UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea triennale in Economia e Commercio

Le leggi di potenza e le loro applicazioni in ambito economico.

Power laws and their applications in the economic field.

Relatore: Chiar.mo
Prof. Antonio Palestrini

Rapporto Finale di:
Alberto Sartini

Anno Accademico 2018 – 2019

INDICE

INTRODUZIONE

La matematica è definita come l'insieme delle scienze deduttive che studiano i numeri, le figure geometriche oppure gli enti astratti analoghi.

La potenza e la generalità dei risultati della matematica, la rendono sovrana nelle discipline scientifiche, non a caso è conosciuta ai più con l'epiteto di "regina delle scienze": ogni settore scientifico o tecnico, dalle scienze fisiche all'ingegneria, dall'economia alle scienze informatiche, fa largo uso degli strumenti di analisi, di computazione e di modellizzazione offerti dalla matematica.

L'importanza di questa disciplina è data dalla sua versatilità e, in particolar modo, dalla caratteristica di essere un vero e proprio mezzo per tradurre costrutti logici in un linguaggio quantitativo. Possiamo affermare infatti l'esistenza di numerosi punti di incontro tra la matematica e le scienze sociali (o definite "non dure"), in particolar modo nelle scienze economiche.

I rapporti tra matematica ed economia e, quindi lo sviluppo dell'economia matematica, si temprano e si definiscono maggiormente all'inizio degli anni Settanta dell'Ottocento con la rivoluzione marginalista. Nel 1871 vengono pubblicati "Teoria di politica economica" dell'economista e logico inglese William Stanley Jevons (1835-1882) e "Principi di economia" dell'economista austriaco Carl Menger (1840-1921), mentre in Francia nel 1874 esce: "Elementi di economia politica pura o teoria della ricchezza sociale" dell'economista Leon Walras (1834-1910). Quest'ultimo esporrà la teoria in maniera più nitida ed esauriente attraverso la formulazione di un equilibrio economico meccanicistico, raggiungibile dai liberi movimenti delle forze di mercato se, quest' ultime, non vengono perturbate. La scuola keynesiana, nel corso della prima metà del '900, impugna il pensiero neoclassico affermando che la domanda aggregata, in alcune circostanze, non è sufficiente a garantire la piena

occupazione, confermando così l'importanza dell'intervento pubblico statale a sostegno di essa.
Paul Samuelson (1915-2009), appartenente alla scuola Neo-Keynesiana[1], si chiese assieme ad un fisico, se esistesse una legge in economia che fosse veritiera e non banale[2] allo stesso tempo. Una sfida particolarmente ardua in quanto, risultati che si verificano essere veri sono solitamente banali (come ad esempio l'inclinazione verso il basso della curva di domanda), mentre risultati non banali (se la domanda ha le proprietà della simmetria di Slutsky) richiedono elevata sofisticazione e razionalità da parte degli agenti per essere validi. Samuelson rispose alla domanda posta dallo scienziato con "la legge del vantaggio comparato[3]". La storia non ci dice se il fisico fosse soddisfatto o meno della risposta. La legge del vantaggio comparato sostiene che, in presenza di libero scambio, un agente produrrà maggiori quantità e consumerà minori quantità di un bene per il quale ha un vantaggio comparativo. Quest' ultima è una legge qualitativa, non quantitativa come potrebbe essere per le leggi fisiche.
É difatti vero che gran parte dei fondamenti dell'economia moderna poggia su leggi qualitative lasciando scarso spazio a quelle quantitative ed attendibili.
Una risposta moderna al quesito posto da Samuelson sarebbe stata una serie di leggi di potenza, in quanto: non-banali, vere, dimostrate empiricamente e teoricamente.[4]
In questo elaborato andrò ad analizzare la formalizzazione matematica delle leggi di potenza e a illustrare la rappresentazione grafica in scala logaritmica. Andrò inoltre a trattare leggi di potenza empiriche che hanno a che fare con modelli quali: città, imprese e mercato azionario.

---

[1] Scuola di pensiero economico che analizza situazioni di disequilibrio economico e costituisce una riconsiderazione dei fondamenti microeconomici del pensiero keynesiano. Gli economisti neokeynesiani ipotizzano che gli agenti sul mercato operino le proprie scelte in modo razionale in base alla quantità e non hai prezzi, non potendo influenzare direttamente il livello di questi e considerandoli pertanto rigidi.
[2] Dall' inglese "non-trivial", la non-banalità , in matematica, indica un'affermazione o un teorema non facile da dimostrare.
[3] Concepita a partire dai concetti essenziali dell'economista inglese David Ricardo, si basa sull' assunto che: un paese tenderà a specializzarsi nella produzione del bene su cui ha un vantaggio comparato (cioè la cui produzione ha un costo opportunità, in termini di altri beni, minore che negli altri paesi).

Elencherò le circostanze che generano leggi di potenza, riassumerò alcune delle spiegazioni teoriche proposte e illustrerò le leggi di potenza legate a enigmi economici che richiedono ricerche avanzate. Infine, descriverò l'eclетticità delle leggi di riportando alcune delle innumerevoli applicazioni delle leggi di potenza al di fuori delle scienze economiche.

[4] Allo stesso tempo, in contesti altamente astratti, altre leggi valgono, come la formula di Black-Scholes.

Capitolo 1 - ALCUNE LEGGI DI POTENZA EMPIRICHE

La frequenza di utilizzo delle parole in un testo, il numero di città caratterizzate da una determinata popolazione, la frequenza di terremoti di una specifica intensità e la legge di gravitazione universale sono fenomeni, naturali e sociali, accumunati dalla manifestazione delle leggi di potenza.

Una spiegazione formale delle leggi di potenza tornerà sicuramente utile.

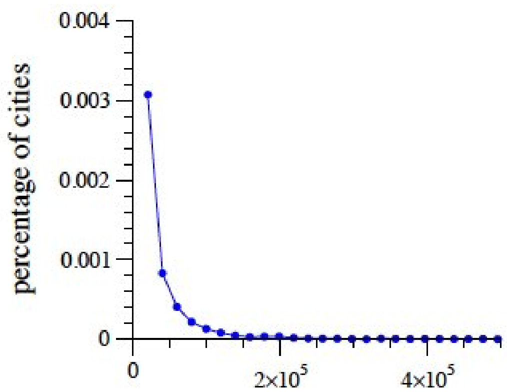
Una legge di potenza è una relazione del tipo $Y = aX^{\beta}$, dove Y e X sono le nostre variabili di interesse, β è l'esponente della legge di potenza, e a è una costante.

1.1 DIMENSIONI DELLE CITTÀ

Consideriamo la percentuale di città all'aumentare del numero degli abitanti (*figura 1*). Si osserva un fenomeno scontato: una nazione ha poche città molto popolose e tante città medio piccole. Ciò che è molto meno banale è che queste frequenze abbiano un andamento più o meno simile per tutte le nazioni del mondo e che questo andamento segua all'incirca una legge empirica.

Figura 1

Grafico che mostra il numero di città della Terra al variare del numero di abitanti



Fonti: M.E.J. Newman in "Power laws, Pareto distribution and Zipf's laws" (2006).

Per verificare l'andamento lineare di questa corrispondenza dobbiamo usufruire della scala logaritmica, ampiamente sfruttata dagli scienziati poiché permette di ottenere risultati piuttosto precisi. Quando si hanno di fronte dei dati che variano su scale molto diverse, è utile trasformare la scala in modo da "rimpicciolire " queste differenze.
Utilizzeremo quindi un *log-log plot,* ovvero un grafico bidimensionale che utilizza la scala logaritmica sia nell' asse orizzontale che in quello verticale.

Per fare ciò dovremmo calcolare il logaritmo (in qualsiasi base) della funzione $Y = aX^{\beta}$; questo ci permette di ottenere:

$$\log y = \beta \log x + \log a.$$

Impostando $X = \log x$ e $Y = \log y$, che corrispondono agli assi del log-log plot, possiamo ottenere l'equazione:

$$Y = mx + q$$

Che è l'equazione di una retta dove $m = \beta$ indica la pendenza della retta (in gradienti), e $q = log a$ è l'intercetta nell' asse $\log y$.
Per analizzare meticolosamente questo tipo di regolarità, è utile essere ancor più astratti e interpretare la legge di potenza come una distribuzione: La probabilità che la popolazione di una città presa a caso sia maggiore di x è proporzionale a $1/x^{\zeta}$ con $\zeta \approx 1.$ Più in generale,

$$P(Popolazione > x) = a/x^{\zeta}$$

con x maggiore di una determinata soglia (in questo caso 250'000 abitanti); una regolarità empirica di questo tipo è una legge di potenza. La parte interessante è il coefficiente ζ

chiamato esponente di distribuzione. Quest' esponente è talvolta chiamato "esponente di Pareto", perché Vilfredo Pareto scoprì leggi di potenza nella distribuzione del reddito (Perksy 1992).

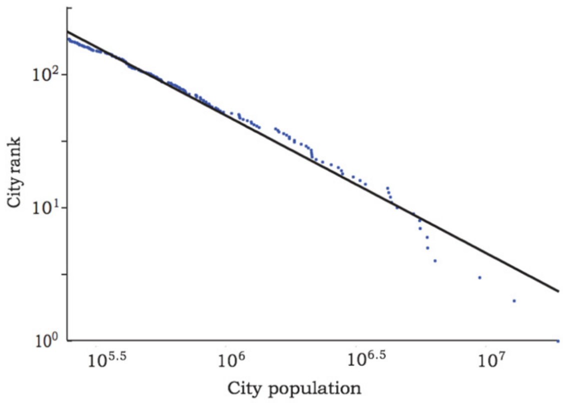
Un ζ minore di 1 indica un elevato grado di disuguaglianza nella distribuzione: significa una maggior probabilità di trovare città molto grandi o redditi molto alti.

Inoltre, l'esponente è indipendente dal numero di abitanti.

Una "legge di Zipf" è una legge di potenza con esponente uguale 1 (quindi in questo caso la pendenza della retta sarà uguale a -1). George kingsley Zipf fu un linguista dell'Università di Harvard che accumulò prove significative sulla validità delle leggi di potenza e le rese popolari (Zipf 1949).

Figura 2

Grafico che rappresenta il numero di città al variare della popolazione, per tutte le città degli Stati Uniti con popolazione sopra i 250,000 abitanti nel 2010.



Fonti: Autore, utilizzando i dati dal "Statistical Abstract of the United States (2012).

Come si vede dalla *figura 3* i valori sembrano disporsi su una retta (o almeno si avvicinano molto ad un andamento simile ad una retta trattandosi di una legge empirica che descrive fenomeni storico/sociali e, all'apparenza, casuali).

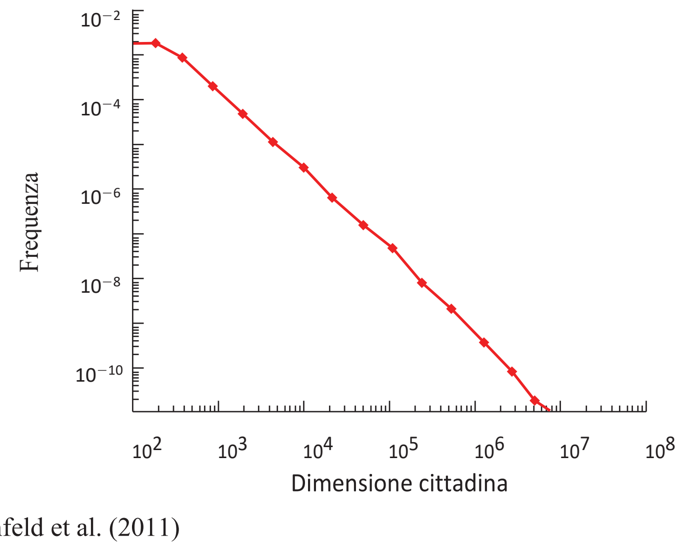
I dati che si comportano più o meno in questo modo sono quelli descritti dalla legge di potenza o empirica di Zipf.

Cosa succede se prendiamo in considerazione città con una popolazione sotto la soglia di 250'000? La legge di Zipf vale ancora?

Quando misuriamo la dimensione delle città sarebbe meglio prendere in osservazione agglomerati cittadini piuttosto che le mere entità legali basate sui confini amministrativi. Ronzenfeld et. al. (2011) affronta il problema usando un nuovo algoritmo che ricostruisce la popolazione di piccole città basandosi su dati geografici con precisione capillare. La Figura 2 ci mostra i risultati della distribuzione delle dimensioni delle città nel Regno Unito, dove i dati sono particolarmente validi.

Figura 3

Funzione di densità della Dimensione Cittadina (agglomerazioni) del Regno Unito



Fonti: Rozenfeld et al. (2011)

.Note: Notiamo una legge di potenza piuttosto valida a partire da 500 abitanti. L'esponente paretiano è in realtà statisticamente non diverso da uno per una dimensione S>12'000 abitanti.

Possiamo notare che ,per città con un numero di abitanti maggiore o uguale a 500, il grafico descrive una retta. La legge di Zipf è estremamente valida anche in questo caso. Perché gli scienziati sociali dovrebbero essere interessati a questa relazione? Come scrisse Krugman (1996) 23 anni fa, riferendosi alle leggi di Zipf: "Il fallimento dei modelli esistenti nello spiegare una forte regolarità empirica indica che, nonostante gli importanti progressi nella modellizzazione dei sistemi urbani, manca qualcosa di estremamente importante. Proposte sono le benvenute".

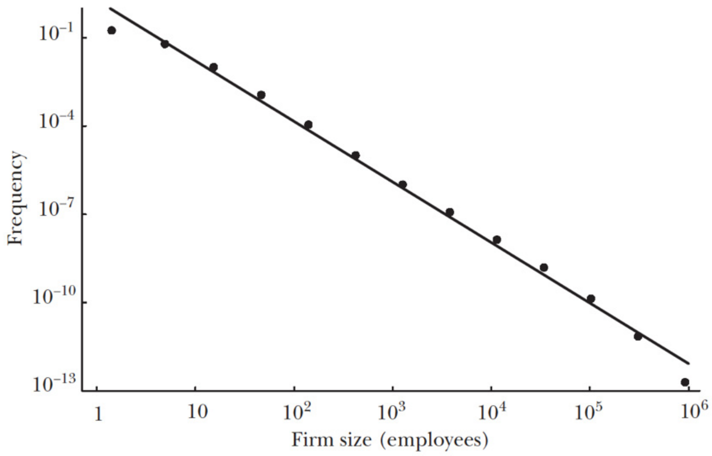
Possiamo affermare che da quando Krugman richiese dei suggerimenti, c'è stato un miglioramento della comprensione dell'origine delle leggi di Zipf, che ha obbligato grandi riconsiderazioni sullo studio dell'origine di città ed anche imprese.

1.2 LA DIMENSIONE DELLE IMPRESE

Osserviamo ora la distribuzione della dimensione delle imprese. Servendosi dei dati del censimento USA, Axtell (2001) classifica le imprese in "contenitori" in base alla loro dimensione misurata attraverso il numero di impiegati, e ricava il logaritmo del numero di imprese in ogni contenitore. Il risultato mostrato nella Figura 4 ci mostra una linea retta: ancora una volta abbiamo ottenuto una legge di potenza. Possiamo inoltre eseguire la conversione in "densità", ovvero rappresentando il numero di imprese con una dimensione approssimativamente uguale a x. Se la legge di potenza vale, allora la densità della distribuzione delle imprese sarà $\mathrm{f}(x) = b/x^{\zeta+1}$, quindi il coefficiente angolare in un grafico del tipo log-log sarà $-(\zeta + 1)$. Sorprendentemente, Axtell trova che l'esponente ζ=1.059.

Ciò dimostra l'esistenza di una "Legge di Zipf" per le imprese.

Figura 4
Frequenza (espressa in scala logaritmica) al variare della dimensione (espressa in scala logaritmica) delle imprese statunitensi per il 1997



Fonti: Axtell (2001)

Questa scoperta ha imposto una rivalutazione dei fondamenti delle imprese. La maggior parte delle teorie statiche che spiegano l'esistenza delle imprese (come le economie di scopo, i costi fissi e l'elasticità della domanda) non prevedrebbero una legge di Zipf. Necessitiamo quindi di nuove teorie, che vedremo presto.

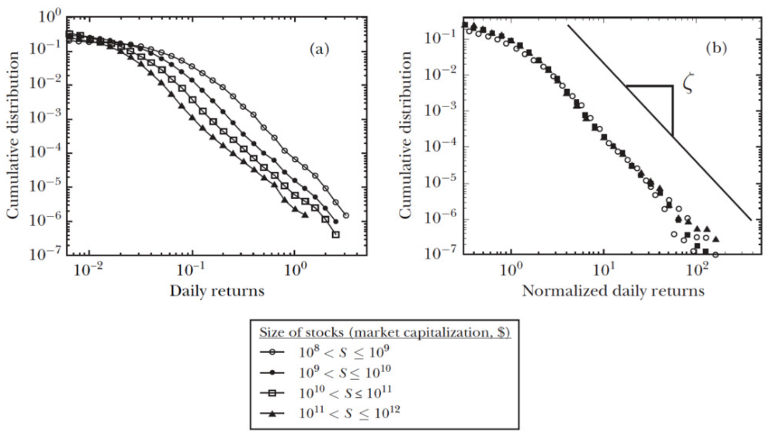
1.3 I MOVIMENTI DEL MERCATO AZIONARIO

È risaputo che i rendimenti del mercato azionario sono rappresentati da una funzione Gaussiana[5] a "coda spessa", questo significa che la probabilità di trovare valore estremi è maggiore rispetto a una Gaussiana con la stessa media e deviazione standard. Un gruppo di "econofisici" è riuscito a quantificare una serie di leggi di potenza riguardanti il mercato azionario. Per esempio, la dimensione dei movimenti del mercato azionario giornaliero è rappresentata nella Figura 5. Queste sono rilevanti per: :$P(|r_t|>x)=a/x^{\zeta}$ con $\zeta = 3$, sono le cosiddette leggi cubiche dei rendimenti del mercato azionario. La parte sinistra della Figura 5 rappresenta la distribuzione di quattro differenti dimensioni di azioni. La parte di destra identifica i rendimenti azionari normalizzati, calcolata dividendo i rendimenti azionari per la loro deviazione standard: dopo la normalizzazione, le 4 curve collassano in una stessa curva. Questo è un esempio di "universalità", termine utilizzato nella trattazione delle leggi di potenza (e in fisica) stante a significare che sistemi differenti si comportano nella stessa maniera, dopo un ridimensionamento.

Allo stesso modo, tante altre quantità relative ai mercati azionari sono distribuite seguendo una legge di potenza (Plerou, Gopikrishnan, e Staley 2005; Kyle e Obizhaeva 2014; Bouchand, Farmer e Lillo 2009).

Figura 5

Distribuzione cumulativa dei rendimenti giornalieri del mercato azionario per differenti dimensioni delle azioni



Fonti: Plerou et. Al. (1999)

[5] Dal nome del matematico e fisico K. F. Gauss(1777-1855). Trattasi di curva di tipo esponenziale, dalla caratteristica forma a campana, simmetrica rispetto ad una determinata ascissa μ (rappresentante la media)e caratterizzata da un secondo parametro σ (rappresentante la deviazione standard)che ne esprime la larghezza.

Note: il pannello di sinistra rappresenta la distribuzione di quattro differenti dimensioni di azioni, in termini di capitalizzazione di mercato. Il pannello di destra ci mostra i rendimenti normalizzati per la volatilità. IL coefficiente – ζ è vicino a -3, si individua quindi la legge cubica delle fluttuazioni del mercato azionario $P(|r|>x)\sim kx^3$

Per esempio, il numero di compravendite giornaliere è regolato da una legge di potenza con esponente 3, mentre il numero di azioni scambiate in un dato intervallo di tempo presentano un esponente uguale a 1.5, e l'impatto dei prezzi (che corrisponde a quanto i prezzi variano quando un'ingente quantità di azioni viene comprata o venduta) è proporzionale al volume della potenza di 0.5. Perché agli scienziati sociali importa tutto ciò? Un'implicazione della legge cubica è che ci sono molti più eventi estremi che si verificherebbero se la distribuzione fosse Gaussiana; per esempio, se la distribuzione fosse stata il risultato di una serie di eventi a probabilità fissa, come tirare i dadi o lanciare una moneta. Più precisamente, in una legge cubica, le chances che si verifichi un evento a 10 deviazioni standard, e a 20 deviazioni standard sono rispettivamente, $5^3 = 125$ e $10^3 = 1{,}000$ volte meno probabili rispetto a una deviazione standard di due, mentre se la distribuzione dei rendimenti fosse una Gaussiana, le chances di una deviazione standard di 10 e 20 sarebbero rispettivamente10^22 e 10^87 volte meno probabili di un evento a due deviazioni standard. Infatti, in un mercato azionario composto da circa 1000 azioni, eventi a 10 deviazioni standard accadono praticamente ogni giorno. Cercare spiegazioni per questo tipo di regolarità ci sollecita rielaborare il funzionamento dei mercati azionari. Vedremo in seguito le teorie che ci spiegano esattamente il funzionamento di questi esponenti.

Capitolo 2 – LE ORIGINI DELLE LEGGI DI POTENZA.

In questo capitolo introdurrò i due meccanismi fondamentali che generano le leggi di potenza:

1. I modelli di crescita casuale che generano una legge di potenza
2. Trasferimento di tale legge di potenza, attraverso corrispondenza e ottimizzazione: questo è possibile utilizzando la variabile generata dal modello di crescita casuale come input per ottenere un'ulteriore legge di potenza che possiede una variabile di output differente.

2.1 LA CRESCITA CASUALE

I modelli di crescita casuale sono oggetti fondamentali nella moderna teoria della probabilità, hanno dato origine a nuova branca della matematica e possiedono numerose applicazioni, tra cui lo studio della crescita tumorale o l'analisi del flusso di fluidi in masse porose. Il meccanismo indispensabile per ottenere una legge di potenza è la crescita casuale proporzionale (Champernowne 1953; Simon 1955). Ipotizziamo di avere una certa distribuzione iniziale di imprese che crescono e si rimpiccioliscono casualmente, con shock indipendenti e soddisfano la legge di Gibrat[6]. Le sole ipotesi iniziali non assicurano però il raggiungimento di uno stato stazionario, questo perché implicano una distribuzione che col tempo diventa una log-normale[7] con una varianza sempre più grande. Se consideriamo la presenza di un limite inferiore relativo alla dimensione delle imprese (in modo tale che la dimensione delle imprese non possa scendere sotto quella soglia), risulterà che il modello produce una distribuzione in stato stazionario; quest'ultima è una legge di potenza con esponente ζ dipendente dal processo di crescita.

---

[6] Legge formulata nel 1931 dall' ingegnere francese R. Gibrat che afferma che tutte le imprese, nella fase iniziale, hanno lo stesso tasso di crescita atteso e la stessa deviazione standard di tasso di crescita.

Affinché la legge di potenza sia efficiente, il coefficiente ζ deve essere diverso da 1.
Questo perché se $\zeta = 1$, significa che la soglia presa in considerazione è molto piccola e che abbiamo una quantità esogena di popolazione da distribuire tra le imprese e le città.
Infatti, un esponente leggermente maggiore di 1 è il più piccolo ma più adatto per una popolazione finita. Tale ragionamento ci permette di spiegare perché nelle leggi di Zipf (in economia) $\zeta = 1$: perché le variabili economiche sono rappresentate da un modello di crescita casuale con un limite inferiore molto piccolo e qualche vincolo aggiuntivo sulla dimensione totale del sistema.
La trattazione "meccanica" appena esposta è utile agli scienziati sociali per individuare quali variabili mostrano una crescita casuale e proporzionale. Il comportamento degli agenti economici descritto dalla legge di Gibrat e dalle leggi di potenza è il seguente: imprese e città mostrano rendimenti di scala[8] costanti, con una leggera deviazione dal benchmark[9] e molta casualità. Nel caso in cui ci sia un aumento dei rendimenti di scala (e delle economie e diseconomie di agglomerazione) da parte delle imprese si possono ottenere tre risultati. Nel primo caso gli effetti sono insufficienti per essere percepiti, nel secondo caso gli effetti possono essere compensati da fattori quali servizi urbani; mentre, nel terzo caso, si assume che gli shock abbiano effetti permanenti, alcuni dei quali possono causare un ripristino alle condizioni precedenti come successe in Giappone in cui, a seguito della seconda Guerra Mondiale, le città tornarono alla loro dimensione iniziale (Davis e Weinstein 2002).
Allo stesso modo, per la distribuzione del reddito, è fondamentale tener conto di variabili qualitative come la parsimonia e la risposta ad incentivi, non trascurando mai l'assunto meccanico che sta alla base di queste teorie: la crescita casuale proporzionale causa leggi di potenza.

---

[7] È la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X il cui logaritmo ci permette di ottenere una distribuzione normale.
[8] Ci permettono di analizzare la variazione degli output al variare dei fattori produttivi (input).
[9] Punto di riferimento per la valutazione delle prestazioni di mercato.

2.2 OTTIMIZZAZIONE E TRASFERIMENTO DELLE LEGGI DI POTENZA

L'ottimizzazione è fondamentale per generare leggi di potenza. Per esempio, la regola di Allais-Baumol-Tobin per la domanda di moneta è una legge di potenza in cui abbiamo $i^{-1/2}$ (dove i indica il tasso d'interesse). Una seconda relazione con fondamentali applicazioni in economia è la legge di potenza di Hume; questa afferma che se raddoppiamo l'offerta di moneta, otterremo un raddoppiamento del livello dei prezzi nel lungo periodo. La legge di Hume può essere così descritta:

$$Prezzi = a(Offerta\ di\ Moneta)^1$$

In cui a è un fattore che dipende dal PIL. Come possiamo notare si tratta di una semplice legge di potenza con esponente uguale a 1, e non a caso, la prima relazione empirica non banale applicabile in economia.

La generazione di leggi di potenza è largamente incentivata dalle loro proprietà di aggregazione:

- Sommando le distribuzioni di due leggi di potenza indipendenti otterremo una nuova legge di potenza.
- Moltiplicando le distribuzioni di due leggi di potenza indipendenti e, prendendone i massimi o i minimi, otterremo una nuova legge di potenza

Ciò spiega la loro prevalenza e la loro capacità a sopravvivere a trasformazioni.

2.3 LE SUPERSTARS IN ECONOMIA

I soggetti che ottengono guadagni estremamente elevati in settori quali arte, sport e business vengono definiti “superstars” in ambito economico. Tale appellativo può essere impiegato per descrivere la figura del CEO[10] o chief executive officer. Osserveremo di seguito la manifestazione di leggi di potenza nel contesto delle superstars.

Supponiamo di trovarci in una condizione iniziale in cui numerose imprese, di varie dimensioni, competono per assumere il miglior CEO; in questo modello il talento dei CEOs sarà definito dall’ incremento di profitti attesi che tale soggetto generà nei confronti dell’impresa. Come sappiamo, la competizione e la concorrenza stimolano l’efficienza, ciò significa che assoceremo all’impresa più grande il CEO più efficiente, alla seconda più grande assoceremo il secondo CEO più efficiente e via dicendo (Terviö 2008). Se applichiamo al modello la teoria dei valori estremi, possiamo ottenere le proprietà della coda della distribuzione dei talenti; questo ci permette di affermare che (dati due CEOs adiacenti ordinati per talento) la differenza di talento tra i due varia come una legge di potenza del loro rango.

In maniera più esplicita, consideriamo il CEO numero n che gestisce l’impresa di dimensioni $S(n)$. Indichiamo con $S(n^*)$ la dimensione media delle imprese e con $D(n^*)$ una costante che dipende dai parametri di modello. Lo stipendio del CEO sarà:

$$w(n) - D(n^*)S(n^*)^{1-b}S(n^*)^b$$

Ponendo b=1/3 e ipotizzando che un’impresa sia 8 volte maggiore dell’impresa media ($S(n) = 8\,S(n^*)$), otterremo che il CEO dell’impresa maggiore guadagnerà il doppio del CEO legato all’impresa mediana ($8^{\frac{1}{3}}$). Tuttavia, se la dimensione di tutte le imprese è moltiplicata per 8, segue che lo stipendio di qualsiasi CEO sarà moltiplicato per 8. In questo

[10] Il “chief executive officer” corrisponde alla figura dell’ amministratore delegato di una azienda.

modo l'equazione crea due leggi di potenza poiché c'è un ridimensionamento sia nella dimensione media delle imprese che nella dimensione dell'impresa $S(n)$. Questo approccio comporta delle implicazioni che valgono empiricamente: lo stipendio del CEO, in un dato anno, è proporzionale a $S(n)^{\frac{1}{3}}$; inoltre quando la dimensione di tutte le grandi imprese è moltiplicata per un fattore λ allora anche i rendimenti delle grandi imprese saranno moltiplicati per λ.

La teoria afferma sostanzialmente che un incremento della dimensione aziendale causa un aumento di paga per il CEO; di conseguenza piccole differenze di talento portano a grandi differenze di reddito. Quindi, quando le grandi imprese concorrono per assumere il miglior CEO, l'esistenza di piccole differenze di talento incide largamente sulle grandi imprese generando offerte di salario esponenzialmente maggiori. Tutto ciò conferma l'ipotesi iniziale secondo cui, le leggi di potenza, regolano l'economia delle superstars. La stessa logica potrebbe essere applicata a mercati differenti ma con le caratteristiche delle superstars, come per esempio il prezzo di appartamenti con vista a New York, lo stipendio dei migliori atleti o il prezzo di opere d'arte particolarmente bramate.

Capitolo 3 – GRANULARITÀ: FLUTTUAZIONI AGGREGATE DERIVANTI DA SHOCK MICROECONOMICI

In questo capitolo analizzerò le applicazioni delle leggi di potenza per studiare le fluttuazioni aggregate in contesti molto famigliari agli economisti: esportazioni, mercato azionario e PIL.

3.1 LA GRANULARITÀ

Secondo il matematico Xavier Gabaix, le fluttuazioni aggregate provengono da shock idiosincratici nei confronti delle imprese. Uno shock idiosincratico, a differenza di uno comune, influenza una particolare variabile lasciando costanti le altre; per esempio, se abbiamo un modello in cui la spesa è in funzione del reddito e del livello dei prezzi, uno shock idiosincratico causerà variazioni di spesa senza intervenire direttamente sulle variabili "prezzo" e "reddito". Questo può essere da fattori esogeni al modello, come il mutamento delle preferenze di un'unica famiglia. Nel caso in cui la distribuzione della dimensione delle imprese sia rappresentata da una gaussiana a "coda spessa", gli shock nelle imprese più grandi possono influenzare l'output totale in maniera sostanziale.
L'esistenza della distribuzione di una legge di potenza, per la dimensione aziendale, ci suggerisce che l'attività economica è concentrata tra le imprese.
Per esempio, in Giappone, il 35% delle esportazioni è detenuto dalle 10 aziende più grandi, come riportano di Giovanni e Levchenko (2012): "in Korea, i 10 gruppi di imprese maggiori contabilizzano il 54% del PIL e il 51% delle esportazioni totali, Samsung è responsabile del 23% delle esportazioni del 14% del PIL". Osserviamo che l'attività economica non è costituita e detenuta da una quantità omogenea di imprese, bensì da "grani" ovvero agglomerazioni, di attività. Gabaix afferma che gli shock che coinvolgono grandi imprese possono spiegare fino ad un terzo delle fluttuazioni del PIL nell'economia statunitense.

L'utilità di questa analisi è duplice: da un lato ci aiuta a capire meglio le origini delle fluttuazioni aggregate, dall'altro gli shock idiosincratici possono suggerirci utili strumenti di politica macroeconomica.
Un'altra implicazione della granularità è data dall'importanza che rivestono i "networks".
I networks o reti, sono particolari casi di granularità che permettono di visualizzare ed esprimere la propagazione degli shock idiosincratici tra le imprese. Nel caso di imprese di grandi dimensioni, uno shock propagato attraverso i network può causare notevoli meccanismi di amplificazione utili per osservare gli effetti della propagazione.

3.2 LE ORIGINI DEI CROLLI DI MERCATO AZIONARIO

Come abbiamo notato dai capitoli precedenti, le proprietà delle leggi di potenza permettono le stesse di generare altre leggi di potenza con diverse variabili output, questo è possibile utilizzando come input la variabile generata da una crescita casuale. La distribuzione della legge di potenza relativa alle imprese potrebbe dare una spiegazione alla distribuzione della legge di potenza dei crolli di mercato azionario. Il matematico Gabaix ipotizza che i crolli del mercato azionario possano essere dovuti a grandi enti finanziari che cercano di vendere in mercati con assenza di liquidità. Se osserviamo la distribuzione dei grandi enti finanziari possiamo notare che questa segue la legge di Zipf, ciò significa che le loro negoziazioni hanno un impatto elevato sul livello dei prezzi. Nonostante ciò gli enti finanziari operano una strategia di trading intelligente ed ottimale, si concedono più tempo per eseguire i propri scambi moderando così l'impatto sui prezzi. In una condizione ottimale, l'effetto sui prezzi è proporzionale alla radice quadrata della dimensione della negoziazione. Inoltre, per ridurre i costi di transazione, i grandi enti finanziari devono effettuare meno operazioni di trading rispetto a quelli più piccoli.
Nell'equilibrio risultante, la distribuzione delle negoziazioni ha una coda meno spessa rispetto a quella delle imprese (esponente di 1.5) e ancor meno spessa è quella della distribuzione dei

rendimenti (esponente di 3). In termini più qualitativi questa teoria afferma che: se i grandi enti vendono sotto pressione dettata dai vincoli temporali, possono causare un crollo del mercato.
Questo meccanismo è osservabile in una vasta varietà di eventi ben noti agli economisti. Il crollo della Long Term Capital Management[11] nel 1998 ebbe forti ripercussioni nei mercati obbligazionari e fu causato da un unico grande fondo. Lo scandalo del trader Kerviel[12] nel 2008, fece scendere del 6% il mercato azionario europeo. Allo stesso modo il "flash crash"[13] del maggio 2010, fu dovuto ad un unico trader.
Grazie all'utilizzo delle leggi di potenza è stato possibile ottenere previsioni più chiare e, quindi, interpretare in modo migliore i movimenti del mercato azionario.

3.3 L'IMPORTANZA DELLA VOLATILITÀ

La Grande Recessione fu innescata da uno shock primitivo in un settore ristretto: lo scoppio della bolla immobiliare. Tale shock si propagò dagli Stati Uniti al resto dell'economia mondiale attraverso interessanti combinazioni di politica economica. Tuttavia, possiamo affermare che, le azioni di politica economica possono smorzare o amplificare gli shock ma non sono sempre la causa primaria.
Se facciamo un passo indietro e torniamo al discorso della granularità (affrontato precedentemente), possiamo osservare che questa ci permette di capire le variazioni temporali nel fenomeno della volatilità[14] economica. La volatilità è definita da un tasso secondo il quale

[11] Fondo speculativo istituito nel 1994; possedeva un capitale gestito di 4 miliardi di dollari.
[12] Jerome Kerviel è un trader accusato dalla banca francese di essere responsabile di una perdita pari a 4.9 miliardi di euro.
[13] Crollo repentino dell'indice Dow Jones (della borsa di New York) apparentemente causato dalla notizia sul diffondersi della crisi greca.
[14] La volatilità viene misurata calcolando la deviazione standard dei rendimenti annualizzati in un determinato periodo di tempo.

il prezzo di un titolo aumenta o diminuisce per un dato insieme di rendimenti; inoltre, ci mostra il range entro il quale il prezzo di un titolo può variare e, ne misura la rischiosità.
Supponiamo che la volatilità granulare (o fondamentale) provenga soltanto da shock idiosincratici; ne consegue che, se l'economia è molto diversificata (e i settori più importanti sono gestiti da industrie meno volatili) la volatilità fondamentale è minore. Inoltre, X. Gabaix afferma che la volatilità fondamentale è piuttosto correlata con la volatilità reale, questo attesta che gli shock delle industrie sono importanti driver delle fluttuazioni aggregate negli Stati Uniti e in altre economie ad alto reddito. Tra la fine del 1980 e la prima metà degli anni 2000 l'economia statunitense si è trovata in una condizione di "Great moderation of volatility", ovvero una minore volatilità delle fluttuazioni del ciclo economico causate in parte, da una maggiore stabilità della politica monetaria. Ad ogni modo, da un punto di vista granulare, il declino della volatilità si può far risalire ad un calo della volatilità fondamentale dovuta ad una contrazione dell'industria pesante. Nel 1970, il boom della volatilità economica può essere invece attribuito al settore energetico, più precisamente all'aumento dei prezzi del petrolio. Da questo punto di vista la crescita finanziaria è alla base dell'aumento della volatilità fondamentale negli anni 2000.
La prospettiva granulare è quindi un ausilio indispensabile per capire concretamente le origini dello sviluppo macroeconomico.

3.4 LA VOLATILITÀ NELLE IMPRESE E NELLE ECONOMIE NAZIONALI

Se osserviamo i movimenti di volatilità delle imprese e delle economie nazionali, notiamo che sono simili. La volatilità del tasso di crescita delle imprese varia in base alla loro dimensione quindi, imprese più grandi avranno una deviazione standard minore in proporzione a quelle piccole. Allo stesso modo la volatilità delle economie nazionali varia con la dimensione: economie più grandi hanno meno volatilità. Stanley (1996) studia questo fenomeno prendendo in esame le negoziazioni delle aziende manifatturiere statunitensi. Per fare questo calcoliamo la deviazione standard $\sigma(S)$ del tasso di crescita delle vendite aziendali (S) e troviamo la funzione logaritmica:

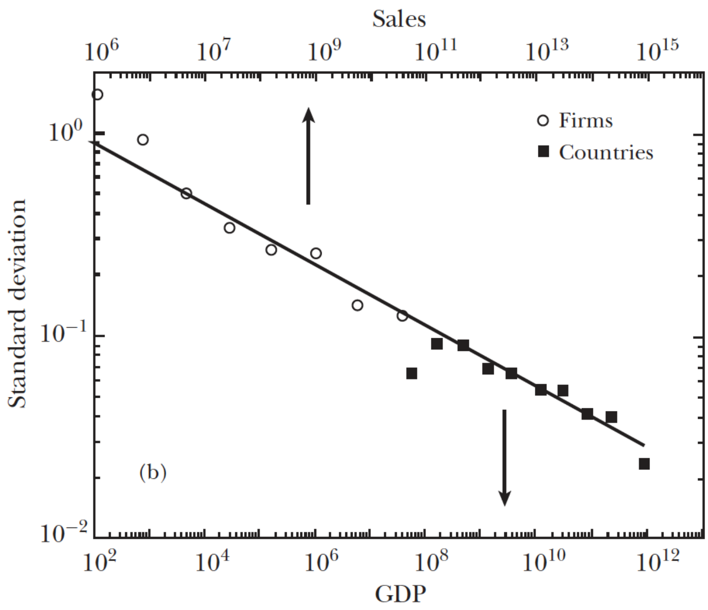
$$\ln \sigma^{imprese}(S) = -\alpha \ln S + \beta$$

Vale a dire che S ha una volatilità proporzionale a $S^{-\alpha}$ in cui $\alpha = 0.15$. Un'analisi condotta da Lee (1998) sul PIL di152 nazioni, nel periodo 1950-1992, ha identificato una volatilità proporzionale a $S^{-\alpha'}$ con $\alpha' = 0.15$.

Nella Figura 6 possiamo osservare la reazione tra dimensione e volatilità nelle imprese e nelle economie nazionali. Possiamo affermare che si tratta di un possibile tipo di universalità poiché le due curve hanno un pendenza simile; inoltre, a provare la validità della somiglianza tra le curve, abbiamo le fluttuazioni aggregate che provengono da shock microeconomici e le dimensioni aziendali che seguono la legge di Zipf.

Figura 6

Deviazione standard della distribuzione dei tassi di crescita annuali



Fonti: Lee et al. (1998). I Dati delle imprese provengono dal Compustat degli anni 1974-93, quelli del PIL (GDP) da Summer and Heston per gli anni 1950-52.

Note: La dimensione è misurata i vendite per le imprese e in PIL per le nazioni. Notiamo che $\sigma(S)$ diminuisce all'aumentare di S sia per le aziende che per le nazioni con lo stesso esponente $\alpha \simeq 0.16$.

CONCLUSIONI

Il futuro delle leggi di potenza come materia di ricerca è certamente fertile e prosperoso, tutti gli economisti ne dovrebbero approfondire i meccanismi fondamentali. Alla luce di ciò che abbiamo visto nei capitoli affrontati, possiamo affermare che le leggi di potenza si manifestano in presenza di alcune serie di dati contenenti variazioni di fattori "dimensionali" quali: il reddito, il numero degli impiegati in un'azienda oppure il numero di abitanti di una città. Inoltre, le leggi di potenza permettono di ricercare l'essenza del fenomeno; se prendiamo in considerazione la dimensione delle città, ci saranno molteplici fattori che possono, presumibilmente, influenzare tale variabile: esternalità positive, costi di trasporto e capitale umano. Le leggi di potenza deducono che è la crescita casuale a determinare la distribuzione della dimensione delle città e non i fattori appena elencati.

Tuttavia, sono numerose le questioni che non trovano spiegazioni sulla prevalenza e sull' esistenza delle leggi di potenza in quest'ambito; eccone alcune:

Perché la produzione aggregata, in un'economia che genera alti redditi, è rappresentata da una Cobb-Douglas con una quota capitale di circa 1/3? Se capissimo il modo in cui si genera questo esponente, saremmo in grado di comprendere le cause del progresso tecnico.

Nello studio del fenomeno della granularità, quanto è grande la volatilità generata dagli shock idiosincratici amplificati dai networks?

È la crescita casule il fattore originario delle leggi di potenza per la distribuzione delle città e delle imprese? Oppure esiste una forza diversa come nelle economie delle superstars?

Nonostante la validità della legge di Gibrat sia evidente, la questione non è stata ancora risolta; questo perché non è stata effettuata una differenziazione tra shock permanenti e temporanei.

L’ingente incremento della disponibilità odierna di dati, definito in inglese “big data”, richiede equazioni che garantiscano ordine e funzionalità; le leggi di potenza sono presumibilmente in grado di farlo e possono generare ridimensionamenti utili anche in ambiti riguardanti le scienze naturali.

BIBLIOGRAFIA

Boffetta G., Vulpiani A., (2012), *"Probabilità in Fisica. Un'introduzione*", Springer.

Bruzzo A., (2008), *"Analisi economica del territorio"*, Aracne editrice, Roma.

Cicchitelli G., D'Urso P., Minozzo M, (2017), "Statistica: principi e metodi" 3° edizione, Pearson.

Dornbusch R., Fisher S., Starz R., Canullo G., Pettenati P. (2016), *"Macroeconomia*" 11° edizione, McGraw-Hill Education.

Enciclopedia Treccani, (2013), *"economia e matematica"*, enciclopedia della Matematica.

Lux T., Alfarano S., (2016), *"Financial power laws: Empirical evidence, models, and mechanisms",* Elsevier, Dipartimento di Economia, Università Jaume 1, Castiglione, Spagna.

Peruzzo A., Larousse, (1997), "*LA GRANDE ENCICLOPEDIA",* Alberto Peruzzo Editore, Librairie Larousse, Cremona.

Xavier G. (2016) "Power laws in economics: an introduction" Journal of Economic Perspectives—Volume 30, Number 1—Pages 185–206

SITOGRAFIA

http://arxiv.org/pdf/1402.2965.pdf

http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0412004.pdf

http://www.geoffkirby.co.uk/ZlPFSLAW.pdf

http://www.mathisintheair.org/wp/2015/01/zipf-law-legge-di-potenza-ovvero-potenza-delle-leggi/

https://economictimes.indiatimes.com/definition/volatility

http://www.elsevier.com/locate/chaos

https://www.intmath.com/exponential-logarithmic-functions/7-graphs-log-semilog.php