



Facoltà di Ingegneria Corso di Laurea in Ingegneria Informatica E Dell'automazione

Ottimizzazione di una legge di controllo tramite componente trasversa per la sincronizzazione di sistemi dinamici del primo ordine su manifold Riemanniani

Optimization of a control law through transverse component for the synchronization of the first order dynamic systems on Riemannian manifolds

Candidato: Adolfo Damiano Cafaro

Relatore: Prof. Simone Fiori

Anno Accademico 2019-2020





Facoltà di Ingegneria Corso di Laurea in Ingegneria Informatica E Dell'automazione

Ottimizzazione di una legge di controllo tramite componente trasversa per la sincronizzazione di sistemi dinamici del primo ordine su manifold Riemanniani

Optimization of a control law through transverse component for the synchronization of the first order dynamic systems on Riemannian manifolds

Candidato: Adolfo Damiano Cafaro

Relatore: Prof. Simone Fiori

Anno Accademico 2019-2020

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE FACOLTÀ DI INGEGNERIA CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE Via Brecce Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

Ai miei genitori, Pasquale e Teresa

Ringraziamenti

Ringrazio tutti coloro i quali hanno creduto in me dandomi fiducia; un ringraziamento particolare al Prof. Simone Fiori che mi ha seguito e guidato durante il percorso di tirocinio e di stesura di questa tesi.

E coloro che hanno condiviso con me questi tre anni meravigliosi tra "equazioni, funzioni da integrare o derivare, droni da far volare e sistemi da controllare". Ho avuto la possibilità di vivere la mia vita seguendo la direzione dei miei sogni, e soprattutto, ho acquisito la forza della resilienza: "non mollare" mai nemmeno di fronte al problema più difficile. In fondo, ogni problema, anche il più difficile, ammette almeno una soluzione.

Ancona, Luglio 2020

Adolfo Damiano Cafaro

Sommario

Il seguente documento ha come obiettivo la definizione di una legge di controllo ottima, in termini di sforzo di controllo, per la sincronizzazione di oscillatori master/slave non lineari del primo ordine su manifold Riemanniani. L'ottimizzazione della legge di controllo è fatta andando a considerare una componente trasversa in modo da non andare a modificare la velocità di sincronizzazione degli oscillatori.

Indice

1	Introduzione		
	1.1	Introduzione	1
2	Alcune nozioni sui manifold Riemanniani		
	2.1	Manifold Riemanniano	3
	2.2	Geodetiche, mappe e trasporto parallelo	3
3	Leg	ge di controllo per la sincronizzazione sul manifold	5
	3.1	Formulazione della legge di controllo	5
	3.2	Riflessioni sullo sforzo di controllo	7
4	Otti	mizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2	9
	4.1	Introduzione al problema	9
	4.2	Soluzione numerica	9
	4.3	Soluzione analitica	15
	4.4	Soluzione alternativa τ_L	17
5	Otti	mizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^{n-1}	23
	5.1	Introduzione al problema	23
	5.2	Soluzione analitica	24
	5.3	Esempio su S^7	25
	5.4	Soluzione alternativa τ_L per \mathbb{S}^{n-1} con $n > 3$	26
6	Otti	mizzazione della legge di controllo sul manifold Riemmanniano (M,g)	31
	6.1	Formulazione generale del problema	31
	6.2	Applicazione della legge di controllo \tilde{u} al manifold $\mathbb{SO}(3)$	33
7	Con	clusioni	37

Elenco delle figure

3.1	Schema del sistema a ciclo chiuso: il controllore dinamico elabora un segnale $u(t)$ in modo tale da far sincronizzare asintoticamente lo stato dello slave con quello del master.	5
4.1	La traiettoria del sistema (4.6) su \mathbb{S}^2 : la curva nera è relativa al master, quella blu allo slave.	11
4.2	Funzione k determinata numericamente durante la simulazione, che va a costruire la componente trasversa τ secondo la (4.1). Ad ogni	
4.3	colore corrisponde una componente della funzione k Effetto di τ sullo sforzo di controllo della legge che va a determinare la sincronizzazione del sistema (4.6): Nel pannello a destra sono rappresentati in verde $ u $, mentre in blu $ u + \tau(k) $. Nel pannello a sinistra la loro differenza istante per istante. Ricordiamo che k è stato	12
4.6	determinato numericamente in modo da minimizzare la quantità $ \tilde{u} $. I quadranti in alto e quello in basso a sinistra raffigurano l'evoluzione dello stato dello slave del sistema (4.13) (rosso) ed evoluzione dello stato dello slave del sistema (4.6) (blu). Il quadrante in basso a destra raffigura la funzione di Lucamente areatteristica dei due sistemi, in	13
	rangura la funzione di Lyapunov caratteristica dei due sistemi: in rosso quella del sistema (4.13) e in blu quella del sistema (4.6) .	13
4.4	La traiettoria del sistema (4.13) su \mathbb{S}^2 : la curva nera è relativa al master, quella rossa allo slave.	14
4.7	Confronto dello sforzo di controllo della legge $\tilde{u} = u + \tau$ (blu) che comprende la componente trasversa, determinata numericamente nella prima simulazione, e che regola la sincronizzazione del sistema (4.6), con lo sforzo di controllo della legge $\tilde{u} = u$ (rosso) che regola la	
4.5	sincronizzazione del sistema (4.13)	14 15
4.8	Soluzione numerica e analitica a confronto: in giallo sono raffigurate, nei primi tre quadranti, le componenti di k determinate col teorema 4.3.1, mentre in blu le componenti di k determinate con la soluzione numerica. Nell'ultimo quadrante si osserva come la funzione di Lya- punov rimanga invariata sia che si utilizzi la soluzione numerica che	10
	quella analitica.	18

Elenco delle figure

4.9	Simulazione dell'evoluzione sulla sfera \mathbb{S}^2 dei sistemi $\sum_L e \sum_G$, con raffigurazione delle componenti trasverse $\tau_L e \tau_G$	20
4.10	Funzione di Lyapunov \sum_{L} (rosso) e \sum_{G} (blu). Le funzioni di Lyapunov coincidono istante per istante, in quanto le due leggi di controllo non vanno in alcun modo ad alterare la velocità di sincronizzazione	21
5.1	Esempio di sincronizzazione di oscillatori master/slave sulla sfera \mathbb{S}^7 : nel pannello in alto sono presenti le variabili di stato degli oscillatori (a sinistra il master, a destra lo slave). In basso a sinistra è raffigurata l'energia cinetica ($K := \frac{1}{2}f^T(z(t))f(z(t))$), rossa dello slave e nera del master. Mentre in basso a destra è raffigurata la funzione di Lyapunoy	26
5.2	Effetto di τ sullo sforzo di controllo: a sinistra è raffigurato la norma, istante per istante, di u (in verde) e di $u + \tau$ (in blu). A destra è invece rappresentata la differenza $ u = u + \tau $ istante per istante	97
5.3	Invece rappresentata la universita $ u = u + r $ istante per istante. $\sum_{u} e \sum_{\tilde{u}} a \text{ confronto su } \mathbb{S}^{7}$: questa seconda simulazione va a valutare se il sistema che ha come legge di controllo quella che include la componente trasversa è più performante rispetto al sistema soggetto	21
5.4	alla legge di controllo senza componente trasversa	29 30
6.1	Sincronizzazione dei due oscillatori master/slave su S $\mathbb{O}(3)$. Nel pan- nello superiore è rappresentata l'evoluzione nel tempo della distanza Riemanniana al quadrato $d^2(z^s(t), z^m(t))$. Nel pannello inferiore è rap- presentato l'andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato della legge $u(t)$ (cioè $ u(t) ^2_{\mathcal{O}(2)}$), controllo della tempo della tempo della signa di controllo di quadrato	34
6.2	Sincronizzazione dei due oscillatori master/slave su S $\mathbb{O}(3)$. Nel pan- nello superiore è rappresentata l'evoluzione nel tempo della distanza Riemanniana al quadrato $d^2(z^s(t), z^m(t))$. Nel pannello inferiore è rap- presentato l'andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato della legge $\tilde{u}(t)$	35
6.3	Andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato delle due leggi $\tilde{u}(t)$ (blu) e $u(t)$ (rosso). Fino all'istante 10 lo sforzo di controllo delle due leggi coincide, in quando i segnali non sono ancora attivi.	35

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Introduzione

Lo studio di oscillatori non lineari è una tematica molto attiva nella ricerca internazionale, in particolare nell'ambito delle scienze, della medicina e della ingegneria [1]. Inizialmente si è studiato il problema della sincronizzazione di sistemi non lineari che evolvono nello spazio di stato \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n [2, 3, 4, 5]. La sincronizzazione di sistemi è un tema molto complesso ma al tempo stesso affascinante, che possiede svariate applicazioni [6, 7]. Nel seguente documento consideriamo due oscillatori non lineari del primo ordine, un master e uno slave, in evoluzione su un manifold Riemanniano con stato iniziale differente. La sincronizzazione master-slave mira alla modifica della dinamica dello slave in modo tale che il suo stato vada a coincidere con quello del master. Il presente documento va a contribuire alla ricerca sulla teoria della sincronizzazione di oscillatori non lineari su manifold Riemanniani. Partendo dalla legge di controllo, definita nell'articolo [8], ci si propone di ottimizzare tale legge tramite componente trasversa andando a minimizzare lo sforzo di controllo e lasciando invariata la velocità di sincronizzazione degli oscillatori.

Un approccio così generale al problema della sincronizzazione ha risvolto in svariate applicazioni scientifiche, tra cui:

- La sincronizzazione delle traiettorie di corpi in volo: un corpo rigido in volo (es.drone) può essere descritto da una particolare matrice sul manifold SO(3). La sincronizzazione delle traiettorie di più corpi rigidi in volo può essere rappresentata da un sistema dinamico in evoluzione e da una legge di controllo che ne regola la sincronizzazione.
- Trasmissione sicura delle informazioni attraverso l'utilizzo di digital networks: *la cyber security* riguarda la protezione di dati sensibili, fatta attraverso algoritmi di criptaggio. Un possibile schema di criptaggio di un segnale è fatto andando a mascherare tale segnale 'corrompendolo' col rumore generato da un oscillatore non lineare al livello della trasmissione. Per decriptare il segnale sarà necessario adottare un identico oscillatore non lineare al livello della ricezione e andare a sincronizzare i due oscillatori per rimuovere il rumore.

Capitolo 1 Introduzione

Riprendendo i concetti espressi nel [8] sulla sincronizzazione di sistemi non lineari su un manifold Riemanniano, andiamo ad analizzare lo sforzo di controllo per la sincronizzazione e determiniamo una componente trasversa per minimizzarlo e ottimizzare le prestazioni del sistema, lasciando invariata la velocità di sincronizzazione.

Il documento è organizzato nel modo seguente: Il secondo capitolo definisce alcune nozioni preliminari sul concetto di manifold Riemanniano. Nel successivo si fa riferimento al problema della formulazione di una legge di controllo che permetta una velocità di sincronizzazione esponenziale degli oscillatori [8]. Nel quarto capitolo si determinano due rappresentazioni della componente trasversa per andare a minimizzare lo sforzo di controllo di una legge che va a pilotare la sincronizzazione di sistemi sulla sfera unitaria S^2 . Nel quinto capitolo si generalizzano i concetti espressi nel capitolo precedente nel caso in cui il sistema evolva su un manifold del tipo S^{n-1} . Infine, nell'ultimo capitolo ci si propone di generalizzare la legge di controllo ottima, quindi quella che considera anche la componente trasversa, ad un manifold Riemanniano generico.

Notazione. In tutti i grafici contenuti nel capitolo 4 e nel capitolo 5 la variabile delle ascisse "Time t" rappresenta un indice discreto. Ad ogni istante t è associato un passo della simulazione.

Capitolo 2

Alcune nozioni sui manifold Riemanniani

In questo capitolo introduciamo la nozione di manifold Riemanniano, e alcuni operatori matematici che ci serviranno nella soluzione del problema di controllo, come la mappa esponenziale, logaritmica e il trasporto parallelo.

2.1 Manifold Riemanniano

Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare su V è una forma bilineare simmetrica definita positiva, cioè un'applicazione $g: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

- (i) $g(u_1 + u_2, v) = g(u_1, v) + g(u_2, v), \quad \forall u_1, u_1 \in V$
- (ii) $g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v), \quad \forall u, v \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii)
$$g(u, v) = g(v, u), \quad \forall u, v \in V$$

(iv) $g(u, u) \ge 0$, $\forall u \in V$, con $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Una metrica Riemanniana g su un manifold differenziabile M è una funzione che associa ad ogni punto p di M un prodotto scalare g_p definito sullo spazio tangente T_pM , che dipende differenziabilmente da p. Cioè, per ogni coppia di campi vettoriali $X \in Y$, l'applicazione $p \to g_p(X_p, Y_p)$ è differenziabile.

Un manifold Riemanniano è una coppia (M, g), dove M è un manifold differenziabile e g una metrica Riemanniana su M. Nel seguito, senza perdita di generalità, indicheremo il prodotto scalare dei vettori tangenti $X, Y \in T_pM$ con il simbolo $\langle X, Y \rangle_p$. Nel caso di metrica Euclidea il prodotto scalare canonico sarà indicato come $\langle X, Y \rangle$.

Dato un punto p di una varietà Riemanniana (M, g), si definisce lunghezza o norma di un vettore $X \in T_p M$ come $||X|| := \sqrt{\langle X, X \rangle_p}$. Due vettori non nulli $X, Y \in T_p M$ si dicono ortogonali se $\langle X, Y \rangle_p = 0$. I due vettori si dicono ortonormali se, oltre ad essere ortogonali, hanno lunghezza unitaria.

2.2 Geodetiche, mappe e trasporto parallelo

La geodetica è la generalizzazione nei manifold della retta nello spazio Euclideo. Sono vari i modi di definire una geodetica, uno tra questi è quello di curva che minimizza la distanza tra due punti sul manifold; altro è quello di curva la cui derivata seconda è nulla.

Dato un punto $x \in M$ e un vettore $v \in T_x M$ il trasporto parallelo del vettore v da $T_x M$ a $T_y M$ lungo la geodetica che collega $x \in y \in M$ è indicato come $P^{x \to y} : T_x M \to T_y M$. Il trasporto parallelo permette di andare a mettere in relazione due vettori che appartengono a spazi tangenti diversi; ad esempio questo operatore matematico è fondamentale per definire il concetto di derivata direzionale.

La mappa esponenziale $\exp_x : T_x M \to M$ è una funzione che mappa lo spazio tangente in un punto $x \in M$. La quantità $\exp_x(v)$ associa ad un vettore $v \in T_x M$ un punto y sul manifold raggiunto dalla geodetica che parte da x con direzione v dopo un'unità di tempo. Localmente la mappa esponenziale è invertibile e la sua inversa è la mappa logaritmica $\log_x : M \to T_x M$ (di particolare importanza in questo documento) che associa al punto y sul manifold il vettore $v \in T_x M$ che definisce la direzione della geodetica che congiunge $x \in y$. Il dominio di iniettività della mappa esponenziale \exp_x comprende tutto il manifold ad eccezione del *cut locus* associato ad x. Il cut locus rappresenta l'insieme di punti dove più geodetiche che partono da x si incontrano. Sulla sfera \mathbb{S}^2 il cut locus di un punto x è il punto -x. Dati $(x, v) \in M$ e un punto $y \in M$, per realizzare il trasporto parallelo $P^{x \to y}(v)$ è necessario determinare una geodetica tra $x \in y$, la quale è unicamente determinate, e allora non deve appartenere al *cutlocus(x)*.

Capitolo 3

Legge di controllo per la sincronizzazione sul manifold

3.1 Formulazione della legge di controllo

Sia M un manifold Riemanniano. Il master è rappresentato da un sistema dinamico del primo ordine descritto dall'equazione

$$\dot{z}^m(t) = f(z^m(t)), \quad z^m(0) = z_0^m \in M, t \ge 0,$$
(3.1)

dove $z^m \in M$ è la variabile di stato dell'oscillatore, $f: M \to TM$ indica la funzione di transizione dello stato. Anche lo slave è rappresentato da un sistema dinamico del primo ordine, descritto da:

$$\dot{z}^{s}(t) = f(z^{s}(t)) + u(t), \ z^{s}(0) = z_{0}^{s} \in M - cutlocus(z_{0}^{m}), \ t \ge 0,$$
(3.2)

dove $z^s \in M$ è la variabile di stato dell'oscillatore, $f: M \to TM$ indica la funzione di transizione dello stato, identica a quella del master. Lo stato iniziale dello slave si suppone differente da quello del master ed inoltre non appartenente al cut locus di z_0^m . Il segnale $u \in T_{z^s}M$ rappresenta il segnale di uscita del controllore.



Figura 3.1: Schema del sistema a ciclo chiuso: il controllore dinamico elabora un segnale u(t) in modo tale da far sincronizzare asintoticamente lo stato dello slave con quello del master.

Lo stato del master e dello slave varia sul manifold, mentre il segnale di controllo appartiene ad un spazio tangente: $u \in T_{z^s}M$, quindi, il segnale di controllo appare come un campo vettoriale $(z^s(t), u(t))$ definito sull'insieme degli spazi tangenti al

Capitolo 3 Legge di controllo per la sincronizzazione sul manifold

manifold M parametrizzato dal tempo t. Il controllore è definito in modo tale da ridurre l'errore di sincronizzazione, definito dalla distanza tra lo stato del master e lo stato dello slave $d(z^s(t), z^m(t))$. Lo stato del master è preso come segnale di riferimento per costruire il controllo sullo stato dello slave, così che insegua il master, fino a raggiungerlo asintoticamente. Qui di seguito andiamo a definire il concetto di sincronizzazione, utile per il successivo teorema.

Definizione 3.1.1. Diciamo che lo stato dello slave z^s è sincronizzato allo stato del master z^m se

$$\lim_{t \to \infty} d(z^{s}(t), z^{m}(t)) = 0.$$
(3.3)

Teorema 3.1.1. La legge di controllo $u := P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \log_z^s(z^m)$ sincronizza l'oscillatore master (3.1) con l'oscillatore slave (3.2) a velocità esponenziale.

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$V(t) := \frac{1}{2}d^2(z^m(t), z^s(t)).$$
(3.4)

Su un manifold Riemanniano vale

$$d(x,y) = ||\log_y(x)||_y$$
(3.5)

Per calcolare la derivata rispetto al tempo della funzione V osserviamo che $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \langle \nabla_x F, \dot{x} \rangle_x$, per $x \in M$ e $F: M \to \mathbb{R}$, e inoltre $\nabla_x d^2(x, y) = -2\log_x(y)$ per $x, y \in M$ tale che $y \notin cutlocus(x)$. Quindi

$$\frac{dV}{dt} = \langle -\log_{z^m}(z^s), \dot{z}^m \rangle_{z^m} + \langle -\log_{z^s}(z^m), \dot{z}^s \rangle_{z^s}
= -\langle \log_{z^m}(z^s), f(z^m) \rangle_{z^m} - \langle \log_{z^s}(z^m), f(z^s) + u \rangle_{z^s}$$
(3.6)

Ma i due prodotti scalari sono relativi a due spazi tangenti diversi; è conveniente spostare il calcolo sullo spazio tangente a z^s attraverso l'operatore trasporto parallelo. Quest'ultimo è una isometria e quindi vale quanto segue:

$$\langle \log_{z^m}(z^s), f(z^m) \rangle_{z^m} = \langle P^{z^m \to z^s}(\log_{z^m}(z^s)), P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) \rangle_{z^s}$$
(3.7)

Si può dimostrare (per maggiori dettagli consultare [8]) che $P^{z^m \to z^s}(\log_{z^m}(z^s)) = -\log_{z^s}(z^m)$. Allora possiamo scrivere la $\frac{dV}{dt}$ come segue:

$$\dot{V} = \langle \log_{z^s}(z^m), P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) \rangle_{z^s} - \langle \log_{z^s}(z^m), f(z^s) + u \rangle_{z^s}$$
$$= \langle \log z^s(z^m), P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) - u \rangle_{z^s}$$
(3.8)

Si progetta una legge di controllo u(t) in modo tale che la funzione V sia una funzione di Lyapunov per il sistema che regola la dinamica dell'errore di sincronizzazione.

Scegliamo la legge u(t) in modo tale che la quantità $P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) - u$ sia uguale a $-\log_{z^s}(z^m)$. Quindi:

$$u := P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \log_{z^s}(z^m).$$
(3.9)

Poiché il prodotto scalare, su un manifold Riemanniano, è definito positivo, la funzione V associata alla tale legge di controllo, obbedisce a

$$\dot{V} = -\langle \log_{z^s}(z^m), \log_{z^s}(z^m) \rangle_{z^s} = -||\log_{z^s}(z^m)||_{z^s}^2 \le 0.$$
(3.10)

Questo implica che V sia una funzione di Lyapunov, e quindi per il teorema di stabilità secondo Lyapunov è assicurata l'asintotica convergenza a zero dell'errore di sincronizzazione converge verso l'errore nullo asintoticamente. Osserviamo inoltre che la (3.10) è verificata all'uguaglianza quando $\log_{z^s}(z^m) = 0$, e questo accade quando i due oscillatori sono sincronizzati. Essendo che $d(z^m, z^s) = ||\log_{z^s}(z^m)||_{z^s}$ la quantità a destra della (3.10) coincide con -2V quindi il controllore è tale da portare i due oscillatore a convergere esponenzialmente secondo la legge

$$V(t) = V_0 \exp(-2t) \text{ con } V_0 := \frac{1}{2} d^2(z_0^m, z_0^s).$$
(3.11)

Il modello del sistema a ciclo chiuso (master/controllore/slave) ha equazioni:

$$\begin{cases} \dot{z}^m = f(z^m) \\ u = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \log_{z^s}(z^m) \\ \dot{z}^s = f(z^s) + u \end{cases}$$
(3.12)

La legge di controllo, che regola la sincronizzazione, dipende dallo stato del master, trasportato lungo la traiettoria dello slave attraverso il termine $P^{z^m \to z^s}(f(z^m))$, e dalla differenza dei due stati, rappresentata dal termine $\log_{z^s}(z^m)$. Si può dimostrare (consultare [8]) che lo sforzo di controllo ||u(t)|| tende asintoticamente a zero durante la sincronizzazione. La legge di controllo può essere generalizzata nel modo seguente:

$$u := P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \frac{c}{2}\log_{z^s}(z^m)$$
(3.13)

con $c \ge 0$. I calcoli mostrano che la corrispondente funzione di Lyapunov converge a zero secondo $\exp(-ct)$. Ma aumentando la velocità di sincronizzazione aumenta anche lo sforzo di controllo $||u||_{z^s}$, il quale può essere limitato dalla tecnologia o dai costi.

3.2 Riflessioni sullo sforzo di controllo

La legge di controllo u(t) determinata nel Teorema 3.1.1 non è unica. Infatti è possibile andare a generalizzare la legge di controllo (3.9) in modo da non aver effetto

Capitolo 3 Legge di controllo per la sincronizzazione sul manifold

sulla velocità di sincronizzazione ma sullo sforzo di controllo. In particolare vale il seguente risultato:

Teorema 3.2.1. Fissata la velocità di sincronizzazione, tramite il parametro c, è possibile andare a generalizzare la legge di controllo in modo tale da non aver effetto alcuno sulla velocità di sincronizzazione nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{z}^m = f(z^m), \\ \tilde{u} = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \frac{c}{2}\log_{z^s}(z^m) + \tau(z^s, z^m), \\ \dot{z}^s = f(z^s) + \tilde{u}. \end{cases}$$
(3.14)

con $\tau \in T_{z^s}M$ tale che $\tau(z^s, z^m) \perp \log_{z^s}(z^m)$.

Dimostrazione. La legge di controllo \tilde{u} così definita fa sì che la funzione (3.4) sia una funzione di Lyapunov, essendo che:

$$\dot{V} = \langle \log_{z^s}(z^m), -(\frac{c}{2} \log_{z^s}(z^m) + \tau) \rangle_{z^s}$$

= $-\frac{c}{2} \langle \log_{z^s}(z^m), \log_{z^s}(z^m) \rangle_{z^s} - \langle \log_{z^s}(z^m), \tau) \rangle_{z^s}$ (3.15)

Poichè $\tau(z^s, z^m) \perp \log_{z^s}(z^m)$ otteniamo che $\dot{V} = -\frac{c}{2} ||\log_{z^s}(z^m)||_{z^s}^2 \leq 0$. La velocità di sincronizzazione pari a $\exp(-ct)$ con la legge di controllo u(t), resta inalterata anche con la legge $\tilde{u}(t)$.

Il precedente teorema generalizza la legge di controllo dando al problema di sincronizzazione infinite soluzioni, che risultano essere tra loro equivalenti per quanto riguarda la velocità di sincronizzazione dei due oscillatori (3.1) ed (3.2). La generalizzazione della legge di controllo \tilde{u} non ha alcun effetto sulla velocità di sincronizzazione ma ha effetto sullo sforzo di controllo $||\tilde{u}||_{z^s}$. L'inserimento del parametro $\tau(z^s, z^m)$ rende la legge di controllo più complessa ma può minimizzare, istante per istante, lo sforzo di controllo necessario per fa sì che lo slave si sincronizzi col master, e magari ottenere un miglioramento delle prestazioni andando ad utilizzare come legge di sincronizzazione \tilde{u} , rispetto ad u.

Nei capitoli successivi andremo a definire alcune possibili rappresentazioni di τ per poi determinare una legge di controllo ottima, in termini di sforzo di controllo, per un sistema che evolve su un manifold Riemanniano generico.

Capitolo 4

Ottimizzazione della legge di controllo su oscillatori con spazio di stato la sfera unitaria S^2

4.1 Introduzione al problema

Consideriamo il caso particolare di due oscillatori master (3.1) e slave (3.2), il cui spazio di stato è rappresentato dal manifold \mathbb{S}^{n-1} con n = 3 (una sfera 3D a raggio unitario, che geometricamente è un manifold di due dimensioni). Data la legge di controllo $\tilde{u} = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \frac{c}{2}\log_{z^s}(z^m) + \tau(z^s, z^m)$, con $\tau \in T_{z^s}M$ tale che $\tau(z^s, z^m) \perp \log_{z^s}(z^m)$, si vuole determinare $\tau(z^s, z^m)$, nel seguente caso di studio, in modo da andare a minimizzare istante per istante lo sforzo di controllo $||\tilde{u}(t)||_{z^s}$. Cioè tale che $||\tilde{u}(t)||_{z^s} = ||u(t) + \tau(t)||_{z^s} \leq ||u(t)||_{z^s}$ e $\tau(t)$ sia la soluzione ottima del problema di minimizzazione su $||\tilde{u}(t)||_{z^s} \forall t \ge t_0$; dove $u(t) = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \frac{c}{2}\log_{z^s}(z^m)$. La funzione $\tau(z^s, z^m)$ deve essere scelta in modo da non alterare la velocità di sincronizzazione, quindi secondo il teorema 3.2.1 scegliamo $\tau(z^s, z^m)$ nel seguente modo:

$$\tau(z^s, z^m) := k(z^s, z^m) \times \log_{z^s}(z^m) \text{ con } k(z^s, z^m) \in \mathbb{R}^3,$$

$$(4.1)$$

dove l'operatore \times indica il prodotto vettoriale. Il problema di ottimizzazione si riduce a determinare il parametro k che va a minimizzare:

$$||u(t) + \tau(k)||_{z^s}.$$
(4.2)

4.2 Soluzione numerica

In prima analisi, per valutare se il problema ammette soluzione ed eventualmente individuare quest'ultima andiamo a determinare k risolvendo istante per istante un problema di minimizzazione della funzione (4.2). Per fare questo simuliamo un sistema 3.14 in evoluzione su \mathbb{S}^2 con funzione di evoluzione dello stato $f(z) : \mathbb{S}^2 \to T_z \mathbb{S}^2$. In Capitolo 4 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2

particolare:

$$\mathbb{S}^2 := \{ x \in \mathbb{R}^3 | x^T \, x = 1 \}, \tag{4.3}$$

$$T_x \mathbb{S}^2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 | x^T v = 0 \}.$$
(4.4)

Inoltre,

$$f(z) := (I_3 - zz^T)A(z \circ z \circ z) + Bz \text{ con } z(0) = z_0 \in \mathbb{S}^2,$$
(4.5)

dove z rappresenta un vettore 3×1 , A una matrice costante 3×3 , B è una matrice costante antisimmetrica 3×3 e \circ rappresenta il prodotto di Hadamard. Con I_3 indichiamo la matrice identità di dimensione tre. Si verifica immediatamente che $\forall z \in \mathbb{S}^2, z^T f(z) = 0$, cioè la dinamica del sistema descritto dalla funzione (4.5) si svolge sul manifold \mathbb{S}^2 . Il sistema a ciclo chiuso ha le seguenti equazioni:

$$\sum_{\tilde{u}} := \begin{cases} \dot{z}^m = f(z^m), \\ \dot{z}^s = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) + \frac{c}{2} \log_{z^s}(z^m) + \tau(z^s, z^m) \end{cases}$$
(4.6)

Notiamo che è stata sostituita l'espressione di \tilde{u} all'interno dell'equazione di evoluzione dello slave. Come al solito indichiamo con z_0^m lo stato iniziale del master e con z_0^s lo stato iniziale dello slave. È utile ricordare che $z_0^m \in \mathbb{S}^2$ mentre $z_0^s \in \mathbb{S}^2 - cutlocus(z_0^m)$. È stato già menzionato che sulla sfera unitaria il *cutlocus* di un punto z non è altro che -z, che corrisponde alla distanza geodetica $d(z, -z) = \pi$. Per applicare la sincronizzazione dei due oscillatori consideriamo come metrica del manifold quella Euclidea; è inoltre necessario indicare le seguenti espressioni, valide per \mathbb{S}^{n-1} , $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \log_x(y) = (I_n - xx^T)y(\operatorname{sinc} d(x, y))^{-1}, \\ P^{x \to y}(v) = [I_n - \frac{(I_n - xx^T)yy^T}{1 + x^Ty} - xy^T]v. \end{cases}$$
(4.7)

Nelle espressioni (4.7) si suppone che $x^T y \neq -1$ (cioè che y non è contenuto nel *cutlocus* di x) e il simbolo sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denota la funzione così definita:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \text{ per } x \neq 0, \\ 1 \text{ per } x = 0. \end{cases}$$

Per misurare la distanza tra lo stato del master e lo stato dello slave consideriamo al distanza associata al prodotto scalare basato sulla metrica Euclidea:

$$d(x,y) = |\arccos x^T y|, \tag{4.8}$$

dove arccos indica la funzione inversa del coseno.

4.2 Soluzione numerica

Nel seguente caso di studio consideriamo come matrice A, che appare nella (4.5):

$$A := \begin{vmatrix} 0.2037 & 0.1907 & -1.0671 \\ -0.7120 & -2.2201 & 0.0799 \\ -0.2505 & -1.9182 & 0.2028 \end{vmatrix} .$$
(4.9)

Mentre come matrice B, che appare nella (4.5):

$$B := \begin{bmatrix} 0 & -0.3740 & -0.6069 \\ 0.3740 & 0 & -3.6806 \\ 0.6069 & 3.6806 & 0 \end{bmatrix} .$$
(4.10)

La costante di velocità di sincronizzazione c è posta uguale a due. Lo stato iniziale del sistema (4.6) è stato generato casualmente ed è risultato pari a:

$$z_0^m := \begin{bmatrix} 0.7110 & -0.0618 & 0.7005 \end{bmatrix}.$$
 (4.11)

$$z_0^s := \begin{bmatrix} -0.1358 & -0.0823 & 0.9873 \end{bmatrix}.$$
(4.12)

Dalla Figura 4.1 si osserva come lo slave si sincronizzi asintoticamente col master, in



Figura 4.1: La traiettoria del sistema (4.6) su \mathbb{S}^2 : la curva nera è relativa al master, quella blu allo slave.

modo molto esponenzialmente rapido. Dalla simulazione così fatta è stato osservato che il problema di ottimizzazione su k ammette soluzione e una soluzione numerica è stata determinata, come mostrato nella Figura 4.2.

Come si evince dalla Figura 4.3, lo sforzo di controllo $||\tilde{u}|| = ||u + \tau(k)||$ è minore o al più uguale, per ogni istante di tempo della simulazione, della quantità ||u||.

Capitolo 4 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2



Figura 4.2: Funzione k determinata numericamente durante la simulazione, che va a costruire la componente trasversa τ secondo la (4.1). Ad ogni colore corrisponde una componente della funzione k.

In un'altra simulazione andiamo a rappresentare l'evoluzione del sistema (4.6) nel quale si va a fissare $\tau(t) = 0$ per ogni $t \ge 0$. Valutiamo, cioè, lo sforzo di controllo della legge \tilde{u} quando non viene considerata la componente trasversa, cioè quando $\tilde{u} = u$. Le equazioni di evoluzione del sistema (4.6) diventano:

$$\sum_{u} := \begin{cases} \dot{z}^{m} = f(z^{m}), \\ \dot{z}^{s} = P^{z^{m} \to z^{s}}(f(z^{m})) + \frac{c}{2} \log_{z^{s}}(z^{m}). \end{cases}$$
(4.13)

Sia lo stato iniziale di (4.13) coincidente con lo stato iniziale del sistema (4.6) (In particolare lo stato iniziale del master è pari a (4.11) e quello dello slave è pari a (4.12)) e la funzione di evoluzione dello stato di (4.13) coincidente con quella del sistema (4.6). La costante di velocità c è posta pari a 2 in questa simulazione. Dalla figura 4.4 si osserva come lo stato dello slave tenda asintoticamente allo stato del master, con velocità esponenziale. Nella Figura 4.5 è rappresentata l'evoluzione temporale dello sforzo di controllo della legge $\tilde{u} = u$ che regola la sincronizzazione tra gli oscillatori master/slave del sistema (4.13). Andando a confrontare l'evoluzione del sistema (4.6), quello che include nella legge di controllo la componente trasversa τ determinata numericamente, con l'evoluzione del sistema (4.13), si ottengono i seguenti risultati: Nella Figura 4.6 si osserva come pur essendo una diversa legge di controllo a pilotare i due oscillatori slave, e infatti l'evoluzione dello stato di quest'ultimi è differente, la velocità di sincronizzazione col master resta la stessa, come ci si aspettava.



Figura 4.3: Effetto di τ sullo sforzo di controllo della legge che va a determinare la sincronizzazione del sistema (4.6): Nel pannello a destra sono rappresentati in verde ||u||, mentre in blu $||u + \tau(k)||$. Nel pannello a sinistra la loro differenza istante per istante. Ricordiamo che k è stato determinato numericamente in modo da minimizzare la quantità $||\tilde{u}||$.



Figura 4.6: I quadranti in alto e quello in basso a sinistra raffigurano l'evoluzione dello stato dello slave del sistema (4.13) (rosso) ed evoluzione dello stato dello slave del sistema (4.6) (blu). Il quadrante in basso a destra raffigura la funzione di Lyapunov caratteristica dei due sistemi: in rosso quella del sistema (4.13) e in blu quella del sistema (4.6).

Capitolo 4 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2



Figura 4.4: La traiettoria del sistema (4.13) su \mathbb{S}^2 : la curva nera è relativa al master, quella rossa allo slave.



Figura 4.7: Confronto dello sforzo di controllo della legge $\tilde{u} = u + \tau$ (blu) che comprende la componente trasversa, determinata numericamente nella prima simulazione, e che regola la sincronizzazione del sistema (4.6), con lo sforzo di controllo della legge $\tilde{u} = u$ (rosso) che regola la sincronizzazione del sistema (4.13).

Nella Figura 4.7, nel pannello di sinistra è rappresentata l'evoluzione dello sforzo



Figura 4.5: Andamento dello sforzo di controllo della legge $\tilde{u}=u$ che pilota la sincronizzazione del sistema \sum_u sulla sfera \mathbb{S}^2

di controllo della legge \tilde{u} applicata ai sistemi (4.13) e (4.6). Nel pannello di destra il guadagno che si ottiene in termini di riduzione di sforzo di controllo andando ad applicare come legge di sincronizzazione la funzione $\tilde{u} = u + \tau$ rispetto alla funzione $\tilde{u} = u$.

In conclusione, costruendo la legge di controllo che considera la componente trasversa τ si ottengono prestazioni migliori in termini di sforzo di controllo, rispetto all'utilizzo di una legge di controllo che non comprende la componente trasversa, a parità di velocità di sincronizzazione; come si evince dall'ultima simulazione.

4.3 Soluzione analitica

In generale si evince che le prestazioni della legge di controllo \tilde{u} sono migliori rispetto a quelle della legge di controllo u a parità di velocità di sincronizzazione. Pur essendo un risultato importante la soluzione trovata al problema di ottimizzazione su k è una soluzione numerica e ovviamente tale soluzione non può essere estesa a tutti i casi di sincronizzazione di sistemi non lineari del primo ordine su \mathbb{S}^2 . Il seguente teorema definisce una soluzione analitica e ben definita al problema di ottimizzazione su k.

Teorema 4.3.1. Dato un sistema del tipo (4.6) che ha come spazio di stato la sfera unitaria \mathbb{S}^2 , sia così definita la funzione $\tau(z^s, z^m)$ che massimizza la quantità

Capitolo 4 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2

 $||u|| - ||u + \tau||.$

$$\tau(z^s, z^m) := -\frac{\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle}{||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2} z^s \times \log_{z^s}(z^m).$$
(4.14)

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema è composta da due parti. In primis verifichiamo che lo sforzo di controllo $||u + \tau||$ è minore dello sforzo di controllo $||u|| \quad \forall (z^s, z^m)$. Successivamente verifichiamo che non esiste una funzione migliore di τ . Indichiamo con G lo scalare:

$$G := \frac{2\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle}{||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2}.$$
(4.15)

Osserviamo che:

$$||u+\tau|| < ||u|| \Leftrightarrow ||u+\tau||^2 < ||u||^2 \Leftrightarrow ||\tau||^2 < -2\langle u,\tau\rangle$$

Questo perché $||u+\tau||^2 = ||u||^2 + ||\tau||^2 + 2\langle u,\tau\rangle.$ Quindi:

$$||\tau||^{2} = ||\frac{-G z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m})}{2}||^{2} = \frac{G \langle u, z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m}) \rangle}{2}$$

$$\leq G \langle u, z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m}) \rangle = -2 \langle u, \frac{-G}{2} z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m}) \rangle \qquad (4.16)$$

$$= -2 \langle u, \tau \rangle.$$

Supponiamo che per assurdo esita

$$\tau_1 := \frac{-G}{n} z^s \times \log_{z^s}(z^m),$$

dove $n \in \mathbb{N} - 2$, tale che

$$||u|| - ||u + \tau|| < ||u|| - ||u + \tau_1||.$$
(4.17)

Ma (4.17) è vera se e solo se

$$||u + \tau_1||^2 < ||u + \tau||^2$$

Dove

$$||u + \tau_1||^2 = ||u||^2 + ||\tau_1||^2 + 2\langle u, \tau_1 \rangle$$

= $||u||^2 + \frac{G^2}{n^2} ||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2 - \frac{2G}{n} \langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle,$ (4.18)

е

$$||u + \tau||^{2} = ||u||^{2} + \frac{G^{2}}{4} ||z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m})||^{2} - G\langle u, z^{s} \times \log_{z^{s}}(z^{m})\rangle.$$
(4.19)

Allora la (4.17) è verificata se e solo se:

$$\frac{G^2}{n^2} ||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2 - \frac{2G}{n} \langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle$$
$$- \frac{G^2}{4} ||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2 + G \langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle < 0.$$

Cioè se e solo se:

$$G\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle [\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{2}] < 0.$$
 (4.20)

Ma sia $G\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle$ che $\left[\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{2}\right]$ sono quantità positive $\forall n \in \mathbb{N} - 2$, e allora \nexists n tale che (4.20) sia vera. In conclusione \nexists $\tau_1 \neq \tau$ tale che sia verificata la (4.17). Quindi la funzione τ (4.14) permette di minimizzare istante per istante lo sforzo di controllo a parità di velocità di sincronizzazione di un sistema del tipo (4.6) che evolve su una sfera unitaria \mathbb{S}^2 . Quindi la funzione k determinata è pari a:

$$k := -\frac{\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle}{||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2} z^s.$$

$$(4.21)$$

Ridefiniamo il sistema (4.6) che evolve su \mathbb{S}^2 , considerando la (4.21), come segue:

$$\sum_{\tilde{u}} := \begin{cases} \dot{z}^m = f(z^m), \\ \dot{z}^s = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) + \log_{z^s}(z^m) - \frac{\langle u, z^s \times \log_{z^s}(z^m) \rangle}{||z^s \times \log_{z^s}(z^m)||^2} z^s \times \log_{z^s}(z^m). \end{cases}$$
(4.22)

Di seguito mostriamo che tale funzione k coincide con la soluzione numerica trovata sperimentalmente (4.2). Simulando il comportamento del sistema (4.22) con funzione di evoluzione dello stato (4.5), e stato iniziale del master coincidente con (4.11) e dello slave con (4.12), otteniamo il seguente risultato: Nella figura 4.8 si osserva come la soluzione numerica e la soluzione analitica coincidano.

4.4 Soluzione alternativa τ_L

Dato un sistema del tipo (4.6), utilizziamo la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange per determinare τ al fine di risolvere il problema di ottimizzazione della legge di controllo \tilde{u} . Definiamo $l := \log_{z^s}(z^m)$. Sia $\tilde{\sigma}(\tau) := ||u + \tau||^2 + \lambda l^T \tau$, cioè lo sforzo di controllo della legge \tilde{u} con il vincolo che $l^T \tau = 0$ scritto con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dove λ è il moltiplicatore. Quindi risolviamo il seguente sistema per determinare τ ottimo :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} (||u||^2 + ||\tau||^2 + 2u^T \tau + \lambda l^T \tau) = 2\tau + 2u + \lambda l = 0\\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \lambda} &= l^T \tau = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione premoltiplico per l^T e ottengo $2l^T \tau + 2l^T u + \lambda ||l||^2 = 0$, per cui il valore ottimo del moltiplicatore di Lagrange è $\lambda = -\frac{2l^T u}{||l||^2}$. Sostituendo nella

Capitolo 4 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^2



Figura 4.8: Soluzione numerica e analitica a confronto: in giallo sono raffigurate, nei primi tre quadranti, le componenti di k determinate col teorema 4.3.1, mentre in blu le componenti di k determinate con la soluzione numerica. Nell'ultimo quadrante si osserva come la funzione di Lyapunov rimanga invariata sia che si utilizzi la soluzione numerica che quella analitica.

prima equazione ottengo il valore ottimo di τ , cioè:

$$\tau = -u - \frac{\lambda l}{2} = \frac{l^T u}{||l||^2} l - u.$$
(4.23)

Andando a sostituire la (4.23) nell'espressione del vincolo $l^T \tau$, si osserva che questo è soddisfatto. Inoltre è semplice verificare che $||\tilde{u}|| = ||u + \tau|| \le ||u||$, dove a τ presente nella \tilde{u} si è andati a sostituire l'espressione (4.23). Infatti

$$||u + \tau||_{z^s}^2 = ||u + \frac{l^T u}{||l||^2} ||u - u||^2 = \frac{(l^T u)^2}{||l||^2}$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(l^T u)^2 \le ||u||^2 \, ||l||^2$$

Valutiamo ora le prestazioni della legge di controllo con componente trasversa (4.23) rispetto a quella con (4.14). In particolare, considerando un sistema Master-Slave che evolve sulla sfera \mathbb{S}^2 , vale il seguente risultato.

Teorema 4.4.1. Le funzioni $\tau_G = -\frac{\langle u, z^s \times l \rangle}{||z^s \times l||^2} z^s \times l \ e \ \tau_L = \frac{l^T u}{||l||^2} l - u \ sono \ uguali, \ a$ parità di z^s , z^m ed u sulla sfera di ordine due.

Dimostrazione. Sia $T_{z^s} \mathbb{S}^2$ il piano tangente al manifold \mathbb{S}^2 nel punto z^s , e sia

 $\mathbb{B} = \{\hat{r}, \hat{l}\} \text{ una sua base, dove } \hat{r} := \frac{z^s \times l}{||z^s \times l||} \text{ e } \hat{l} := \frac{l}{||l||} \text{ sono linearmente indipendenti,} in quanto ortonormali. Esprimendo i vettori <math>\tau_G \text{ e } \tau_L$ rispetto alla base \mathbb{B} ottengo: $\tau_G = -\langle u, \hat{r} \rangle \hat{r} \text{ e } \tau_L = \langle u, \hat{l} \rangle \hat{l} - (\operatorname{Proj}_{\hat{r}}(u) + \operatorname{Proj}_{\hat{l}}(u)), \text{ dove la } \operatorname{Proj}_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{||v||} v,$ cioè la proiezione del vettore w sul vettore v; allora $\tau_L = -\langle u, \hat{r} \rangle \hat{r}$. I due vettori sono uguali rispetto alla base \mathbb{B} e quindi sono uguali rispetto a qualsiasi altra base dello spazio $T_{z^s} \mathbb{S}^2$. Da questo risultato deriva anche che $||u + \tau_G|| = ||u + \tau_L||.$

Corollario. Siano $\sum_L \in \sum_G$ due sistemi del tipo (4.6) che evolvono su una sfera unitaria, dove alla componente trasversa, τ , della legge di controllo di \sum_L si è sostituita la (4.23) e, a quella della legge di controllo di \sum_G si è sostituita la (4.14). Sia inoltre $z_L^s(z_L^m)$ lo stato dello slave (master) del sistema $\sum_L e z_G^s(z_G^m)$ lo stato dello slave (master) del sistema \sum_G . Se $z_L^m(t_0) = z_G^m(t_0) e z_L^s(t_0) = z_G^s(t_0)$ allora $z_L^s(t) = z_G^s(t), \forall t \ge t_0$.

Dimostrazione. Discretizzo l'equazione di evoluzione dello slave del sistema 4.6, scegliendo h molto piccolo a piacere e $r \in \mathbb{N}$. Allora, per la teoria sui manifold:

$$z^{s}(r+1) = \exp_{z^{s}}[h(f(z^{s}) + \tilde{u}(z^{s}))].$$
(4.24)

Voglio dimostrare che $z_L^s(r) = z_G^s(r)$, $\forall r \in \mathbb{N}$ e lo faccio per induzione su r. Con r = 0, $z_L^s(0) = z_G^s(0)$ per ipotesi. Supponiamo vero che $z_L^s(r) = z_G^s(r) \; \forall r \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che i due termini sono uguali per r + 1. Dal teorema precedente, otteniamo che se $z_L^s(r) = z_G^s(r)$ allora $\tau_L(r) = \tau_G(r)$ e quindi $\tilde{u}_L = \tilde{u}_G$. Allora, dall'equazione (4.24) risulta che anche $z_L^s(r+1) = z_G^s(r+1)$. La tesi è quindi verificata.

Vediamo di seguito una prova sperimentale che attesta la veridicità del Teorema prima enunciato. Prendiamo $z_L^s(0) = z_G^s(0) = [-0.5605 \ 0.4575 \ 0.6903]$, lo stato iniziale dello slave, e $z_L^m(0) = z_G^m(0) = [0.1585 \ -0.8624 \ 0.4807]$, lo stato iniziale del master, sia (4.5) la funzione di evoluzione dello stato e sia pari a 2 la costante di velocità di sincronizzazione c.

Come si osserva dalle Figure 4.10 e 4.9 i due sistemi $\sum_L e \sum_G$ evolvono sulla sfera unitaria allo stesso modo, come ci si aspettava dal corollario del Teorema 4.4.1. Le due componenti trasverse, $\tau_L e \tau_G$, offrono le stesse prestazioni sulla sfera \mathbb{S}^2 .



(a) Lo stato dello slave del sistema \sum_{G} (curva blu) coincide per ogni istante di tempo con lo stato dello slave del sistema \sum_{L} (curva rossa). In verde è raffigurato lo stato del master.



(b) Le componenti trasverse τ_L (rosso) e τ_G (blu): τ_L e τ_G sono uguali per ogni istante di tempo sulla sfera \mathbb{S}^2 (come ci si aspettava dal Teorema 4.4.1), in quanto lo stato iniziale dei due sistemi $(z_L^s(0), z_L^m(0))$ e $(z_G^s(0), z_G^m(0))$ coincide.

Figura 4.9: Simulazione dell'evoluzione sulla sfera \mathbb{S}^2 dei sistemi $\sum_L \in \sum_G$, con raffigurazione delle componenti trasverse $\tau_L \in \tau_G$.

4.4 Soluzione alternativa τ_L



Figura 4.10: Funzione di Lyapunov \sum_L (rosso) e \sum_G (blu). Le funzioni di Lyapunov coincidono istante per istante, in quanto le due leggi di controllo non vanno in alcun modo ad alterare la velocità di sincronizzazione.

Capitolo 5

Ottimizzazione della legge di controllo su oscillatori con spazio di stato la sfera unitaria S^{n-1}

5.1 Introduzione al problema

Estendiamo i risultati ottenuti nel precedente capitolo alla sfera n-dimensionale. Consideriamo quindi i due oscillatori master (3.1) e slave (3.2), il cui spazio di stato è rappresentato dal manifold \mathbb{S}^{n-1} con n > 3. Data la legge di controllo $\tilde{u} = P^{z^m \to z^s}(f(z^m)) - f(z^s) + \frac{c}{2} \log_{z^s}(z^m) + \tau(z^s, z^m)$, con $\tau \in T_{z^s} \mathbb{S}^{n-1}$ tale che $\tau(z^s, z^m) \perp \log_{z^s}(z^m)$, si vuole determinare $\tau(z^s, z^m)$, nel seguente caso di studio, in modo da andare a minimizzare istante per istante lo sforzo di controllo $||\tilde{u}||_{z^s}$. La funzione $\tau(z^s, z^m)$ deve essere scelta, anche in questo caso, in modo da non alterare la velocità di sincronizzazione. Sfruttando i risultati precedentemente ottenuti scegliamo la forma di τ nel modo seguente:

$$\tau := Y \llbracket z^s \rrbracket \log_{z^s}(z^m), \tag{5.1}$$

dove Y rappresenta uno scalare, $[\![z^s]\!]$ una matrice $n \times n$ opportunamente determinata in modo che τ sia perpendicolare a $\log_{z^s}(z^m)$, questo fa sì che non ci siano variazioni nella velocità di sincronizzazione. Per determinare la matrice $[\![z^s]\!]$ utilizziamo il seguente risultato:

Lemma 5.1.1. Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ esiste una matrice $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ | $X = -X^T$ per la quale $\zeta = Xy$ è perpendicolare ad y.

Dimostrazione. Nel caso n = 3 il prodotto matriciale [x]y è l'analogo del prodotto vettoriale $x \times y$, se si prende

$$\llbracket x \rrbracket := \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_3 & x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

dove x_i è la componente *i*-esima del vettore x. È facile verificare che $x \times y = \llbracket x \rrbracket y$. Nel caso n > 3 la dimostrazione dell'esistenza di tale matrice $\llbracket x \rrbracket$ non è banale. Per semplicità analizziamo il caso n = 4. Per dimensioni maggiori la matrice $[\![x]\!]$ segue le stesse regole costruttive. Siano $x, y \in \mathbb{R}^4$ e scegliamo la matrice $[\![x]\!]$ nel modo seguente:

$$\llbracket x \rrbracket := \begin{bmatrix} 0 & -x_4 & x_3 & -x_2 \\ x_4 & 0 & -x_2 & x_1 \\ -x_3 & x_2 & 0 & -x_4 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che $\langle y, \llbracket x \rrbracket y \rangle = 0$. In particolare abbiamo che:

$$\llbracket x \rrbracket y = \begin{bmatrix} -x_4 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_4 \\ x_4 y_1 - x_2 y_3 + x_1 y_4 \\ -x_3 y_1 + x_2 y_2 - x_4 y_4 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_4 y_3 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\langle y, \llbracket x \rrbracket y \rangle = (-x_4 y_2 y_1 + x_3 y_3 y_1 - x_2 y_4 y_1) + (x_4 y_1 y_2 - x_2 y_3 y_2 + x_1 y_4 y_2) + (-x_3 y_1 y_3 + x_2 y_2 y_3 - x_4 y_4 y_3) + (x_2 y_1 y_4 - x_1 y_2 y_4 + x_4 y_3 y_4) = 0.$$

Per la simmetria del prodotto scalare anche $\langle \llbracket x \rrbracket y, y \rangle = 0$. Quindi il vettore $\llbracket x \rrbracket y$ è perpendicolare al vettore y essendo nullo il prodotto scalare tra i due. In generale, dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ la matrice $\llbracket x \rrbracket$ tale che $\llbracket x \rrbracket y \perp y$ è una matrice antisimmetrica costruita nel modo seguente:

$$\llbracket x \rrbracket := \begin{bmatrix} 0 & -x_n & x_{n-1} & -x_{n-2} & \dots & \pm x_2 \\ x_n & 0 & -x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & \pm x_1 \\ -x_{n-1} & x_{n-2} & 0 & -x_{n-4} & \dots & \pm x_n \\ x_{n-2} & -x_{n-3} & x_{n-4} & 0 & \dots & \pm x_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mp x_2 & \mp x_1 & \mp x_n & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$
(5.2)

dove x_i è la componente i-esima del vettore x; inoltre i segni degli elementi della matrice, sono, su ogni riga (e quindi anche su ogni colonna essendo la matrice antisimmetrica) alternati.

5.2 Soluzione analitica

Generalizzando i risultati ottenuti nel caso di spazio di stato S^2 e sfruttando il Lemma 5.1.1 possiamo definire il seguente:

Teorema 5.2.1. Dato un sistema del tipo (4.6) che ha come spazio di stato la sfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} con $n \geq 3$, sia così definita la funzione $\tau(z^s, z^m)$ che massimizza la

5.3 Esempio su S^7

quantità $||u|| - ||u + \tau||$:

$$\tau(z^{s}, z^{m}) := -\frac{\langle u, \llbracket z^{s} \rrbracket \log_{z^{s}}(z^{m}) \rangle}{||\llbracket z^{s} \rrbracket \log_{z^{s}}(z^{m})||^{2}} \llbracket z^{s} \rrbracket \log_{z^{s}}(z^{m}),$$
(5.3)

dove $[\![z^s]\!]$ rappresenta la matrice antisimmetrica determinata secondo il Lemma 5.1.1 sulla base del vettore z^s all'istante $t \ge t_0$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema (4.3.1) andando a sostituire il vettore $z^{s}(t)$ con la matrice $[z^{s}(t)]$ e i prodotti vettoriali con quelli matriciali.

5.3 Esempio su S^7

Consideriamo un sistema $\sum_{\tilde{u}}$ descritto da equazioni (4.6) dove la funzione f(z): $\mathbb{S}^7 \to T_z \mathbb{S}^7$ è del tipo:

$$f(z) := (I_8 - zz^T)A(z \circ z \circ z) + Bz \text{ con } z(0) = z_0 \in \mathbb{S}^7,$$
 (5.4)

e inoltre:

$$\mathbb{S}^7 := \{ x \in \mathbb{R}^8 | x^T \, x = 1 \}$$
(5.5)

$$T_x \mathbb{S}^7 = \{ v \in \mathbb{R}^8 | x^T \, v = 0 \}.$$
(5.6)

Essendo il manifold ancora una sfera unitaria (se pur di dimensione 7) valgono le espressioni (4.7) per il trasporto parallelo e mappa logaritmica. Le matrici $A \in B$ sono state generate casualmente (ricordiamo che B è una matrice antisimmetrica), così come gli stati iniziali $z_0^m \in z_0^s$.

Nella figura 5.1 è rappresentato un esempio di sincronizzazione tra oscillatori master/slave su \mathbb{S}^7 . La sincronizzazione avviene con velocità esponenziale, dove la costante di velocità di sincronizzazione, c, è stata scelta pari a 2. L'energia cinetica dei due oscillatori va a coincidere, dopo un certo periodo di tempo, quando lo slave si sincronizza col master, pilotato dalla legge di controllo. L'energia cinetica restituisce informazioni sul comportamento del sistema non lineare sul manifold. Inoltre, essendo uno scalare indipendentemente dalla dimensione del manifold può essere sempre rappresentata graficamente. Dalla figura 5.2 si osserva che, come previsto, ad ogni istante di tempo, $||\tilde{u}|| = ||u+\tau|| \leq ||u||$. Cioè la componente trasversa determina una diminuzione dello sforzo di controllo non alterando la velocità di sincronizzazione.

Così come è stato fatto per la S^2 , nel capitolo 4, consideriamo una seconda simulazione nella quale si va a valutare la prestazione della legge di controllo $\tilde{u} = u + \tau$ alla quale il sistema (4.6) è soggetto, mettendo quest'ultima a confronto con la legge di controllo $\tilde{u} = u$, cioè quella legge che non comprende la componente trasversa, alla quale il sistema (4.13) è soggetto. Ovviamente questo è fatto facendo coincidere sia lo stato iniziale dei due sistemi, che la funzione di evoluzione dello stato. Nella Figura 5.3a si osserva come ci sia un miglioramento delle prestazioni andando ad utilizzare Capitolo 5 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^{n-1}



Figura 5.1: Esempio di sincronizzazione di oscillatori master/slave sulla sfera \mathbb{S}^7 : nel pannello in alto sono presenti le variabili di stato degli oscillatori (a sinistra il master, a destra lo slave). In basso a sinistra è raffigurata l'energia cinetica $(K := \frac{1}{2}f^T(z(t))f(z(t)))$, rossa dello slave e nera del master. Mentre in basso a destra è raffigurata la funzione di Lyapunov.

la legge di controllo che comprende la componente trasversa, rispetto alla legge che non comprende la componente trasversa, a parità di velocità di sincronizzazione. Infatti, come si evince dalla Figura 5.3b la funzione di Lyapunov resta invariata per entrambi i sistemi.

5.4 Soluzione alternativa τ_L per \mathbb{S}^{n-1} con n > 3

Riprendendo i concetti già esposti nel paragrafo 4.4, sia \tilde{u}_L la legge di controllo per la sincronizzazione del sistema Master/Slave, che incorpora la componente trasversa τ , del tipo (4.23), ottenuta con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Sia invece \tilde{u}_G la legge di controllo alla cui τ si è andati a sostituire la (5.3) che chiamiamo τ_G . Su \mathbb{S}^{n-1} con n > 3 la legge di controllo che incorpora la componente trasversa determinata con i moltiplicatori di Lagrange è più performante rispetto alla legge \tilde{u}_G , come dimostra il seguente Teorema.

Teorema 5.4.1. A parità di z^s e z^m risulta che:

$$||\tilde{u}_L||^2 \le ||\tilde{u}_G||^2 \tag{5.7}$$

per sistemi che evolvono su \mathbb{S}^{n-1} per $n \geq 3$



Figura 5.2: Effetto di τ sullo sforzo di controllo: a sinistra è raffigurato la norma, istante per istante, di u (in verde) e di $u + \tau$ (in blu). A destra è invece rappresentata la differenza $||u|| - ||u + \tau||$ istante per istante.

Dimostrazione. Sia $l := \log_{z^s}(z^m)$, e $[\![z^s]\!]$ la matrice che si ottiene da z^s sfruttando il Lemma 5.1.1. Risulta che:

$$||\tilde{u}_L||^2 = ||u + \tau_L||^2 = \left\| \frac{l^T u}{||l||^2} l \right\| = \frac{(l^T u)^2}{||l||^2},$$
$$||\tilde{u}_G||^2 = ||u + \tau_G||^2 = \left\| u - \frac{u^T [\![z^s]\!] l}{||\![z^s]\!] l||^2} [\![z^s]\!] l \right\| = ||u||^2 - \frac{(u^T [\![z^s]\!] l)^2}{||\![z^s]\!] l||^2}.$$

Definiamo $\hat{u} := \frac{u}{||u||}, \hat{l} := \frac{l}{||l||}, l' := [\![z^s]\!] l, \hat{l}' := \frac{l'}{||l'||}.$ Allora la (5.7) diventa:

$$(\hat{u}^T \hat{l})^2 + (\hat{u}^T \hat{l}')^2 \le 1.$$

Prendiamo come base di $T_{z^s} \mathbb{S}^{n-1}$ l'insieme dei versori ortogonali $\{\hat{l}, \hat{l}', \hat{b}_3, \hat{b}_4, \dots, \hat{b}_{n-1}\}$. Scrivendo \hat{u} rispetto alla base otteniamo:

$$\hat{u} = (\hat{u}^T \,\hat{l})\,\hat{l} + (\hat{u}^T \,\hat{l}')\,\hat{l}' + \sum_{i=3}^{n-1} (\hat{u}^T \,\hat{b}_i)\,\hat{b}_i.$$

Quindi,

$$||\hat{u}||^{2} = (\hat{u}^{T} \hat{l})^{2} + (\hat{u}^{T} \hat{l}')^{2} + \sum_{i=3}^{n-1} (\hat{u}^{T} \hat{b}_{i})^{2},$$

Capitolo 5 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^{n-1}

cioè

$$(\hat{u}^T \hat{l})^2 + (\hat{u}^T \hat{l}')^2 = 1 - \sum_{i=3}^{n-1} (\hat{u}^T \hat{b}_i)^2 \le 1.$$

L'ultima uguaglianza è verificata solo quando i sistemi evolvono sulla sfera \mathbb{S}^2 . In tal caso infatti $[\![z^s]\!] l = z^s \times l$ e per il Teorema 4.4.1, essendo le funzioni τ_L e τ_G uguali, allora $||\tilde{u}_L|| = ||\tilde{u}_G||$.

Quindi sulla sfera di ordine maggiore di 2 la prestazioni della legge \tilde{u}_L sono migliori in termini di sforzo di controllo, rispetto a \tilde{u}_G . Verifichiamo sperimentalmente su \mathbb{S}^7 quanto detto sulle prestazioni di \tilde{u}_L . Consideriamo due sistemi, \sum_G la cui legge di controllo ha come componente trasversa τ_G e \sum_L la cui legge di controllo ha come componente trasversa τ_L . Otteniamo i seguenti risultati: Nella figura 5.4 sono rappresentate in rosso le grandezze caratteristiche del sistema \sum_L , in blu quelle del sistema \sum_G . Come si osserva nella Figura 5.4b, lo sforzo di controllo della legge $\tilde{u}_L(t)$ è minore di quello della legge $\tilde{u}_G(t)$, a parità di velocità di sincronizzazione, infatti la funzione di Lyapunov (Figura 5.4a) è la stessa per entrambi i sistemi.



(a) Leggi di controllo a confronto: nel pannello a sinistra è rappresentata l'evoluzione dello sforzo di controllo della legge applicata al sistema $\sum_{\tilde{u}}$ (curva blu) e lo sforzo di controllo della legge applicata al sistema \sum_{u} (curva rossa). Mentre a destra è rappresentata la differenza dello sforzo di controllo delle due leggi, istante per istante, cioè il guadagno in termini di riduzione di sforzo di controllo, che si ottiene andando ad adottare una legge che comprende la componente trasversa.



(b) Funzioni di Lyapunov dei due sistemi, $\sum_{\tilde{u}}$ (curva gialla), \sum_{u} (curva blu). Pur essendo diversa la legge di controllo applicata ai due sistemi, questa non altera la velocità di sincronizzazione (determinata dal parametro c, posto pari a 2 in questa simulazione).

Figura 5.3: $\sum_{u} e \sum_{\tilde{u}} a$ confronto su \mathbb{S}^{7} : questa seconda simulazione va a valutare se il sistema che ha come legge di controllo quella che include la componente trasversa è più performante rispetto al sistema soggetto alla legge di controllo senza componente trasversa.

Capitolo 5 Ottimizzazione della legge di controllo su \mathbb{S}^{n-1}



(a) Funzioni di Lyapunov per i sistem
i \sum_L (rosso) e \sum_G (blu), che evolvono sulla sfer
a \mathbb{S}^7



(b) τ_L , τ_G a confronto: nelle prime due figure sono raffigurate le componenti delle funzioni trasverse per i due sistemi dinamici $\sum_L e \sum_G$. Nella terza figura, invece, è raffigurato lo sforzo di controllo delle leggi \tilde{u}_L (rosso) e \tilde{u}_G (blu).

Figura 5.4: Evoluzione sulla sfera \mathbb{S}^7 dei sistemi $\sum_L e \sum_G$. In alto è raffigurata la funzione di Lyapunov e in basso sono raffigurate le componenti trasverse $\tau_L e \tau_G$.

Capitolo 6

Generalizzazione della legge di controllo ottima sul manifold Riemanniano generico

6.1 Formulazione generale del problema

Dato un sistema:

$$\sum := \begin{cases} \dot{z}^m = f(z^m), \\ \dot{z}^s = f(z^s) + u(z^s, z^m) + \tau(z^s, z^m) \end{cases}$$
(6.1)

dove f è una funzione di transizione dello stato definita su $T_{z^s}M \in (M,g)$ è un manifold Riemanniano generico con metrica g; la funzione u è del tipo (3.9).

Per risolvere il problema di ottimizzazione della legge di controllo con l'introduzione della componente trasversa utilizziamo la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, andando a definire la funzione:

$$\begin{split} \tilde{\sigma}(\tau) &:= ||u+\tau||_{z^s}^2 + \lambda \langle l,\tau \rangle_{z^s} \\ &= ||u||_{z^s}^2 + ||\tau||_{z^s}^2 + 2 \langle u,\tau \rangle_{z^s} + \lambda \langle l,\tau \rangle_{z^s} \text{ con } l := \log_{z^s}(z^m), \end{split}$$

dove λ è il moltiplicatore e $\tilde{\sigma}(\tau)$ è una funzione definita nello spazio tangente al manifold in z^s e con valore in \mathbb{R} . Il prodotto scalare $\langle ., . \rangle_{z^s}$ è definito dalla metrica g_{z^s} e la norma $||.||_{z^s}^2 = \langle ., . \rangle_{z^s}$. Per determinare l'espressione di τ che minimizza $\tilde{\sigma}$ bisogna risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} &= 0\\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \lambda} &= \langle l, \tau \rangle_{z^s} = 0. \end{cases}$$
(6.2)

Ma per determinare $\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau}$ perturbiamo una soluzione τ con una quantità $\delta \tau \in T_{z^s}M$ e otteniamo:

$$\begin{split} \tilde{\sigma}(\tau+\delta\tau) &= ||u||_{z^s}^2 + ||\tau+\delta\tau||_{z^s}^2 + 2\langle u,\tau+\delta\tau\rangle_{z^s} + \lambda\langle l,\tau+\delta\tau\rangle_{z^s} \\ &= ||u||_{z^s}^2 + ||\tau||_{z^s}^2 + 2\langle \tau,\delta\tau\rangle_{z^s} + ||\delta\tau||_{z^s}^2 + 2\langle u,\delta\tau\rangle_{z^s} + \\ &+ 2\langle u,\tau\rangle_{z^s} + \lambda\langle l,\tau\rangle_{z^s} + \lambda\langle l,\delta\tau\rangle_{z^s} \\ &= \tilde{\sigma}(\tau) + ||\delta\tau||_{z^s}^2 + \langle 2u+2\tau+\lambda l,\delta\tau\rangle_{z^s}. \end{split}$$

Allora la $\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau}$ è la parte lineare in $\delta \tau$ di $\tilde{\sigma}(\tau + \delta \tau)$, cioè:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} := 2 \, u + 2 \, \tau + \lambda \, l. \tag{6.3}$$

Andando a sostituire la (6.3) nella (6.2) otteniamo:

$$\begin{cases} 2\,u+2\,\tau+\lambda\,l=0\\ \langle l,\tau\rangle_{z^s}=0. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per l utilizzando il prodotto scalare:

$$2\langle u,l\rangle_{z^s} + 2\langle \tau,l\rangle_{z^s} + \lambda ||l||_{z^s} = 0,$$

da cui il valore del moltiplicatore di Lagrange $\lambda = -2 \frac{\langle u, l \rangle_{z^s}}{||l||_{z^s}^2}$. Sostituendo λ nella prima equazione ottengo il valore ottimo di τ , cioè:

$$\tau = -u - \frac{\lambda l}{2} = \frac{\langle u, l \rangle_{z^s}}{||l||_{z^s}^2} l - u.$$
(6.4)

Andando a sostituire la (6.4) nell'espressione del vincolo $\langle \tau, l \rangle_{z^s} = 0$, si osserva che questo è soddisfatto. Inoltre è semplice verificare che $||\tilde{u}||_{z^s} = ||u + \tau||_{z^s} \leq ||u||_{z^s}$, dove a τ presente nella \tilde{u} si è andati a sostituire l'espressione (6.4). Infatti

$$||u + \tau||_{z^s}^2 = ||u + \frac{\langle u, l \rangle_{z^s}}{||l||_{z^s}^2} ||u||_{z^s}^2 = \frac{\langle u, l \rangle_{z^s}^2}{||l||_{z^s}^2}$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\langle u, l \rangle_{z^s}^2 \le ||u||_{z^s}^2 ||l||_{z^s}^2.$$

L'espressione trovata della componente trasversa τ è simile a quella determinata nella sezione 4.4, con la differenza che la (6.4) permette di andare a minimizzare lo sforzo di controllo (lasciando invariata la velocità di sincronizzazione) di una legge $\tilde{u} = u + \tau$ che a va pilotare la sincronizzazione di due oscillatori master e slave che evolvono su un manifold Riemanniano (M, g) generico.

6.2 Applicatione della legge di controllo \tilde{u} al manifold $\mathbb{SO}(3)$

Il manifold SO(3) (il gruppo di Lie di matrici di rotazione di ordine tre) è definito come $SO(3) := \{X \in \mathbb{R}^{3\times 3} : X^T X = I_3, \det(X) = +1\}$ e lo spazio tangente in un punto $X \in SO(3)$ è definito come $T_X SO(3) = \{X \Omega : \Omega \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \Omega^T + \Omega = 0\}$. Come esempio di funzione di transizione dello stato di un sistema non lineare del primo ordine su SO(3) prendiamo quella definita in [9]:

$$f(t,X) := \left[\left[\left(*(\operatorname{skew}(ZX)) \land *(\operatorname{skew}(SX)) \right) \right] \cos(\sqrt{t}) + \operatorname{skew}(S(X \circ X \circ X)) \sin(t) \right] X, \text{ con } X \in \mathbb{SO}(3),$$

$$(6.5)$$

dove X rappresenta una matrice 3×3 e Z e S rappresentano due matrici costanti 3×3 . L'operatore $[\![.]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3 \times 3}$ associa ad un vettore di tre dimensioni x la matrice

$$\llbracket x \rrbracket := \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

che si ottiene da x applicando il Lemma 5.1.1. Con * si denota l'operazione inversa di $[\![.]\!]$, cioè quella che associa alla matrice $[\![x]\!]$ il vettore x.

L'operatore skew : $\mathbb{SO}(3) \to \mathbb{SO}(3)$ è definito nel modo seguente

skew
$$(M) = \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}M^{T}$$
. (6.6)

Ma prima di implementare la legge di controllo \tilde{u} al sistema (6.1) dove la funzione di transizione dello stato è la (6.5) definiamo le mappe esponenziale e logaritmica e il trasporto parallelo, per il manifold SO(3). Dotiamo inoltre il manifold SO(3) della metrica definita dal prodotto scalare di Frobenius. Date due matrici $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ il prodotto scalare di Frobenius $\langle X, Y \rangle_F = tr(X^T Y)$. La norma $||X||_F = tr(X^T X)$; con tr(.) è indicata la traccia della matrice.

$$\begin{cases} \exp_X(V) &= X \exp(X^T V), \\ \log_X(Y) &= X \log(X^T Y), \\ P^{X \to Y}(V) &= X \sqrt{X^T Y} (X^T V) \sqrt{X^T Y}, \end{cases}$$
(6.7)

dove X, $Y \in SO(3), V \in T_X SO(3)$. Le funzioni di matrici sono definite nel modo seguente:

$$\exp(A) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s}{s!}, \text{ definita } \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$
$$\log(A) := -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(I-A)^s}{s}, \text{ definita se } ||A-I|| < 1,$$
$$\sqrt{A} := \exp\left(\frac{1}{2}\log(A)\right).$$

Nelle successive simulazioni (l'intervallo di tempo definito dalla variabile Time t è arbitrario) le matrici Z, S, così come gli stati iniziali dei due oscillatori, sono state scelte casualmente.



Figura 6.1: Sincronizzazione dei due oscillatori master/slave su SO(3). Nel pannello superiore è rappresentata l'evoluzione nel tempo della distanza Riemanniana al quadrato $d^2(z^s(t), z^m(t))$. Nel pannello inferiore è rappresentato l'andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato della legge u(t) (cioè $||u(t)||^2_{z^s(t)}$).

Nella Figura 6.1 è raffigurata l'evoluzione del sistema (6.1) soggetto alla legge di controllo che non comprende la componente trasversa, si va a fissare $\tau = 0$ per ogni $t \ge 0$. Si osserva come il segnale di controllo non sia inizialmente attivo e infatti la distanza Riemmaniana tra i due sistemi raggiunge valori molto alti. All'istante t = 10 viene attivato il segnale di controllo u che porta rapidamente i due sistemi a sincronizzarsi.

Nella figura 6.2 è raffigurata l'evoluzione del sistema (6.1) soggetto alla legge di controllo che comprende la componente trasversa (6.4). All'istante t = 10 viene attivato il segnale di controllo \tilde{u} che porta rapidamente i due sistemi a sincronizzarsi. Le matrici Z, S, così come gli stati iniziali dei due oscillatori, coincidono per le due simulazioni, quella in Figura 6.1 e in Figura 6.2. Dalla Figura 6.3 si evince come la legge di controllo che incorpora la componente trasversa è più performante in quanto permette di ottenere uno sforzo di controllo minore, a parità di velocità di sincronizzazione.





Figura 6.2: Sincronizzazione dei due oscillatori master/slave su SO(3). Nel pannello superiore è rappresentata l'evoluzione nel tempo della distanza Riemanniana al quadrato $d^2(z^s(t), z^m(t))$. Nel pannello inferiore è rappresentato l'andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato della legge $\tilde{u}(t)$.



Figura 6.3: Andamento nel tempo dello sforzo di controllo al quadrato delle due leggi $\tilde{u}(t)$ (blu) e u(t) (rosso). Fino all'istante 10 lo sforzo di controllo delle due leggi coincide, in quando i segnali non sono ancora attivi.

Capitolo 7

Conclusioni

Nel presente lavoro siamo partiti dalla legge di controllo u definita in [8] per la sincronizzazione di due oscillatori non lineari del primo ordine su un manifold Riemanniano, per poi andare a definire un'opportuna componente trasversa τ in modo da andare a minimizzare istante per istante lo sforzo di controllo e far sì che il sistema a ciclo chiuso, Master-Slave-Controllore, che adotta come legge di controllo la $\tilde{u} = u + \tau$ sia più performante rispetto ad un sistema la cui legge di controllo non include la componente trasversa. La funzione τ è stata scelta in modo da non andare in alcun modo ad alterare la velocità di sincronizzazione dei due oscillatori, esponenziale e definita dal parametro c presente nella funzione u. La strategia di controllo ottenuta può essere applicata ad un qualunque sistema del primo ordine che evolve su un manifold Riemanniano, in particole è stato verificato numericamente come la legge di controllo $\tilde{u} = u + \tau$ offra prestazioni migliori per sistemi che evolvono sul manifold \mathbb{S}^{n-1} e sul manifold $\mathbb{SO}(3)$.

Bibliografia

- J.M. González-Miranda. Synchronization and Control of Chaos: An Introduction for Scientists and Engineers. Imperial College Press, 2004.
- [2] F. Dörfler, M. Chertkov, and F. Bullo. Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. Proc Natl Acad Sci USA, 110(6):2005, February 2013.
- [3] T.E. Murphy, A.B. Cohen, B. Ravoori, K. R.B. Schmitt, A.V. Setty, F. Sorrentino, C.R.S. Williams, E. Ott, and R. Roy. Complex dynamics and synchronization of delayed-feedback nonlinear oscillators. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1911):343–366, January 2010.
- [4] J.-P. Yeh and K.-L. Wu. A simple method to synchronize chaotic systems and its application to secure communications. *Mathematical and Computer Modelling*, 47(9):894–902, 2008.
- [5] X. Wu, C. Xu, and J. Feng. Complex projective synchronization in driveresponse stochastic coupled networks with complex-variable systems and coupling time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(3):1004–1014, 2015.
- [6] C.W. Wu. Synchronization In Complex Networks Of Nonlinear Dynamical Systems. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [7] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153, 2008.
- [8] S. Fiori. Synchronization of first-order autonomous oscillators on riemannian manifolds. Discrete & Continuous Dynamical Systems – B, 22:1–17, January 2017.
- S. Fiori. Non-delayed synchronization of non-autonomous dynamical systems on Riemannian manifolds and its applications. *Nonlinear Dynamics*, 94(4):3077–3100, 2018.