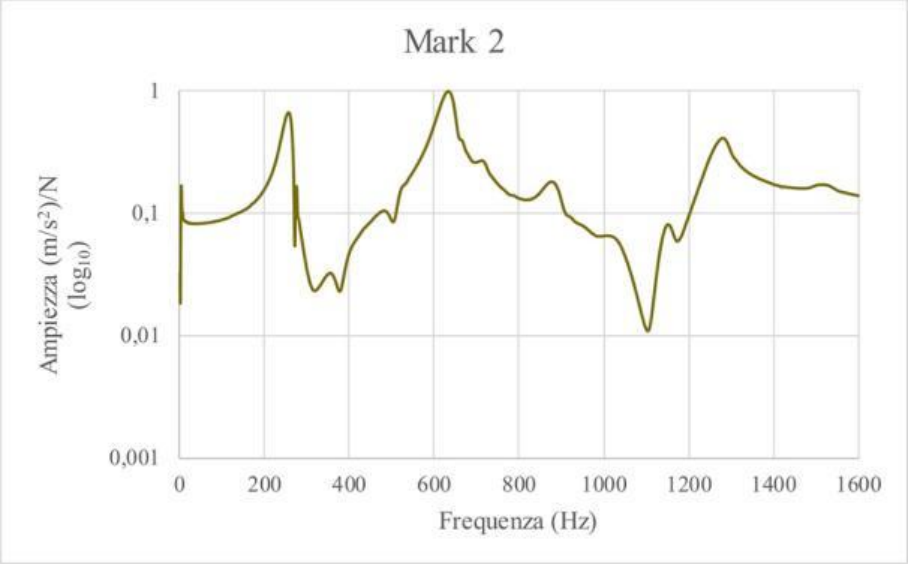


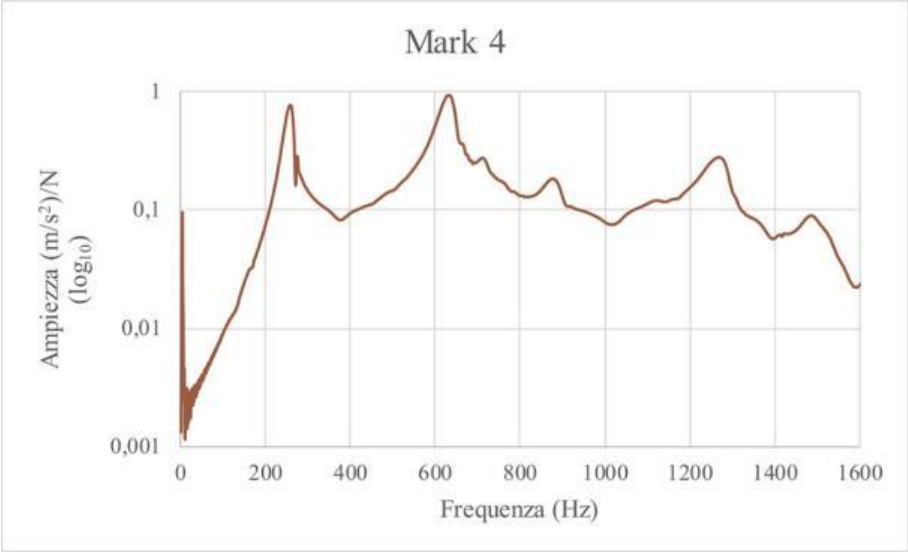
Figura 5.54 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica – trave B2_R2_D1

Con un carico di 3kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.55) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.56) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.27). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.28). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
Frequenza (Hz)

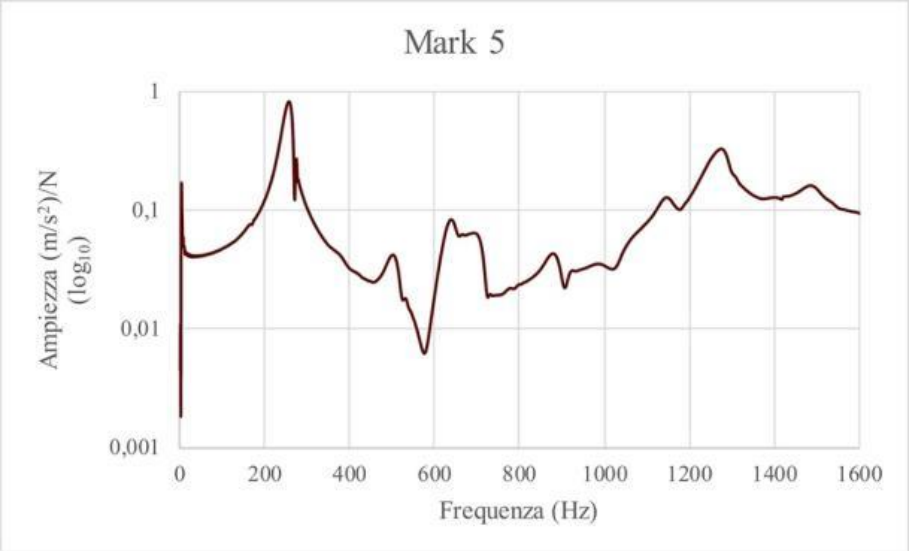


Figura 5.55 – Grafico delle FRF – trave B2_R2_D1

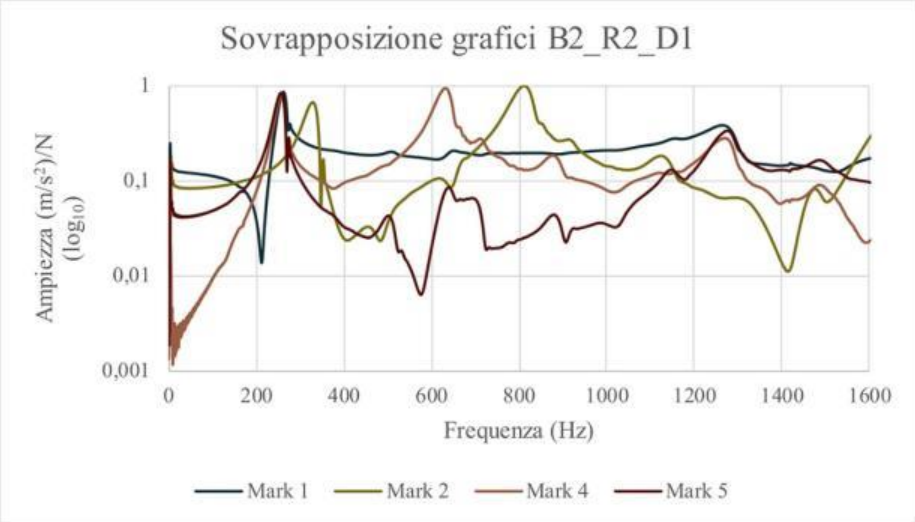


Figura 5.56 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B2_R2_D1

	Hz
modo 1	260,938
modo 2	634,375
modo 3	1275,000

Tabella 5.27 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D1

	Hz da B&K
modo 1	271,304
modo 2	712,414
modo 3	1339,388

Tabella 5.28 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

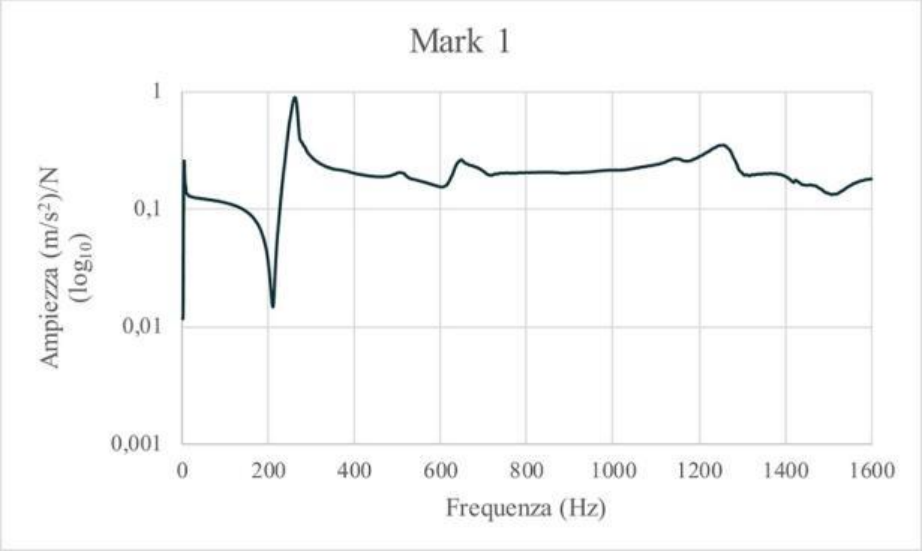
Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata ma non sottoposta ad alcun ciclo di carico, la trave che ha subito il primo dei tre cicli di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

Stato di danno B2_R2_D2

Si è passati alla prova di tipo statico applicando il secondo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 6 kN.

Anche con un carico di 6kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.57) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.58) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.29). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.30). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.



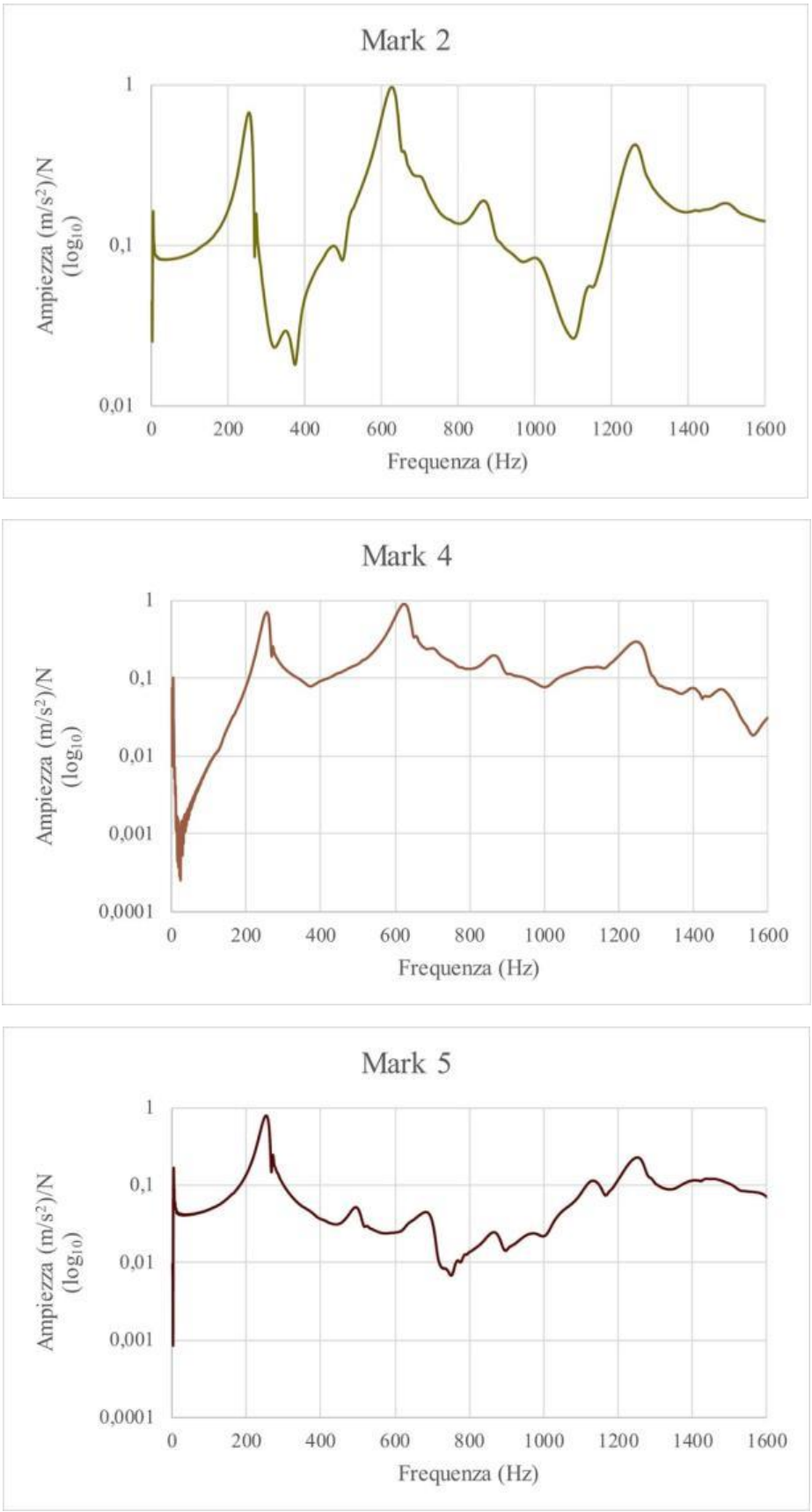


Figura 5.57 – Grafico delle FRF – trave B2_R2_D2

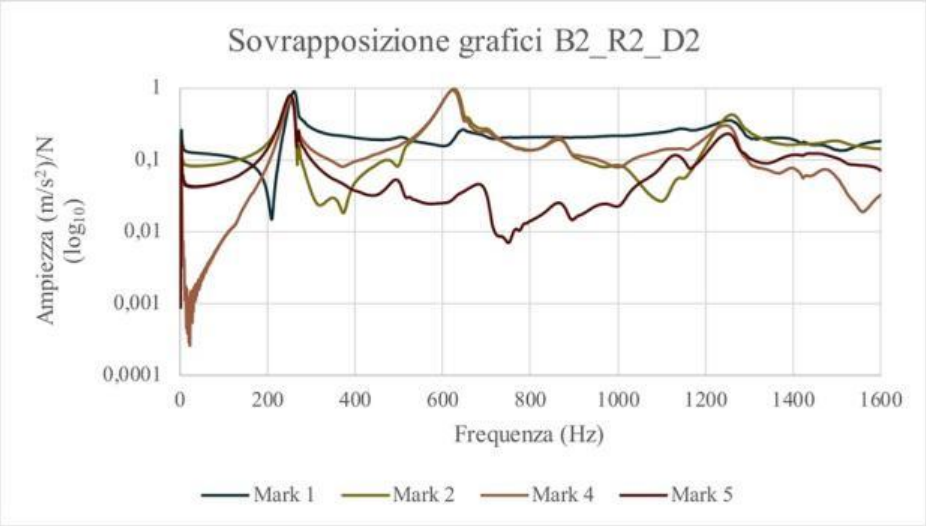


Figura 5.59 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B2_R2_D2

	Hz
modo 1	255,469
modo 2	634,375
modo 3	1264,063

Tabella 5.29 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B2_R2_D2

	Hz da B&K
modo 1	250,113
modo 2	691,399
modo 3	1307,413

Tabella 5.30 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

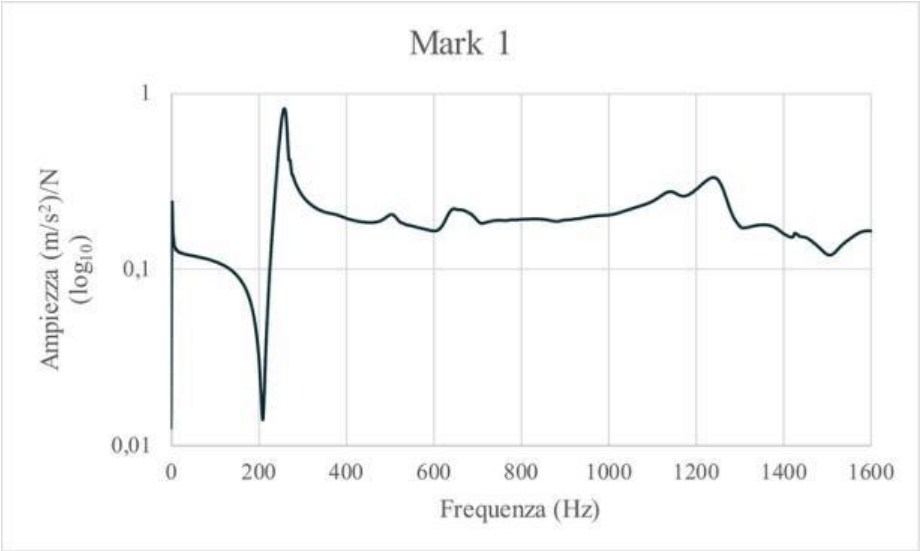
Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata sottoposta al primo ciclo di carico, la trave che ha subito il secondo ciclo di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

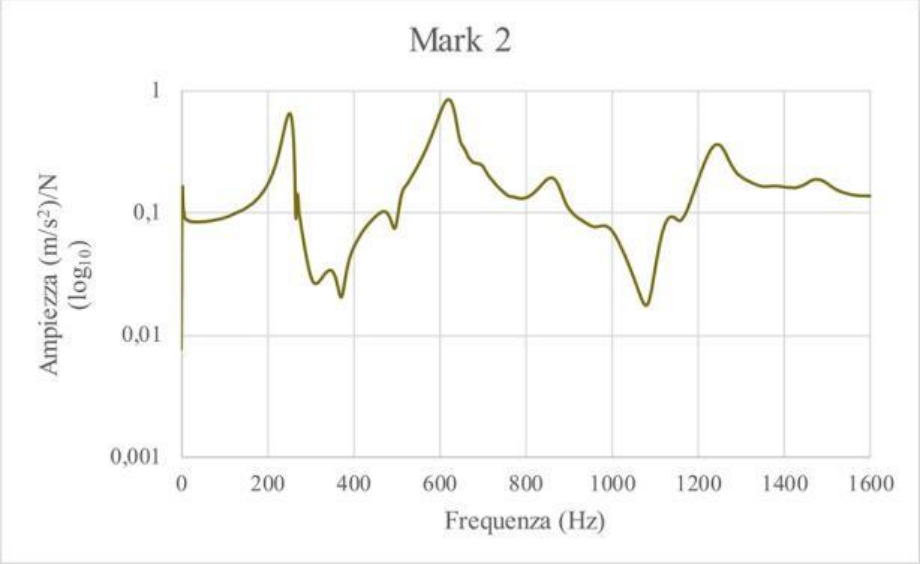
Stato di danno B2_R2_D3

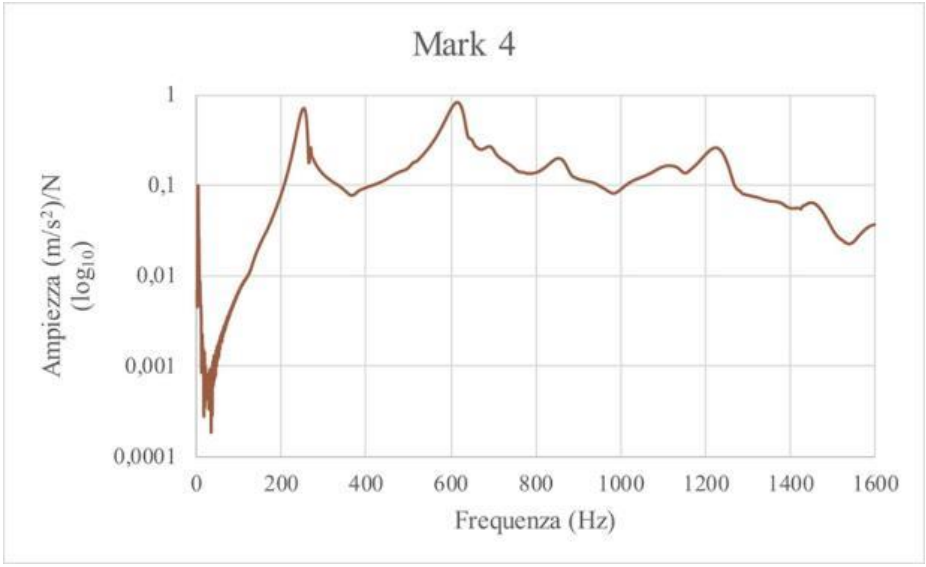
Si è passati alla prova di tipo statico applicando il terzo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 9 kN.

Anche con un carico di 9 kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo oltre quelli fatti a trave non rinforzata.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.59) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.60) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.31). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.32). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.







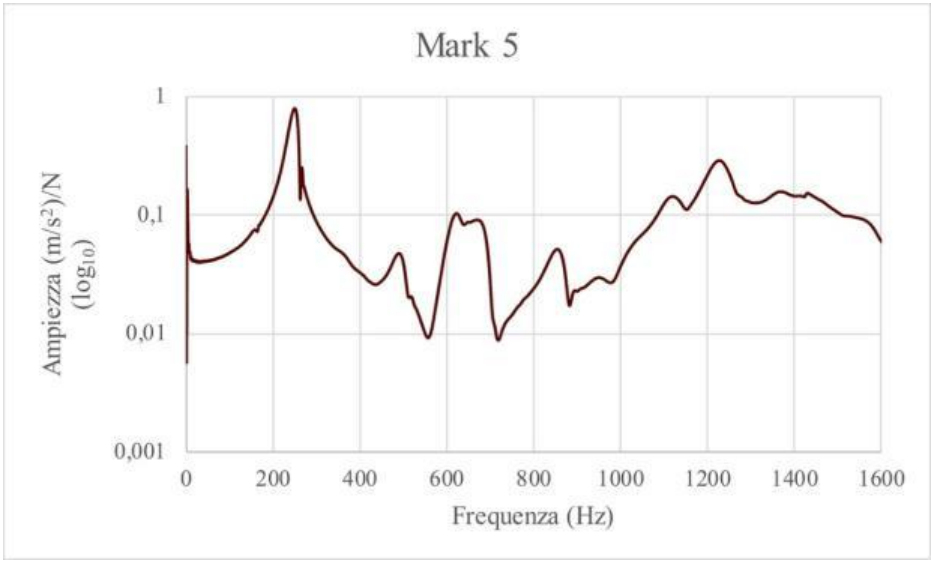


Figura 5.59 – Grafico delle FRF – trave B2_R2_D3

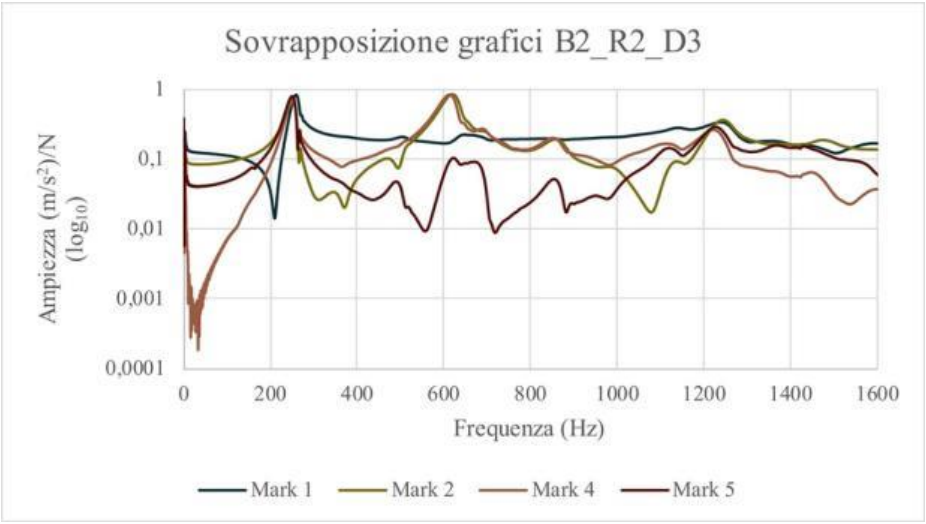


Figura 5.60 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B1_R1_D3

	Hz
modo 1	254,688
modo 2	622,656
modo 3	1232,813

Tabella 5.31 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B1_R1_D3

	Hz da B&K
modo 1	245,529
modo 2	671,099
modo 3	1277,324

Tabella 5.32 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Si può notare come rispetto alla trave in condizione rinforzata sottoposta al primo e al secondo ciclo di carico, la trave che ha subito il terzo ciclo di carico rinforzata mostra che le funzioni di risposta in frequenza diminuiscono leggermente rispetto alle precedenti. Il confronto viene fatto nella (Tabella 5.35).

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 2, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.61)

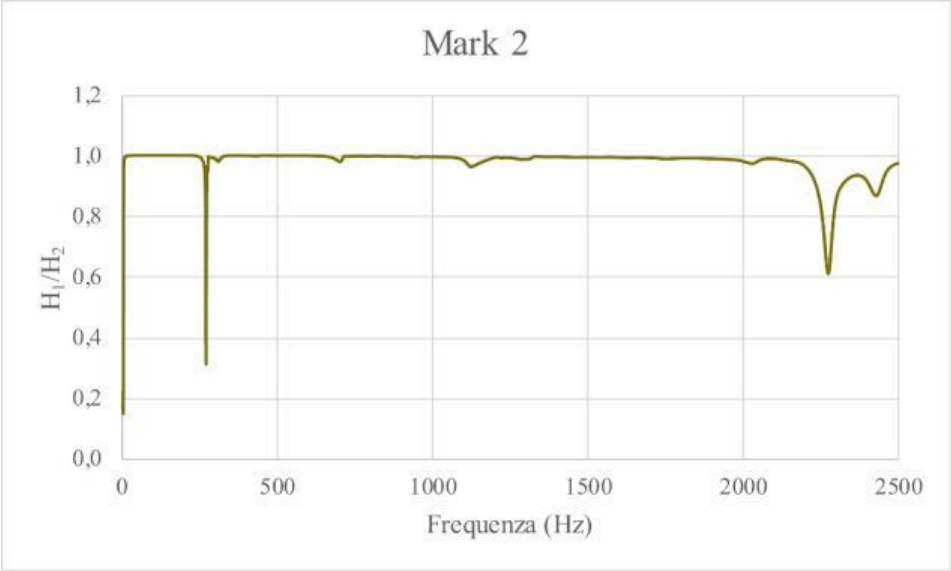


Figura 5.61 – Coerenza corrispondente al mark 2 – trave B2_R2_D3

Condizione di rottura B2

Per completare la prova, il provino viene portato a rottura. Durante la prova a rottura vengono misurati le deformazioni attraverso la strumentazione prima descritta.

In particolare, i danni si ripresentano a partire da un carico di 12 kN ed tendono ad aumentare ma non in maniera veloce. Nello schema seguente (Figura 5.62) si mostrano i danni che si sono evidenziati per i carichi corrispondenti a 12 kN (in azzurri) e 15 kN (in verde).

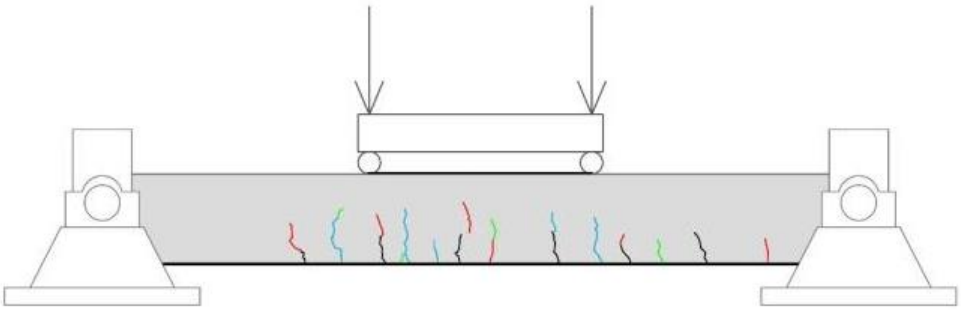


Figura 5.62 – Schematizzazione danni – trave B2

La rottura è avvenuta a circa 23 kN (Figura 5.63) .



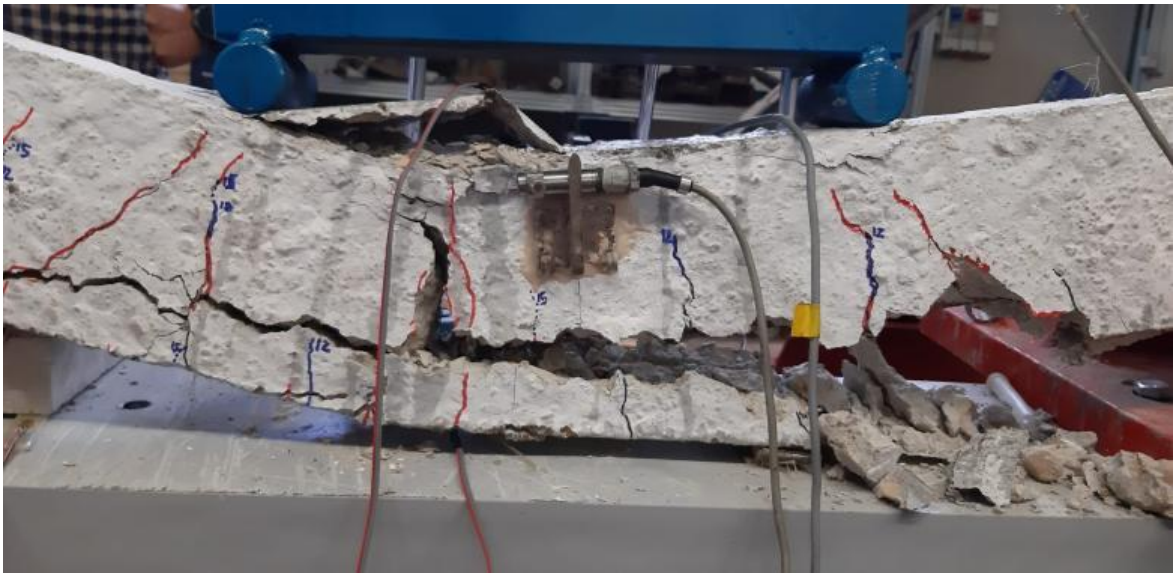


Figura 5.63 – Rottura provino – trave B2

Risultati statici trave B2 non rinforzata

Dalle misurazioni effettuate sulla trave non rinforzata sono stati ricavati i seguenti valori e diagrammi che caratterizzano il comportamento del campione prima di applicare il rinforzo.

Nella tabella vengono riportati i valori acquisiti da ogni strumentazione utilizzata per ogni step di carico.

	Carico	Spostamento	Deformazione cls a compressione	Deformazione cls a trazione
Damage Steps	[kN]	[mm]	[um/m]	[um/m]
B1_D0	–	–	–	–
B1_D1	3	0,30030	18,68615	131,11
B1_D2	6	1,92775	49,24578	246,667
B1_D3	9	1,53058	449,553	2446,523

Tabella 5.33 – Valori spostamenti e deformazioni ricavati da prove statiche

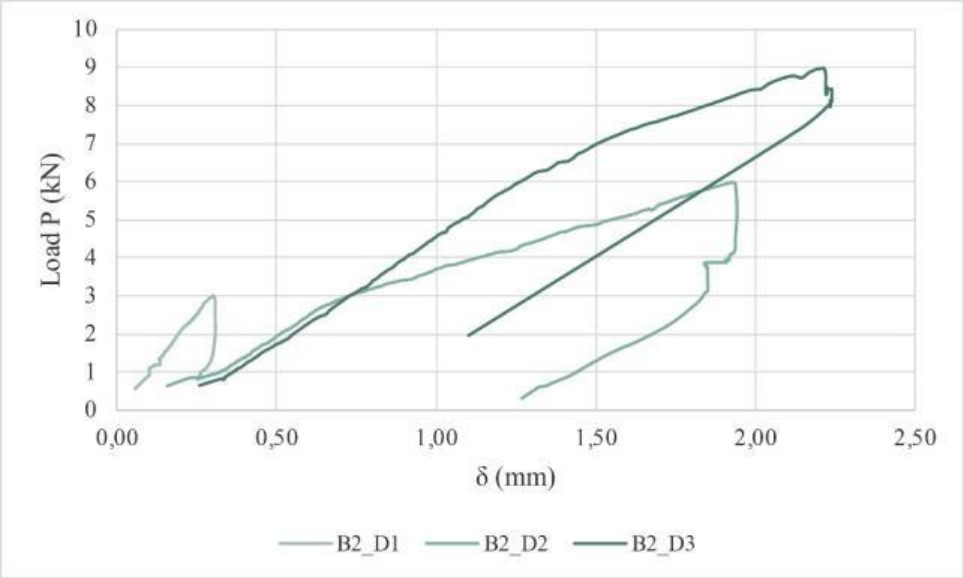


Figura 5.64 – Diagramma Forza-Freccia – trave B2 non rinforzata

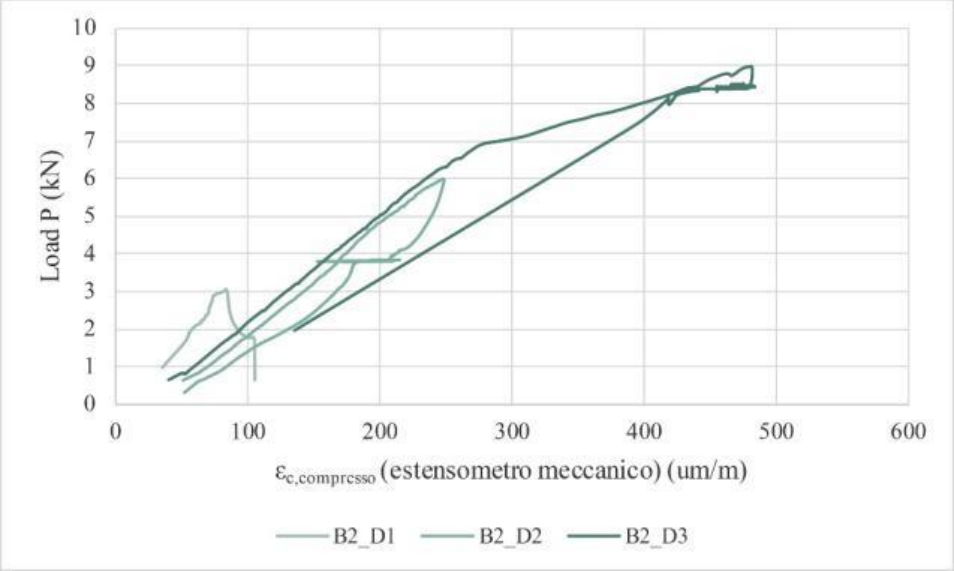


Figura 5.65 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo compresso – trave B2 non rinforzata

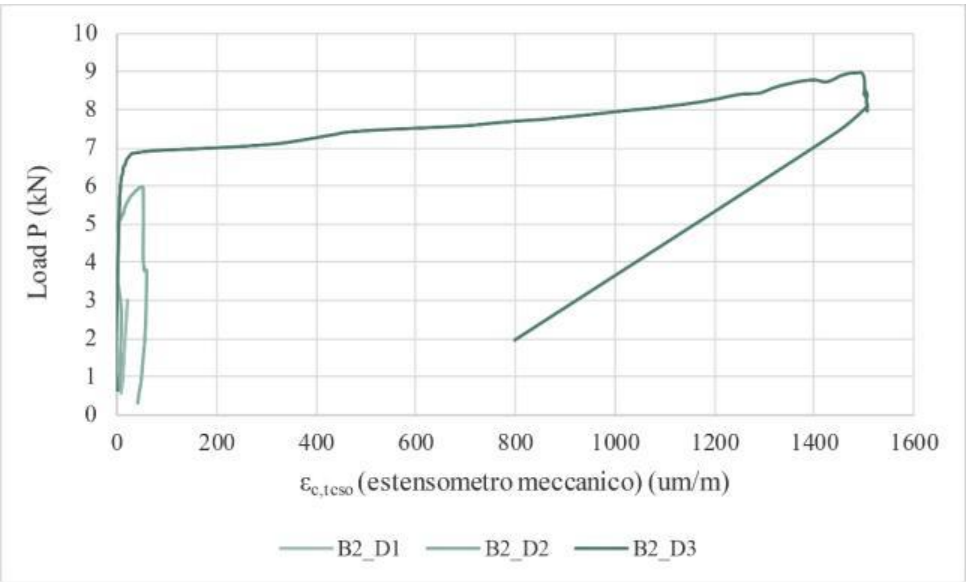


Figura 5.66 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo teso – trave B2 non rinforzata

Risultati statici trave B2 rinforzata

Dalle misurazioni effettuate sulla trave rinforzata sono stati ricavati i seguenti valori e diagrammi che caratterizzano il comportamento del campione prima di applicare il rinforzo.

Nella tabella vengono riportati i valori acquisiti da ogni strumentazione utilizzata per ogni step di carico.

Nella presente prova, sono stati predisposti due trasduttori di spostamento verticale in maniera simmetrica, infatti i valori sono molto simili tra loro e il valore indicato in tabella è unico e valutato in base ai risultati. Anche gli estensometri per il controllo della deformazione del calcestruzzo compresso sono stati messi in maniera simmetrica portando così un risultato molto simile tra i due e quindi ne è stato preso un valore unico.

	Carico	Spostamento 1	Spostamento 2	Deformazione GFRP a compressione (strain gauges)	Deformazione GFRP a trazione (strain gauges)	Deformazione GFRP a trazione (strain gauges) inglobato tra i 2 strati di rinforzo
Damage Steps	[kN]	[mm]	[mm]	[um/m]	[um/m]	[um/m]
B1_R1_D0	–	–	–	–	–	–
B1_R1_D1	3	0,8375	0,71875	158,16	187,92	157,92
B1_R1_D2	6	1,20938	1,20313	310,32	458,88	381,6
B1_R1_D3	9	1,51875	1,58125	450,48	847,68	760,32

	Carico	Deformazione cls a compressione (estensometro)	Deformazione cls a compressione (estensometro)	Deformazione cls a compressione (estensometro)	Deformazione cls a compressione (estensometro)
Damage Steps	[kN]	[um/m]	[um/m]	[um/m]	[um/m]
B1_R1_D0	–	–	–	–	–
B1_R1_D1	3	112,929	79,805	112,929	79,805
B1_R1_D2	6	154,546	118,151	154,546	118,151
B1_R1_D3	9	273,132	–	273,132	–

Tabella 5.34 – Valori spostamenti e deformazioni ricavati da prove statiche

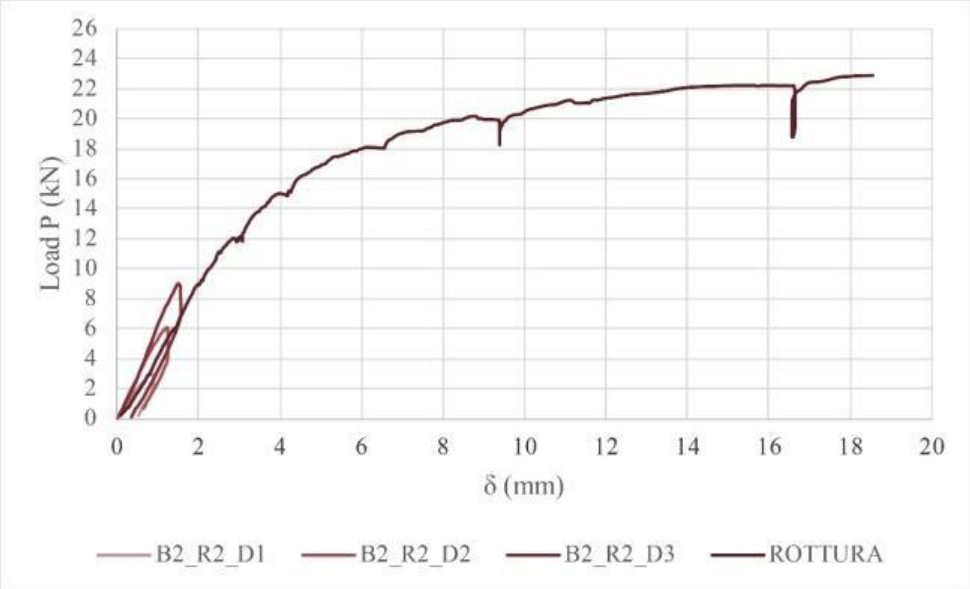


Figura 5.67 – Diagramma Forza-Freccia – trave B2 rinforzata

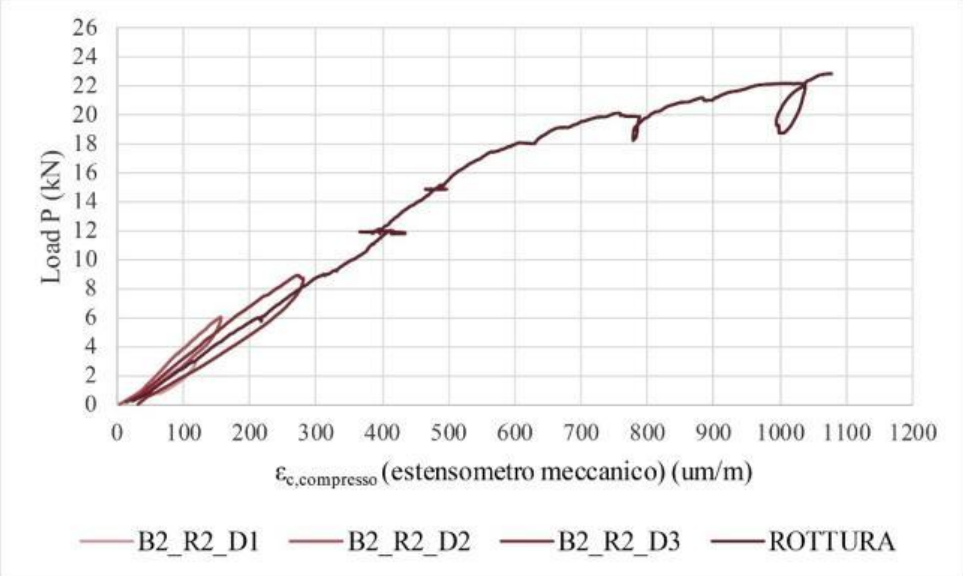


Figura 5.68 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo compresso – trave B2 rinforzata

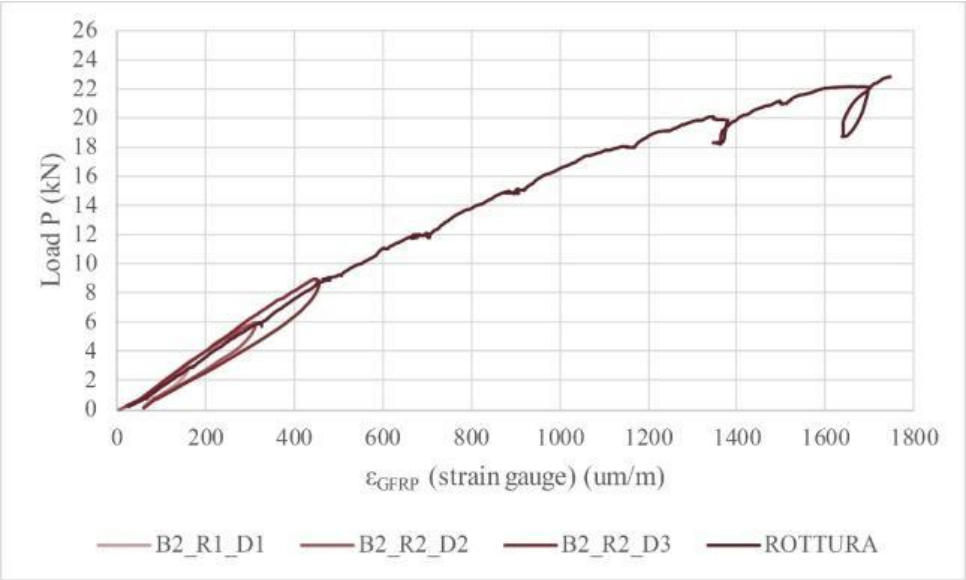


Figura 5.69 – Diagramma Forza-Deformazione striscia di GFRP – trave B2 rinforzata

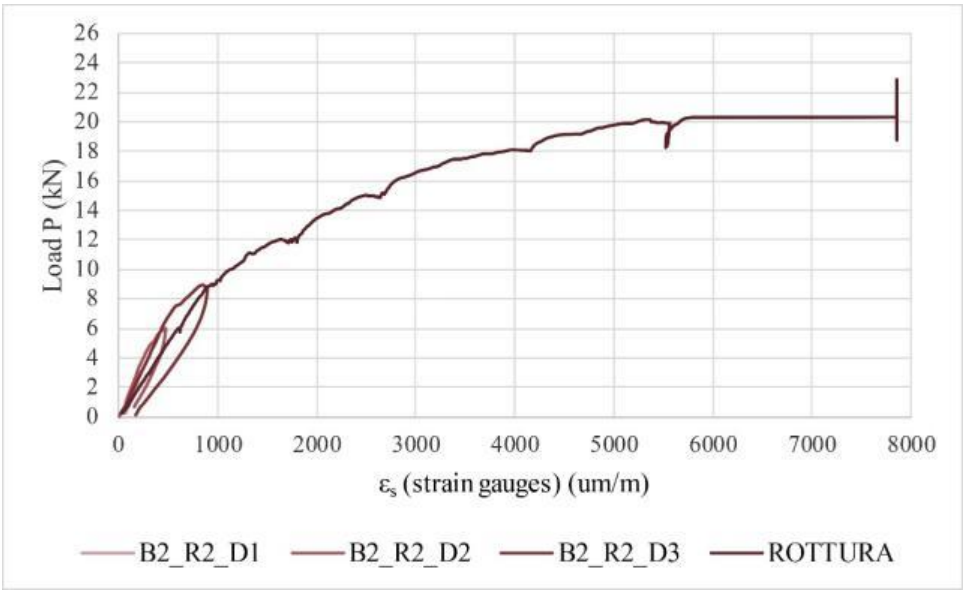


Figura 5.70 – Diagramma Forza-Deformazione acciaio – trave B2 rinforzata

Risultati dinamici trave B2

Dalle prove dinamiche, vengono riassunti nelle tabelle seguenti i risultati forniti in relazione alle FRF.

La tabella 5.35 contiene i dati delle frequenze sperimentali registrate per travi non rinforzate (B2_D0, B2_D1, B2_D2, B2_D3) e per travi rinforzate (B2_R2_D0, B2_R2_D1, B2_R2_D2,

B2_R2_D2, B2_R2_D3) e sono visibili i confronti percentuali tra la frequenza sperimentale per ogni grado di danneggiamento e la trave integra.

	f1	$\Delta f1/f_{D0}$	f2	$\Delta f2/f_{D0}$	f3	$\Delta f3/f_{D0}$
Damage Degree	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]
B1_D0	354,687	–	926,562	–	1674,22	–
B1_D1	296,094	16,520	837,500	9,612	1612,5	3,686
B1_D2	206,375	41,815	634,375	31,535	1267,19	24,312
B1_D3	207,812	41,410	607,031	34,486	1194,53	28,651
B1_R1_D0	285,937	19,383	777,344	16,104	1420,31	15,166
B1_R1_D1	260,938	26,431	634,375	31,535	1275	23,845
B1_R1_D2	255,469	27,973	634,375	31,535	1264,06	24,498
B1_R1_D3	254,688	28,194	622,656	32,799	1232,81	26,365

Tabella 5.35 – Valori FRF ricavati da prove dinamiche

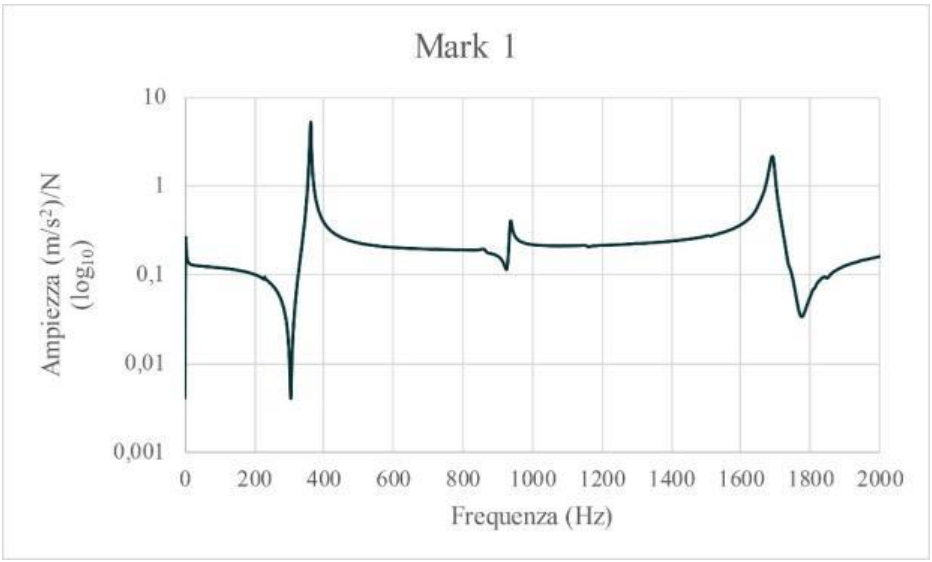
5.3 TRAVE B3 E STATI DI DANNO

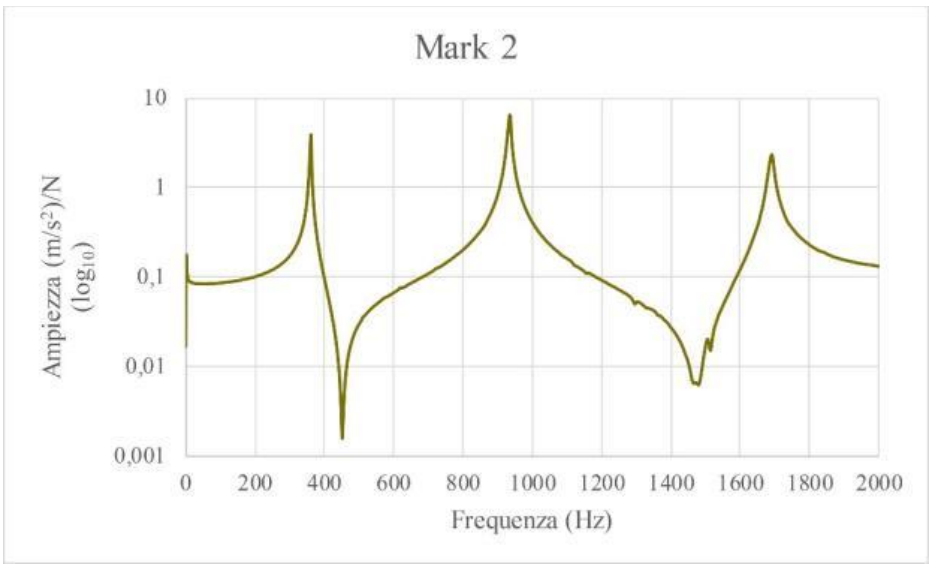
Stato di danno B3_D0

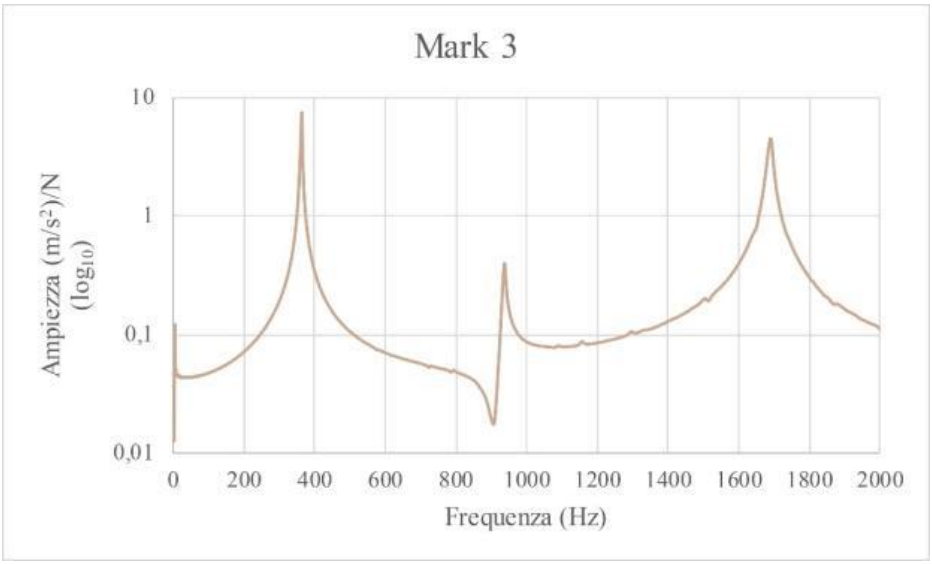
La trave denominata B3 è la terza trave che ha subito la sperimentazione.

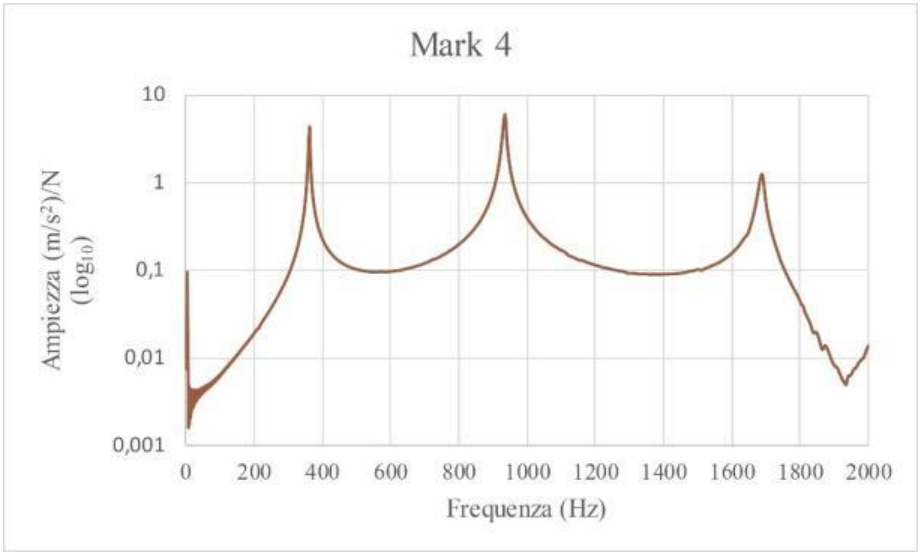
Inizialmente è stata eseguita una prova di tipo dinamico e si sono determinate le FRF e la coerenza a trave integra.

In figura (Figura 5.71) sono riportati i grafici delle FRF per ogni singolo mark posizionati come descritto nel §4.3.2.2 relative alla trave in condizioni integre:









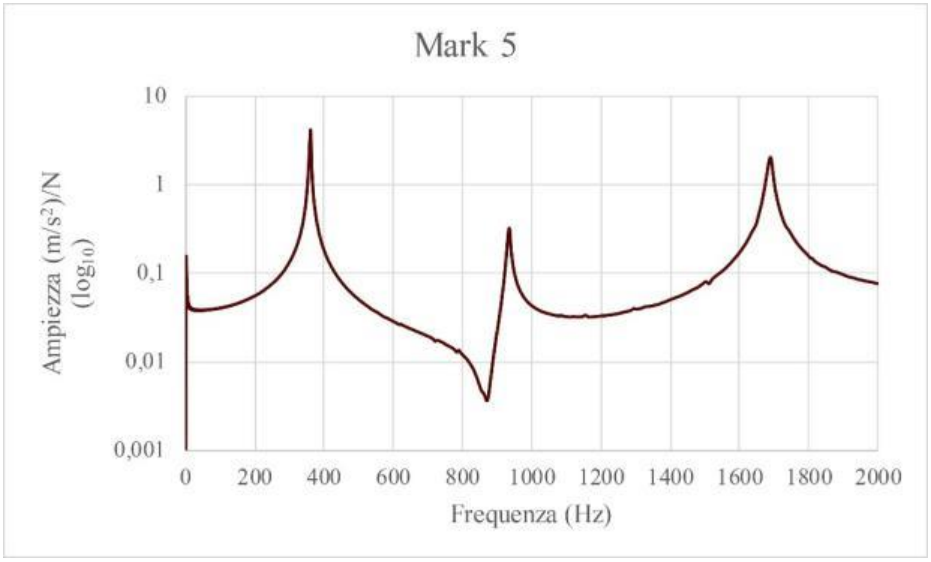


Figura 5.71 – Grafico delle FRF – trave B3_D0

Sovrapponendo i grafici di ogni singolo mark (Figura 5.72), si ricavano i valori delle FRF per i primi 3 modi di vibrare (Tabella 5.36). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.37). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

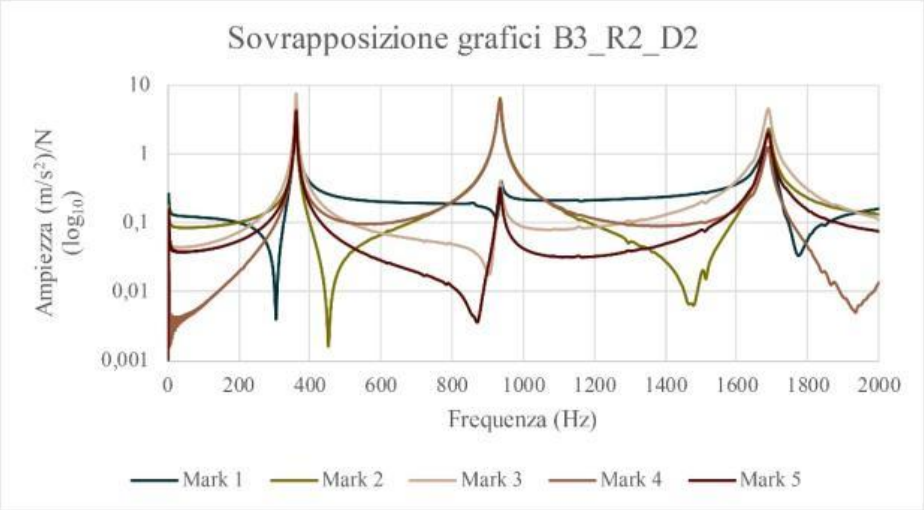


Figura 5.72 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B3_D0

	Hz
modo 1	360,156
modo 2	933,594
modo 3	1692,969

Tabella 5.36 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B3_D0

	Hz da B&K
modo 1	359,956
modo 2	933,481
modo 3	1684,596

Tabella 5.37 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 3, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.73)

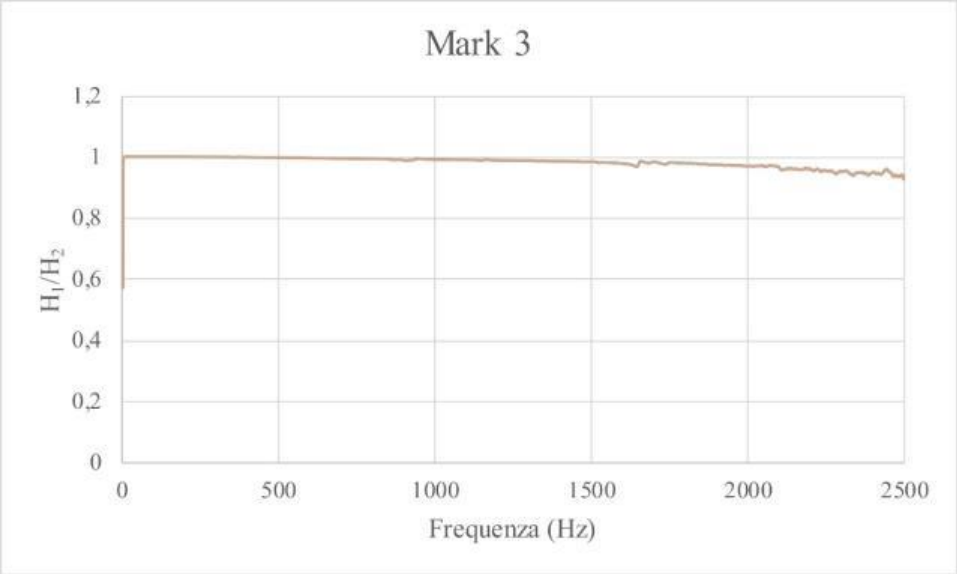


Figura 5.73 – Coerenza corrispondente al mark 3 – trave B3_D0

*Stato di danno B3_D0**

Dopo aver misurato le FRF della trave integra, si è passati direttamente a danneggiare la trave. Il danno fatto su questa trave consiste nella rimozione di 1 cm di copriferro in larghezza in estradosso (Figura 5.74)

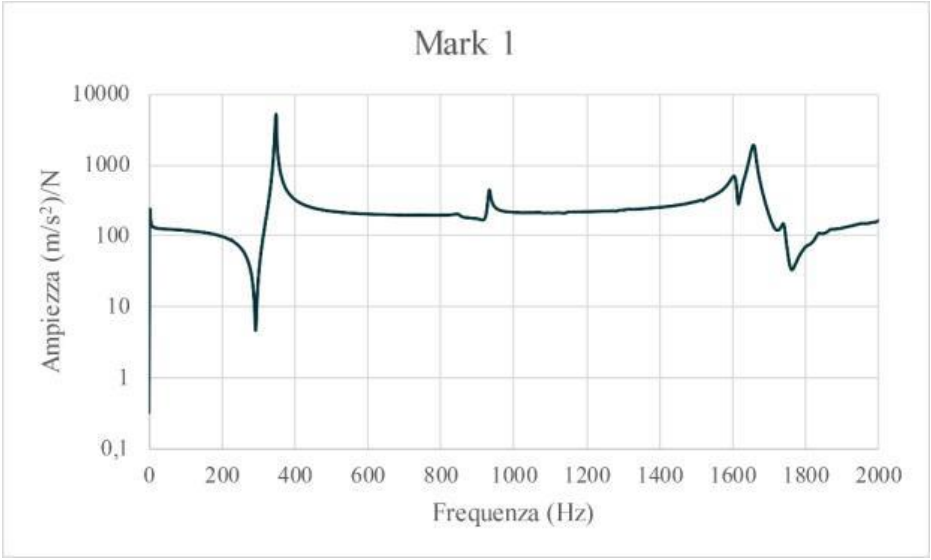


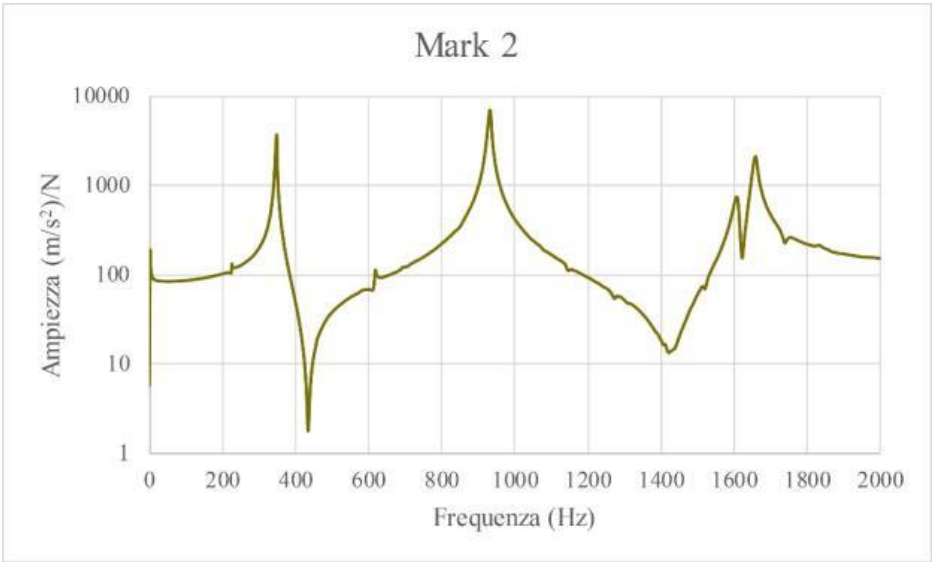
Figura 5.74 – Predisposizione strumenti e provino– trave B3_D0*

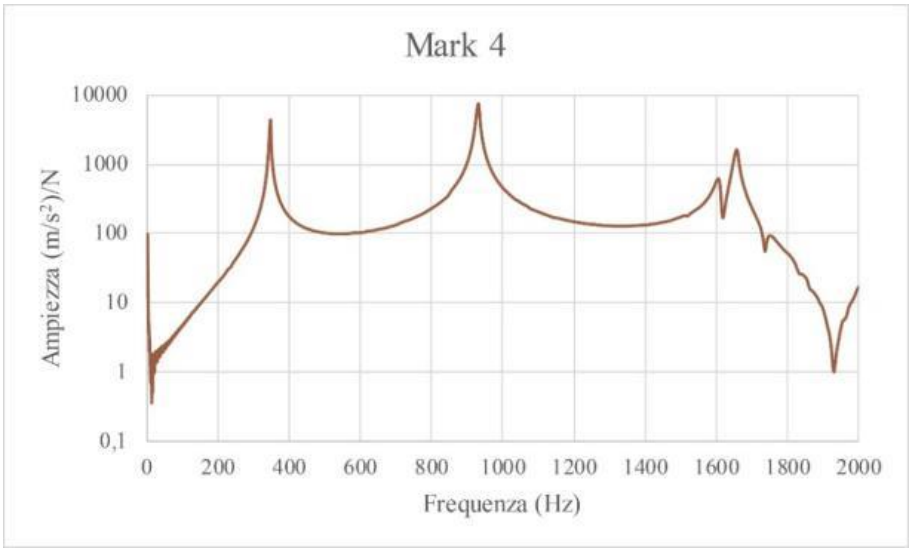
Una volta effettuato il danno, si è passati alla prova dinamica, individuando i valori di frequenza della trave danneggiata. Vengono mostrati in (Figura5.75) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.76) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.38). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.39). Questi dati forniscono

un’ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

È importante notare come i mark considerati non sono più 5 ma 4 in quanto nella posizione 3 del mark è stato impossibile posizionare l’accelerometro a causa della rimozione del copriferro.







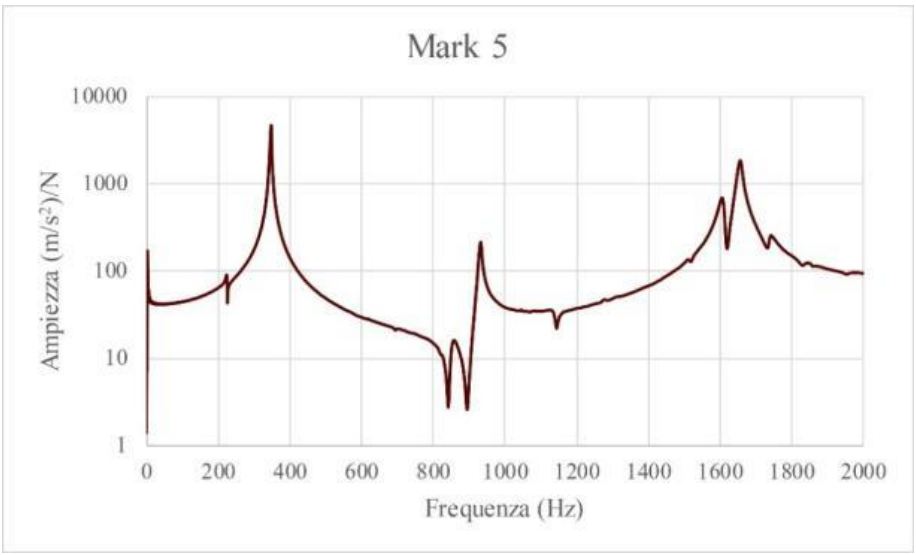


Figura 5.75 – Grafico delle FRF – trave B3_D0*

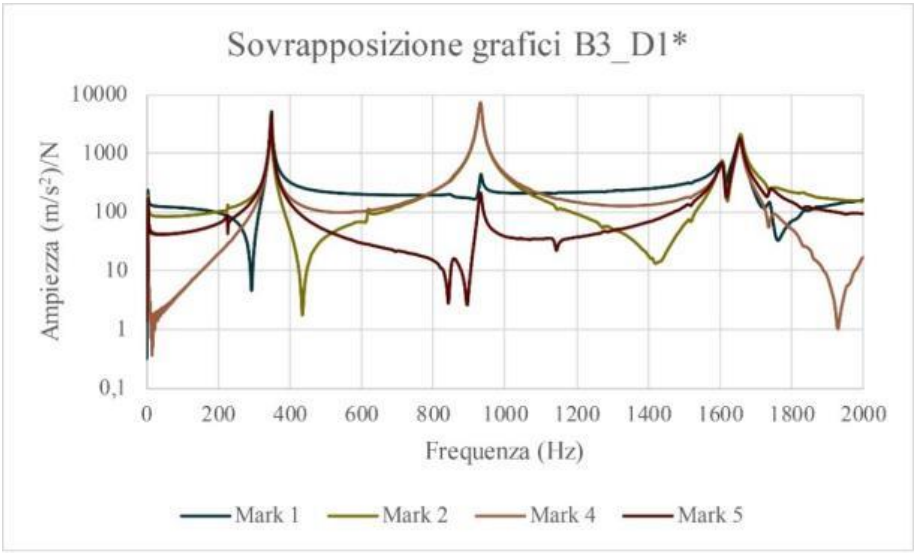


Figura 5.76 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B3_D0*

	Hz
modo 1	347,656
modo 2	933,594
modo 3	1655,469

Tabella 5.38 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B3_D0*

	Hz da B&K
modo 1	345,948
modo 2	930,259
modo 3	1653,628

Tabella 5.39 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Stato di danno B3_R3_D0

Dopo aver effettuato il danno e misurato le FRF, il danno viene riparato con della resina densa (Figura 5.77), che è composta da due componenti, una parte di resina e una parte di indurente, unite in proporzione 1:1.



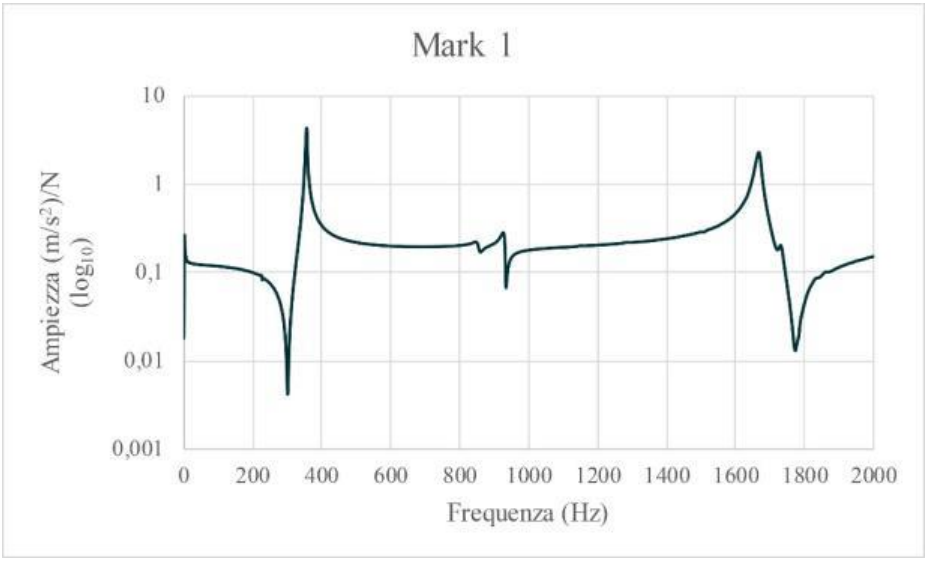
Figura 5.77 – Resina densa, composta da indurente e resina

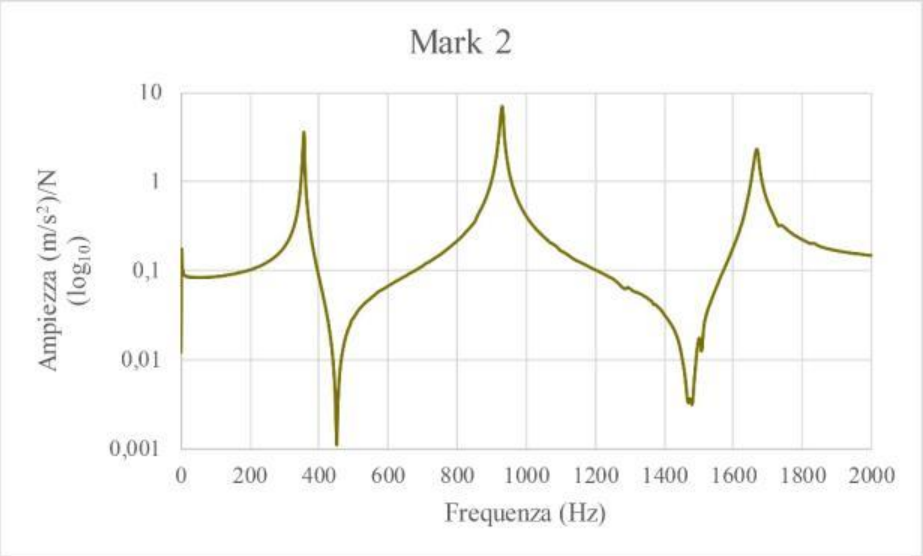
La resina densa viene applicata a riempire la parte rimossa nello stato di danno B3_D0* (Figura 5.78). La configurazione di risarcitura dell'intaglio viene indicata con "R3".

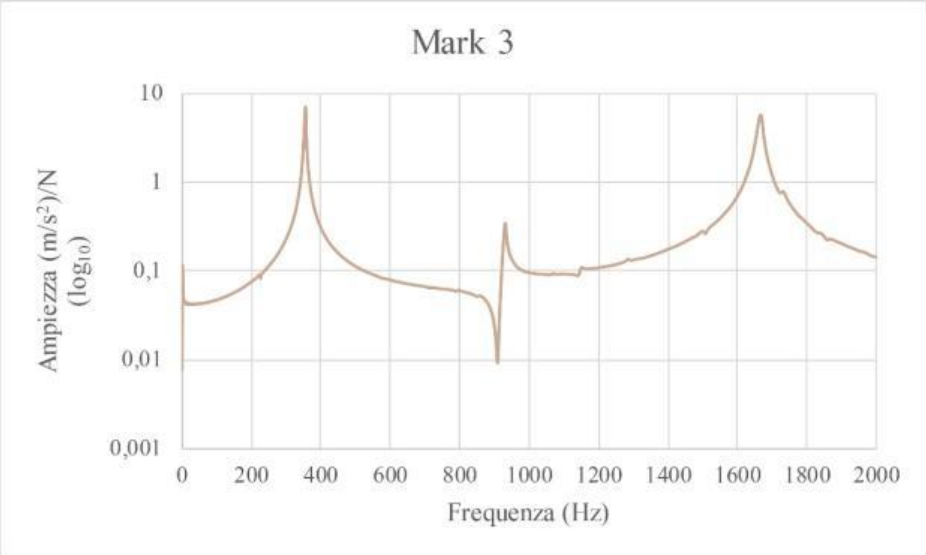


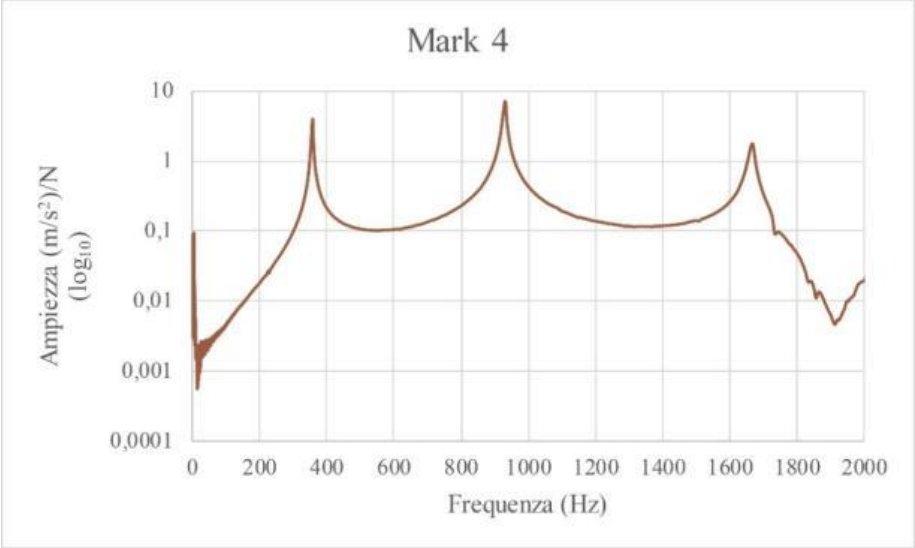
Figura 5.78 – Risarcitura intaglio con resina densa

Una volta riparato il danno, si è passati alla prova dinamica, individuando i valori di frequenza. Vengono mostrati in (Figura5.79) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.80) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.40). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.41). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.




Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)


Mark 3
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)

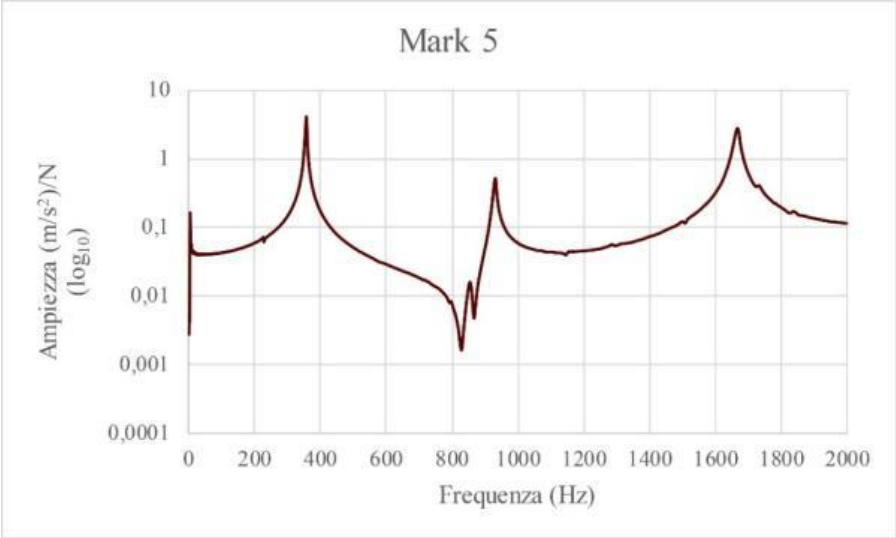


Figura 5.79 – Grafico delle FRF – trave B3_R3_D0

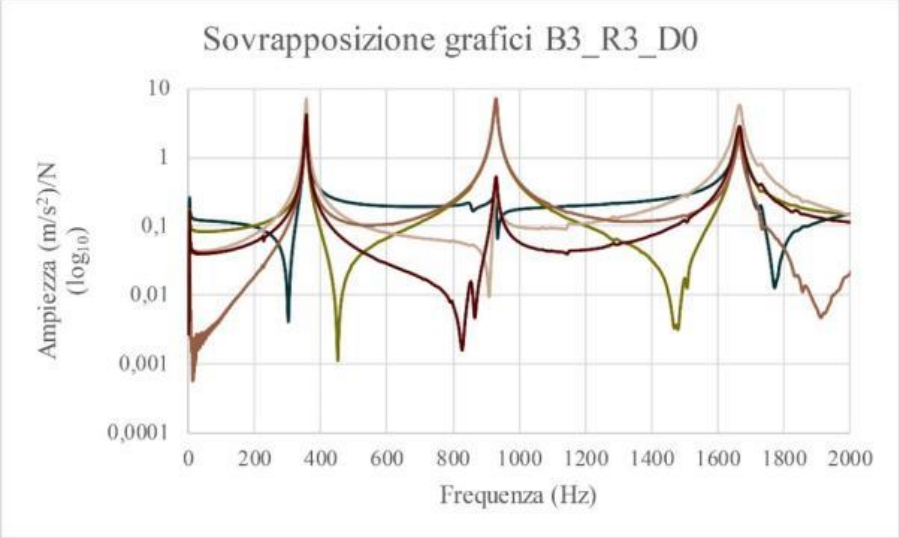


Figura 5.80 – Sovrapposizione grafici FRF dei 5 mark – trave B3_R3_D0

	Hz
modo 1	354,687
modo 2	932,812
modo 3	1671,094

Tabella 5.40 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 5 mark nella condizione B3_R3_D0

	Hz da B&K
modo 1	356,870
modo 2	927,740
modo 3	1664,820

Tabella 5.41 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Stato di danno B3_R2_D0

Una volta sottoposta la trave allo stato di danno D0* e riparata, R3_D0, si è provveduto ad applicare il rinforzo in GFRP. Nella trave B3 è stata applicata una striscia di rinforzo da 100 cm in intradosso ed una striscia di rinforzo da 30 cm in estradosso come schematizzato in (Figura 5.81). Successivamente sono stati applicati gli strain gauges, sulla striscia in GFRP in mezzeria sia in intradosso che in estradosso, gli estensometri in corrispondenza della mezzeria ma applicati lateralmente sul calcestruzzo ed infine viene predisposto il trasduttore di spostamento. La configurazione di rinforzo descritta viene indicata con "R2".

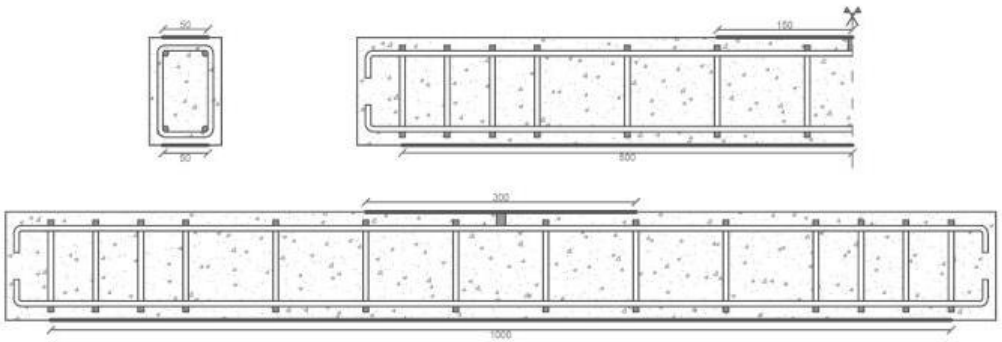
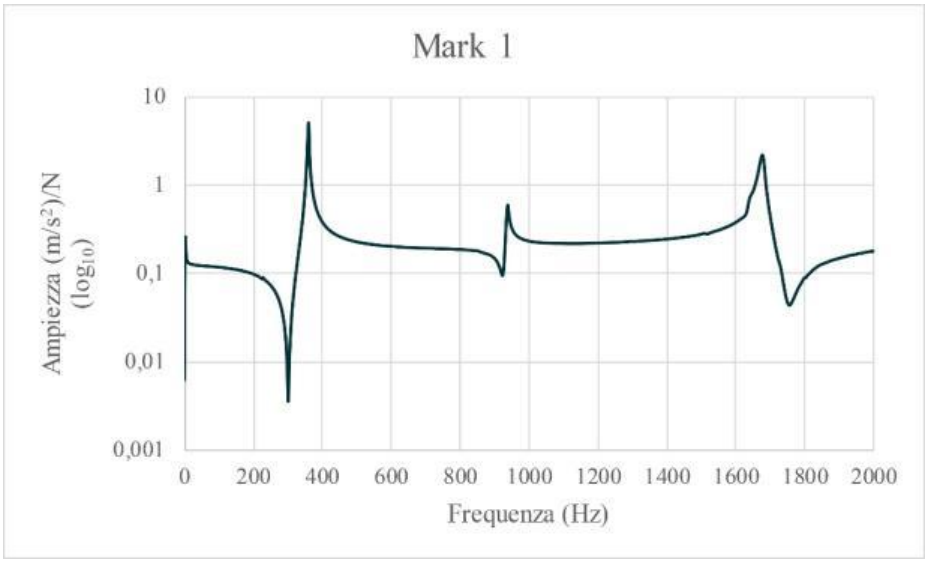
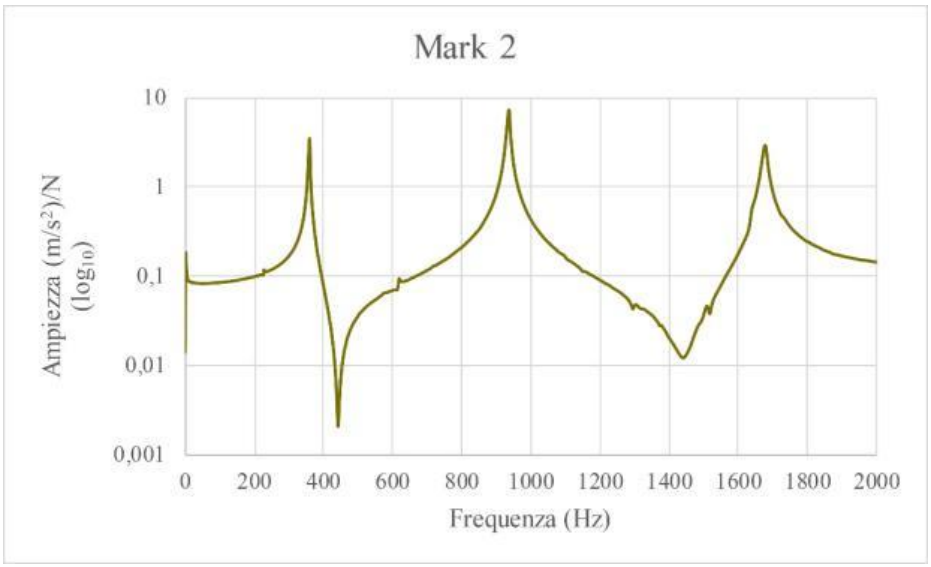


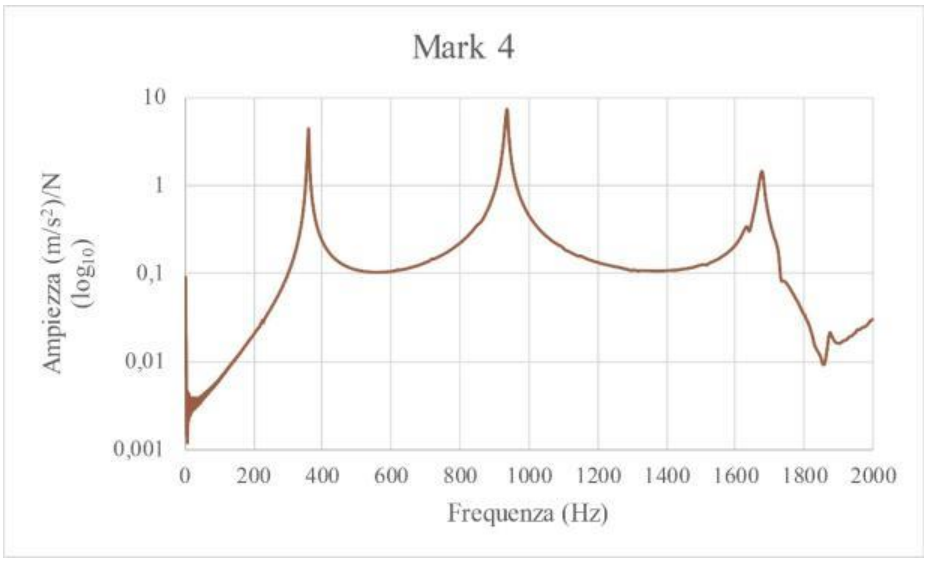
Figura 5.81 – Schema posizione applicazione strisce di GFRP – trave B3_R2_D0

Dopo aver applicato il rinforzo è stata ripetuta la prova dinamica. Di seguito sono riportati i grafici delle FRF (Figura 5.82), il grafico della sovrapposizione dei grafici delle FRF (Figura 5.83) in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.42). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.43). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.

È importante notare come i mark considerati non sono più 5 ma 4 in quanto nella posizione 3 del mark è stato impossibile posizionare l'accelerometro a causa della presenza dello strain gauge.


Mark 1
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)


Mark 2
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)


Mark 4
Ampiezza (m/s²)/N (log10)
10
1
0,1
0,01
0,001
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Frequenza (Hz)

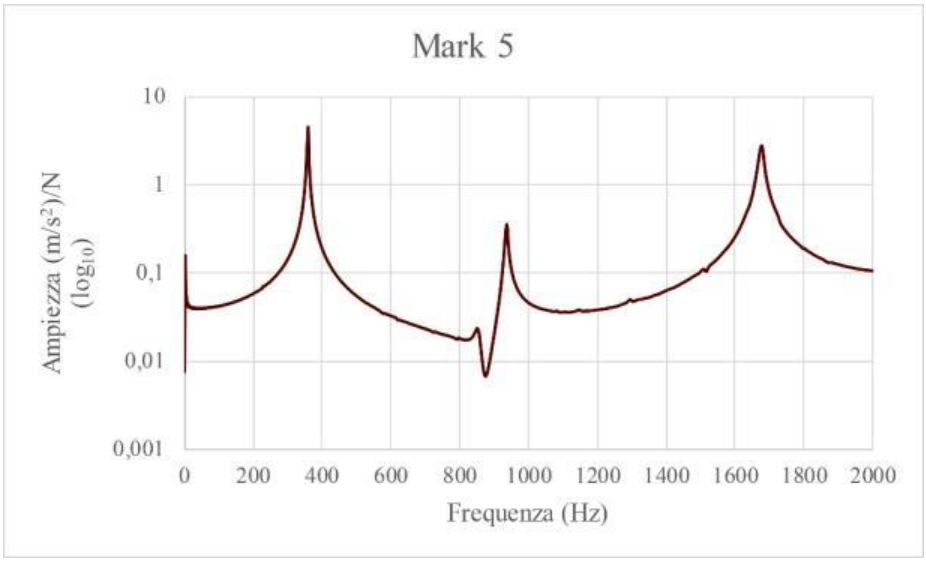


Figura 5.82 – Grafico delle FRF – trave B3_R2_D0

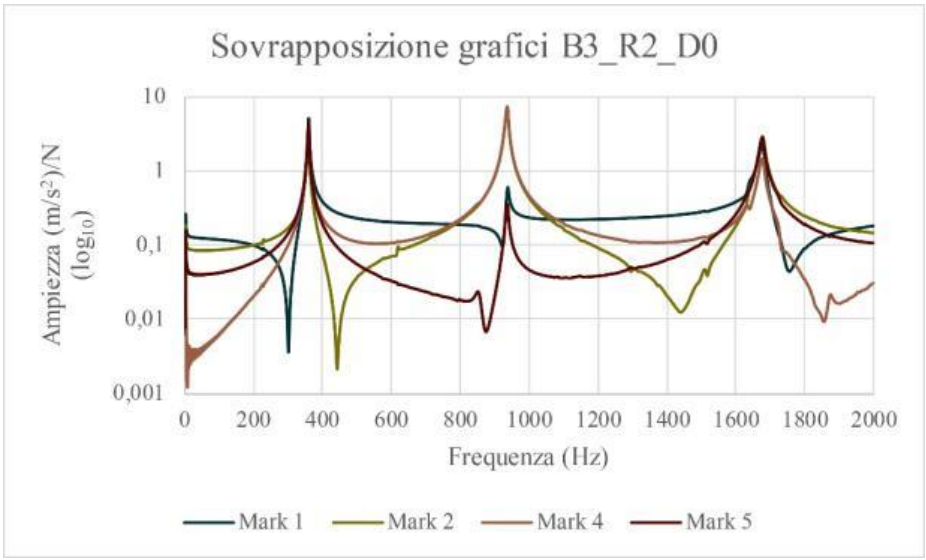


Figura 5.83 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B3_R2_D0

	Hz
modo 1	360,937
modo 2	939,062
modo 3	1681,250

Tabella 5.42 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B3_R2_D0

	Hz da B&K
modo 1	358,860
modo 2	935,300
modo 3	1675,220

Tabella 5.43 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 2, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.84)

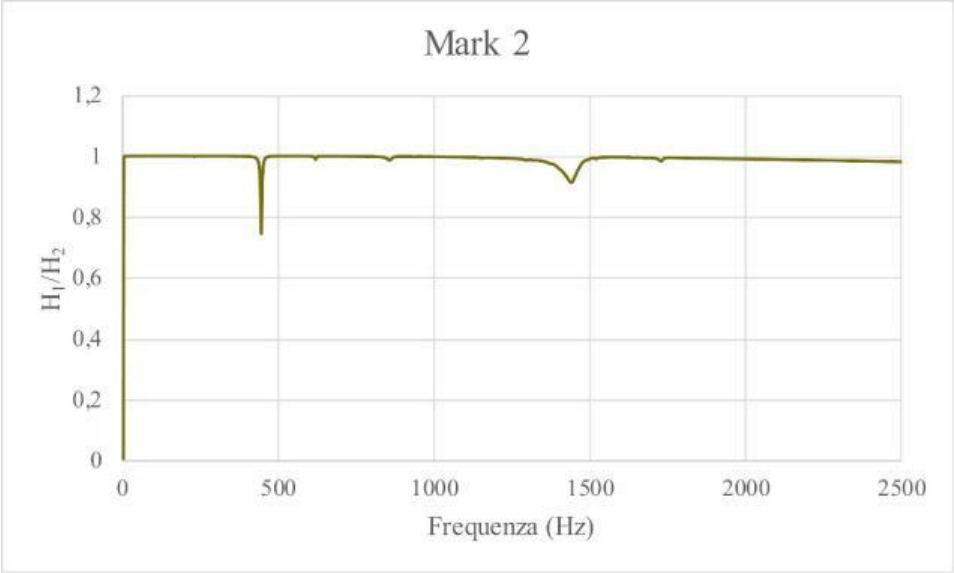


Figura 5.84 – Coerenza corrispondente al mark 2 – trave B3_R2_D0

Stato di danno B3_R2_D1

Dopo aver misurato le FRF della trave danneggiata e riparata, si è passati alla prova di tipo statico applicando il primo stato di danno che consiste nel caricare la trave con un carico di 3 kN (Figura 5.85).

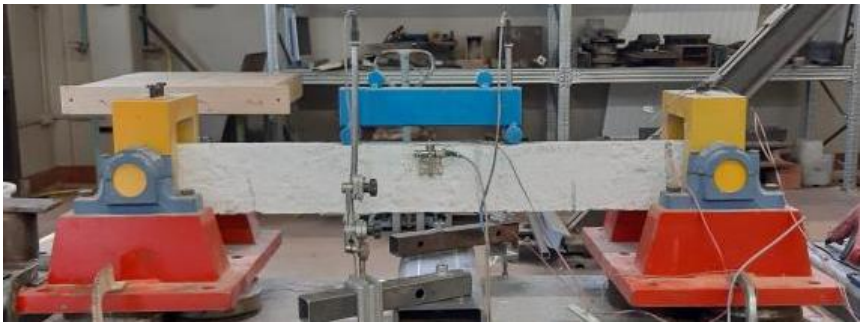
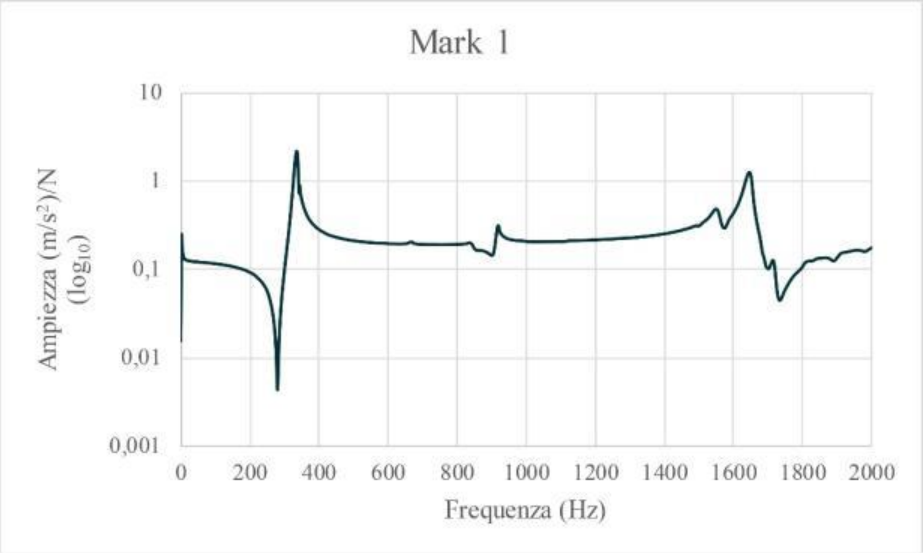


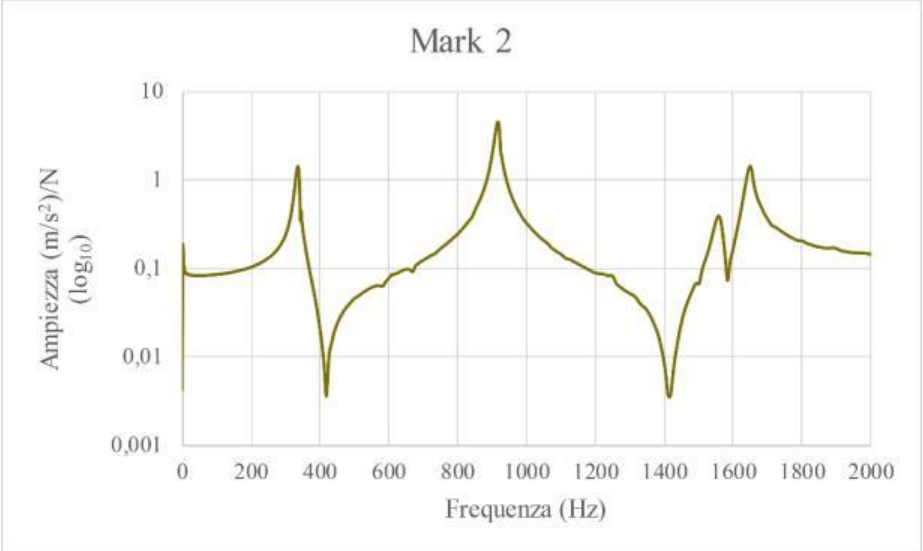
Figura 5.85 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica – trave B3_R2_D1

Con un carico di 3kN non si sono riscontrati danni visibili ad occhio nudo.

Alla prova dinamica invece, vengono mostrati i differenti valori della risposta in frequenza della trave. Vengono mostrati in (Figura5.86) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.87) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad

individuare i valori sperimentali (Tabella 5.44). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.45). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.





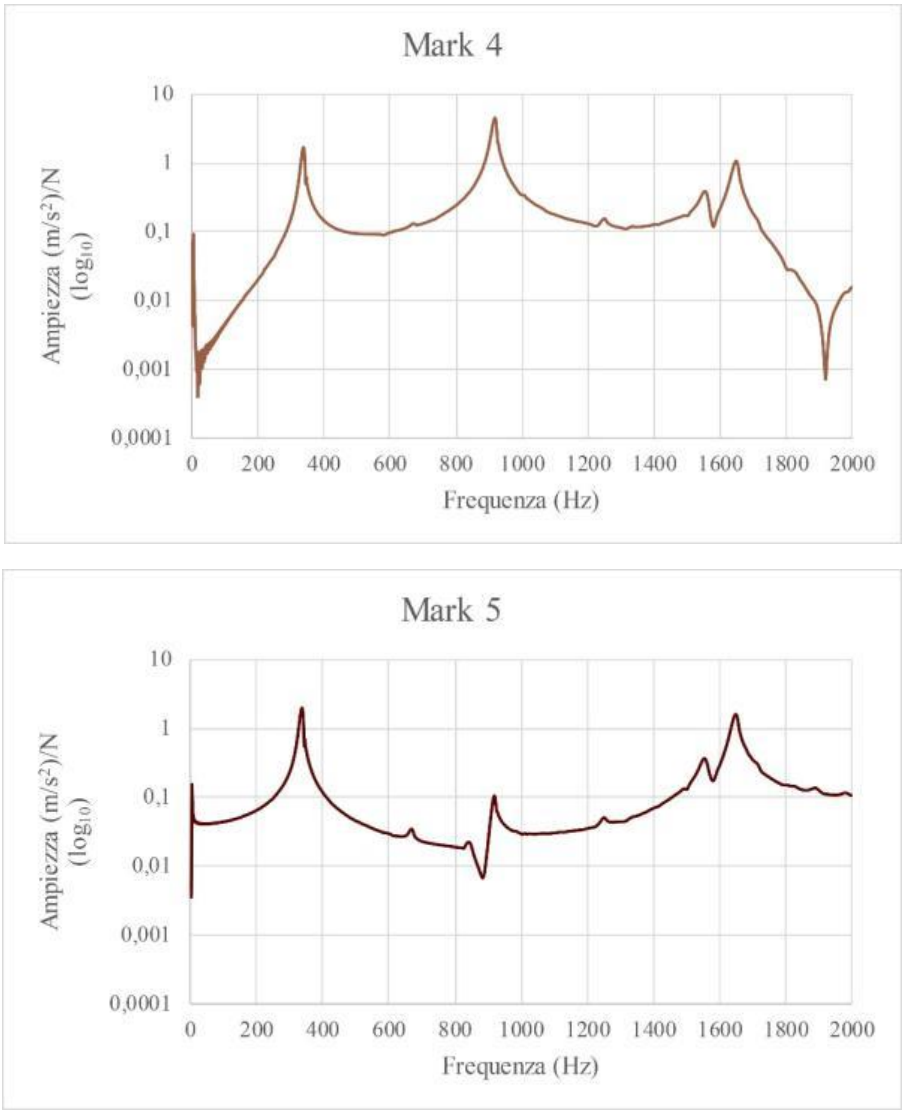


Figura 5.86 – Grafico delle FRF – trave B3_R2_D1

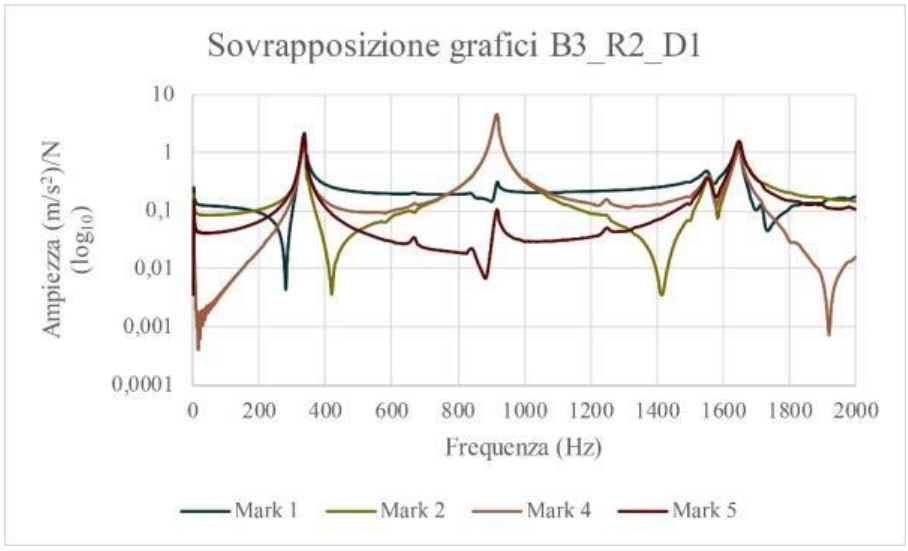


Figura 5.87 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B3_R2_D1

	Hz
modo 1	335,594
modo 2	920,312
modo 3	1654,687

Tabella 5.44 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B3_R2_D1

	Hz da B&K
modo 1	332,150
modo 2	914,370
modo 3	1644,960

Tabella 5.45 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Stato di danno B3_R2_D2

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 6 kN (Figura 5.88).

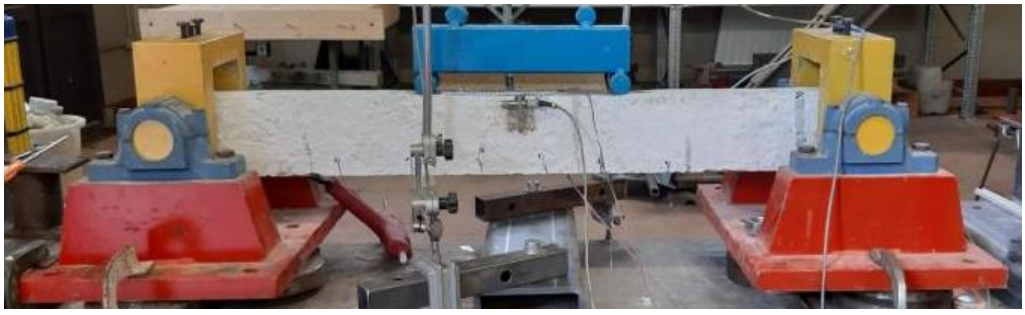


Figura 5.88 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica con danneggiamento – trave B3_R2_D2

Con il secondo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.89) vengono schematizzati i danni visibili.

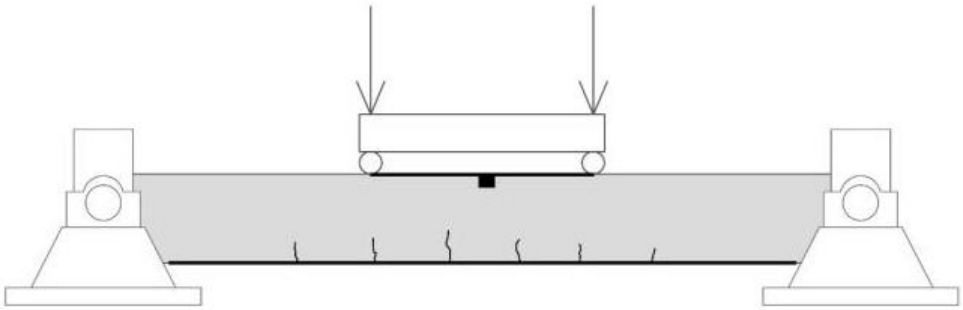
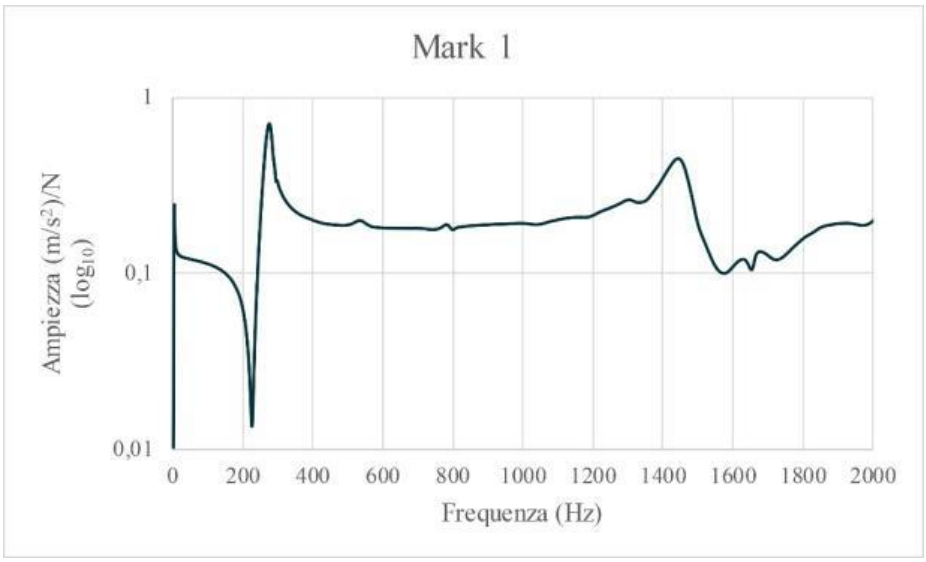
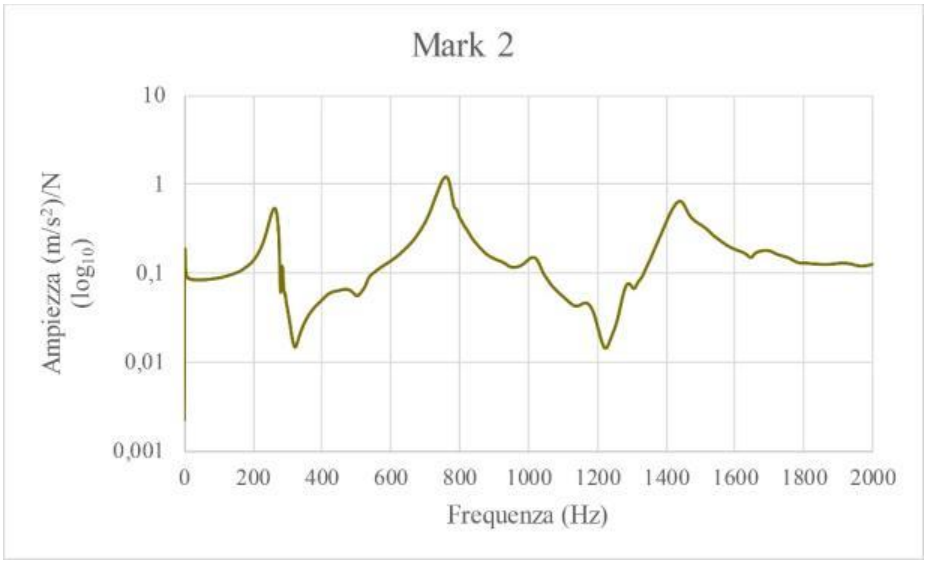


Figura 5.89 –Schematizzazione danni – trave B3_R2_D2

Vengono mostrati in (Figura 5.90) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.91) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (Tabella 5.46). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.47). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.





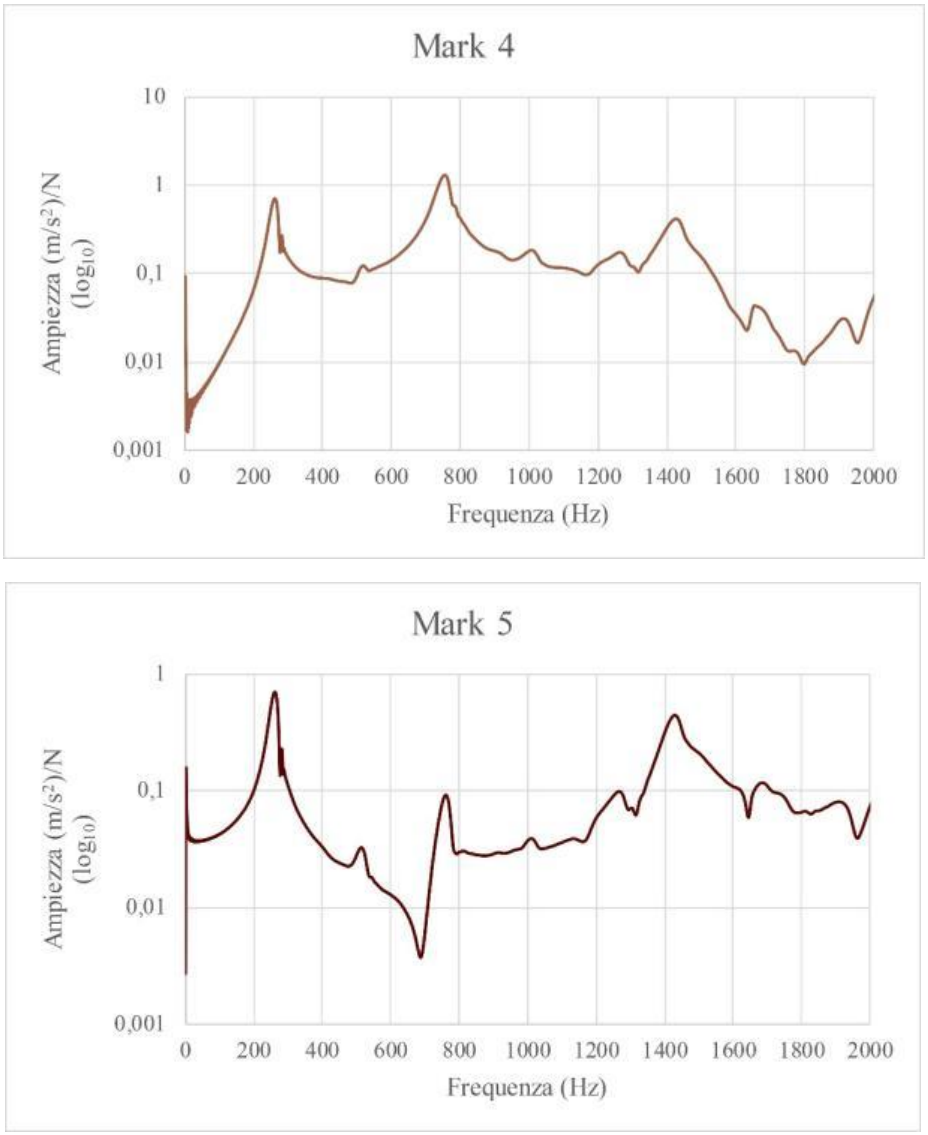


Figura 5.90 – Grafico delle FRF – trave B3_R2_D2

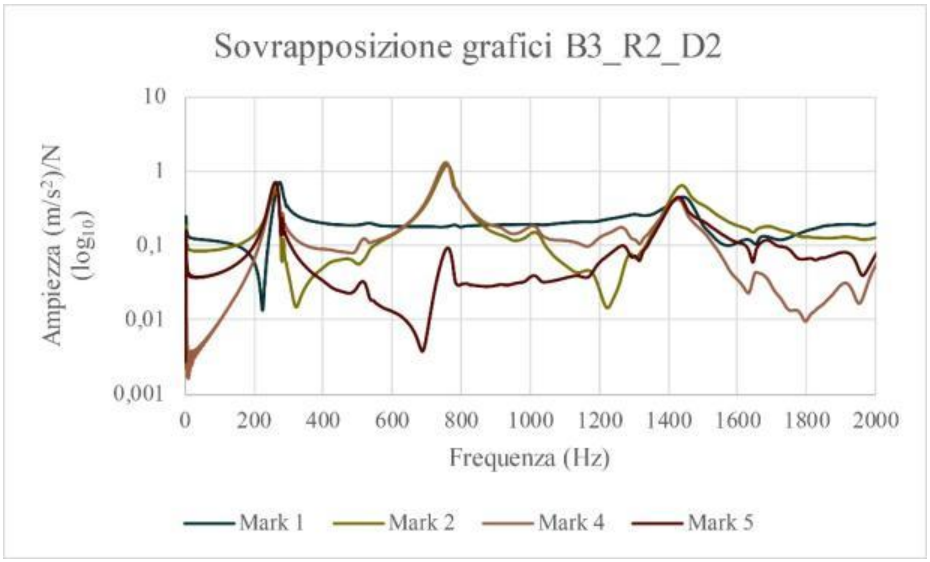


Figura 5.91 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B3_R2_D2

	Hz
modo 1	265,625
modo 2	766,406
modo 3	1427,344

Tabella 5.46 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B3_R2_D2

	Hz da B&K
modo 1	269,940
modo 2	751,640
modo 3	1426,900

Tabella 5.47 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Stato di danno B3_R3_D3

Lo stato di danno D2 si riferisce ad un carico applicato nella prova statica di 9 kN (Figura 5.92).



Figura 5.92 – Predisposizione strumenti e provino per la prova statica con danneggiamento (in rosso danni relativi a carico 9 kN e in nero danni relativi a 6kN) – trave B3_R2_D3

Con il terzo grado di danneggiamento è evidente come il danno provocato è visibile ad occhio nudo. In particolare, in (Figura 5.93) vengono schematizzati i danni visibili.

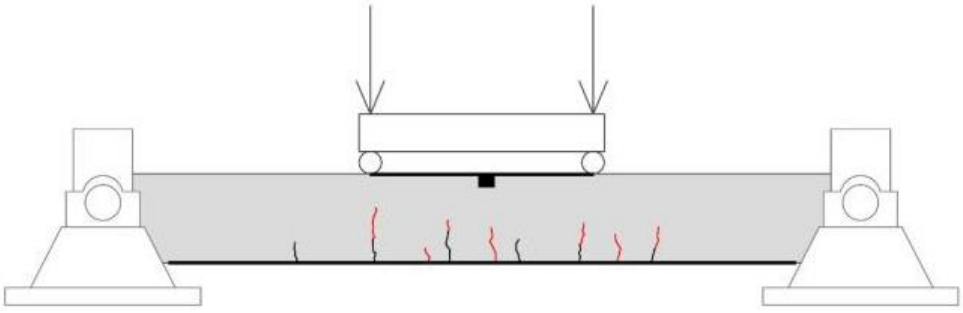
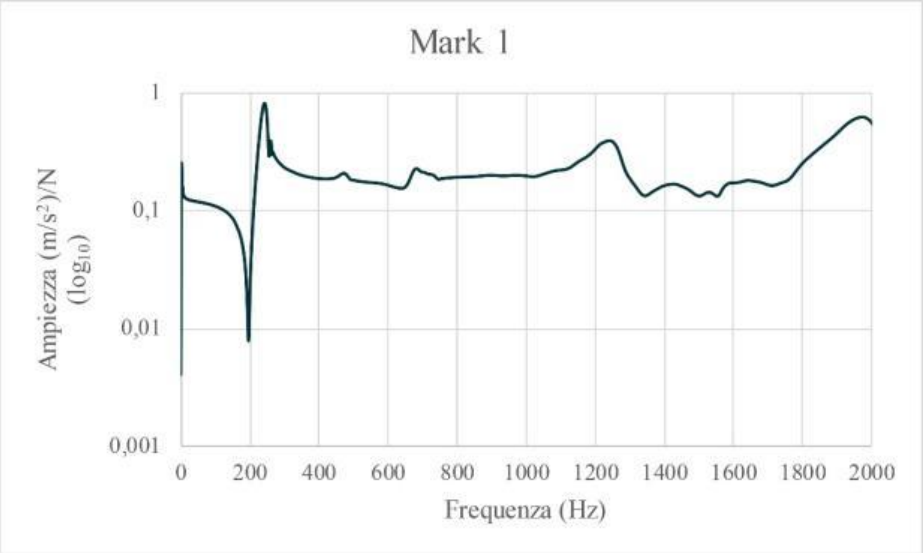
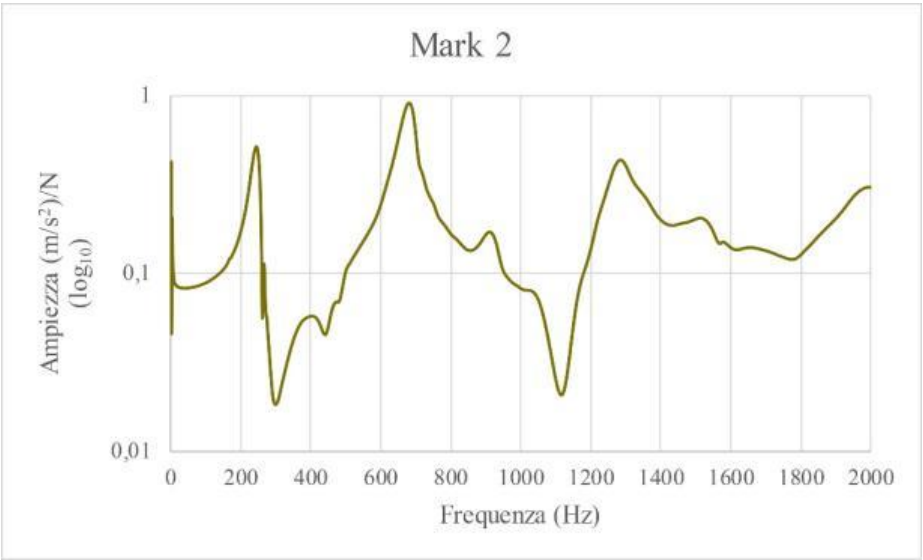
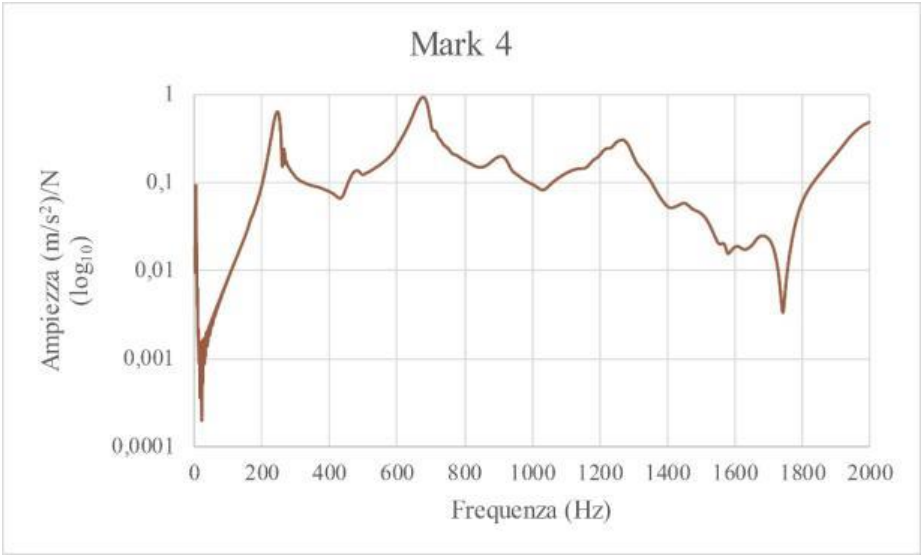


Figura 5.93 –Schematizzazione danni – trave B3_R2_D3

Vengono mostrati in (Figura5.94) i grafici delle FRF relative ai singoli mark e in (Figura 5.95) il grafico dato dalla sovrapposizione dei grafici delle FRF in modo da riuscire ad individuare i valori sperimentali (tabella 5.48). Inoltre, il software ci fornisce una stima dei valori ricavati direttamente dalla misura (Tabella 5.49). Questi dati forniscono un'ulteriore comparazione rispetto ai dati ricavati dalla sovrapposizione dei grafici dei singoli mark e dai dati ricavati teoricamente.







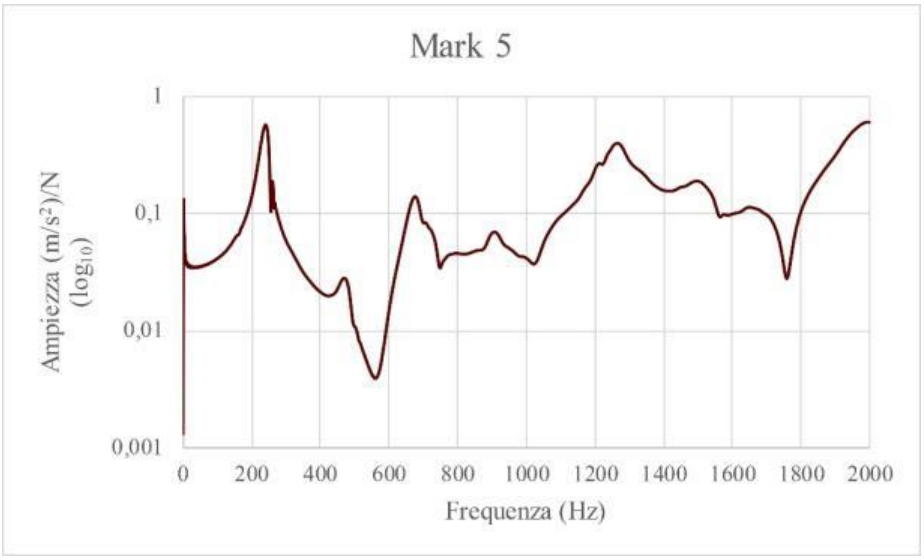


Figura 5.94– Grafico delle FRF – trave B3_R2_D3

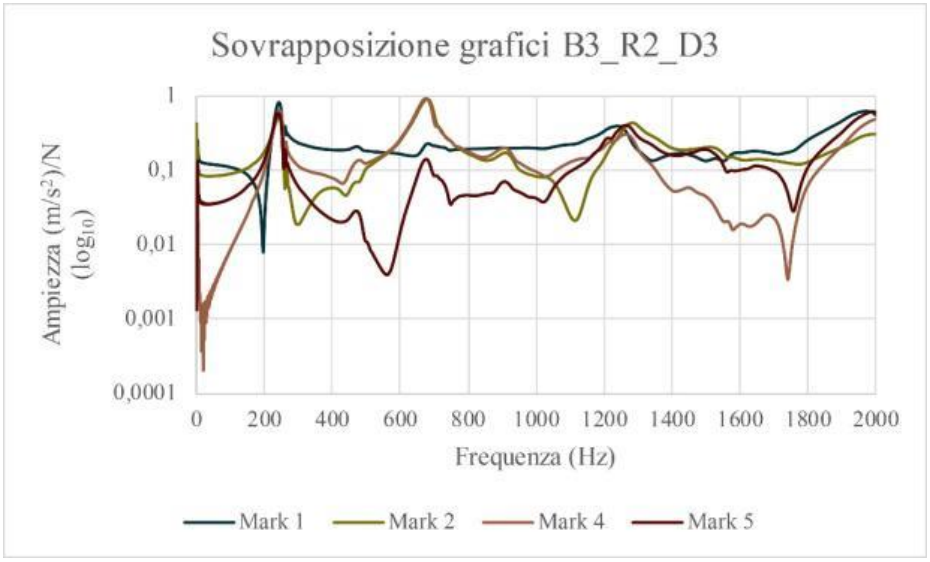


Figura 5.95 – Sovrapposizione grafici FRF dei 4 mark – trave B3_R2_D3

	Hz
modo 1	243,750
modo 2	688,281
modo 3	1285,156

Tabella 5.48 – Valori della frequenza ricavati graficamente dalla sovrapposizione delle FRF dei 4 mark nella condizione B3_R2_D3

	Hz da B&K
modo 1	234,550
modo 2	672,030
modo 3	1268,460

Tabella 5.49 – Valori della frequenza ricavati dal software Brüel & Kjær

Di seguito viene mostrato il diagramma della coerenza riferito al Mark 2, in cui è possibile notare che il modulo del complesso insieme alla coerenza sono congruenti tra loro e quindi la definizione dei punti ricavati di frequenza è attendibile. (Figura 5.96)

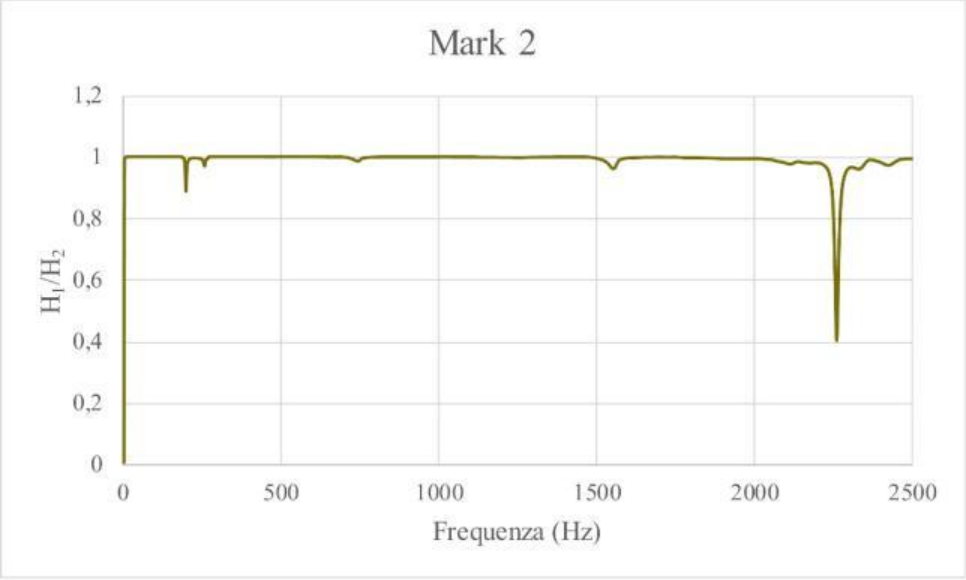


Figura 5.96 – Coerenza corrispondente al mark 2 – trave B3_R2_D3

Condizione di rottura B3

Per completare la prova, il provino viene portato a rottura. Durante la prova a rottura vengono misurati le deformazioni attraverso la strumentazione prima descritta.

In particolare, ulteriori danni si ripresentano a partire da un carico di 15 kN ed tendono ad aumentare ma non in maniera veloce. Nello schema seguente (Figura 5.97) si mostrano i danni che si sono evidenziati per i carichi superiori a 9 kN (in azzurro).

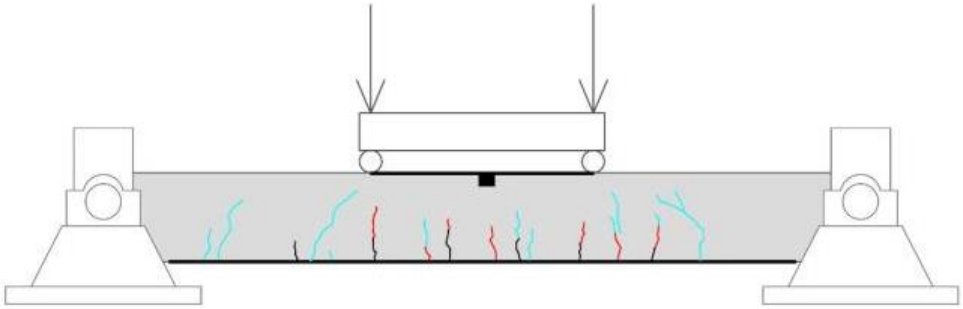


Figura 5.97 – Schematizzazione danni – trave B3

A circa 21 kN è avvenuto il delamination buckling (Figura 5.98.), mentre la rottura è avvenuta per un carico di collasso di circa 23 kN (Figura 5.99).

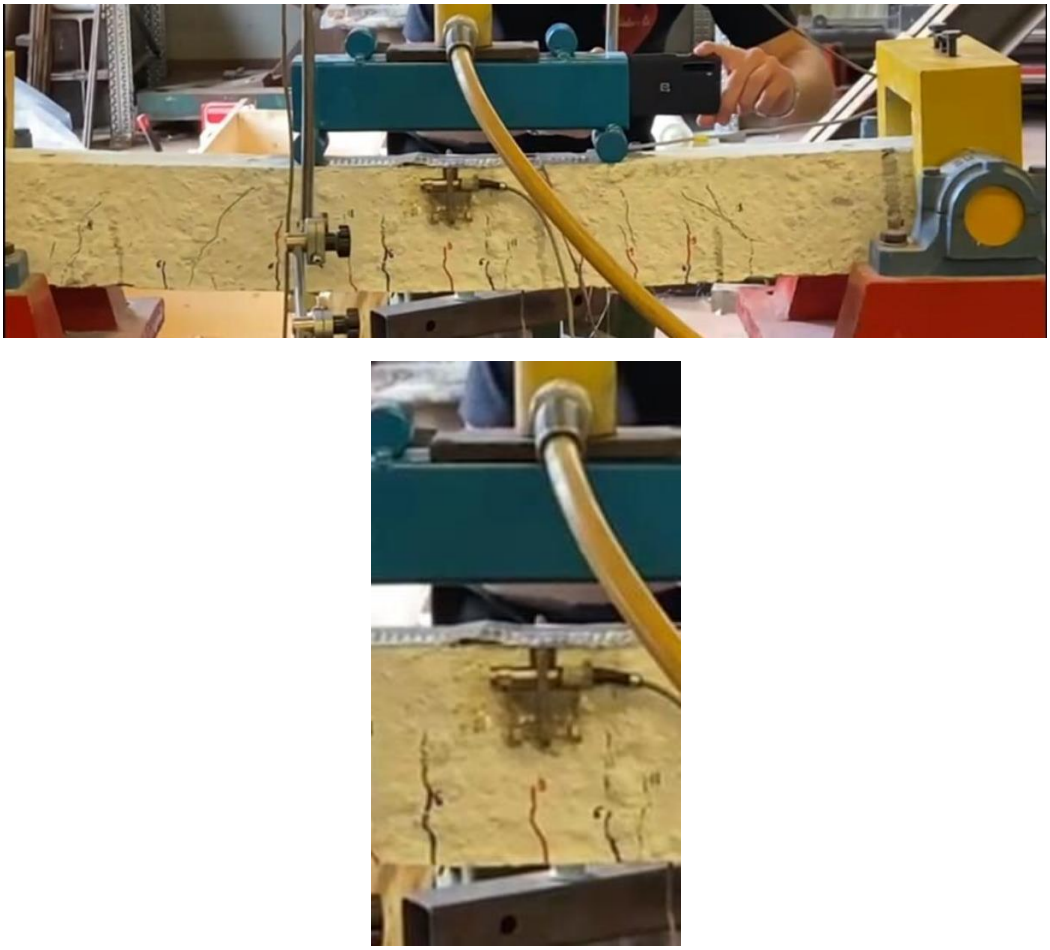


Figura 5.98 – Delamination buckling – trave B3



Figura 5.99 – Rottura provino – trave B3

Risultati statici trave B3 rinforzata

Dalle misurazioni effettuate sulla trave rinforzata sono stati ricavati i seguenti valori e diagrammi che caratterizzano il comportamento del campione prima di applicare il rinforzo.

Nella tabella vengono riportati i valori acquisiti da ogni strumentazione utilizzata per ogni step di carico.

Nella presente prova, sono stati predisposti due trasduttori di spostamento verticale in maniera simmetrica, infatti i valori sono molto simili tra loro e il valore indicato in tabella è unico e valutato in base ai risultati. Anche gli estensometri per il controllo della deformazione del calcestruzzo compresso sono stati messi in maniera simmetrica portando così un risultato molto simile tra i due e quindi ne è stato preso un valore unico.

	Carico	Spostamento 1	Spostamento 2	Deformazione GFRP a compressione (strain gauges)	Deformazione GFRP a trazione (strain gauges)
Damage Steps	[kN]	[mm]	[mm]	[um/m]	[um/m]
B3_R2_D0	–	–	–	–	–
B3_R2_D1	3	0,19687	0,05312	222,72	86,4
B3_R2_D2	6	0,55	0,25	632,88	974,64
B3_R2_D3	9	1,63125	1,33438	1063,68	2052,48

	Carico	Deformazione cls a compressione (estensometro)	Deformazione cls a compressione (estensometro)
Damage Steps	[kN]	[um/m]	[um/m]
B3_R2_D0	–	–	–
B3_R2_D1	3	131,111	116,399
B3_R2_D2	6	445,455	315,718
B3_R2_D3	9	377,172	394,161

Tabella 5.50 – Valori spostamenti e deformazioni ricavati da prove statiche

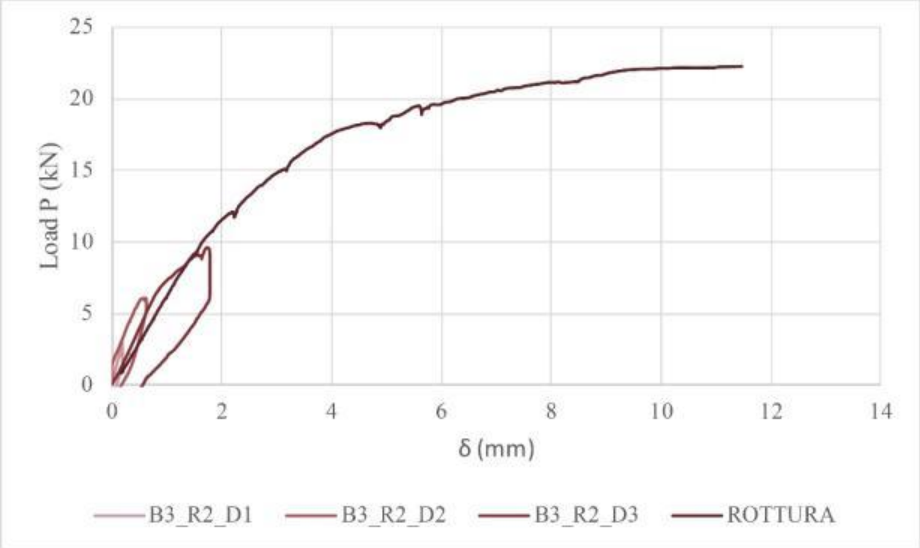


Figura 5.100 – Diagramma Forza-Freccia – trave B3 rinforzata

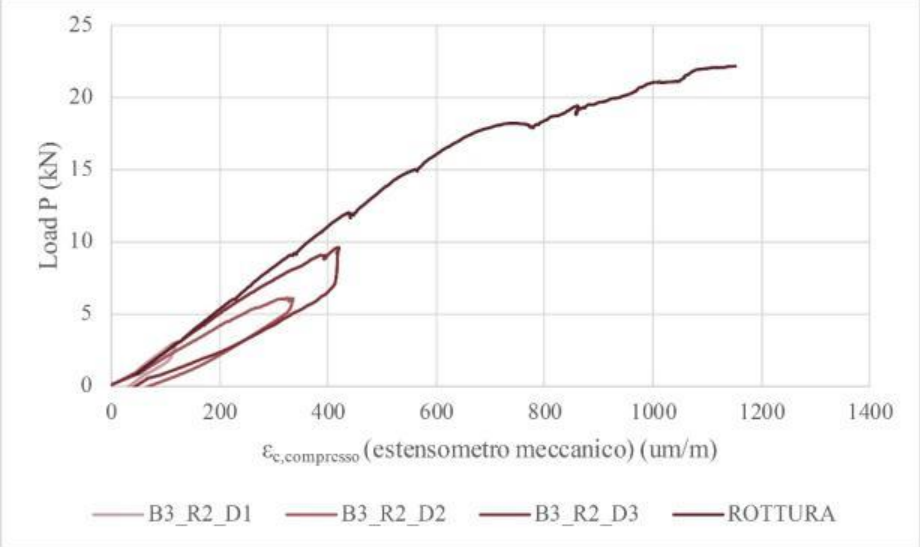


Figura 5.101 – Diagramma Forza-Deformazione calcestruzzo compresso – trave B3 rinforzata

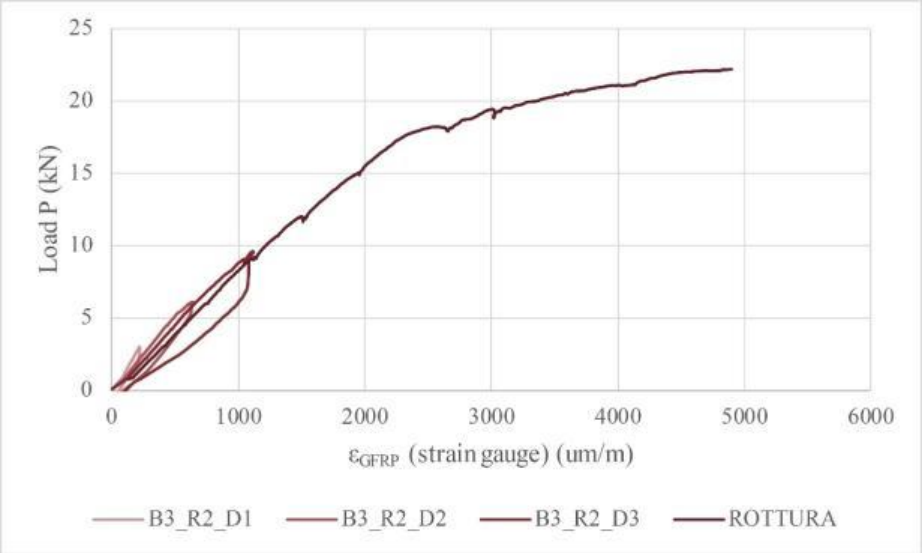


Figura 5.102 – Diagramma Forza-Deformazione striscia di GFRP – trave B3 rinforzata

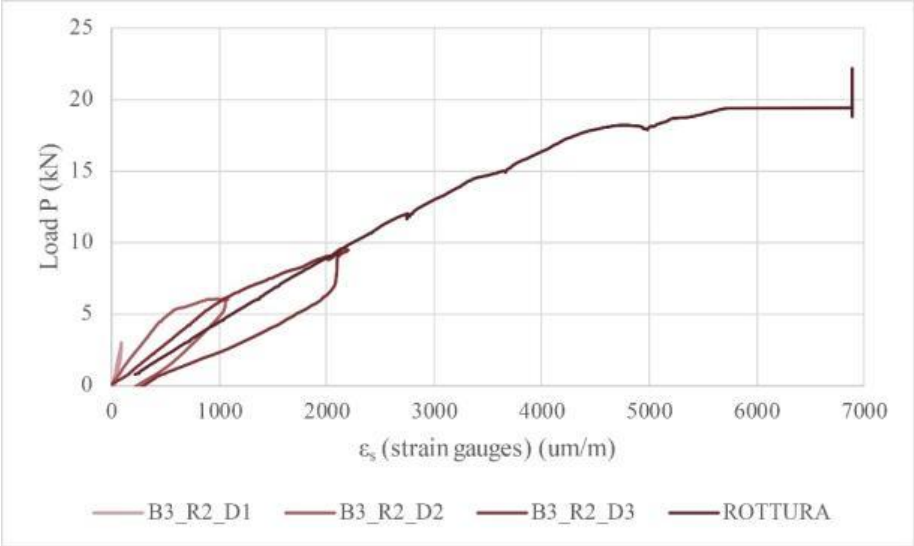


Figura 5.103 – Diagramma Forza-Deformazione acciaio – trave B3 rinforzata

Risultati dinamici trave B3

Dalle prove dinamiche, vengono riassunti nelle tabelle seguenti i risultati forniti in relazione alle FRF.

La tabella 5.51 contiene i dati delle frequenze sperimentali registrate per trave integra (B3_D0), trave danneggiata con la rimozione di 1 cm di copriferro in mezzeria (B3_D0*), trave in cui il danno è stato riparato con resina densa (B3_R3_D0) e per trave rinforzata (B3_R2_D0, B3_R2_D1, B3_R2_D2, B3_R2_D2, B3_R2_D3) e sono visibili i confronti percentuali tra la frequenza sperimentale per ogni grado di danneggiamento e la trave integra.

	f1	$\Delta f1/f_{D0}$	f2	$\Delta f2/f_{D0}$	f3	$\Delta f3/f_{D0}$
Damage Degree	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]
B3_D0	360,156	–	933,594	–	1692,969	–
B3_D0*	347,656	3,470718	933,594	0	1655,469	2,215044
B3_R3_D0	354,687	1,518509	932,812	0,083762	1671,094	1,292109
B3_R2_D0	360,937	-0,21685	939,062	-0,58569	1681,25	0,692216
B3_R2_D1	335,594	6,819823	920,312	1,422674	1654,687	2,261235
B3_R2_D2	265,625	26,24724	766,406	17,908	1427,344	15,68989
B3_R2_D3	243,75	32,32099	688,281	26,2762	1285,156	24,08863

Tabella 5.51 – Valori FRF ricavati da prove dinamiche

Ulteriori valutazioni

Dai valori registrati durante la prova statica, si estrapolano i valori di deformazione registrati durante i cicli di carico, in funzione dell'altezza della sezione, per ogni ciclo di carico.

Seguono i diagrammi deformativi per la sezione di mezzeria per ciascun livello di carico della trave B1 (Figura 5.104), della trave B2 (Figura 5.105) e della trave B3 (Figura 5.106).

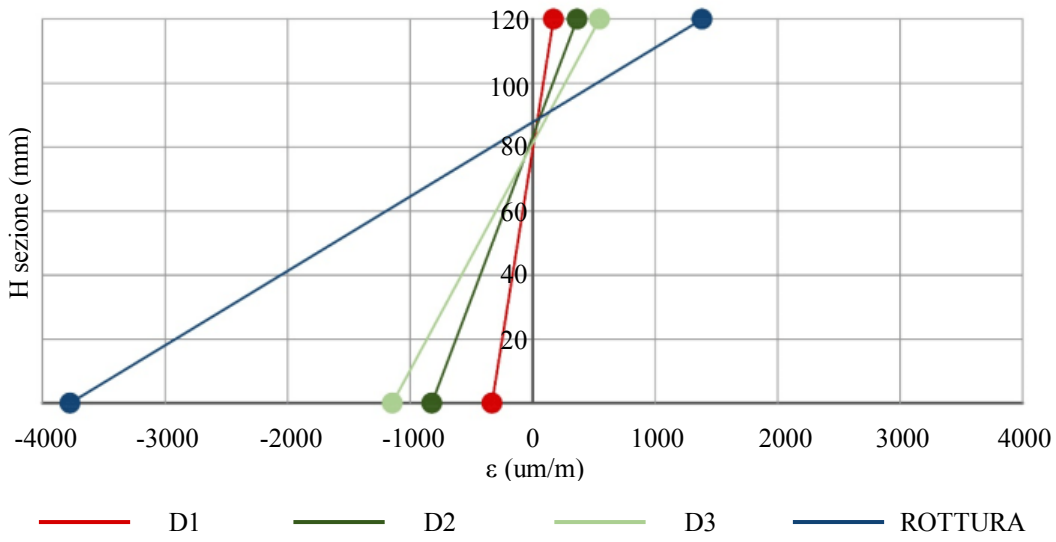


Figura 5.104 – Diagramma deformativo per la sezione di mezzeria per ciascun livello di carico della trave B1

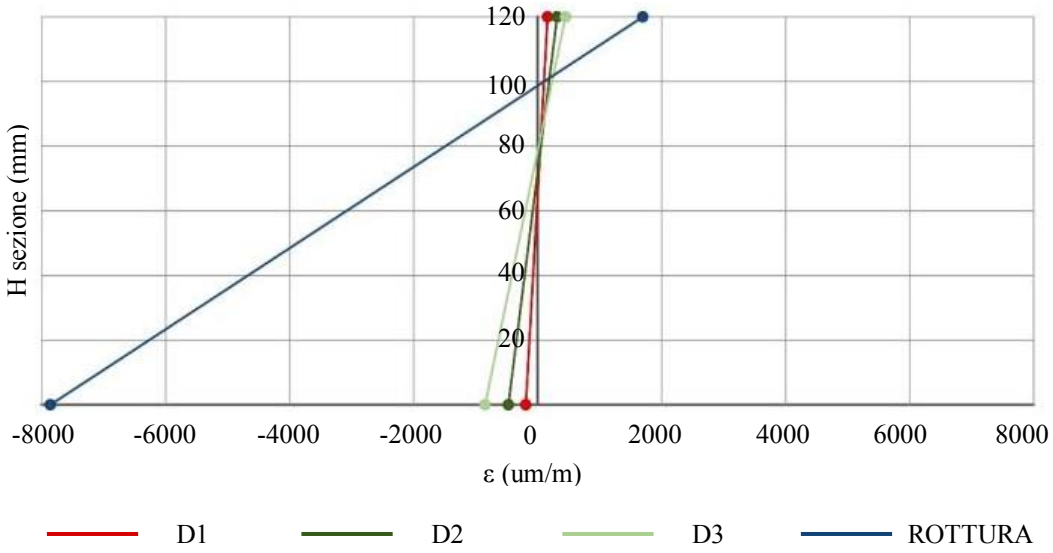


Figura 5.105 – Diagramma deformativo per la sezione di mezzeria per ciascun livello di carico della trave B

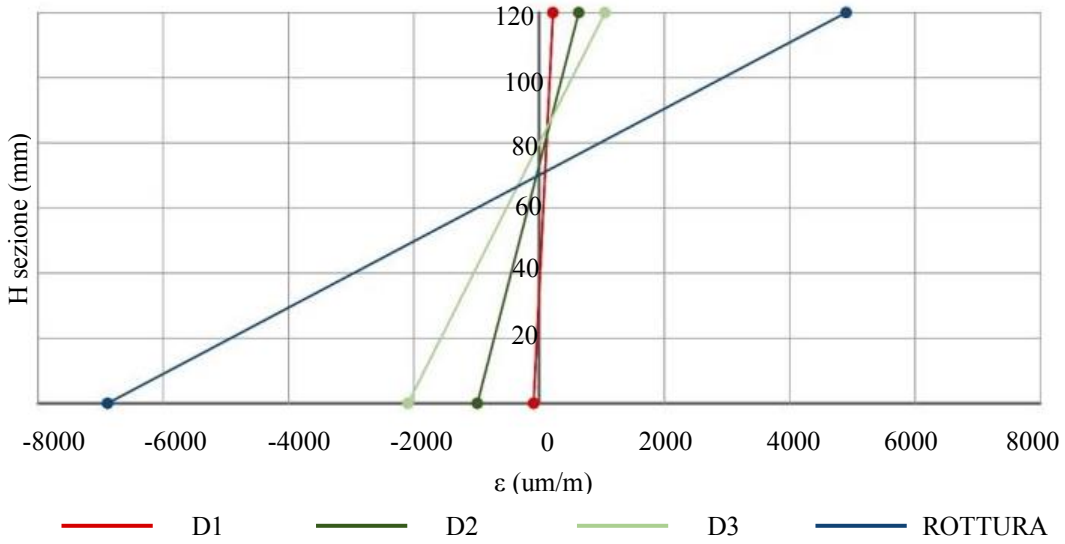


Figura 5.106 – Diagramma deformativo per la sezione di mezzeria per ciascun livello di carico della trave B3

6. CONCLUSIONI

Questo lavoro di tesi presenta una ricerca sperimentale sulla risposta vibrazionale di 3 travi in cemento armato in scala, danneggiate e rinforzate con strisce di GFRP. I dati sperimentali sono stati ottenuti tramite prove statiche e dinamiche ponendo l'attenzione sulle differenze di comportamento della trave con e senza rinforzo in riferimento a vari livelli di danno.

Le tre travi presentano due tipi di danneggiamento diversi: per la prima e la seconda trave, B1 e B2, dovuto a cicli di carico e per la terza trave, B3, un danneggiamento indotto dalla rimozione di 1 cm in larghezza di copriferro in mezzeria all'estradosso estradosso.

I risultati sono stati ottenuti conducendo prove dinamiche, che mettono in relazione il comportamento dei provini attraverso le funzioni di risposta in frequenza (FRFs) e prove statiche con diversi livelli di carico, rispettivamente di valore crescente. Per ogni step di carico, sono state misurate le FRF in modo tale da poter effettuare un confronto.

In definitiva si possono trarre le seguenti conclusioni dai risultati sperimentali ottenuti:

- I campioni B1 e B2, non presentano fenomeni di delaminazione registrati in trazione se non dopo il collasso. La rottura è sempre avvenuta per schiacciamento del calcestruzzo pur essendo in presenza anche di striscia di GFRP applicata all'estradosso.
- Per il terzo provino, B3, la delaminazione avviene con distacco della striscia di GFRP in zona compressa che è un fenomeno di instabilità detto anche delamination buckling. Esso è in parte dovuto al danno artificiale e in parte dovuto al fatto che la fibra stessa è andata in compressione perdendo l'adesione con il provino sottostante. Tale fenomeno è avvenuto prima, in termini di carico, dello schiacciamento del calcestruzzo.
- L'utilizzo di fibre di GFRP, che non è un materiale di particolare resistenza, come lo sono le fibre in carbonio nel CFRP, forniscono un buon rinforzo in termini di adesione in zona tesa ma anche in zona compressa. Possono verificarsi particolari situazioni, come la non perfetta regolarità della superficie o situazioni come il caso del danneggiamento effettuato in zona compressa sulla trave B3 e in questi casi si può innescare un fenomeno di distacco, cioè di perdita di adesione con formazione di ingobbamento della superficie di GFRP che è una situazione caratteristica del delamination buckling. La conclusione che si può trarre rispetto a queste osservazioni è che l'utilizzo di GFRP in caso di una situazione ciclica di carico-scarico, e quindi di

inversione di carico, tale rinforzo potrebbe arrivare alla perdita dell'efficacia per delaminazione.

Di seguito viene mostrato il confronto del diagramma Forza-Spostamento delle travi B1 e B2 in situazioni rinforzate e non rinforzate per ogni ciclo di carico. In questo confronto non viene tenuta in considerazione la trave B3 perché il danno effettuato su di essa è diverso rispetto alle travi B1 e B2 perciò le condizioni non sono tra loro paragonabili.

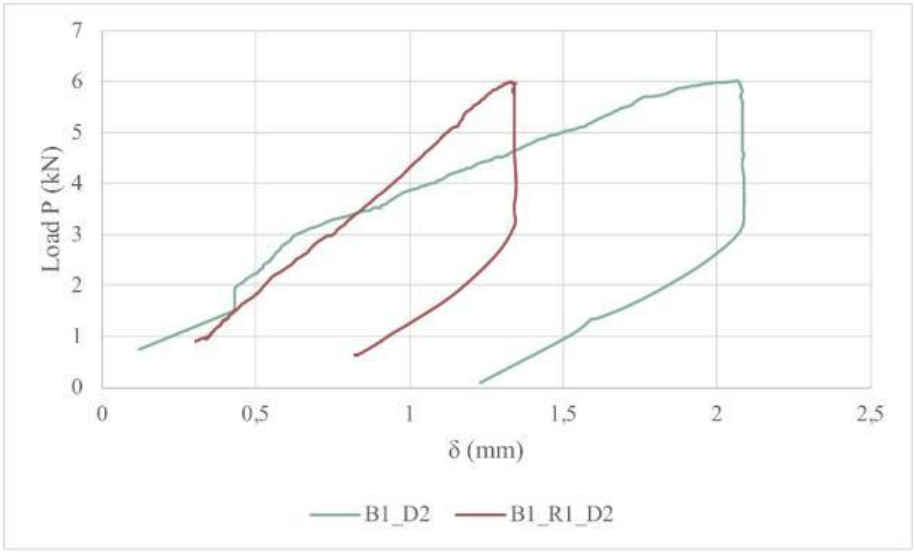


Diagramma Forza-Spostamento – Trave B1_D2 in situazione rinforzata e non rinforzata

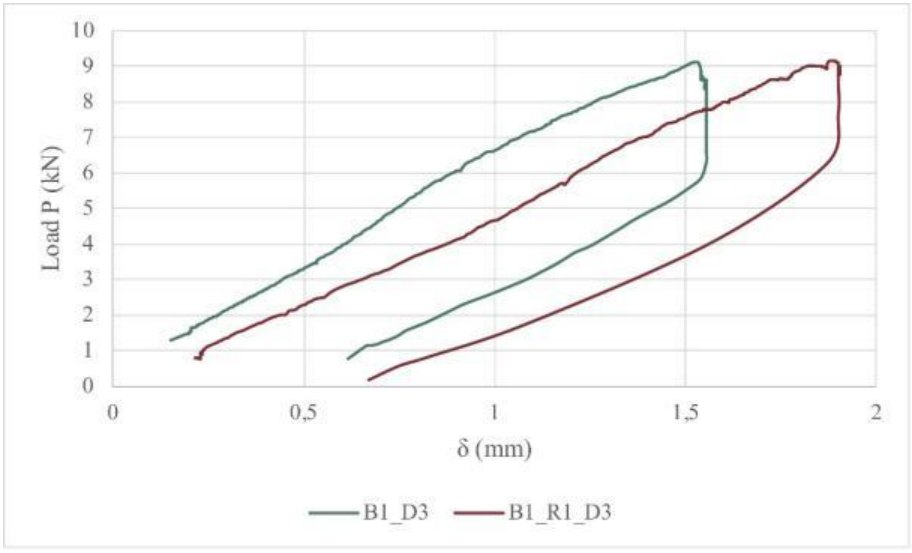


Diagramma Forza-Spostamento – Trave B1_D3 in situazione rinforzata e non rinforzata

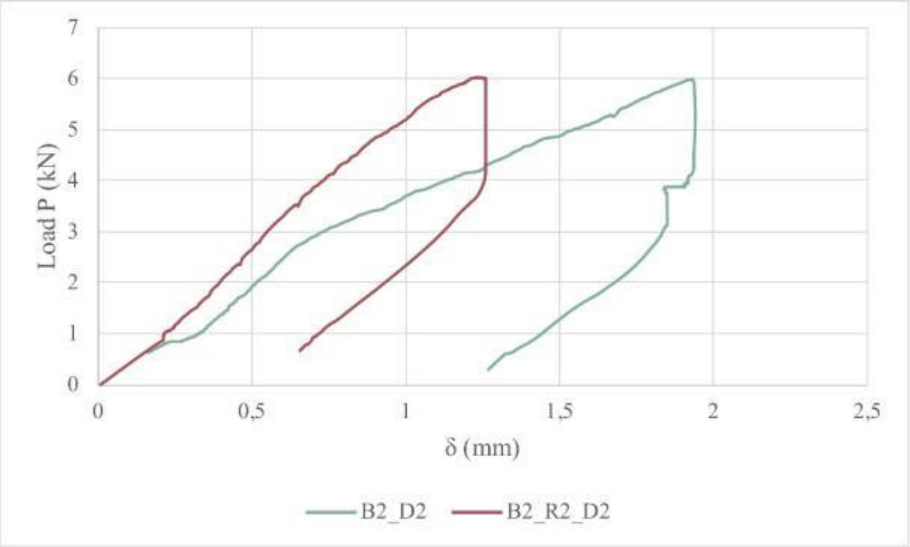


Diagramma Forza-Spostamento – Trave B2_D2 in situazione rinforzata e non rinforzata

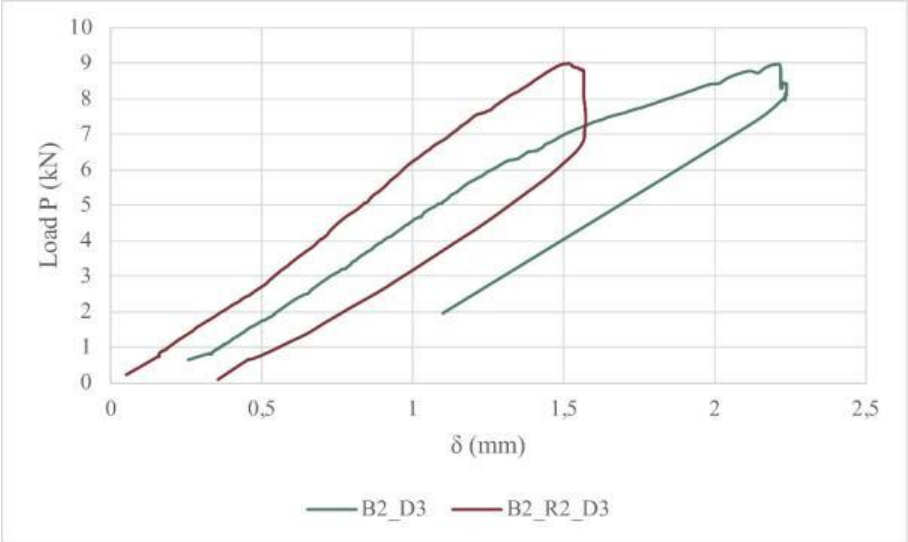


Diagramma Forza-Spostamento – Trave B2_D3 in situazione rinforzata e non rinforzata

Da questi diagrammi è visibile come le travi rinforzate hanno, in genere, una rigidezza maggiore.

Di seguito viene fatta una valutazione rispetto al diagramma Forza-Spostamento nella fase di rottura:

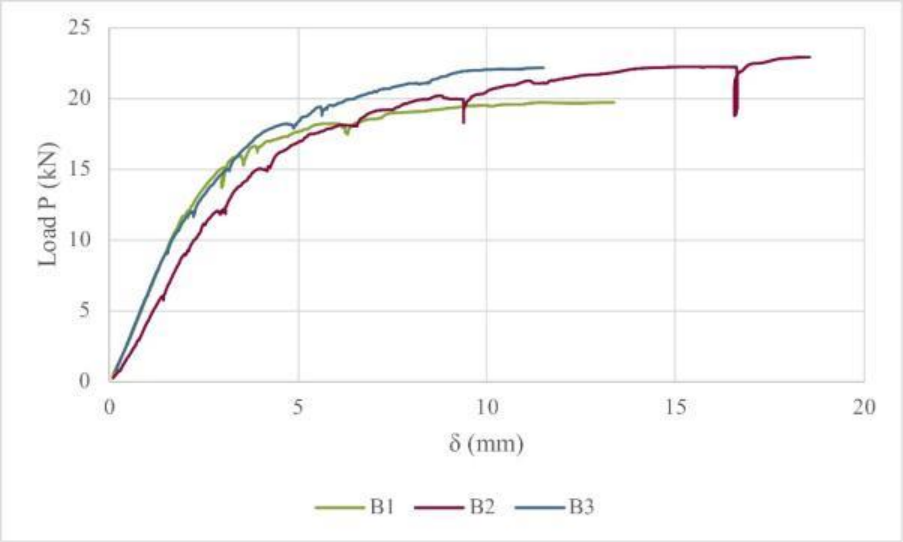


Diagramma Forza-Spostamento – Confronto tra B1, B2 e B3 rinforzati

È possibile notare come le travi B1 e B3 sono quelle che hanno più rigidezza rispetto alla trave B2. Inoltre, è possibile notare come la terza trave, a cui è stato effettuato un danno artificiale è la trave che ha maggiore rigidezza ma arriva a rottura con un valore dello spostamento minore rispetto alla trave B1 e B2. La trave B2 è la trave meno rigida ma presenta un valore maggiore di spostamento prima di arrivare a rottura.

BIBLIOGRAFIA

- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V.; Khatir, S., *RC beams damaged by cracking and strengthened with NSM CFRP/GFRP rods*, Frattura e integrità strutturale, 2021.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Analysis of static response of RC beams with NSM CFRP/GFRP rods*, Frattura e integrità strutturale, 2021.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Assessment of RC beam strengthened with NSM C-GFRP rods by experimental tests*, Proc. ICCS24-24th International conference on Composite Structures 14-18 Jun 2021, 2021.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Analysis of Damaged RC beams strengthened with NSM FRP,* Proc. 23rd International Conference on Composite Structures (ICCS23) & 6th International Conference on Mechanics of Composites (MECHCOMP 6), 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E., *Assessment of RC elements strengthened with NSM FRP rods by experimental tests,* Proc. 10th International Conference on Advanced Models and New Concepts in Concrete and Masonry Structures, EDP Sciences, 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Experimental static and dynamic response of RC beams damaged and strengthened with NSM GFRP rod,* Composite Structures, 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Delamination Buckling of FRP: Experimental Tests and Theoretical Model,* Proceedings of the 13th International Conference on Damage Assessment of Structures, Singapore, Springer, 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Samir, K., *Delamination Buckling of FRP strips in strengthened structural EC beams and masonry walls,* Tem Journal, 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E., *RC beams models damaged and strengthened with GFRP strips under bending loading and free vibration,* Composite Structures, 2020.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Damaged RC beams strengthened with NSM GFRP under free vibration,* Proc. MECHCOMP 2019, 2019.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Experimental free vibration of damaged RC beams models,* Proceedings International Conference in Fracture and Damaged Mechanics, 2019.
- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Damaged RC beams strengthened with GFRP,* Procedia Structural Integrity, 2018.

- Capozucca, R.; Magagnini, E.; Vecchietti, M.V., *Experimental vibration analysis of damaged RC beams and strengthened with FRP,* ICCE-26, 2018.
- Capozucca, R., *Vibration Analysis of damaged RC beams strengthened with GFRP,* Composite Structures, 2018.
- Capozucca, R.; Blasi, M.G., Corina, V.; *NSM Technique: bond of CFRP rods and static/dynamic response of strengthened RC beams,* Composite structures, 2015.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S.; Corina, V., *RC beams strengthened with NSM GFRP rods*, Proc. Int. Conf. Comp. Str. 18, 2015.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S.; Corina, V., *Detection of damage in RC beams with NSM CFRP by frequency measures,* SPB 2015 International Conference on Shells, Plates and Beams, Bologna, Esculapio, 2015.
- Capozucca, R.; Blasi, M. G.; Corina, V., *Dynamic response of RC beams strengthened with near surface mounted Carbon – FRP rods subjected to damage,* Journal of Physic Conference Series, 2015.
- Capozucca, R.; Bonci, B., *Notched CFRP laminates under vibration,* Composite Structures, 2015.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S., *Dynamic response of RC beams – in different scale – with near surface mounted CFRP rectangular rods,* Composite Structures, 2015.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S.; Montecchiani, S., *Assessmente of RC beams with NSM CFRP rectangular rods damaged by notches*, Composite Structures, 2015.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S., *RC beams strengthened with NSM CFRP rectangular rods,* The Eights Int. Conf. on Material Technologies and Modeling MMT-2014, 2014.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S., *Vibration of Beams with NSM CFRP rods,* 22nd Int. Conf. on Composites or Nano Engineering, 2014.
- Capozucca, R., *On the strengthening of RC beams with near surface mounted GFRP rods,* Composite Structures, 2014
- Capozucca, R.; Bossoletti, S., *Static and free vibration analysis of RC beams with NSM CFRP rectangular rods*, Composites. Part B, Engineering, 2014.
- Capozucca, R.; Bossoletti, S., *Changes in he dynamic behavior of Strengthened RC beams with NSM CFRP strips,* First International Conference Mechanics of Composites, 2014.
- Capozucca, R., *Assessment of CFRP strengthened RC beams through dynamic tests,* Composites. Part B, Engineeing, 2013.

- Capozucca, R., *Static and dynamic response of damaged RC beams strengthened with NSM CFRP rods,* Composite Structures, 2009.
- Sena Cruz JM, Barros JAO, Gettu R, Azevedo AFM. "Bond behavior of nearsurface mounted CFRP laminate strips under monotonic and cyclic loading." ASCE J Compos Constr 2006.
- Kishi N, Mikami H, Kurihashi Y, Sawada S. Flexural behaviour of RC beams reinforced with NSM AFRP rods. In: Proc. int. symposium BBFS; 2005.
- El-Hacha R, Rizkalla S. Near-surface mounted fiber reinforced polymer reinforcements for flexural strengthening of concrete structures. ACI StructJ 2004.
- De Lorenzis L, Nanni A. *Bond between near-surface mounted fiberreinforced polymer rods and concrete in structural strengthening*, ACI Struct J 2002.

RINGRAZIAMENTI

Giunta al termine di questa tesi, vorrei ringraziare il professor Roberto Capozucca per la sua disponibilità, gli insegnamenti e l'aiuto fornito. Grazie per avermi dato la possibilità di condurre una tesi sperimentale e di interfacciarmi con il mondo della ricerca.
Vorrei ringraziare inoltre, Maria Vittoria Vecchietti, per la pazienza, l'aiuto e i suggerimenti durante tutto il periodo di preparazione della tesi.

Voglio ringraziare Mamma, Papà e Matteo. Voi siete i miei pilastri, questa tesi è dedicata a voi, ai sacrifici che avete fatto per farmi studiare, per la pazienza che avete avuto con me nonostante il mio caratteraccio, per essere la mia bussola, la mia sicurezza e la mia ancora di salvezza. Siete il faro che ha illuminato e continuerà ad illuminare la mia vita. Potrò andare chilometri lontano o starvi vicino, ma in ogni caso voi siete casa e sempre il punto in cui io tornerò. Ne abbiamo passate tante, tante ne passeremo ma nonostante tutto siamo ancora qui, più uniti che mai.
Spero di riuscirvi a ripagare di tutto dandovi molte soddisfazioni. Spero di rendervi fieri di me e di quello che faccio.
Mati, sei il fratello migliore che potessi mai avere, ci sei sempre e sei il primo nei miei pensieri, sempre. Tu sei la cosa migliore che mi abbiano mai dato. Siamo cresciuti augurandoci il meglio l'uno per l'altra, senza mai invidie o gelosie. Ti darei il mondo intero se solo potessi. Non sarai mai solo, io sarò sempre con te. Ti voglio bene fratellino.

Marco, le tue attenzioni, i tuoi messaggi e il fatto che hai saputo sempre starmi vicina capendo quello che sentivo senza che io dovessi aprire bocca mi ha fatto sentire sicura. Mi hai aiutata a crescere, scoprendo che avere una persona con cui condividere il tempo non è così male. Grazie mille di avermi sopportata e grazie per avermi dato la possibilità di specchiarmi in degli occhi che mi hanno guardata per la prima volta con un amore sincero. Grazie per avermi sempre ripetuto che ho un valore, anche quando pensavo di essere una fra le tante. Grazie.

Ringrazio Roberta, il mio porto sicuro, una persona sincera che ha sempre gioito dei miei traguardi e mi ha sempre consolata per le mie debolezze. Grazie per i mille caffè presi tra chiacchiere e risate, tra pomeriggi passati a sfogarci. Sei stata fondamentale, grazie per esserci sempre stata. Sei speciale, per me, sei importate e ti voglio tanto tanto bene.

Ringrazio Giampiero, probabilmente questa tesi senza il tuo aiuto nemmeno esisterebbe. Grazie per essere stato super disponibile ad aiutarmi e di aver creduto in me.

Voglio ringraziare, Dario e Luca, le prime persone che ho conosciuto ad Ancona, mi avete sostenuta nel momento in cui ho affrontato uno dei cambiamenti più importanti della mia vita. Siete speciali per me.

Vorrei ringraziare i miei compagni di avventura, Elisa e Emanuele, voi mi siete stati vicini in tutti i momenti e spero di aver fatto altrettanto io. Abbiamo condiviso tantissime cose, momenti belli e brutti, ci siamo visti in tutti modi. Spero di non perderci, spero di avervi sempre al mio fianco e continuare ad essere le persone aperte, sincere e spontanee che siamo!

Ed infine ringrazio me stessa, per non aver mollato, per aver avuto la forza di concludere questo percorso, di aver superato tante difficoltà, per aver imparato a stare da sola e aver compreso che la cosa più difficile è stare bene da soli con sé stessi. Sarà un percorso lungo e difficile ma il mio augurio per me è quello di raggiungere questo obiettivo. Mi auguro di riuscire a fare quello che mi piace e di avere sempre la voce per gridare forte le mie idee, di farmi sentire.