UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Riabilitazione Fisioterapica dell'Arto Superiore tramite Cobot

Modellazione e Simulazione dell'Impedenza Umana

Candidato:
Portavia Roberto

Relatore:
Prof. Palpacelli Matteo Claudio

Anno Accademico 2025-2026



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Riabilitazione Fisioterapica dell'Arto Superiore tramite Cobot

Modellazione e Simulazione dell'Impedenza Umana

Candidato:
Portavia Roberto

Relatore:
Prof. Palpacelli Matteo Claudio

Anno Accademico 2025-2026

Università Politecnica delle Marche
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Via Brecce Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

A tutti coloro che credono nel sapere e nella curiosità della scoperta

Ringraziamenti

vorrei ringraziare chiunque mi abbia supportato rendendo possibile la realizzazione di questo percorso sostenendomi ogni giorno e aiutandomi ad affrontare ogni singola difficoltà con un sorriso o una risata.

inoltre vorrei dedicare queste righe al me stesso bambino che è riuscito a far della sua passione la sua vita e che ha visto concretizzarsi il sogno della sua infanzia.

Ancona, ottobre 2026

Portavia Roberto

Sommario

La collaborazione fisica tra uomo e robot rappresenta un tema di crescente interesse nella robotica collaborativa, soprattutto nelle applicazioni in cui il manipolatore esegue movimenti predefiniti interagendo direttamente con l'operatore.

Il presente lavoro di tesi analizza l'interazione uomo–robot mediante un modello meccanico equivalente basato su rigidezza e smorzamento, utilizzando un manipolatore collaborativo UR5e. L'attività sperimentale è stata condotta su 109 acquisizioni, ottenute attraverso differenti traiettorie e condizioni di interazione.

Sono state confrontate due modalità di identificazione del modello: una globale, applicata all'intera acquisizione, e una locale, ottenuta suddividendo ogni prova in sei finestre temporali. I risultati mostrano che l'approccio locale consente in generale una migliore ricostruzione delle forze e dei momenti di interazione rispetto al modello globale.

L'analisi ha inoltre evidenziato come la qualità della ricostruzione dipenda dalla traiettoria eseguita e come una buona capacità di adattamento ai dati non implichi necessariamente una stima stabile dei singoli parametri del modello.

Nel complesso, il lavoro mostra l'utilità di una descrizione locale dell'interazione uomo–robot e mette in evidenza i principali limiti legati all'identificazione dei parametri equivalenti.

Indice

1 Introduzione **1**

1.1 Contesto e Motivazioni 1
1.2 Il Progetto di Ricerca Dipartimentale e le Sfide Tecnologiche 2
1.3 Il Vuoto di Ricerca e l'Obiettivo della Tesi 3
1.4 Fasi Operative e Struttura dell'Elaborato 4

2 Stato dell'Arte **7**

2.1 Sistemi Robotici per la Riabilitazione dell'Arto Superiore 7
2.2 Interazione Fisica Uomo–Robot (pHRI) e Sicurezza 8
2.3 Impedenza meccanica e comportamento dell'arto umano 9
2.4 Acquisizione del Movimento e Tracciamento delle Traiettorie 10
2.5 Analisi Statica e Capacità Generativa di Forza 11
2.6 Considerazioni conclusive 12

3 Pianificazione e generazione delle traiettorie **13**

3.1 Rappresentazione della posizione del TCP 13
3.2 Parametrizzazione della traiettoria 14
3.3 Leggi polinomiali per la traiettoria 15
3.4 Traiettorie circolari 16
3.5 Ascissa curvilinea 16
3.6 Rappresentazione dell'orientamento 17
3.7 Matrici di rotazione elementari 18
3.8 Composizione delle rotazioni 18
3.9 Rappresentazione asse–angolo 19
3.10 Rappresentazione parametrica della posa 20
3.11 Discretizzazione della traiettoria 20
3.12 Generazione dei waypoint e del programma URScript 21
3.13 Verifica grafica della traiettoria della porta 21
3.14 Considerazioni sulla pianificazione delle traiettorie 22

4 Modellazione matematica dell'interazione uomo–robot **25**

4.1 Il paradigma dell'interazione fisica uomo–robot 25
4.2 Modello generale di impedenza meccanica 25
4.3 Semplificazione del modello e contributo inerziale 26
4.4 Rappresentazione cartesiana a sei gradi di libertà 27
4.5 Definizione delle grandezze relative rispetto alla traiettoria nominale 28

4.6 Matrici di rigidezza e smorzamento . . . 29
4.7 Interpretazione dei parametri del modello . . . 30
4.8 Formulazione del problema di identificazione . . . 30
4.9 Identificazione mediante il metodo dei minimi quadrati . . . 31
4.10 Identificazione globale e locale . . . 32
4.11 Valutazione della qualità del modello . . . 33
4.11.1 Coefficiente di determinazione . . . 33
4.11.2 Errore quadratico medio . . . 33
4.11.3 Errore assoluto medio . . . 34
4.11.4 Analisi del condizionamento numerico . . . 34
4.11.5 Valori singolari della matrice di regressione . . . 34
4.12 Limiti e interpretazione del modello adottato . . . 35
4.13 Considerazioni conclusive . . . 35

5 Setup sperimentale e metodologia **37**
5.1 Introduzione . . . 37
5.2 Sistema sperimentale . . . 38
5.2.1 Definizione dello spazio di lavoro . . . 38
5.3 Esecuzione delle traiettorie . . . 40
5.4 Architettura software . . . 43
5.5 Acquisizione dei dati tramite RTDE . . . 43
5.6 Frequenza di acquisizione e riferimento temporale . . . 44
5.7 Struttura dei dati acquisiti . . . 45
5.8 Calcolo della deviazione dalla traiettoria nominale . . . 46
5.9 Ricostruzione della velocità target e calcolo della velocità relativa . . . 46
5.9.1 Velocità traslazionale target . . . 46
5.9.2 Velocità angolare target . . . 47
5.10 Pre-elaborazione dei segnali . . . 48
5.10.1 Filtro passa-basso Butterworth . . . 50
5.11 Costruzione della matrice di regressione . . . 51
5.12 Implementazione numerica dell'identificazione . . . 51
5.13 Identificazione globale . . . 52
5.14 Identificazione locale mediante finestratura . . . 52
5.15 Ricostruzione locale del wrench . . . 54
5.16 Valutazione dei risultati . . . 55
5.17 Analisi del condizionamento numerico . . . 55
5.18 Organizzazione dei risultati . . . 56
5.19 Flusso complessivo della procedura . . . 57
5.20 Considerazioni conclusive . . . 57

6 Risultati sperimentali e analisi dei dati **59**
6.1 Campagna sperimentale e organizzazione delle acquisizioni . . . 59

6.2 Modello e criteri di valutazione 60
6.3 Risultati complessivi dell'identificazione globale 61
6.4 Risultati complessivi dell'identificazione locale 61
6.5 Analisi degli errori di ricostruzione 62
6.6 Analisi in funzione della traiettoria 63
6.7 Analisi del condizionamento numerico 64
6.8 Ricostruzione del wrench e identificabilità dei parametri 65
6.9 Parametri equivalenti di rigidezza e smorzamento 66
6.10 Classificazione delle modalità di interazione 66
6.11 Discussione complessiva dei risultati 67
6.12 Considerazioni finali 68

7 Conclusioni **69**

7.1 Sintesi del lavoro 69
7.2 Principali risultati 70
7.3 Influenza della traiettoria 71
7.4 Ricostruzione del wrench e identificabilità dei parametri 71
7.5 Limiti del lavoro e sviluppi futuri 72
7.6 Considerazioni finali 73

Elenco delle figure

3.1 Verifica grafica della traiettoria pianificata per il movimento della porta in quattro configurazioni significative. La linea tratteggiata rappresenta il percorso pianificato, il punto nero la posizione del TCP e gli assi colorati l'orientamento della terna utensile rispetto alla terna base del robot. 22

5.1 Vista complessiva del setup sperimentale utilizzato per le acquisizioni. Il manipolatore collaborativo UR5e è installato sul banco di prova, mentre le postazioni di elaborazione vengono utilizzate per l'esecuzione degli script, l'acquisizione e il monitoraggio dei segnali. 39

5.2 Rappresentazione schematica dello spazio di lavoro utilizzato per le prove di interazione uomo–robot. Il volume considerato presenta dimensioni pari a 70 cm lungo X, 35 cm lungo Y e 50 cm lungo Z. . 40

5.3 Esempio di interazione fisica tra operatore e manipolatore durante l'esecuzione di una traiettoria programmata. L'operatore mantiene il contatto con l'end-effector mentre il robot segue il movimento imposto dal controllo di posizione. 41

5.4 Sequenza di configurazioni assunte dal manipolatore durante l'esecuzione di una traiettoria programmata. I fotogrammi, ordinati temporalmente da (a) a (d), mostrano l'evoluzione del movimento all'interno dello spazio di lavoro sperimentale. 42

5.5 Monitoraggio in tempo reale delle grandezze del manipolatore durante una prova sperimentale. La visualizzazione consente di verificare l'andamento dei segnali acquisiti dal controllore durante l'esecuzione del movimento. 44

5.6 Confronto tra velocità cartesiana traslazionale effettiva del TCP, velocità della traiettoria target e relativa differenza lungo gli assi X, Y e Z, per un'acquisizione rappresentativa. La curva associata alla differenza costituisce la parte traslazionale della velocità relativa utilizzata nel modello. 47

5.7 Confronto tra velocità angolare effettiva del TCP, velocità angolare ricostruita dalla traiettoria target e relativa differenza nelle tre componenti, per un'acquisizione rappresentativa. Il confronto è utilizzato come verifica della ricostruzione della velocità angolare target a partire dalle orientazioni nominali successive. 49

Elenco delle tabelle

6.1 Numero di acquisizioni analizzate per gruppo di traiettoria. 59
6.2 Statistiche di R^2 per l'identificazione globale sulle 109 acquisizioni. . 61
6.3 Statistiche di R^2 per l'identificazione locale sulle 109 acquisizioni. . . 62
6.4 Confronto tra i valori medi di R^2 globale e locale. 62
6.5 Valori medi di RMSE e MAE per identificazione globale e locale. . . 63
6.6 Valori medi di R^2 globale per gruppo di traiettoria. 63
6.7 Mediana del numero di condizionamento globale e della media locale per gruppo di traiettoria. 65
6.8 Classificazione sperimentale delle acquisizioni in funzione della modalità di interazione. 67

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Contesto e Motivazioni

Negli ultimi decenni, la robotica collaborativa ha oltrepassato i tradizionali confini della manifattura industriale per trovare applicazioni sempre più promettenti in ambito clinico e biomedicale [1, 2]. L'invecchiamento globale della popolazione e il conseguente aumento di disabilità croniche di natura neurologica, in particolare quelle derivanti da ictus (stroke), richiedono interventi riabilitativi mirati per ripristinare le funzionalità motorie perse, con un'attenzione speciale al recupero degli arti superiori [1, 2]. L'ictus, infatti, rappresenta una delle principali cause di disabilità neurologica a lungo termine negli adulti, limitando fortemente l'indipendenza dei soggetti colpiti nelle attività quotidiane [1].

La riabilitazione fisica tradizionale si basa su un'intensa ripetizione di attività motorie coordinate e guidate manualmente da un terapista [1, 2]. Tuttavia, questo approccio presenta delle limitazioni: il terapista è sottoposto a uno sforzo fisico continuo che vincola intrinsecamente la durata e l'intensità delle sessioni, limitando la quantità di terapia erogabile e basando la valutazione dei progressi su metriche spesso soggettive [1, 2].

L'utilizzo di sistemi robotici in ambito riabilitativo offre una soluzione efficace a queste criticità, garantendo l'esecuzione di sessioni di terapia prolungate, caratterizzate da un allenamento motorio intensivo, ripetitivo e task-specific [1, 2]. I robot, oltre a ridurre il carico di lavoro del personale clinico, sono in grado di fornire misurazioni quantitative e oggettive del recupero del paziente, registrando cinematiche e forze in tempo reale [1, 3].

Tra le diverse architetture meccaniche disponibili in letteratura, i sistemi a end-effector, a cui appartengono i manipolatori collaborativi (cobot) di derivazione industriale come l'UR5e della Universal Robots, risultano particolarmente vantaggiosi [2]. Rispetto ai complessi esoscheletri, i quali richiedono un allineamento preciso con i giunti anatomici del paziente, i dispositivi a end-effector si collegano all'arto in un singolo punto distale (es. la mano) [2]. Questa caratteristica li rende facilmente adattabili a pazienti con diverse antropometrie e consente un setup del dispositivo notevolmente più rapido per l'impiego clinico [2].

I cobot possiedono caratteristiche cinematiche, dinamiche e sensoristiche che li rendono candidati ideali per l'Interazione Fisica Uomo-Robot (pHRI - Physical Human-Robot Interaction) in ambienti condivisi [1, 2]. Progettati per operare in modo sicuro a stretto contatto con l'essere umano, questi dispositivi permettono di assistere il movimento del paziente durante l'esecuzione di gesti funzionali di base, riconducibili alle Attività della Vita Quotidiana (ADL - Activities of Daily Living) [1, 2].

Tuttavia, affinché l'interazione terapeutica sia non solo intrinsecamente sicura ma anche clinicamente efficace, emerge una motivazione di ricerca fondamentale: il robot non deve limitarsi a guidare passivamente o rigidamente l'arto lungo una traiettoria prefissata, ma deve potersi interfacciare in modo intelligente con l'effettivo stato neuromuscolare del paziente [4, 5]. Diviene quindi essenziale passare da un paradigma di puro "controllo del moto" a uno di "comprensione dell'interazione", in cui si riesca a misurare e modellare oggettivamente in che modo il braccio umano partecipi attivamente al movimento, valutando la sua risposta dinamica alle sollecitazioni durante l'esecuzione del task.

1.2 Il Progetto di Ricerca Dipartimentale e le Sfide Tecnologiche

Il presente lavoro di tesi si inserisce all'interno di un articolato progetto di ricerca condotto dal Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche (DIISM) dell'Università Politecnica delle Marche [1]. Avviato negli anni precedenti, il progetto mira a ottimizzare il coordinamento motorio e l'interazione fisica tra uomo e robot (pHRI) in scenari di riabilitazione dell'arto superiore, sfruttando piattaforme robotiche collaborative e sensoristica avanzata [1, 2].

Per sviluppare un sistema robotico capace di assistere efficacemente i pazienti, la prima grande sfida affrontata dal dipartimento ha riguardato l'acquisizione e il tracciamento cinematico di movimenti umani riconducibili alle Attività della Vita Quotidiana (ADL), come il bere da un bicchiere, l'uso di posate, il chiudere una cerniera o il toccarsi il naso [1, 6]. I ricercatori hanno valutato approfonditamente l'affidabilità dei sistemi di stima della posa, confrontando soluzioni motion capture ottiche ad alta precisione e basate su marker (come il sistema OptiTrack), considerate come ground-truth, con soluzioni markerless più economiche e non invasive basate su telecamere RGB e reti neurali (come il framework MediaPipe) [7, 6].

Queste indagini hanno dimostrato che i metodi monoculari markerless, pur essendo facilmente integrabili, sono intrinsecamente affetti da limitazioni quali l'ambiguità di profondità, un'elevata sensibilità alle occlusioni (frequenti durante la manipolazione di oggetti) e un'alta instabilità temporale [7]. Tali difetti generano ampie fluttuazioni e rumore nei profili di velocità e accelerazione dei giunti stimati, compromettendo la generazione di traiettorie fluide per il robot [7]. Per mitigare queste criticità, gli studi

dipartimentali hanno dimostrato la necessità di implementare tecniche di filtraggio temporale sui segnali grezzi (come la media mobile e il filtro di Savitzky-Golay) al fine di stabilizzare la cinematica acquisita [7].

Inoltre, per superare definitivamente i limiti di accuratezza spaziale in presenza di occlusioni, sono state sviluppate e validate architetture multi-camera, dimostrando che tecniche di fusione dei dati e di triangolazione geometrica migliorano in modo decisivo l'affidabilità della ricostruzione 3D delle traiettorie umane [6].

Parallelamente allo studio cinematico, una seconda linea di ricerca si è focalizzata sull'analisi statica e sulle reali capacità fisiche dei manipolatori collaborativi ridondanti (come il robot di servizio TIAGo o l'UR5e) impiegati per erogare la terapia [3, 2]. Attraverso lo studio analitico dei politopi di forza e di coppia, è stato valutato come le diverse configurazioni articolari (posture) del robot influenzino drasticamente la sua capacità di generare e trasmettere sforzi all'end-effector [3]. Questa ottimizzazione della ridondanza cinematica è risultata un prerequisito essenziale: essa garantisce che la macchina, pur operando in un regime intrinsecamente sicuro e a potenza limitata, possa esprimere con la massima efficienza meccanica le forze necessarie per l'assistenza e la resistenza terapeutica, tipicamente attestate in un range ottimale compreso tra 10 e 20 N [3].

Avendo ampiamente esplorato sia le problematiche relative all'acquisizione cinematica delle traiettorie, sia le limitazioni statiche legate alla generazione delle forze, il progetto dipartimentale necessita ora di un'evoluzione orientata alla dinamica dell'interazione, contesto in cui si inserisce la presente trattazione.

1.3 Il Vuoto di Ricerca e l'Obiettivo della Tesi

Sebbene le indagini pregresse abbiano mappato accuratamente la cinematica dei movimenti umani e le capacità statiche di generazione delle forze da parte dei cobot, per un'effettiva riabilitazione assistita manca un tassello fondamentale: la modellazione dinamica dell'interazione fisica tra l'uomo e il robot.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi non è modellare il comportamento del manipolatore per fargli assecondare passivamente il paziente, bensì ribaltare il paradigma: utilizzare il robot collaborativo come uno strumento di misura dinamico per ricavare e simulare il modello dell'interazione umana. In questo scenario, il cobot viene programmato per muoversi lungo traiettorie spaziali note e accuratamente controllate in posizione. Durante tale esecuzione, il braccio del paziente, vincolato all'end-effector, esercita sulla macchina un wrench di interazione (forze e momenti) che dipende strettamente dal modo in cui il soggetto partecipa al movimento.

Il fulcro della ricerca consiste nel verificare se questo comportamento umano possa essere rappresentato fedelmente mediante un modello meccanico equivalente semplice, costituito esclusivamente da una rigidezza e da uno smorzamento. Dal punto di vista matematico, si intende descrivere il wrench (W) misurato al terminale in funzione dello scostamento posizionale (x) e della velocità ($\dot{x}$), secondo la relazione:

$$W = Kx + B\dot{x} \tag{1.1}$$

Dove K rappresenta la matrice di rigidezza equivalente e B la matrice di smorzamento. A differenza dei modelli dinamici completi a sei gradi di libertà, in questa trattazione si omette volontariamente l'integrazione della matrice di massa inerziale (M). Tale approssimazione è giustificata dalla natura stessa dei task riabilitativi: i movimenti programmati e le traiettorie di uso comune presentano dinamiche lente, con accelerazioni molto contenute che rendono di fatto trascurabili le forze inerziali.

Naturalmente, i parametri estratti da tale modello non rappresentano una proprietà "assoluta" e invariante del braccio, ma sono strettamente dipendenti dalla postura assunta, dalla traiettoria spaziale e, soprattutto, dal livello e dall'intenzione di partecipazione del soggetto (passivo, resistivo, assistivo) [8]. L'identificazione di un modello sufficientemente snello ma al contempo altamente rappresentativo consentirà, in futuro, di implementare sistemi di robotica collaborativa e assistiva capaci di adattarsi dinamicamente all'utente [4, 5].

1.4 Fasi Operative e Struttura dell'Elaborato

Per il raggiungimento degli obiettivi prefissati, l'attività di tirocinio e di sviluppo software è stata articolata in quattro fasi operative sequenziali:

1. **Analisi dello Spazio di Lavoro e Generazione Cinematica:** Utilizzo dell'ambiente di sviluppo Spyder (Python) per definire lo spazio utile al movimento dell'operatore. In questa fase sono stati scritti gli script algoritmici per la generazione sia di traiettorie geometriche semplici (linee e cerchi), sia di traiettorie complesse basate sulle Attività della Vita Quotidiana (ADL), tra cui simulare l'afferramento di un bicchiere (sia con l'end-effector rivolto verso l'alto che verso il basso), l'allacciamento di una zip e l'apertura di una porta.

2. **Verifica Cinematica:** Sviluppo di un applicativo in Python per la prevalidazione offline dei punti costituenti le traiettorie spaziali. Questa fase ha garantito la sicurezza e la continuità del moto prima dell'effettivo invio delle coordinate al controller del robot.

3. **Acquisizione Dati e Filtraggio:** Implementazione di programmi di lettura telemetrica tramite connessione Ethernet per estrarre gli stati correnti del robot (posizioni, velocità e wrench). Per gestire il rumore del segnale, sono stati progettati filtri digitali capaci di abbassare la frequenza di acquisizione, restituendo dati puliti e pronti per la generazione di grafici analitici.

4. **Ricostruzione del Modello Matematico:** Sviluppo degli algoritmi matematici finali in grado di elaborare i dati filtrati per effettuare l'identificazione parametrica delle matrici K e B, ricostruendo così il modello di interazione.

La presente trattazione è organizzata come segue. Il Capitolo 2 illustra lo Stato dell'Arte sui dispositivi robotici in riabilitazione e sulle tecniche di acquisizione del movimento. Il Capitolo 3 espone la Modellazione Matematica, definendo nel dettaglio l'impedenza umana e le equazioni del sistema. Il Capitolo 4 dettaglia l'architettura software in Python, la generazione delle traiettorie e il setup sperimentale. Infine, il Capitolo 5 presenta l'analisi dei risultati sperimentali ottenuti, mentre il Capitolo 6 delinea le conclusioni e i possibili sviluppi futuri della ricerca.

Capitolo 2

Stato dell'Arte

La riabilitazione dell'arto superiore rappresenta un importante ambito di applicazione della robotica collaborativa, nel quale il sistema robotico deve essere in grado di interagire fisicamente con l'operatore mantenendo al tempo stesso adeguati livelli di sicurezza e di controllabilità. In questo contesto, oltre alla capacità del robot di eseguire movimenti ripetitivi e controllati, assume particolare importanza la possibilità di acquisire e interpretare il comportamento della persona durante l'interazione.

Il presente capitolo introduce le principali tematiche che costituiscono il contesto scientifico nel quale si inserisce il lavoro di tesi. In particolare, vengono analizzati i sistemi robotici utilizzati per la riabilitazione dell'arto superiore, l'interazione fisica uomo–robot, il concetto di impedenza meccanica applicato all'arto umano, le tecniche di acquisizione e tracciamento del movimento e, infine, le capacità statiche e di generazione della forza dei manipolatori collaborativi.

L'obiettivo è fornire il quadro di riferimento necessario per comprendere la scelta di un modello meccanico equivalente basato su rigidezza e smorzamento e la successiva identificazione sperimentale dei relativi parametri.

2.1 Sistemi Robotici per la Riabilitazione dell'Arto Superiore

La riabilitazione dell'arto superiore richiede la ripetizione di movimenti coordinati e controllati, finalizzati al recupero o al mantenimento delle capacità motorie. In questo contesto, i sistemi robotici possono fornire un supporto all'attività terapeutica, consentendo di eseguire compiti ripetitivi e di mantenere condizioni di movimento maggiormente controllate rispetto alla sola esecuzione manuale [2].

I sistemi robotici destinati alla riabilitazione dell'arto superiore possono essere distinti, in funzione della loro struttura meccanica, in dispositivi a *end-effector* ed esoscheletri [2]. Gli esoscheletri presentano una struttura antropomorfa che viene accoppiata ai segmenti dell'arto del paziente, consentendo di intervenire direttamente sui diversi gradi di libertà articolari. I dispositivi a *end-effector*, invece, interagiscono con l'arto attraverso un punto di contatto distale, tipicamente associato alla mano, guidando il movimento dell'arto nello spazio operativo.

La differenza tra le due architetture riguarda quindi principalmente la modalità con cui il robot viene accoppiato al corpo umano. Un dispositivo a *end-effector* non richiede infatti l'allineamento diretto della struttura robotica con tutti i giunti anatomici dell'arto. Questa caratteristica può semplificare l'adattamento del sistema a differenti configurazioni dell'utente e rendere più agevole la predisposizione del setup sperimentale [2].

I manipolatori collaborativi di derivazione industriale costituiscono un'ulteriore categoria di sistemi che può essere impiegata in scenari nei quali il robot e l'operatore condividono lo stesso spazio operativo. La loro architettura consente di programmare movimenti cartesiani e di integrare sensori e sistemi di controllo destinati all'interazione fisica [2].

Nel contesto riabilitativo, l'utilizzo di un manipolatore collaborativo può quindi essere interpretato non soltanto come mezzo per guidare il movimento dell'arto, ma anche come strumento per acquisire informazioni relative all'interazione. In particolare, la misura delle forze e delle coppie esercitate durante il movimento può fornire informazioni quantitative sul comportamento dell'utente [1, 3].

Questa seconda prospettiva è particolarmente rilevante per il presente lavoro, nel quale il robot viene utilizzato come strumento di misura della risposta meccanica dell'interazione uomo–robot.

2.2 Interazione Fisica Uomo–Robot (pHRI) e Sicurezza

L'interazione fisica uomo–robot, indicata in letteratura come *Physical Human–Robot Interaction* (pHRI), comprende gli scenari nei quali il contatto fisico tra l'uomo e il sistema robotico costituisce parte dell'attività svolta. Rispetto alle applicazioni robotiche tradizionali, nelle quali il contatto con l'operatore viene generalmente evitato, la robotica collaborativa richiede quindi una gestione esplicita delle condizioni di contatto [2].

La sicurezza assume in questo contesto un ruolo fondamentale. La specifica tecnica ISO/TS 15066 definisce requisiti e indicazioni relativi alla collaborazione tra uomo e robot, considerando anche modalità operative nelle quali il contatto fisico deve essere mantenuto entro determinati limiti [2].

Tra le modalità di collaborazione considerate nella robotica collaborativa rientrano la limitazione di potenza e forza (*Power and Force Limiting*, PFL) e la guida manuale (*Hand Guiding*). Tali modalità assumono particolare rilevanza nei sistemi nei quali l'operatore e il robot condividono lo stesso spazio operativo e il contatto fisico costituisce parte del compito [2].

Nel caso di applicazioni riabilitative, l'interazione fisica può assumere forme differenti. Il robot può, ad esempio, guidare il movimento dell'utente, fornire assistenza durante l'esecuzione del compito oppure opporsi parzialmente al movimento per introdurre una componente di esercizio. La risposta dell'utente non è quindi necessa-

riamente passiva, ma può modificare il comportamento osservato durante l'interazione [1, 2].

Questo aspetto introduce la necessità di descrivere non soltanto la traiettoria programmata dal robot, ma anche la relazione tra il movimento effettivamente eseguito e le forze generate durante il contatto.

Nel presente lavoro il problema viene affrontato mantenendo separati il comportamento imposto al robot e quello associato all'interazione. Il robot viene programmato per seguire traiettorie cartesiane predefinite, mentre durante l'esecuzione vengono acquisiti il movimento effettivo del terminale e il wrench associato all'interazione. In questo modo il robot costituisce uno strumento attraverso il quale è possibile osservare e caratterizzare il comportamento meccanico dell'interazione uomo–robot.

2.3 Impedenza meccanica e comportamento dell'arto umano

La relazione tra movimento e forza costituisce uno degli aspetti centrali nella descrizione dell'interazione fisica tra un sistema robotico e un operatore. Un approccio particolarmente rilevante in questo ambito è rappresentato dal paradigma dell'impedenza meccanica.

Il concetto di impedenza è stato introdotto nel contesto del controllo robotico per descrivere la relazione dinamica tra il movimento di un sistema e le forze applicate ad esso. In una formulazione generale, l'impedenza permette di caratterizzare la risposta meccanica di un sistema rispetto a una perturbazione attraverso contributi associati all'inerzia, alla dissipazione viscosa e alla rigidezza [4].

Nel caso multidimensionale, una rappresentazione lineare può essere espressa, in forma generale, mediante una relazione tra il wrench e lo spostamento, la velocità e l'accelerazione del sistema. I tre contributi rappresentano rispettivamente la componente inerziale, quella viscosa e quella elastica [4].

Il concetto di impedenza può essere applicato anche allo studio delle caratteristiche meccaniche dell'arto umano. In particolare, Tsuji et al. hanno analizzato le caratteristiche spaziali dell'impedenza della mano durante movimenti multiarticolari, considerando la relazione tra le perturbazioni del movimento e la risposta di forza [8].

Un aspetto rilevante emerso da questo tipo di studi riguarda la dipendenza dell'impedenza dalla configurazione dell'arto. Le caratteristiche meccaniche osservate non possono infatti essere considerate completamente indipendenti dalla postura assunta e dal livello di attivazione muscolare del soggetto [8].

Questa dipendenza costituisce un elemento importante anche nell'interpretazione dei dati sperimentali. Durante un movimento funzionale, infatti, la configurazione dell'arto varia continuamente e l'utente può modificare il proprio livello di partecipazione al compito. Di conseguenza, i parametri utilizzati per descrivere il comportamento meccanico dell'interazione possono variare lungo la traiettoria [8].

Il modello di impedenza costituisce quindi un riferimento teorico per descrivere la relazione tra movimento e wrench, ma la sua applicazione a un sistema umano

reale richiede di tenere conto della variabilità della configurazione e delle condizioni di interazione.

Un ulteriore aspetto riguarda l'adattamento della traiettoria durante l'interazione. Yang e Burdet hanno studiato un modello di adattamento della traiettoria di riferimento in presenza di interazione con l'ambiente, considerando la relazione tra errore di movimento e forza di interazione [5]. Questo tipo di approccio evidenzia come la traiettoria di riferimento e il comportamento dell'utente possano essere strettamente correlati durante un compito interattivo.

Nel presente lavoro, tuttavia, l'obiettivo non è sviluppare un algoritmo di adattamento della traiettoria. La traiettoria del robot viene infatti definita a priori e utilizzata come riferimento per valutare lo scostamento del movimento effettivamente realizzato. Il concetto di impedenza viene invece utilizzato come base per costruire un modello equivalente del comportamento osservato durante l'interazione.

In particolare, l'analisi sperimentale considera separatamente una identificazione globale, nella quale i parametri vengono stimati sull'intera acquisizione, e una identificazione locale, nella quale la traiettoria viene suddivisa in finestre consecutive. Quest'ultima impostazione permette di verificare se la variazione delle condizioni di interazione lungo il movimento possa essere descritta mediante insiemi differenti di parametri equivalenti.

La formulazione matematica del modello adottato e la relativa procedura di identificazione vengono introdotte nel Capitolo 4, mentre la metodologia sperimentale utilizzata per stimare i parametri viene descritta nel Capitolo 5.

2.4 Acquisizione del Movimento e Tracciamento delle Traiettorie

Per sviluppare sistemi robotici destinati all'assistenza dei movimenti dell'arto superiore è necessario disporre di tecniche affidabili per l'acquisizione e il tracciamento del movimento umano. La qualità della stima cinematica influenza infatti sia la descrizione del gesto sia la possibilità di utilizzare le informazioni acquisite per la generazione di traiettorie robotiche.

I sistemi di motion capture basati su marker, come OptiTrack, consentono di ottenere una ricostruzione tridimensionale del movimento con elevata accuratezza e possono essere utilizzati come riferimento per la valutazione di sistemi alternativi [7, 6].

Questi sistemi richiedono tuttavia un setup dedicato e l'applicazione di marker sul soggetto. Per questo motivo sono state studiate alternative *markerless*, nelle quali la posizione e l'orientamento delle parti del corpo vengono stimati direttamente a partire da immagini acquisite mediante telecamere.

Tra le soluzioni *markerless* rientrano sistemi basati su telecamere RGB e reti neurali, come MediaPipe. Questi approcci presentano il vantaggio di ridurre la

complessità del setup e di eliminare la necessità di utilizzare marker fisici, ma sono soggetti a problematiche legate all'ambiguità della profondità, alle occlusioni e alla variabilità temporale della stima [7, 6].

Le occlusioni possono risultare particolarmente problematiche durante la manipolazione di oggetti, poiché alcune parti dell'arto possono essere temporaneamente nascoste dalla telecamera. Analogamente, fluttuazioni della stima nel tempo possono introdurre variazioni artificiali nelle grandezze cinematiche derivate, come velocità e accelerazione [7].

Per ridurre tali effetti sono state analizzate tecniche di elaborazione temporale dei segnali, tra cui filtri e procedure di smoothing, finalizzate a ridurre il rumore e a rendere più stabile la traiettoria stimata [7].

Quando l'informazione proveniente da una singola telecamera non è sufficiente a garantire una ricostruzione robusta, è possibile utilizzare configurazioni multi-camera. La disponibilità di più punti di vista permette di combinare le informazioni acquisite e di ricostruire la posizione tridimensionale mediante tecniche di triangolazione, riducendo alcune delle ambiguità presenti nel caso monoculare [6].

La scelta della tecnica di acquisizione dipende quindi dal compromesso tra accuratezza, complessità del setup, costo e robustezza rispetto alle condizioni operative. Nel progetto nel quale si inserisce la presente tesi, lo studio dell'acquisizione del movimento costituisce una componente complementare rispetto alla successiva analisi della dinamica dell'interazione.

Mentre i sistemi di motion capture permettono di ricostruire il movimento umano, il presente lavoro utilizza direttamente le informazioni cinematiche del terminale del robot e il wrench misurato durante l'interazione. L'obiettivo è quindi passare dalla sola descrizione cinematica del gesto alla caratterizzazione quantitativa della risposta meccanica dell'utente.

2.5 Analisi Statica e Capacità Generativa di Forza

Oltre alla capacità di seguire una traiettoria, un sistema robotico destinato all'interazione fisica deve possedere caratteristiche meccaniche compatibili con le forze richieste durante il compito. La valutazione delle capacità statiche del manipolatore permette di determinare quali forze e coppie possono essere generate all'end-effector nelle diverse configurazioni articolari.

Uno degli approcci utilizzati per analizzare tali capacità è basato sulla costruzione dei *force polytopes*, che rappresentano l'insieme delle forze realizzabili all'end-effector considerando i limiti degli attuatori e la configurazione del manipolatore [3].

La configurazione articolare può avere un'influenza significativa sulle capacità di generazione della forza. Nel caso di manipolatori ridondanti, infatti, una stessa posa cartesiana può essere raggiunta attraverso configurazioni articolari differenti. Tali configurazioni possono presentare differenti capacità di trasmissione delle forze e delle coppie all'end-effector [3].

L'analisi della capacità statica permette quindi di individuare configurazioni nelle quali il manipolatore può esprimere in maniera più efficace le forze richieste dal compito. Questo aspetto assume particolare importanza nelle applicazioni nelle quali il robot deve esercitare o contrastare forze durante l'interazione con l'utente [3].

I risultati relativi alle capacità statiche devono tuttavia essere distinti dall'analisi dinamica dell'interazione. L'analisi statica descrive infatti le capacità del manipolatore in funzione della sua configurazione e dei limiti degli attuatori, mentre l'identificazione considerata nella presente tesi mira a caratterizzare il comportamento meccanico osservato durante l'interazione fisica.

Nel presente lavoro, pertanto, l'interesse non è rivolto alla determinazione dei limiti statici del robot, ma alla relazione sperimentale tra il movimento del terminale e il wrench misurato durante l'esecuzione delle traiettorie. La conoscenza delle capacità del manipolatore costituisce comunque un elemento importante per contestualizzare le misure ottenute durante le prove.

2.6 Considerazioni conclusive

La letteratura considerata evidenzia come la robotica riabilitativa richieda l'integrazione di differenti aspetti: la capacità del sistema di eseguire movimenti controllati, la sicurezza dell'interazione fisica, l'acquisizione affidabile del movimento e la capacità di generare e misurare le forze associate al contatto [2, 1, 7, 3].

Dal punto di vista della modellazione dell'interazione, il paradigma dell'impedenza fornisce un riferimento teorico per descrivere la relazione tra movimento e wrench attraverso contributi di tipo inerziale, viscoso ed elastico [4]. Gli studi sull'impedenza dell'arto umano mostrano inoltre che il comportamento meccanico può dipendere dalla configurazione dell'arto e dalle condizioni di esecuzione del movimento [8].

Queste considerazioni motivano l'utilizzo, nel presente lavoro, di un modello meccanico equivalente nel quale i contributi di rigidezza e smorzamento vengono identificati a partire dai dati sperimentali. La scelta di utilizzare una rappresentazione locale oltre a quella globale permette inoltre di verificare se un unico insieme di parametri sia sufficiente a descrivere l'intera acquisizione oppure se la variazione delle condizioni di interazione lungo la traiettoria richieda una descrizione mediante parametri differenti.

La successiva parte della tesi affronta quindi, da un lato, la definizione matematica del modello di interazione e, dall'altro, l'implementazione sperimentale necessaria per acquisire ed elaborare le grandezze utilizzate nell'identificazione.

Capitolo 3

Pianificazione e generazione delle traiettorie

La generazione delle traiettorie costituisce una fase preliminare all'esecuzione delle prove sperimentali e ha lo scopo di definire in maniera controllata il movimento del robot nello spazio cartesiano. Nel presente lavoro le traiettorie sono state generate mediante programmi Python, utilizzando una rappresentazione parametrica della posizione e dell'orientamento del TCP (*Tool Center Point*).

L'approccio adottato permette di separare la definizione geometrica del percorso dalla successiva generazione dei comandi eseguiti dal robot. In particolare, la posizione del TCP viene definita attraverso funzioni parametriche delle coordinate cartesiane, mentre l'orientamento viene costruito mediante matrici di rotazione e successivamente convertito nella rappresentazione vettoriale asse–angolo utilizzata dal robot.

Nel seguito vengono introdotti i principali strumenti matematici utilizzati per la costruzione delle traiettorie, senza fare riferimento a una singola traiettoria sperimentale. L'obiettivo è quindi descrivere una formulazione generale che possa essere applicata alle differenti geometrie successivamente implementate.

3.1 Rappresentazione della posizione del TCP

La posizione di un punto nello spazio cartesiano può essere descritta mediante un vettore contenente le sue tre coordinate rispetto al sistema di riferimento considerato [9]. Nel caso del TCP si può quindi scrivere

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

dove x, y e z rappresentano le coordinate cartesiane del TCP rispetto al sistema di riferimento adottato.

Nel caso di una traiettoria, la posizione non è costante, ma varia durante l'esecuzione del movimento. Per la generazione dei percorsi utilizzati nel presente lavoro, tale variazione viene descritta attraverso un parametro scalare adimensionale u, definito nell'intervallo

$$u \in [0, 1]. \tag{3.2}$$

La posizione lungo il percorso può pertanto essere espressa nella forma

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Il parametro u assume il valore 0 in corrispondenza dell'inizio della traiettoria e il valore 1 al termine. La generazione del percorso inverso può essere ottenuta facendo variare il parametro nel verso opposto, da 1 a 0.

È importante sottolineare che il parametro u utilizzato nei programmi non coincide, in generale, con l'ascissa curvilinea. Esso rappresenta un parametro normalizzato impiegato per descrivere la progressione lungo il percorso.

3.2 Parametrizzazione della traiettoria

La parametrizzazione permette di descrivere una curva nello spazio mediante un insieme di funzioni scalari dipendenti da un unico parametro. Nel caso tridimensionale considerato nel presente lavoro si ha

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}, \qquad u \in [0, 1]. \tag{3.4}$$

Questa formulazione consente di descrivere traiettorie geometricamente differenti mantenendo una struttura matematica comune.

Una prima possibilità è costituita dall'interpolazione lineare tra una posizione iniziale

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

e una posizione finale

$$\mathbf{p}_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

L'interpolazione lineare può essere espressa mediante

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_0)\, u. \tag{3.7}$$

Equivalentemente, per ciascuna coordinata si ottiene

$$x(u) = x_0 + (x_f - x_0)u, \tag{3.8}$$

$$y(u) = y_0 + (y_f - y_0)u, \tag{3.9}$$

$$z(u) = z_0 + (z_f - z_0)u. \tag{3.10}$$

Questa formulazione è stata utilizzata nei programmi per determinare l'evoluzione delle coordinate caratterizzate da un andamento lineare.

3.3 Leggi polinomiali per la traiettoria

Oltre all'interpolazione lineare, nei programmi sviluppati è stata utilizzata una legge polinomiale di secondo grado per definire l'andamento di alcune coordinate spaziali.

La legge adottata può essere espressa come

$$q(u) = q_0 + (q_f - q_0)\left[1 - (1-u)^2\right]. \tag{3.11}$$

Sviluppando il termine tra parentesi si ottiene

$$q(u) = q_0 + (q_f - q_0)(2u - u^2). \tag{3.12}$$

Definendo

$$f(u) = 2u - u^2, \tag{3.13}$$

si osserva che

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1. \tag{3.14}$$

La funzione permette quindi di collegare correttamente il valore iniziale q_0 al valore finale q_f introducendo, rispetto all'interpolazione lineare, un andamento non lineare della coordinata.

La derivata rispetto al parametro u è

$$\frac{df}{du} = 2(1-u), \tag{3.15}$$

mentre la derivata seconda è

$$\frac{d^2 f}{du^2} = -2. \tag{3.16}$$

Nei programmi sviluppati questa legge viene combinata con interpolazioni lineari delle altre coordinate, permettendo di costruire percorsi spaziali parametrici.

È opportuno precisare che tale formulazione viene utilizzata per definire la geometria del percorso in funzione del parametro u e non costituisce, di per sé, una pianificazione dinamica completa basata su profili temporali di velocità, accelerazione o jerk.

3.4 Traiettorie circolari

Una seconda geometria utilizzata nella generazione dei percorsi è quella circolare.

Una circonferenza contenuta nel piano xy, avente centro (x_c, y_c) e raggio r, può essere descritta mediante il parametro angolare θ come

$$x(\theta) = x_c + r\cos\theta, \tag{3.17}$$

$$y(\theta) = y_c + r\sin\theta. \tag{3.18}$$

Nel caso in cui la coordinata z rimanga costante, la posizione assume la forma

$$\mathbf{p}(\theta) = \begin{bmatrix} x_c + r\cos\theta \\ y_c + r\sin\theta \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Nei programmi sviluppati anche l'angolo viene parametrizzato attraverso u:

$$\theta(u) = \theta_0 + \Delta\theta\, u, \tag{3.20}$$

dove θ_0 rappresenta l'angolo iniziale e $\Delta\theta$ l'ampiezza complessiva dell'arco percorso.

Sostituendo la relazione precedente nelle equazioni della circonferenza si ottiene

$$x(u) = x_c + r\cos\left(\theta_0 + \Delta\theta\, u\right), \tag{3.21}$$

$$y(u) = y_c + r\sin\left(\theta_0 + \Delta\theta\, u\right). \tag{3.22}$$

La traiettoria circolare rappresenta quindi un particolare caso della formulazione parametrica generale introdotta precedentemente.

3.5 Ascissa curvilinea

Per descrivere in maniera generale la progressione lungo una curva è utile introdurre il concetto di ascissa curvilinea.

Data una traiettoria parametrica $\mathbf{p}(u)$, la lunghezza dell'arco percorso a partire dalla posizione iniziale può essere definita come

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{d\mathbf{p}(\xi)}{d\xi} \right\| d\xi. \tag{3.23}$$

La derivata della posizione rispetto all'ascissa curvilinea individua il versore tangente alla traiettoria,

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \tag{3.24}$$

per il quale vale

$$\|\mathbf{t}(s)\| = 1. \tag{3.25}$$

L'ascissa curvilinea costituisce pertanto una coordinata intrinseca della curva, indipendente dalla particolare parametrizzazione utilizzata per descriverla.

Nel presente lavoro, tuttavia, i programmi non calcolano esplicitamente l'ascissa curvilinea mediante l'integrale (3.23). La progressione lungo il percorso viene ottenuta direttamente mediante il parametro normalizzato u.

Nel caso particolare di una traiettoria circolare a raggio costante vale

$$s = r(\theta - \theta_0). \tag{3.26}$$

Utilizzando la parametrizzazione dell'angolo definita nell'Equazione (3.20), si ottiene

$$s(u) = r\Delta\theta\, u. \tag{3.27}$$

In questo particolare caso il parametro u risulta quindi proporzionale all'ascissa curvilinea, pur non essendo quest'ultima calcolata esplicitamente all'interno del programma.

3.6 Rappresentazione dell'orientamento

La sola posizione del TCP non è sufficiente a descriverne completamente la posa nello spazio. È infatti necessario specificare anche il suo orientamento rispetto al sistema di riferimento adottato.

L'orientamento relativo tra due sistemi di riferimento può essere descritto mediante una matrice di rotazione [9]

$$R \in SO(3), \tag{3.28}$$

dove $SO(3)$ indica il gruppo delle matrici di rotazione tridimensionali. Una matrice di rotazione soddisfa le proprietà

$$R^T R = I, \qquad \det(R) = 1. \tag{3.29}$$

La prima relazione esprime l'ortogonalità della matrice, mentre la seconda garantisce che la trasformazione rappresenti una rotazione propria.

Nei programmi sviluppati per la generazione delle traiettorie sono state utilizzate principalmente rotazioni attorno agli assi Y e Z, combinate tra loro per ottenere l'orientamento desiderato del TCP.

3.7 Matrici di rotazione elementari

Le rotazioni nello spazio possono essere rappresentate mediante matrici di rotazione elementari associate agli assi del sistema di riferimento [9].

Una rotazione attorno all'asse Z di un angolo θ può essere rappresentata mediante

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Per una rotazione attorno all'asse Y, una delle convenzioni utilizzate nei programmi sviluppati è

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Il segno dei termini contenenti $\sin\theta$ dipende dalla convenzione adottata per il verso positivo della rotazione. Nei programmi utilizzati nel presente lavoro non compare un'unica convenzione per tutte le traiettorie; in alcune implementazioni è infatti presente la forma equivalente ottenuta invertendo il segno associato all'angolo di rotazione.

Per questo motivo, le matrici riportate in questa sezione devono essere interpretate come riferimento matematico generale, mentre la convenzione effettivamente utilizzata per ciascuna traiettoria è determinata dalla specifica implementazione del relativo programma.

Quando l'angolo varia lungo il percorso, esso può essere espresso come funzione del parametro u. L'orientamento diventa quindi anch'esso una grandezza parametrica, ad esempio

$$R(u) = R_y\left(\theta(u)\right). \tag{3.32}$$

3.8 Composizione delle rotazioni

Quando l'orientamento desiderato deriva dalla combinazione di più rotazioni, le relative matrici vengono composte attraverso il prodotto matriciale [9].

In forma generale, la struttura utilizzata nei programmi può essere rappresentata come

$$R_{\text{tot}}(u) = R_1 R_2 R_3(u). \tag{3.33}$$

Alcune delle rotazioni possono essere mantenute costanti lungo il percorso, mentre altre possono dipendere dal parametro u. In questo modo è possibile far variare progressivamente l'orientamento del TCP contemporaneamente alla sua posizione.

È importante osservare che il prodotto tra matrici di rotazione non è, in generale, commutativo:

$$R_1 R_2 \neq R_2 R_1. \tag{3.34}$$

Di conseguenza, l'ordine con cui vengono composte le rotazioni costituisce parte integrante della definizione dell'orientamento risultante e deve essere mantenuto coerente con quello implementato nel programma.

3.9 Rappresentazione asse–angolo

Le matrici di rotazione costituiscono una rappresentazione conveniente per costruire e comporre matematicamente l'orientamento. Nei programmi sviluppati, tuttavia, la matrice di rotazione complessiva non viene inserita direttamente nel comando di movimento destinato al robot.

L'orientamento viene convertito in una rappresentazione vettoriale asse–angolo. Indicando con $\hat{\mathbf{e}}$ il versore che individua l'asse di rotazione e con φ il corrispondente angolo, il vettore di rotazione può essere definito come

$$\boldsymbol{\rho} = \varphi \hat{\mathbf{e}}. \tag{3.35}$$

Esso può essere scritto attraverso le tre componenti

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

La direzione del vettore individua quindi l'asse di rotazione, mentre il suo modulo è associato all'angolo di rotazione.

Nei programmi Python sviluppati, la conversione dalla matrice di rotazione complessiva alla rappresentazione vettoriale viene effettuata mediante la funzione `as_rotvec()` della libreria utilizzata per la gestione delle rotazioni tridimensionali.

Il vettore così ottenuto viene successivamente inserito, insieme alle coordinate cartesiane, nella rappresentazione della posa utilizzata per la generazione dei comandi del robot.

3.10 Rappresentazione parametrica della posa

Combinando la posizione cartesiana e la rappresentazione vettoriale dell'orientamento, la posa del TCP può essere descritta mediante

$$\mathbf{q}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \\ r_x(u) \\ r_y(u) \\ r_z(u) \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Le prime tre componenti rappresentano la posizione del TCP, mentre le ultime tre descrivono il suo orientamento mediante il vettore di rotazione.

La traiettoria cartesiana completa può quindi essere interpretata come un'applicazione

$$\mathbf{q} : [0, 1] \to \mathbb{R}^6. \tag{3.38}$$

Dal punto di vista della generazione della traiettoria, posizione e orientamento possono essere costruiti separatamente,

$$\mathbf{p}(u) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\rho}(u), \tag{3.39}$$

ma vengono successivamente associati allo stesso valore del parametro u, definendo così la posa completa del TCP in ciascun punto del percorso.

3.11 Discretizzazione della traiettoria

Le formulazioni introdotte nelle sezioni precedenti descrivono le traiettorie come funzioni continue del parametro u. Per generare il programma eseguito dal robot è tuttavia necessario trasformare tale descrizione in un insieme finito di pose.

L'intervallo

$$[0, 1] \tag{3.40}$$

viene pertanto discretizzato in una sequenza di valori

$$u_1, u_2, \ldots, u_N. \tag{3.41}$$

Per ciascun valore u_i viene calcolata la corrispondente posizione

$$\mathbf{p}(u_i) \tag{3.42}$$

e il relativo orientamento

$$\boldsymbol{\rho}(u_i). \tag{3.43}$$

Si ottiene quindi l'insieme discreto di pose

$$\{\mathbf{q}(u_1), \mathbf{q}(u_2), \ldots, \mathbf{q}(u_N)\}. \tag{3.44}$$

Nei programmi sviluppati la discretizzazione viene effettuata mediante una suddivisione uniforme dell'intervallo del parametro, utilizzando un numero prefissato di punti.

La stessa procedura viene utilizzata, quando previsto, per generare il percorso di ritorno, invertendo il verso di variazione del parametro.

3.12 Generazione dei waypoint e del programma URScript

Una volta determinata la sequenza discreta delle pose, ciascun elemento viene convertito in un comando di movimento destinato al controllore del robot.

La struttura generale utilizzata è

```
movel(p[x,y,z,rx,ry,rz],a,v,r).
```
(3.45)

Il vettore contenuto all'interno del comando specifica la posa cartesiana desiderata, attraverso le tre coordinate di posizione e le tre componenti della rappresentazione vettoriale dell'orientamento.

Il processo complessivo di generazione può essere schematicamente rappresentato come

$$u_i \longrightarrow \mathbf{p}(u_i) \longrightarrow R(u_i) \longrightarrow \boldsymbol{\rho}(u_i) \longrightarrow \mathbf{q}(u_i) \longrightarrow \text{comando URScript.} \tag{3.46}$$

Nei programmi utilizzati, il comando `movel` viene generato automaticamente per ciascun punto della traiettoria. I parametri a, v e r, associati rispettivamente all'accelerazione, alla velocità e al raccordo del movimento, vengono specificati direttamente nel comando URScript.

Tali parametri appartengono alla fase di esecuzione della traiettoria e rimangono distinti dalla sua definizione geometrica, descritta mediante le equazioni introdotte nelle sezioni precedenti.

3.13 Verifica grafica della traiettoria della porta

Prima dell'esecuzione sul manipolatore, la traiettoria pianificata è stata verificata graficamente nello spazio cartesiano. In particolare, per la traiettoria associata al movimento della porta sono state rappresentate alcune configurazioni significati-

ve del TCP lungo il percorso, visualizzando contemporaneamente la posizione e l'orientamento della terna utensile rispetto alla terna base del robot.

La Figura 3.1 riporta quattro istanti della traiettoria. La linea tratteggiata rappresenta il percorso pianificato, il punto nero individua la posizione del TCP, mentre i tre segmenti colorati rappresentano gli assi X, Y e Z della terna utensile. La rappresentazione consente quindi di controllare congiuntamente l'evoluzione della posizione e dell'orientamento generati dallo script prima dell'esecuzione della traiettoria sul robot.

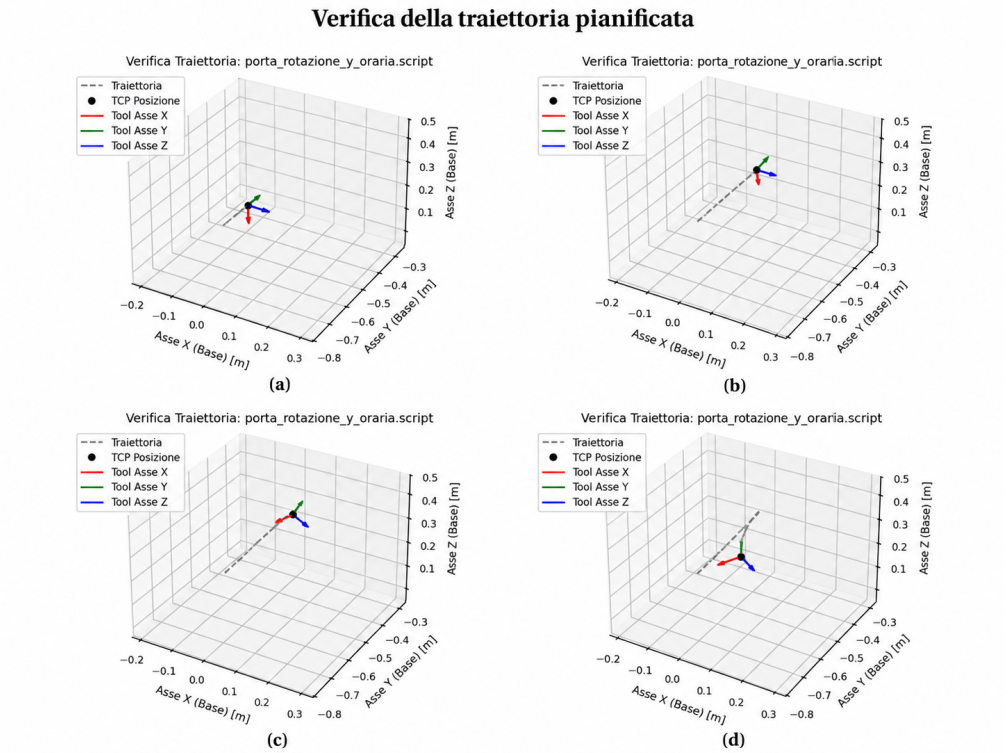


Figura 3.1: Verifica grafica della traiettoria pianificata per il movimento della porta in quattro configurazioni significative. La linea tratteggiata rappresenta il percorso pianificato, il punto nero la posizione del TCP e gli assi colorati l'orientamento della terna utensile rispetto alla terna base del robot.

La verifica grafica costituisce un controllo preliminare della coerenza della sequenza di pose generata. Essa permette, in particolare, di osservare che la variazione dell'orientamento del TCP rimanga associata alla progressione lungo il percorso geometrico definito dallo script, prima della conversione definitiva dei waypoint nei corrispondenti comandi URScript.

3.14 Considerazioni sulla pianificazione delle traiettorie

L'approccio adottato permette di descrivere mediante una formulazione comune traiettorie caratterizzate da geometrie differenti. La posizione del TCP può essere co-

struita mediante interpolazioni lineari, leggi polinomiali o parametrizzazioni circolari, mentre il relativo orientamento può essere definito mediante matrici di rotazione e la loro composizione.

La successiva conversione dell'orientamento nella rappresentazione asse–angolo permette di ottenere, per ogni valore del parametro u, una posa cartesiana completa compatibile con la struttura utilizzata nei comandi generati per il robot.

La parametrizzazione consente inoltre di associare posizione e orientamento allo stesso parametro, mantenendo una descrizione coerente del movimento lungo l'intero percorso. La discretizzazione trasforma infine la formulazione continua in una sequenza finita di waypoint utilizzabili per la generazione automatica del programma URScript.

È importante distinguere la definizione geometrica della traiettoria dalla sua effettiva esecuzione. Le equazioni introdotte in questo capitolo descrivono infatti il percorso nello spazio delle pose, mentre i parametri relativi all'esecuzione del movimento e l'interfacciamento con il robot appartengono alla successiva fase sperimentale.

La generazione automatica dei waypoint e del relativo codice URScript consente di mantenere una definizione riproducibile delle traiettorie. Tale riproducibilità è particolarmente importante nel contesto del presente lavoro, poiché permette di imporre al robot movimenti predefiniti e di concentrare l'analisi successiva sulla risposta meccanica osservata durante l'interazione fisica uomo–robot.

Capitolo 4

Modellazione matematica dell'interazione uomo–robot

4.1 Il paradigma dell'interazione fisica uomo–robot

L'interazione fisica uomo–robot rappresenta uno degli aspetti caratteristici dei sistemi di robotica collaborativa. A differenza delle applicazioni industriali tradizionali, nelle quali il contatto con l'operatore viene generalmente evitato, nei sistemi collaborativi il contatto fisico può costituire parte integrante dell'attività svolta.

Nel caso considerato nel presente lavoro, il robot esegue una traiettoria cartesiana precedentemente definita. Il comportamento del manipolatore può quindi essere considerato imposto dalla traiettoria programmata, mentre l'interazione con l'operatore determina il wrench misurato al terminale e può produrre uno scostamento tra la posa effettivamente raggiunta e quella nominale.

L'obiettivo dell'analisi non è pertanto quello di modellare la dinamica completa del robot, ma di descrivere mediante un modello equivalente il comportamento meccanico osservato durante l'interazione tra il terminale robotico e l'operatore.

In particolare, si ricerca una rappresentazione sufficientemente semplice da consentire l'identificazione dei parametri a partire dai dati sperimentali e, allo stesso tempo, sufficientemente generale da descrivere differenti condizioni di interazione.

In quest'ottica, il comportamento osservato viene descritto attraverso una relazione tra il movimento del terminale e il wrench associato all'interazione. Il paradigma dell'impedenza meccanica costituisce un riferimento teorico particolarmente adatto a questo tipo di descrizione, poiché mette in relazione le grandezze cinematiche del sistema con le forze e i momenti sviluppati durante l'interazione [4].

4.2 Modello generale di impedenza meccanica

Il concetto di impedenza meccanica permette di descrivere la risposta di un sistema in termini di relazione tra movimento e forza. Nella formulazione generale, tale risposta può comprendere contributi inerziali, viscosi ed elastici [4].

Nel caso multidimensionale, considerando il wrench applicato al terminale, il modello può essere espresso nella forma

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \tag{4.1}$$

dove:

- $\mathbf{W}(t)$ rappresenta il wrench associato all'interazione;
- $\mathbf{x}(t)$ rappresenta lo spostamento rispetto a una configurazione di riferimento;
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$ rappresenta il corrispondente contributo cinematico di velocità;
- $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ rappresenta il contributo associato all'accelerazione;
- $\mathbf{M}$ rappresenta la matrice dei termini inerziali;
- $\mathbf{B}$ rappresenta la matrice dei termini viscosi;
- $\mathbf{K}$ rappresenta la matrice dei termini elastici.

Il modello permette quindi di distinguere tre contributi principali alla risposta meccanica: un contributo inerziale, dipendente dall'accelerazione; un contributo viscoso, dipendente dalla velocità; e un contributo elastico, dipendente dallo spostamento.

La formulazione matriciale consente inoltre di rappresentare non soltanto il comportamento lungo ciascun grado di libertà, ma anche eventuali accoppiamenti tra differenti componenti del movimento.

4.3 Semplificazione del modello e contributo inerziale

Nel presente lavoro il termine inerziale

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) \tag{4.2}$$

non viene incluso nel modello utilizzato per l'identificazione.

Questa scelta costituisce un'ipotesi di modellazione legata alle condizioni nelle quali vengono eseguite le prove. Le traiettorie programmate sono infatti caratterizzate da movimenti relativamente lenti e da basse accelerazioni. Nell'ambito del presente studio si assume pertanto che il contributo inerziale sia secondario rispetto ai contributi elastico e viscoso.

Il modello generale viene quindi ridotto alla relazione

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t)} \tag{4.3}$$

che rappresenta il riferimento utilizzato per la successiva procedura di identificazione. In questa formulazione sia il contributo elastico sia quello viscoso sono espressi rispetto alla medesima traiettoria nominale: $\Delta\mathbf{x}$ descrive la deviazione di posa e $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ la deviazione di velocità tra moto effettivo e moto target.

È importante sottolineare che l'eliminazione del termine inerziale non implica che l'inerzia fisica dell'arto o del sistema sia nulla. Si tratta invece di una semplificazione modellistica adottata in relazione al regime di moto considerato e agli obiettivi dell'analisi.

La riduzione del numero di contributi permette inoltre di mantenere il modello sufficientemente semplice per l'identificazione sperimentale delle matrici di rigidezza e smorzamento.

4.4 Rappresentazione cartesiana a sei gradi di libertà

Il movimento del terminale viene descritto nello spazio cartesiano a sei dimensioni. Indicando con $\mathbf{x}_{\text{actual}}(t)$ la posa effettivamente assunta dal TCP, si può scrivere

$$\mathbf{x}_{\text{actual}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

dove le prime tre componenti rappresentano la posizione cartesiana del terminale, mentre le ultime tre descrivono il relativo orientamento.

Analogamente, la posa nominale prevista dalla traiettoria viene indicata con

$$\mathbf{x}_{\text{target}}(t) = \begin{bmatrix} x_{\text{target}}(t) \\ y_{\text{target}}(t) \\ z_{\text{target}}(t) \\ r_{x,\text{target}}(t) \\ r_{y,\text{target}}(t) \\ r_{z,\text{target}}(t) \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Il wrench associato all'interazione viene invece rappresentato mediante

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \\ T_x(t) \\ T_y(t) \\ T_z(t) \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

dove F_x, F_y e F_z rappresentano le componenti della forza, mentre T_x, T_y e T_z rappresentano le componenti del momento.

Alla posa effettiva e a quella nominale sono associate rispettivamente le velocità cartesiane

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}}(t) = \begin{bmatrix} v_{x,\text{actual}}(t) \\ v_{y,\text{actual}}(t) \\ v_{z,\text{actual}}(t) \\ \omega_{x,\text{actual}}(t) \\ \omega_{y,\text{actual}}(t) \\ \omega_{z,\text{actual}}(t) \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

e

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{target}}(t) = \begin{bmatrix} v_{x,\text{target}}(t) \\ v_{y,\text{target}}(t) \\ v_{z,\text{target}}(t) \\ \omega_{x,\text{target}}(t) \\ \omega_{y,\text{target}}(t) \\ \omega_{z,\text{target}}(t) \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Le prime tre componenti rappresentano le velocità lineari, mentre le ultime tre rappresentano le velocità angolari. La differenza tra questi due vettori verrà utilizzata per definire il contributo viscoso relativo del modello.

4.5 Definizione delle grandezze relative rispetto alla traiettoria nominale

Nel modello utilizzato per l'identificazione, i contributi elastico e viscoso non vengono associati alle grandezze cinematiche assolute del terminale, ma alle rispettive deviazioni rispetto alla traiettoria nominale imposta al robot. In questo modo entrambi i termini del modello sono riferiti alla stessa configurazione di riferimento.

Per il contributo elastico si introduce

$$\boxed{\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{actual}}(t) - \mathbf{x}_{\text{target}}(t)} \tag{4.9}$$

mentre per il contributo viscoso si definisce

$$\boxed{\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\text{target}}(t)} \tag{4.10}$$

La prima relazione descrive quindi lo scostamento tra la posa effettivamente raggiunta dal TCP e la posa nominale prevista dalla traiettoria. La seconda descrive invece lo scostamento tra la velocità cartesiana effettiva e quella associata al moto nominale.

Il modello adottato nel presente lavoro assume pertanto la forma

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t)} \tag{4.11}$$

In tale formulazione, $\Delta\mathbf{x}(t)$ costituisce il regressore associato al contributo elastico equivalente, mentre $\Delta\dot{\mathbf{x}}(t)$ costituisce il regressore associato al contributo viscoso equivalente. Il wrench viene quindi messo in relazione con la deviazione del moto effettivo rispetto al moto nominale, anziché con la velocità assoluta del TCP.

Questa scelta consente inoltre di attribuire ai due contributi una stessa interpretazione rispetto alla traiettoria di riferimento: se il moto effettivo coincidesse idealmente con quello nominale, sia $\Delta\mathbf{x}$ sia $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ tenderebbero a zero. La traiettoria target rimane comunque definita a priori e non viene modificata in funzione dell'interazione. L'impiego di una traiettoria di riferimento per descrivere congiuntamente movimento e forza è coerente con approcci presenti in letteratura [5], pur con finalità differenti da quelle del presente lavoro.

4.6 Matrici di rigidezza e smorzamento

Nel modello adottato, la matrice $\mathbf{K}$ rappresenta il contributo elastico equivalente dell'interazione, mentre la matrice $\mathbf{B}$ rappresenta il contributo viscoso equivalente.

Entrambe vengono considerate, in generale, come matrici complete appartenenti a $\mathbb{R}^{6\times6}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{61} & K_{62} & \cdots & K_{66} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{61} & B_{62} & \cdots & B_{66} \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Gli elementi diagonali descrivono il contributo della corrispondente componente dello spostamento o della velocità sulla componente di wrench considerata. Gli elementi extradiagonali consentono invece di rappresentare gli accoppiamenti tra differenti gradi di libertà.

La formulazione completa permette, ad esempio, di rappresentare il contributo di una variazione orientazionale su una componente di forza oppure quello di uno spostamento traslazionale su una componente di momento. Nel modello non viene quindi imposta a priori l'ipotesi di indipendenza tra i sei gradi di libertà.

Le unità fisiche dei coefficienti dipendono dalle componenti messe in relazione. Per i termini puramente traslazionali, i coefficienti di $\mathbf{K}$ sono espressi in N/m e quelli di $\mathbf{B}$ in N s/m. Per i termini puramente rotazionali, le corrispondenti unità sono N m/rad e N m s/rad. I termini di accoppiamento presentano invece unità miste, determinate dalla componente del wrench e dalla variabile cinematica considerate.

4.7 Interpretazione dei parametri del modello

Le matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ stimate mediante il modello non devono essere interpretate come proprietà assolute e invariabili dell'arto dell'operatore.

Gli studi sull'impedenza meccanica dell'arto umano mostrano infatti che le caratteristiche di rigidezza e viscosità osservate possono dipendere dalla configurazione dell'arto e dalle condizioni nelle quali viene eseguito il movimento [8].

Nel contesto del presente lavoro, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ vengono quindi interpretate come parametri equivalenti del comportamento meccanico osservato durante una specifica condizione di interazione.

Il valore stimato può essere influenzato da diversi fattori, tra cui:

- la postura assunta dall'operatore;
- la configurazione dell'arto;
- la configurazione del robot;
- la traiettoria eseguita;
- la direzione del movimento;
- la modalità di partecipazione dell'operatore;
- le condizioni specifiche nelle quali viene effettuata la prova.

In particolare, durante l'interazione l'operatore può seguire il movimento in modo prevalentemente passivo, contrastarlo oppure assecondarlo. Tali differenti modalità di partecipazione possono modificare la relazione osservata tra movimento e wrench.

La stima delle matrici deve pertanto essere interpretata come una caratterizzazione equivalente dell'interazione nelle condizioni della specifica prova e non come una misura universale delle proprietà biomeccaniche del soggetto.

4.8 Formulazione del problema di identificazione

L'obiettivo della procedura di identificazione consiste nel determinare le matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ a partire dalle osservazioni sperimentali delle grandezze cinematiche e del wrench.

Considerando N campioni temporali, per il generico campione i il modello può essere scritto come

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}}_i. \tag{4.14}$$

Per formulare il problema come una regressione lineare, per ciascun campione si definisce il vettore dei regressori

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_i^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_i^T \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Raccogliendo i coefficienti incogniti in un'unica matrice $\boldsymbol{\Theta}$, la relazione può essere espressa come

$$\mathbf{W}_i^T = \mathbf{A}_i\boldsymbol{\Theta}. \tag{4.16}$$

Considerando contemporaneamente tutti gli N campioni si ottiene

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}, \tag{4.17}$$

con

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times 12}, \qquad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N\times 6}, \qquad \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{12\times 6}. \tag{4.18}$$

La matrice dei regressori assume quindi la struttura

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_1^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_1^T \\ \Delta\mathbf{x}_2^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ \Delta\mathbf{x}_N^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_N^T \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

mentre la matrice dei parametri può essere interpretata come

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

La stima di $\boldsymbol{\Theta}$ permette quindi di determinare contemporaneamente tutti i coefficienti delle matrici complete di rigidezza e smorzamento.

4.9 Identificazione mediante il metodo dei minimi quadrati

I dati sperimentali sono inevitabilmente soggetti a rumore, variabilità e componenti che non possono essere descritte esattamente dal modello lineare adottato. La relazione $\mathbf{W} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}$ non viene quindi soddisfatta esattamente per tutti i campioni.

La stima dei parametri viene formulata come un problema ai minimi quadrati:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{W}\|_F^2, \tag{4.21}$$

dove $\|\cdot\|_F$ rappresenta la norma di Frobenius.

Nel caso ideale in cui la matrice dei regressori abbia rango di colonna completo, la soluzione può essere formalmente scritta come

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}. \tag{4.22}$$

Tale espressione è utile per descrivere analiticamente il problema, ma non rappresenta necessariamente il metodo numerico più opportuno per il calcolo della soluzione. Nell'implementazione sviluppata nel presente lavoro la stima viene infatti effettuata direttamente mediante una procedura numerica di minimi quadrati, evitando il calcolo esplicito dell'inversa $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}$.

Una volta determinata $\hat{\mathbf{\Theta}}$, le matrici stimate vengono ricavate separando le prime sei e le ultime sei righe:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{\Theta}}^T_{1:6,:}, \tag{4.23}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{\Theta}}^T_{7:12,:}. \tag{4.24}$$

Il wrench ricostruito dal modello può infine essere calcolato come

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{\Theta}}. \tag{4.25}$$

4.10 Identificazione globale e locale

La procedura di identificazione può essere applicata considerando l'intera acquisizione come un unico insieme di dati oppure suddividendo la sequenza temporale in differenti intervalli.

Nel primo caso si parla di identificazione globale. Tutti i campioni della prova vengono utilizzati per stimare un'unica coppia di matrici

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{glob}}, \qquad \hat{\mathbf{B}}_{\text{glob}}. \tag{4.26}$$

Questa formulazione verifica se un unico insieme di parametri equivalenti sia in grado di rappresentare il comportamento osservato durante l'intera acquisizione.

Tale ipotesi può risultare limitativa nel caso dell'interazione con l'arto umano, poiché le caratteristiche meccaniche osservate possono variare al variare della configurazione e delle condizioni di interazione [8].

Per questo motivo viene considerata anche un'identificazione locale. La sequenza temporale viene suddivisa in differenti finestre e il problema di identificazione viene risolto indipendentemente all'interno di ciascuna di esse.

Per la generica finestra j si può scrivere

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{\Theta}_j, \tag{4.27}$$

da cui vengono ricavate le matrici

$$\hat{\mathbf{K}}_j, \qquad \hat{\mathbf{B}}_j. \tag{4.28}$$

L'identificazione locale permette quindi di descrivere il comportamento mediante insiemi differenti di parametri equivalenti lungo la traiettoria, senza imporre che una singola coppia di matrici rimanga rappresentativa dell'intera prova.

Il confronto tra approccio globale e locale permette successivamente di valutare sperimentalmente se l'introduzione della variabilità locale migliori la capacità del modello di ricostruire il wrench misurato.

4.11 Valutazione della qualità del modello

La valutazione del modello identificato viene effettuata confrontando il wrench misurato sperimentalmente con quello ricostruito attraverso i parametri stimati.

L'analisi non viene quindi limitata ai valori assunti dagli elementi delle matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$, ma considera anche la capacità predittiva del modello e le caratteristiche numeriche del problema di identificazione.

A questo scopo vengono utilizzati il coefficiente di determinazione R^2, l'errore quadratico medio RMSE, l'errore assoluto medio MAE e il numero di condizionamento della matrice dei regressori.

4.11.1 Coefficiente di determinazione

Per una generica componente del wrench, il coefficiente di determinazione R^2 viene calcolato come

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(W_i - \hat{W}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} \left(W_i - \bar{W}\right)^2}, \tag{4.29}$$

dove $\bar{W}$ rappresenta il valore medio della componente di wrench considerata.

Un valore prossimo a 1 indica che la ricostruzione ottenuta dal modello riproduce una parte elevata della variabilità presente nei dati. Valori inferiori indicano una capacità descrittiva progressivamente minore.

Il coefficiente può inoltre assumere valori negativi. In questo caso, per la componente considerata, l'errore quadratico della ricostruzione risulta maggiore di quello che si otterrebbe utilizzando semplicemente il valore medio dei dati osservati come previsione.

4.11.2 Errore quadratico medio

L'errore quadratico medio, RMSE (*Root Mean Square Error*), è definito come

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(W_i - \hat{W}_i\right)^2}. \tag{4.30}$$

Il RMSE mantiene la stessa unità fisica della componente di wrench analizzata e penalizza maggiormente gli errori di ampiezza elevata a causa dell'elevamento al quadrato dei residui.

4.11.3 Errore assoluto medio

L'errore assoluto medio, MAE (*Mean Absolute Error*), viene calcolato come

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| W_i - \hat{W}_i \right|. \tag{4.31}$$

Anche il MAE mantiene la stessa unità fisica della grandezza analizzata. Rispetto al RMSE, esso risulta meno influenzato dalla presenza di singoli errori particolarmente elevati e fornisce una misura diretta dello scostamento assoluto medio tra valore misurato e valore ricostruito.

4.11.4 Analisi del condizionamento numerico

La qualità della ricostruzione non è sufficiente, da sola, a stabilire quanto i parametri identificati siano numericamente affidabili. Nel caso dell'identificazione parametrica è infatti necessario considerare anche il condizionamento della matrice dei regressori.

Il numero di condizionamento può essere espresso mediante

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}, \tag{4.32}$$

dove $\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$ rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo valore singolare della matrice $\mathbf{A}$.

Un numero di condizionamento elevato indica che la stima dei coefficienti può essere sensibile a piccole variazioni dei dati. Questo aspetto è particolarmente rilevante nel modello completo utilizzato nel presente lavoro, nel quale devono essere identificati contemporaneamente i coefficienti delle due matrici 6×6.

4.11.5 Valori singolari della matrice di regressione

Il numero di condizionamento è direttamente legato alla distribuzione dei valori singolari della matrice dei regressori.

Una forte differenza tra il valore singolare massimo e quello minimo indica che alcune combinazioni dei regressori sono rappresentate nei dati molto più fortemente di altre. In tali condizioni, la ricostruzione del wrench può risultare soddisfacente anche quando alcuni coefficienti del modello sono difficili da identificare in maniera stabile.

L'analisi dei valori singolari permette pertanto di affiancare alla valutazione dell'errore di ricostruzione una valutazione della stabilità numerica del problema di identificazione.

4.12 Limiti e interpretazione del modello adottato

Il modello

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}} \tag{4.33}$$

costituisce una rappresentazione equivalente e semplificata del comportamento meccanico reale dell'interazione.

In primo luogo, l'omissione del termine inerziale limita l'interpretazione del modello alle condizioni di moto per le quali l'ipotesi di basse accelerazioni risulta ragionevole.

In secondo luogo, la formulazione è lineare rispetto ai regressori e assume che, all'interno dell'intervallo utilizzato per ciascuna identificazione, il comportamento possa essere rappresentato mediante coefficienti costanti di rigidezza e smorzamento.

Poiché i regressori sono costituiti da deviazioni rispetto al moto nominale, la loro ampiezza e la loro indipendenza dipendono anche dalla traiettoria eseguita. Traiettorie che eccitano solo un sottoinsieme dei gradi di libertà o che producono regressori fortemente correlati possono rendere difficile la stima indipendente di tutti i coefficienti delle matrici complete, anche in presenza di una buona ricostruzione del wrench.

L'interazione con l'arto umano può invece dipendere dalla configurazione, dalla postura e dalle condizioni nelle quali viene eseguito il movimento [8]. A queste dipendenze si aggiunge, nel contesto sperimentale considerato, la possibile variazione del livello e della modalità di partecipazione dell'operatore.

Di conseguenza, le matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ non devono essere interpretate come una descrizione biomeccanica completa dell'arto umano. Esse rappresentano parametri equivalenti ottenuti dalla relazione osservata tra movimento e wrench nelle specifiche condizioni della prova.

La distinzione è particolarmente importante quando si analizzano i valori dei singoli coefficienti. Una buona capacità di ricostruzione del wrench non garantisce infatti, da sola, che ogni elemento delle matrici possa essere interpretato individualmente come un parametro fisico stabile. Il condizionamento della matrice dei regressori deve essere considerato insieme alle metriche di ricostruzione prima di attribuire significato ai coefficienti identificati.

4.13 Considerazioni conclusive

Nel presente capitolo è stato definito il modello matematico utilizzato per descrivere l'interazione fisica tra operatore e robot.

A partire dalla formulazione generale dell'impedenza meccanica, comprendente contributi inerziali, viscosi ed elastici [4],

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{4.34}$$

è stato adottato, in relazione alle condizioni di moto considerate, il modello semplificato

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}}. \tag{4.35}$$

La componente elastica viene quindi associata alla deviazione tra la posa effettiva e quella nominale del TCP, mentre il contributo viscoso viene associato alla differenza tra la velocità cartesiana effettiva e quella della traiettoria target. I due contributi risultano pertanto definiti rispetto alla medesima traiettoria nominale.

Il problema è stato formulato come una regressione lineare nello spazio cartesiano a sei dimensioni, senza imporre una struttura diagonale alle matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$. La formulazione completa permette quindi di includere anche eventuali accoppiamenti tra componenti traslazionali e rotazionali.

Sono state inoltre introdotte l'identificazione globale e quella locale. La prima utilizza un unico insieme di parametri per l'intera acquisizione, mentre la seconda permette di associare parametri differenti a porzioni successive della prova, in accordo con la possibile variabilità delle condizioni di interazione.

Infine, sono stati definiti gli indicatori utilizzati per valutare il modello: R^2, RMSE e MAE per la qualità della ricostruzione e numero di condizionamento e valori singolari per l'analisi della stabilità numerica dell'identificazione.

Nel capitolo successivo viene descritta l'implementazione sperimentale e computazionale della metodologia, illustrando il sistema utilizzato, la procedura di acquisizione, il pre-processing dei segnali e l'applicazione concreta della procedura di identificazione ai dati raccolti.

Capitolo 5

Setup sperimentale e metodologia

5.1 Introduzione

Nel presente capitolo viene descritta la metodologia sperimentale e computazionale sviluppata durante il tirocinio per l'analisi dell'interazione fisica tra operatore e robot collaborativo.

A differenza del Capitolo 4, nel quale è stata introdotta la formulazione teorica del modello di interazione, in questo capitolo vengono descritte le modalità con cui tale modello è stato applicato ai dati sperimentali.

L'attività è stata organizzata in modo da acquisire le principali grandezze necessarie all'identificazione. In particolare, per ciascuna prova sono state registrate la posa nominale del terminale, la posa effettivamente raggiunta, la velocità cartesiana effettiva del TCP e il wrench misurato durante l'interazione. La velocità della traiettoria target viene invece ricostruita offline a partire dalla posa nominale e dal timestamp del robot.

La procedura sperimentale e computazionale può essere schematizzata nelle seguenti fasi:

1. definizione ed esecuzione della traiettoria del robot;
2. acquisizione delle grandezze cinematiche e meccaniche;
3. memorizzazione dei dati sperimentali;
4. calcolo della deviazione di posa rispetto alla traiettoria nominale;
5. ricostruzione della velocità cartesiana target e calcolo della velocità relativa;
6. filtraggio dei segnali;
7. costruzione della matrice di regressione;
8. identificazione globale dei parametri;
9. identificazione locale mediante suddivisione in finestre;
10. ricostruzione del wrench;

11. valutazione della qualità della ricostruzione e del condizionamento numerico.

L'acquisizione e l'elaborazione sono state implementate mediante script Python distinti. La comunicazione con il robot durante le prove è stata realizzata attraverso l'interfaccia RTDE.

5.2 Sistema sperimentale

Il sistema sperimentale è costituito da un robot collaborativo *Universal Robots UR5e*, utilizzato per eseguire le traiettorie cartesiane definite precedentemente e consentire l'interazione fisica con l'operatore.

Il robot è collegato a un personal computer mediante connessione Ethernet. Il computer viene utilizzato sia per la gestione dei programmi necessari all'esecuzione delle prove sia per l'acquisizione delle grandezze rese disponibili dal controllore.

Il punto di riferimento utilizzato per descrivere il movimento è il TCP (*Tool Center Point*) del manipolatore. L'analisi viene effettuata nello spazio cartesiano del terminale considerando sei componenti: tre traslazionali e tre rotazionali.

Le grandezze utilizzate nella successiva identificazione sono quindi rappresentate nello stesso spazio cartesiano a sei dimensioni adottato nella formulazione del modello del Capitolo 4.

5.2.1 Definizione dello spazio di lavoro

Prima dell'esecuzione delle prove è stata individuata una regione dello spazio di lavoro destinata allo svolgimento delle traiettorie e all'interazione fisica tra operatore e robot.

La definizione di tale regione ha avuto lo scopo di mantenere il movimento del TCP all'interno di un volume prestabilito e di ottenere una configurazione geometrica riproducibile nelle differenti prove.

Il volume utilizzato può essere approssimato mediante un parallelepipedo avente dimensioni

$$L_x = 70\,\mathrm{cm}, \qquad L_y = 35\,\mathrm{cm}, \qquad L_z = 50\,\mathrm{cm}, \tag{5.1}$$

dove L_x, L_y e L_z rappresentano rispettivamente la larghezza, la profondità e l'altezza della regione di interazione.

Il volume corrispondente è

$$V = L_x L_y L_z = 70 \cdot 35 \cdot 50 = 122500\,\mathrm{cm}^3, \tag{5.2}$$

pari a circa

$$V \simeq 0.123\,\mathrm{m}^3. \tag{5.3}$$

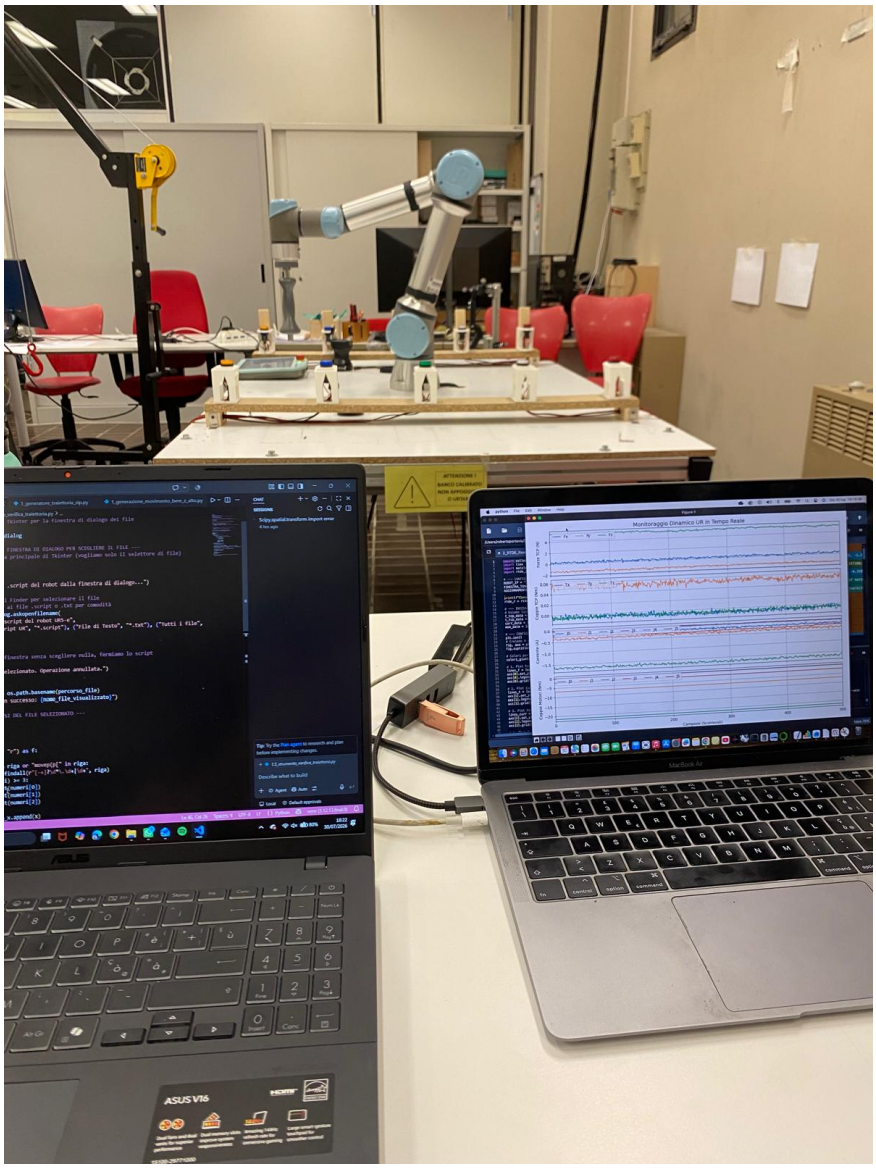


Figura 5.1: Vista complessiva del setup sperimentale utilizzato per le acquisizioni. Il manipolatore collaborativo UR5e è installato sul banco di prova, mentre le postazioni di elaborazione vengono utilizzate per l'esecuzione degli script, l'acquisizione e il monitoraggio dei segnali.

La regione di lavoro è stata collocata a una distanza di circa 35 cm dal robot. Rispetto alla terna cartesiana utilizzata come riferimento, essa interessa principalmente la regione caratterizzata da valori negativi della coordinata Y.

Geometricamente, il volume si sviluppa per circa 70 cm lungo l'asse X, 35 cm lungo la direzione Y e 50 cm lungo la direzione verticale Z.

La posizione dell'operatore durante le prove è stata scelta in modo coerente con questa regione di interazione. La descrizione viene effettuata rispetto alla terna cartesiana del robot, evitando di introdurre definizioni legate al concetto di fronte o retro fisico del manipolatore.

Le traiettorie sono state progettate affinché il movimento del TCP rimanesse all'interno della regione individuata e fosse accessibile all'operatore durante l'interazione.

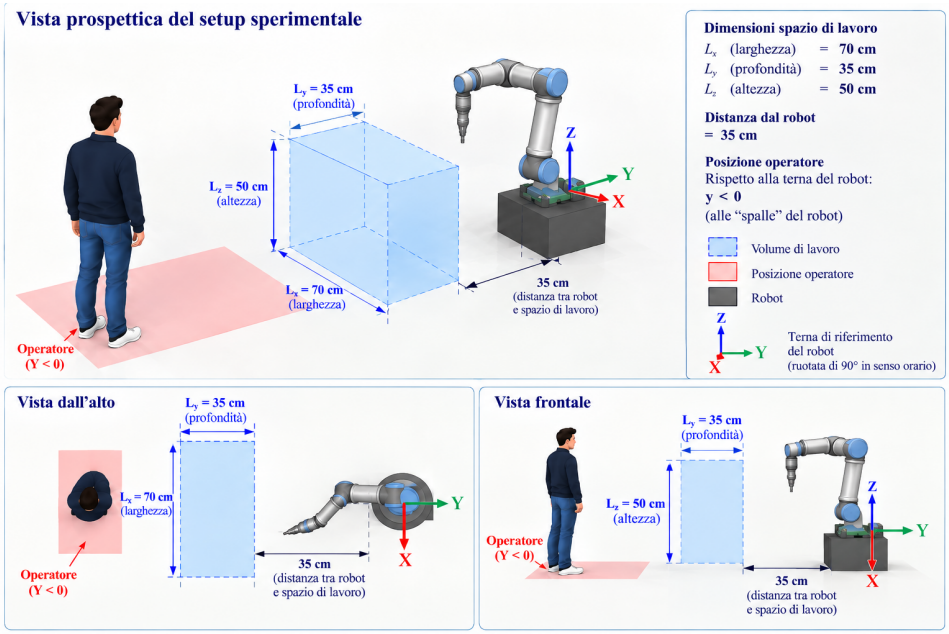


Figura 5.2: Rappresentazione schematica dello spazio di lavoro utilizzato per le prove di interazione uomo–robot. Il volume considerato presenta dimensioni pari a 70 cm lungo X, 35 cm lungo Y e 50 cm lungo Z.

5.3 Esecuzione delle traiettorie

Prima di ciascuna acquisizione viene definita la traiettoria nominale che il robot deve eseguire durante la prova.

Le modalità matematiche utilizzate per generare tali traiettorie sono state descritte nel Capitolo 3. La traiettoria viene discretizzata in una sequenza di pose e successivamente convertita nei comandi necessari alla sua esecuzione.

Durante la prova, la posa nominale rappresenta il riferimento rispetto al quale viene successivamente valutato lo scostamento del TCP.

Per ciascun istante si considera pertanto il vettore

$$\mathbf{x}_{\text{target}}(t) = \begin{bmatrix} X_{\text{target}}(t) \\ Y_{\text{target}}(t) \\ Z_{\text{target}}(t) \\ R_{x,\text{target}}(t) \\ R_{y,\text{target}}(t) \\ R_{z,\text{target}}(t) \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Le prime tre componenti descrivono la posizione nominale del TCP, mentre le ultime tre ne descrivono l'orientamento.

Durante l'esecuzione l'operatore interagisce fisicamente con il terminale. La posa effettivamente raggiunta può quindi differire dalla posa nominale, generando lo scostamento utilizzato successivamente nel modello di interazione.



Figura 5.3: Esempio di interazione fisica tra operatore e manipolatore durante l'esecuzione di una traiettoria programmata. L'operatore mantiene il contatto con l'end-effector mentre il robot segue il movimento imposto dal controllo di posizione.

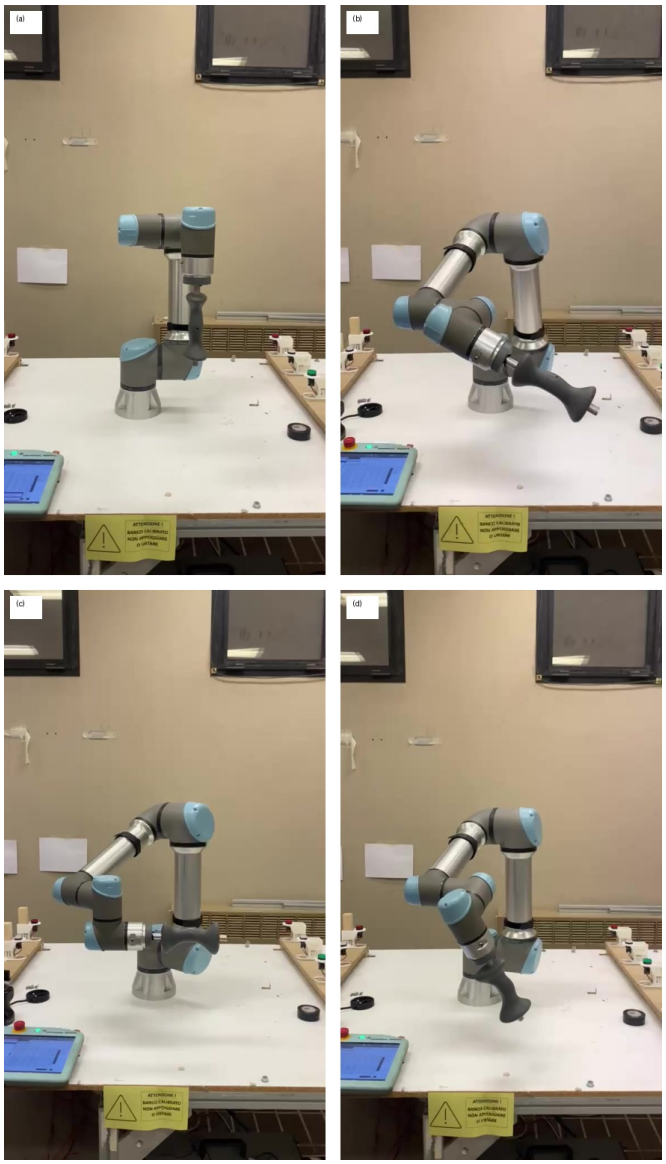


Figura 5.4: Sequenza di configurazioni assunte dal manipolatore durante l'esecuzione di una traiettoria programmata. I fotogrammi, ordinati temporalmente da (a) a (d), mostrano l'evoluzione del movimento all'interno dello spazio di lavoro sperimentale.

5.4 Architettura software

La procedura sperimentale è stata implementata principalmente mediante il linguaggio Python.

L'architettura software è stata suddivisa in due componenti principali:

1. uno script dedicato all'acquisizione dei dati dal robot;
2. uno script dedicato all'elaborazione dei dati e all'identificazione del modello.

Il primo programma stabilisce la comunicazione con il controllore del robot e acquisisce periodicamente le grandezze necessarie. I dati vengono memorizzati in un file in formato CSV.

Il secondo programma opera offline sul file ottenuto durante la prova. Esso esegue il pre-processing dei segnali, costruisce le variabili utilizzate nella regressione, identifica le matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ e calcola gli indicatori utilizzati per la valutazione dei risultati.

La separazione tra acquisizione ed elaborazione permette di mantenere distinta la fase sperimentale dalla successiva analisi numerica e consente di ripetere differenti elaborazioni sugli stessi dati senza dover eseguire nuovamente la prova.

5.5 Acquisizione dei dati tramite RTDE

La comunicazione tra il personal computer e il controllore del robot viene realizzata attraverso RTDE (*Real-Time Data Exchange*).

Nello script di acquisizione viene utilizzata la libreria Python `rtde_receive`, attraverso la quale vengono lette le variabili necessarie alla successiva elaborazione.

Per ciascun campione vengono acquisite le seguenti grandezze:

- timestamp del robot;
- posizione dei sei giunti;
- velocità dei sei giunti;
- posa target del TCP;
- posa effettiva del TCP;
- velocità cartesiana effettiva del TCP;
- wrench effettivo al TCP.

Il wrench viene acquisito mediante la funzione

```
getActualTCPForce()
```

e viene rappresentato mediante il vettore

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \\ T_x(t) \\ T_y(t) \\ T_z(t) \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Le prime tre componenti rappresentano le forze, mentre le ultime tre rappresentano i momenti. Tale vettore costituisce la variabile di uscita utilizzata nella procedura di identificazione.

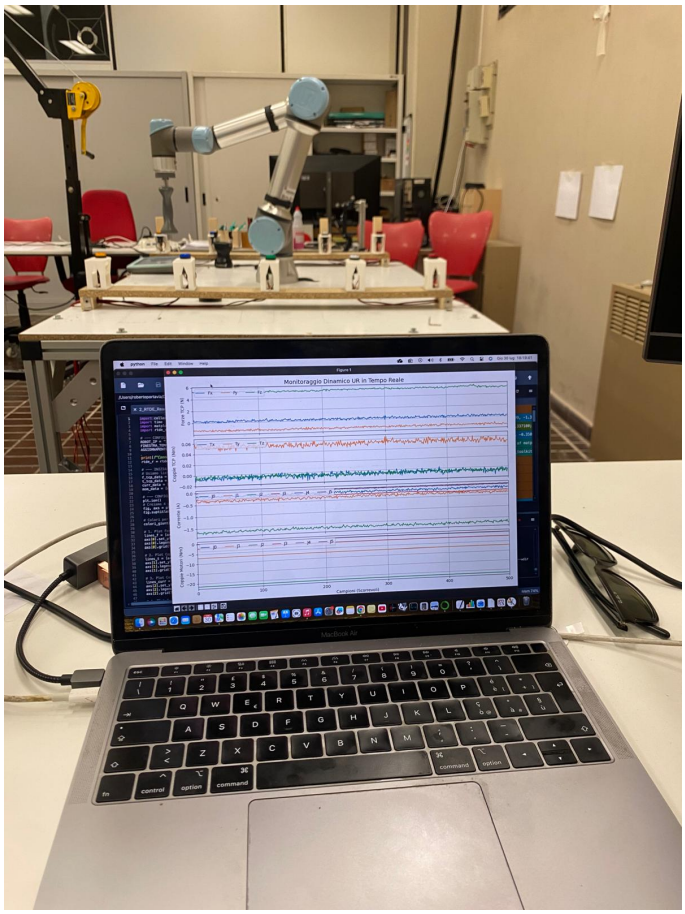


Figura 5.5: Monitoraggio in tempo reale delle grandezze del manipolatore durante una prova sperimentale. La visualizzazione consente di verificare l'andamento dei segnali acquisiti dal controllore durante l'esecuzione del movimento.

5.6 Frequenza di acquisizione e riferimento temporale

L'acquisizione è stata impostata a una frequenza pari a

$$f_s = 100 \text{ Hz}, \tag{5.6}$$

corrispondente a un periodo teorico di campionamento

$$T_s = \frac{1}{f_s} = 0.01 \text{ s}. \tag{5.7}$$

Il riferimento temporale è ottenuto dal timestamp fornito dal robot.

All'inizio dell'acquisizione viene memorizzato il primo timestamp. I valori successivi vengono riferiti a tale istante, ottenendo così una scala temporale relativa con origine in corrispondenza dell'inizio della prova.

Nello script, il ciclo di acquisizione controlla periodicamente il timestamp e registra un nuovo campione quando l'intervallo trascorso rispetto all'ultimo campione salvato raggiunge almeno il periodo di campionamento impostato.

La frequenza effettiva di registrazione risulta pertanto pari a circa 100 Hz.

5.7 Struttura dei dati acquisiti

I dati acquisiti vengono memorizzati in un file CSV. Per ciascun campione sono conservate le informazioni relative allo stato articolare del robot, alla posa del TCP e all'interazione.

Il file contiene:

1. timestamp;
2. posizione dei sei giunti $\mathbf{q}$;
3. velocità dei sei giunti $\dot{\mathbf{q}}$;
4. posa target del TCP;
5. posa effettiva del TCP;
6. velocità cartesiana effettiva del TCP;
7. wrench effettivo del TCP.

Limitandosi alle grandezze cartesiane utilizzate direttamente nell'identificazione, il contenuto può essere rappresentato sinteticamente come

$$[\mathbf{x}_{\text{target}}, \mathbf{x}_{\text{actual}}, \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}}, \mathbf{W}]\,. \tag{5.8}$$

Le informazioni relative ai giunti vengono comunque conservate nel file, anche se non vengono utilizzate direttamente nella regressione cartesiana. Esse permettono infatti di mantenere una descrizione più completa dello stato del robot durante ciascuna acquisizione.

5.8 Calcolo della deviazione dalla traiettoria nominale

Una volta importati i dati, viene calcolata la deviazione tra la posa effettivamente raggiunta dal TCP e quella nominale.

Per il generico campione i si definisce

$$\boxed{\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{\text{actual},i} - \mathbf{x}_{\text{target},i}} \tag{5.9}$$

e quindi

$$\Delta \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \Delta R_{x,i} \\ \Delta R_{y,i} \\ \Delta R_{z,i} \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Le prime tre componenti sono associate allo scostamento traslazionale, mentre le ultime tre rappresentano lo scostamento relativo all'orientamento.

Le componenti traslazionali sono espresse in metri e quelle rotazionali in radianti.

La grandezza $\Delta \mathbf{x}$ costituisce il regressore associato al contributo elastico del modello introdotto nel Capitolo 4.

5.9 Ricostruzione della velocità target e calcolo della velocità relativa

Il termine viscoso del modello non viene costruito utilizzando la sola velocità effettiva del TCP, ma la differenza tra la velocità effettiva e la velocità associata alla traiettoria nominale. Per il generico campione i si definisce pertanto

$$\boxed{\Delta \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual},i} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{target},i}} \tag{5.11}$$

La velocità cartesiana effettiva è direttamente disponibile tra le grandezze acquisite dal controllore ed è rappresentata dal vettore

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{actual},i} = \begin{bmatrix} v_{x,i} & v_{y,i} & v_{z,i} & \omega_{x,i} & \omega_{y,i} & \omega_{z,i} \end{bmatrix}^T. \tag{5.12}$$

La velocità target, invece, viene ricostruita offline a partire dalla sequenza delle pose nominali e dal timestamp registrato durante la prova. Tale operazione viene effettuata separatamente per la componente traslazionale e per quella rotazionale.

5.9.1 Velocità traslazionale target

Indicando con

$$\mathbf{p}_{\text{target}}(t) = \begin{bmatrix} X_{\text{target}}(t) & Y_{\text{target}}(t) & Z_{\text{target}}(t) \end{bmatrix}^T, \tag{5.13}$$

la velocità lineare nominale viene ottenuta mediante derivazione numerica rispetto ai timestamp effettivamente registrati:

$$\mathbf{v}_{\text{target}}(t) = \frac{d\mathbf{p}_{\text{target}}(t)}{dt}. \tag{5.14}$$

Nell'implementazione Python la derivata è calcolata mediante `numpy.gradient`, fornendo direttamente il vettore temporale della prova. In questo modo il calcolo utilizza gli intervalli temporali realmente presenti nei dati e non assume, per la derivazione, un passo temporale perfettamente costante.

A titolo di verifica, in Figura 5.6 è riportato un esempio di confronto tra velocità effettiva, velocità target ricostruita e relativa differenza. Nelle componenti maggiormente coinvolte nel movimento le prime due curve risultano quasi sovrapposte, mentre la differenza evidenzia le piccole deviazioni cinematiche utilizzate dal modello.

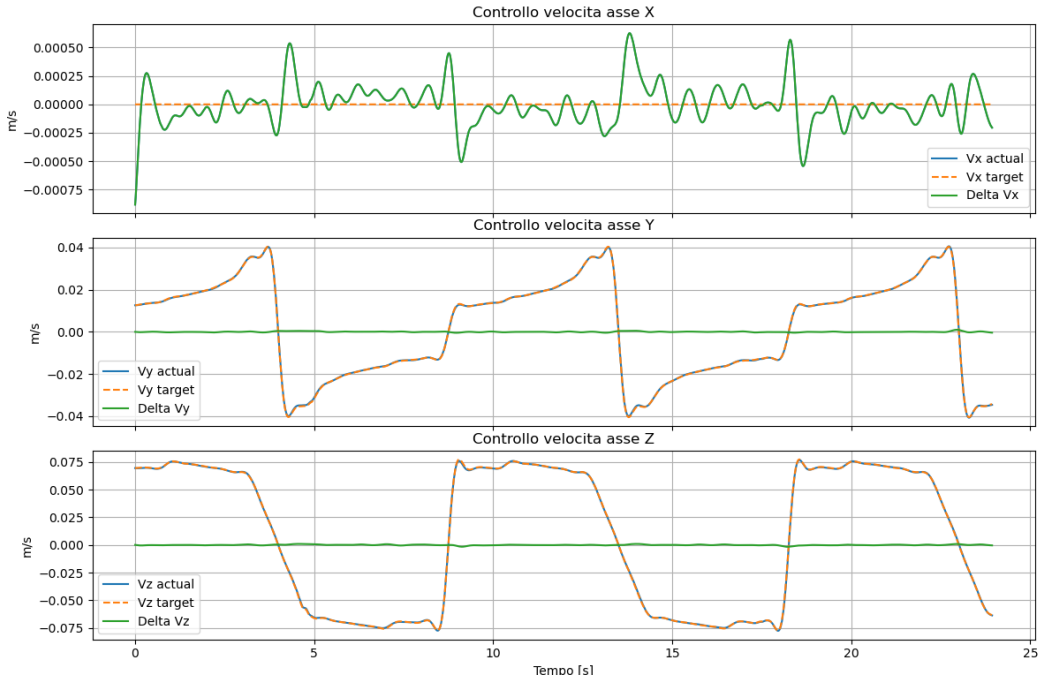


Figura 5.6: Confronto tra velocità cartesiana traslazionale effettiva del TCP, velocità della traiettoria target e relativa differenza lungo gli assi X, Y e Z, per un'acquisizione rappresentativa. La curva associata alla differenza costituisce la parte traslazionale della velocità relativa utilizzata nel modello.

5.9.2 Velocità angolare target

Le ultime tre componenti della posa target memorizzata nel file CSV non sono angoli di Eulero, ma costituiscono il vettore di rotazione associato all'orientamento del

TCP. Per questo motivo la velocità angolare nominale non viene ottenuta derivando separatamente le tre componenti del vettore di rotazione.

Per ogni campione il vettore di rotazione viene prima convertito nella corrispondente rotazione $\mathbf{R}_k \in SO(3)$. Per due campioni consecutivi viene quindi calcolata la rotazione relativa

$$\mathbf{R}_{\Delta,k} = \mathbf{R}_{k+1}\mathbf{R}_k^{-1}. \tag{5.15}$$

Dalla rotazione relativa viene ricavato il corrispondente vettore di rotazione, equivalente all'applicazione della mappa logaritmica su $SO(3)$. La velocità angolare target viene quindi approssimata come

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{target},k} \simeq \frac{\text{Log}\left(\mathbf{R}_{\Delta,k}\right)^{\vee}}{t_{k+1} - t_k}. \tag{5.16}$$

Questa costruzione fornisce la velocità angolare nella convenzione spaziale, riferita alla terna base, coerente con la rappresentazione adottata per la velocità cartesiana effettiva del TCP. Nell'implementazione è stata utilizzata la classe `Rotation` della libreria `scipy.spatial.transform`. Per mantenere invariato il numero di campioni, all'ultimo istante viene assegnato il valore della velocità angolare calcolato al campione precedente.

La velocità cartesiana target assume pertanto la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{target},i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\text{target},i}^T & \boldsymbol{\omega}_{\text{target},i}^T \end{bmatrix}^T. \tag{5.17}$$

Infine, sottraendo tale grandezza dalla velocità effettiva acquisita, si ottiene

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \Delta v_{x,i} & \Delta v_{y,i} & \Delta v_{z,i} & \Delta\omega_{x,i} & \Delta\omega_{y,i} & \Delta\omega_{z,i} \end{bmatrix}^T, \tag{5.18}$$

che costituisce il regressore associato al contributo viscoso del modello. L'utilizzo della velocità relativa rende quindi coerenti i due termini del modello: sia il contributo elastico sia quello viscoso descrivono uno scostamento rispetto alla medesima traiettoria nominale.

La Figura 5.7 mostra un esempio dello stesso confronto per le componenti angolari. In particolare, la componente prevalentemente eccitata dalla traiettoria presenta una marcata sovrapposizione tra velocità effettiva e velocità target ricostruita; sulle componenti meno eccitate la differenza rimane di ordine molto inferiore rispetto alla componente principale del moto.

5.10 Pre-elaborazione dei segnali

Prima della procedura di identificazione viene effettuata una fase di pre-elaborazione dei segnali.

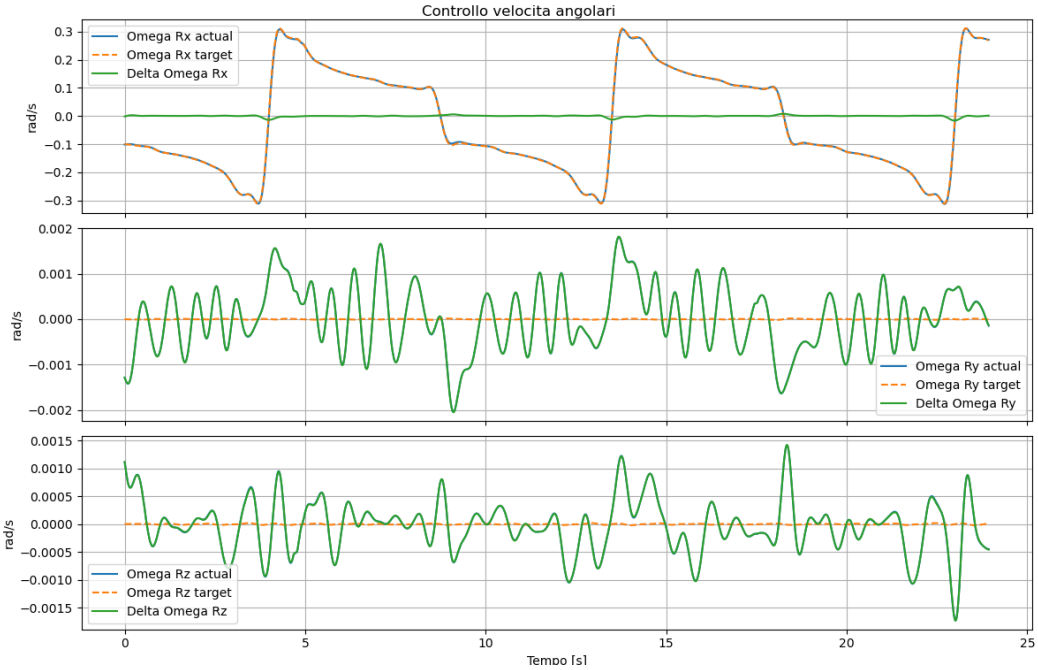


Figura 5.7: Confronto tra velocità angolare effettiva del TCP, velocità angolare ricostruita dalla traiettoria target e relativa differenza nelle tre componenti, per un'acquisizione rappresentativa. Il confronto è utilizzato come verifica della ricostruzione della velocità angolare target a partire dalle orientazioni nominali successive.

I dati sperimentali possono infatti contenere componenti ad alta frequenza che non risultano di interesse per il modello equivalente considerato e che possono influenzare la stima numerica dei parametri.

Il filtraggio viene applicato alle tre categorie di grandezze utilizzate direttamente nella regressione:

- deviazione $\Delta\mathbf{x}$;
- velocità relativa $\Delta\dot{\mathbf{x}}$;
- wrench $\mathbf{W}$.

La procedura viene eseguita offline, dopo il completamento dell'acquisizione.

5.10.1 Filtro passa-basso Butterworth

Per la pre-elaborazione viene utilizzato un filtro passa-basso Butterworth di quarto ordine.

Considerando la frequenza di campionamento

$$f_s = 100 \text{ Hz}, \tag{5.19}$$

la frequenza di Nyquist risulta

$$f_N = \frac{f_s}{2} = 50 \text{ Hz}. \tag{5.20}$$

La frequenza di taglio utilizzata nell'elaborazione è

$$f_c = 2 \text{ Hz}. \tag{5.21}$$

La frequenza normalizzata impiegata per la progettazione digitale del filtro è quindi

$$f_{c,\text{norm}} = \frac{f_c}{f_N} = \frac{2}{50} = 0.04. \tag{5.22}$$

Nello script Python i coefficienti del filtro vengono determinati mediante una funzione Butterworth e successivamente applicati ai dati mediante `filtfilt`.

Quest'ultima esegue il filtraggio nelle due direzioni temporali, evitando l'introduzione di uno sfasamento complessivo tra i segnali elaborati.

Il filtraggio è applicato separatamente a ciascuna componente delle grandezze considerate.

Non viene effettuato alcun downsampling dopo il filtraggio. Il numero dei campioni viene quindi mantenuto e i dati elaborati rimangono associati alla frequenza di acquisizione di 100 Hz.

5.11 Costruzione della matrice di regressione

Una volta ottenuti i segnali filtrati, vengono costruite le matrici necessarie alla procedura di identificazione.

Per ciascun campione i viene formato il vettore dei regressori

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_i^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_i^T \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Poiché entrambi i vettori contengono sei componenti, ogni campione fornisce dodici regressori.

Considerando tutti gli N campioni della prova si ottiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_1^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_1^T \\ \Delta\mathbf{x}_2^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ \Delta\mathbf{x}_N^T & \Delta\dot{\mathbf{x}}_N^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times 12}. \tag{5.24}$$

Parallelamente, i campioni del wrench filtrato vengono raccolti nella matrice

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^T \\ \mathbf{W}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{W}_N^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times 6}. \tag{5.25}$$

Il problema implementato assume quindi la forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}, \tag{5.26}$$

coerentemente con la formulazione teorica introdotta nel Capitolo 4.

5.12 Implementazione numerica dell'identificazione

La stima dei parametri viene effettuata numericamente mediante il metodo dei minimi quadrati.

Nello script Python viene utilizzata la funzione

```
np.linalg.lstsq()
```

della libreria NumPy.

La procedura determina numericamente la matrice dei parametri $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ che minimizza l'errore quadratico tra wrench misurato e wrench ricostruito:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{W}\|_F^2. \tag{5.27}$$

La matrice risultante ha dimensione

$$\hat{\mathbf{\Theta}} \in \mathbb{R}^{12\times 6}. \tag{5.28}$$

Come illustrato nel Capitolo 4, essa contiene i coefficienti delle matrici di rigidezza e smorzamento.

Le matrici vengono ricostruite secondo

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{\Theta}}^T_{1:6,:}, \tag{5.29}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{\Theta}}^T_{7:12,:}. \tag{5.30}$$

Nell'implementazione numerica non viene quindi calcolata esplicitamente l'inversa della matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ riportata nella formulazione teorica delle equazioni normali. La soluzione viene ottenuta direttamente mediante la procedura numerica ai minimi quadrati.

5.13 Identificazione globale

La prima procedura applicata ai dati è l'identificazione globale.

In questo caso tutti i campioni disponibili per una determinata acquisizione vengono utilizzati contemporaneamente per costruire un'unica matrice di regressione $\mathbf{A}$ e un'unica matrice delle osservazioni $\mathbf{W}$.

La soluzione produce quindi una sola coppia di matrici

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{glob}}, \qquad \hat{\mathbf{B}}_{\text{glob}}, \tag{5.31}$$

rappresentativa dell'intera acquisizione.

Il wrench ricostruito mediante il modello globale viene calcolato come

$$\hat{\mathbf{W}}_{\text{glob}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{\Theta}}_{\text{glob}}. \tag{5.32}$$

La ricostruzione viene successivamente confrontata con il wrench misurato lungo l'intera prova.

Questa prima analisi permette di verificare sperimentalmente se un unico insieme di parametri sia sufficiente a rappresentare il comportamento osservato durante l'intera traiettoria.

5.14 Identificazione locale mediante finestratura

In aggiunta all'identificazione globale è stata implementata una procedura locale, con l'obiettivo di verificare se la capacità di ricostruzione del modello possa migliorare consentendo ai parametri di variare lungo la prova. L'idea alla base di questo approccio è confrontare una rappresentazione unica, valida sull'intera acquisizione,

con una descrizione a tratti capace di seguire più da vicino eventuali variazioni dell'interazione lungo la traiettoria.

L'intera acquisizione viene suddivisa in

$$N_w = 6 \tag{5.33}$$

finestre consecutive.

La scelta di utilizzare sei finestre costituisce una scelta metodologica e non deriva dall'individuazione di sei fasi fisiche o biomeccaniche del gesto. Il numero di finestre è stato adottato come compromesso tra due esigenze opposte. Da un lato, una suddivisione più fitta avrebbe aumentato la risoluzione locale, permettendo al modello di adattarsi a variazioni più rapide dell'interazione; dall'altro, avrebbe ridotto il numero di campioni disponibili in ciascuna finestra, rendendo la stima dei parametri più sensibile alla quantità di dati e potenzialmente meno stabile dal punto di vista numerico. Al contrario, una suddivisione in un numero inferiore di intervalli avrebbe aumentato il numero di campioni utilizzati in ogni identificazione locale, ma avrebbe ridotto la capacità del modello di descrivere variazioni dell'interazione lungo il moto.

Poiché ogni identificazione locale utilizza dodici regressori, associati alle sei componenti di $\Delta\mathbf{x}$ e alle sei componenti di $\Delta\dot{\mathbf{x}}$, è necessario mantenere in ciascun intervallo una quantità di dati sufficientemente ampia rispetto al numero di parametri da stimare. La scelta di sei finestre è stata quindi mantenuta come compromesso tra risoluzione temporale e disponibilità di dati per la regressione. Essa non deve essere interpretata come il risultato di un'ottimizzazione sistematica del numero di finestre, ma come una scelta coerente con l'obiettivo del confronto tra modello globale e modello locale.

Le sei finestre non vengono inoltre associate a specifiche fasi biomeccaniche del movimento. Esse rappresentano una semplice suddivisione temporale della singola acquisizione e vengono utilizzate per verificare se una descrizione locale dell'interazione riesca a rappresentare la variabilità osservata in modo più accurato rispetto a un unico insieme di parametri valido per l'intera prova. In questo senso, il confronto globale–locale riguarda la capacità descrittiva del modello e non l'identificazione di fasi funzionali del gesto umano.

Le finestre vengono costruite suddividendo la sequenza dei campioni in sei porzioni contenenti, per quanto consentito dalla lunghezza complessiva dell'acquisizione, lo stesso numero di campioni. Le prime cinque finestre hanno la stessa ampiezza, pari alla parte intera di $N/6$, mentre l'ultima comprende gli eventuali campioni residui, in modo da utilizzare l'intera acquisizione.

La procedura non corrisponde a una finestratura mobile (*sliding window*). Le finestre sono infatti consecutive e non sovrapposte.

Indicando con

$$j = 1, \ldots, 6 \tag{5.34}$$

l'indice della finestra, per ciascuna porzione vengono estratti i corrispondenti campioni di deviazione, velocità relativa e wrench.

La matrice locale dei regressori assume quindi la forma

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X}_j & \Delta\dot{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}, \tag{5.35}$$

dove $\Delta\mathbf{X}_j$ raccoglie i campioni della deviazione appartenenti alla finestra j e $\Delta\dot{\mathbf{X}}_j$ raccoglie i corrispondenti campioni della velocità cartesiana relativa.

Il problema locale viene quindi espresso come

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{A}_j\boldsymbol{\Theta}_j. \tag{5.36}$$

La stima viene eseguita indipendentemente per ogni finestra:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_j = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}_j} \|\mathbf{A}_j\boldsymbol{\Theta}_j - \mathbf{W}_j\|_F^2 . \tag{5.37}$$

Per ciascuna finestra vengono pertanto ottenute le matrici

$$\hat{\mathbf{K}}_j, \qquad \hat{\mathbf{B}}_j. \tag{5.38}$$

Complessivamente, per ciascuna acquisizione si ottiene l'insieme

$$\left\{(\hat{\mathbf{K}}_1, \hat{\mathbf{B}}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{K}}_6, \hat{\mathbf{B}}_6)\right\}. \tag{5.39}$$

All'interno di ogni finestra viene quindi adottato un insieme indipendente di coefficienti. Questo permette al modello locale di rappresentare variazioni del comportamento equivalente lungo la traiettoria che non possono essere descritte mediante un'unica coppia globale di matrici.

5.15 Ricostruzione locale del wrench

Una volta identificati i parametri di ciascuna finestra, il wrench viene ricostruito separatamente utilizzando

$$\hat{\mathbf{W}}_j = \mathbf{A}_j\hat{\boldsymbol{\Theta}}_j. \tag{5.40}$$

Le sei porzioni ricostruite vengono successivamente concatenate rispettando il loro ordine temporale originale:

$$\hat{\mathbf{W}}_{\text{loc}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \hat{\mathbf{W}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{W}}_6 \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

Si ottiene così un segnale complessivo di wrench ricostruito avente la stessa sequenza temporale dei dati sperimentali.

È importante distinguere la ricostruzione complessiva locale dalle metriche eventualmente calcolate all'interno delle singole finestre. Le prestazioni complessive del modello locale possono infatti essere valutate confrontando il segnale concatenato $\hat{\mathbf{W}}_{\text{loc}}$ con il wrench misurato sull'intera acquisizione.

5.16 Valutazione dei risultati

Dopo la ricostruzione del wrench vengono calcolati gli indicatori introdotti nel Capitolo 4.

Per ciascuna delle sei componenti

$$F_x, \quad F_y, \quad F_z, \quad T_x, \quad T_y, \quad T_z \tag{5.42}$$

vengono determinati:

- coefficiente di determinazione R^2;
- errore quadratico medio RMSE;
- errore assoluto medio MAE.

Tali indicatori vengono utilizzati per confrontare quantitativamente il wrench misurato con quello ricostruito.

Per l'approccio globale, le metriche vengono calcolate sul segnale ottenuto mediante il singolo modello identificato sull'intera acquisizione.

Per l'approccio locale, la valutazione complessiva viene invece effettuata sul segnale ottenuto concatenando le ricostruzioni delle sei finestre. In questo modo le metriche complessive locali descrivono la qualità della ricostruzione dell'intera prova e non costituiscono semplicemente una media dei valori calcolati separatamente nelle singole finestre.

5.17 Analisi del condizionamento numerico

Parallelamente alle metriche di ricostruzione viene analizzato il condizionamento numerico della matrice dei regressori.

Nell'identificazione globale viene calcolato il numero di condizionamento della matrice completa

$$\kappa_{\text{glob}} = \kappa(\mathbf{A}). \tag{5.43}$$

Nell'identificazione locale la stessa analisi viene effettuata separatamente per ciascuna finestra:

$$\kappa_j = \kappa(\mathbf{A}_j), \qquad j = 1, \ldots, 6. \tag{5.44}$$

Vengono inoltre determinati i valori singolari delle matrici di regressione.

L'analisi del condizionamento viene mantenuta distinta dalla valutazione della capacità di ricostruzione. Un modello può infatti fornire un errore di ricostruzione ridotto pur presentando una matrice di regressione fortemente condizionata, situazione nella quale l'interpretazione dei singoli coefficienti identificati richiede particolare cautela.

5.18 Organizzazione dei risultati

La procedura di elaborazione produce, per ciascuna acquisizione, un insieme di dati e indicatori utilizzati nella successiva analisi dei risultati.

In particolare vengono conservati:

- segnali acquisiti;
- segnali filtrati;
- deviazione $\Delta\mathbf{x}$;
- velocità cartesiana effettiva e velocità target ricostruita;
- velocità relativa $\Delta\dot{\mathbf{x}}$;
- wrench misurato;
- wrench ricostruito mediante il modello globale;
- wrench ricostruito mediante il modello locale;
- residui della ricostruzione;
- matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ globali;
- matrici $\mathbf{K}_j$ e $\mathbf{B}_j$ locali;
- valori di R^2, RMSE e MAE;
- numeri di condizionamento;
- valori singolari delle matrici di regressione.

I risultati numerici vengono organizzati in file Excel, mentre i principali segnali vengono rappresentati graficamente in modo da consentire il confronto diretto tra wrench misurato e wrench ricostruito.

La separazione tra dati grezzi, dati elaborati e risultati dell'identificazione consente di mantenere una struttura ordinata della campagna sperimentale e di applicare la stessa procedura alle differenti acquisizioni.

5.19 Flusso complessivo della procedura

L'intera metodologia può essere riassunta mediante la seguente catena di elaborazione:

$$\begin{aligned} &\text{acquisizione RTDE} \longrightarrow \text{CSV} \longrightarrow \Delta\mathbf{x},\ \Delta\dot{\mathbf{x}} \\ &\longrightarrow \text{filtraggio} \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \text{identificazione} \\ &\longrightarrow \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{B}} \longrightarrow \hat{\mathbf{W}} \longrightarrow \text{valutazione.} \end{aligned} \tag{5.45}$$

A partire dalla stessa matrice dei dati filtrati vengono applicate due strategie di identificazione. Nel primo caso l'intera acquisizione viene considerata come un unico intervallo; nel secondo viene suddivisa in sei finestre consecutive e non sovrapposte.

Il confronto tra i risultati ottenuti mediante le due procedure permette di valutare l'effetto della rappresentazione locale sulla capacità del modello di descrivere il wrench osservato.

5.20 Considerazioni conclusive

Nel presente capitolo è stata descritta la procedura sperimentale e computazionale utilizzata per applicare ai dati reali il modello matematico introdotto nel Capitolo 4.

Le prove vengono eseguite mediante un robot collaborativo UR5e all'interno di una regione di lavoro prestabilita. Durante l'esecuzione delle traiettorie vengono acquisiti tramite RTDE lo stato del robot, la posa nominale ed effettiva del TCP, la velocità cartesiana e il wrench.

L'acquisizione viene effettuata a una frequenza di circa 100 Hz. I dati vengono successivamente elaborati offline, calcolando la deviazione di posa

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{actual}} - \mathbf{x}_{\text{target}}, \tag{5.46}$$

e la velocità relativa

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{target}}. \tag{5.47}$$

La velocità target traslazionale viene ricavata numericamente dalla posa nominale utilizzando i timestamp del robot, mentre la componente angolare viene ottenuta dalle rotazioni relative tra orientamenti target consecutivi. La deviazione, la velocità relativa e il wrench vengono filtrati mediante un filtro passa-basso Butterworth di quarto ordine con frequenza di taglio pari a 2 Hz, applicato nelle due direzioni temporali. Non viene effettuato alcun downsampling.

I dati filtrati vengono utilizzati per costruire la matrice di regressione

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} & \Delta\dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \tag{5.48}$$

e i parametri vengono stimati numericamente mediante una procedura ai minimi quadrati.

L'identificazione viene eseguita secondo due modalità. Nell'approccio globale un'unica coppia di matrici **K** e **B** viene stimata utilizzando tutti i campioni della prova. Nell'approccio locale, invece, l'acquisizione viene suddivisa in sei finestre consecutive e non sovrapposte, all'interno delle quali vengono stimati insiemi indipendenti di parametri. La suddivisione in sei intervalli è stata adottata come compromesso metodologico tra una maggiore risoluzione temporale e la necessità di conservare, in ciascuna finestra, un numero di campioni adeguato alla stima dei parametri. Le finestre non rappresentano specifiche fasi biomeccaniche del movimento, ma costituiscono uno strumento per verificare se una descrizione locale riesca a rappresentare meglio la variabilità dell'interazione rispetto al modello globale.

Il wrench ricostruito viene infine confrontato con quello misurato attraverso le metriche definite nel Capitolo 4. Parallelamente viene analizzato il condizionamento delle matrici di regressione, in modo da affiancare alla valutazione della qualità della ricostruzione una valutazione delle condizioni numeriche dell'identificazione.

I risultati ottenuti applicando questa metodologia alle acquisizioni sperimentali vengono presentati e discussi nel Capitolo 6.

Capitolo 6

Risultati sperimentali e analisi dei dati

6.1 Campagna sperimentale e organizzazione delle acquisizioni

La campagna sperimentale è stata condotta con l'obiettivo di valutare la capacità del modello meccanico equivalente introdotto nel Capitolo 4 di descrivere il wrench di interazione tra operatore e robot durante differenti movimenti programmati. L'analisi è stata effettuata applicando a tutte le acquisizioni la medesima procedura di preprocessing e identificazione descritta nel capitolo precedente.

La campagna complessiva comprende 109 acquisizioni valide. Le prove sono state organizzate in nove gruppi di traiettoria, mantenendo separati i due gruppi di movimenti lineari presenti nell'organizzazione originaria dei dati. La distribuzione è riportata in Tabella 6.1.

Tabella 6.1: Numero di acquisizioni analizzate per gruppo di traiettoria.

Gruppo	**Numero acquisizioni**
Acqua alto	20
Acqua basso	20
Cerchi	6
Multi cerchi	6
Linee – gruppo 1	6
Linee – gruppo 2	6
Porta	21
Rotazioni	6
Zip	18
Totale	**109**

La numerosità non è uniforme tra i gruppi. Di conseguenza, le statistiche calcolate sull'intera campagna devono essere interpretate come statistiche sulle singole acquisizioni e risultano maggiormente influenzate dai gruppi più numerosi. Per questo motivo, oltre all'analisi complessiva, è stata effettuata un'analisi separata in funzione della traiettoria.

6.2 Modello e criteri di valutazione

L'identificazione è stata eseguita utilizzando il modello relativo definito nei Capitoli 4 e 5:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{K}\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\Delta\dot{\mathbf{x}}(t), \tag{6.1}$$

con

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{actual}}(t) - \mathbf{x}_{\text{target}}(t), \tag{6.2}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\text{target}}(t). \tag{6.3}$$

Il regressore utilizzato per l'identificazione assume pertanto la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X} & \Delta\dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

e contiene 12 colonne, corrispondenti alle sei componenti dello spostamento relativo e alle sei componenti della velocità relativa.

Per ogni acquisizione sono state eseguite due identificazioni. Nell'identificazione globale tutti i campioni vengono utilizzati per stimare un'unica coppia di matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$. Nell'identificazione locale l'acquisizione viene invece suddivisa in sei finestre consecutive e non sovrapposte, identificando una coppia $\mathbf{K}_j$, $\mathbf{B}_j$ per ciascuna finestra.

La scelta di suddividere ciascuna acquisizione in sei finestre costituisce una scelta metodologica, adottata come compromesso tra due esigenze contrapposte. Da un lato, una suddivisione più fitta aumenterebbe la risoluzione temporale della descrizione locale e permetterebbe al modello di adattarsi a variazioni più rapide dell'interazione. Dall'altro, ridurrebbe il numero di campioni disponibili in ciascuna regressione, rendendo la stima dei parametri più sensibile alla quantità di dati e potenzialmente meno stabile dal punto di vista numerico. Una suddivisione più grossolana produrrebbe l'effetto opposto: più dati disponibili per ciascuna identificazione, ma una minore capacità di seguire la variabilità locale dell'interazione.

Le sei finestre non vengono quindi interpretate come specifiche fasi biomeccaniche del gesto. Esse rappresentano una suddivisione temporale della singola acquisizione finalizzata a verificare se una descrizione locale dell'interazione riesca a rappresentare meglio la variabilità osservata rispetto a un unico insieme di parametri valido per l'intera prova. Il confronto tra modello globale e modello locale riguarda pertanto la capacità descrittiva della rappresentazione adottata e non l'identificazione di fasi funzionali del movimento umano.

La ricostruzione locale complessiva del wrench è ottenuta concatenando le sei predizioni locali nel loro ordine temporale. Le metriche riportate nel seguito sono calcolate sul segnale concatenato e non come media delle metriche ottenute separatamente nelle singole finestre.

La qualità della ricostruzione è stata valutata mediante coefficiente di determinazione R^2, errore quadratico medio RMSE ed errore assoluto medio MAE. Il condizionamento della matrice di regressione è stato invece utilizzato come indicatore della sensibilità numerica del problema di identificazione. Questi due aspetti vengono mantenuti distinti: una buona ricostruzione del wrench non implica necessariamente che i singoli coefficienti di **K** e **B** siano identificabili in modo robusto.

6.3 Risultati complessivi dell'identificazione globale

La Tabella 6.2 riporta media, mediana e deviazione standard del coefficiente di determinazione ottenuto con l'identificazione globale sulle 109 acquisizioni.

Tabella 6.2: Statistiche di R^2 per l'identificazione globale sulle 109 acquisizioni.

Componente	**Media**	**Mediana**	**Dev. standard**
F_x	-0.110	0.215	1.257
F_y	0.406	0.633	0.734
F_z	0.453	0.603	0.388
T_x	-0.106	0.272	1.452
T_y	0.307	0.511	0.558
T_z	0.059	0.340	0.774

Il modello globale presenta prestazioni differenti tra le sei componenti. I valori medi più elevati si osservano per F_z e F_y, mentre F_x e T_x presentano valori medi negativi. Anche per T_z il valore medio risulta contenuto. La differenza tra media e mediana, particolarmente evidente per F_x e T_x, mostra inoltre che la distribuzione dei risultati non è simmetrica e che alcune acquisizioni producono valori di R^2 fortemente negativi.

Un valore $R^2 < 0$ non rappresenta un errore nel calcolo della metrica: indica che, per la specifica componente e acquisizione, la somma dei residui quadratici del modello è superiore a quella ottenibile assumendo come previsione costante il valore medio del segnale misurato. Il risultato evidenzia quindi i limiti di una singola coppia di matrici costante sull'intera durata della prova.

6.4 Risultati complessivi dell'identificazione locale

La Tabella 6.3 riporta le corrispondenti statistiche per l'identificazione locale.

Con l'identificazione locale, i valori medi di R^2 risultano compresi tra 0.783 e 0.902. Le componenti F_y, F_z e T_y presentano valori medi prossimi o superiori a 0.89, mentre anche F_x, T_x e T_z raggiungono valori medi prossimi a 0.8. Le mediane risultano superiori alle medie per tutte le componenti, indicando la presenza di un numero limitato di prove con prestazioni inferiori rispetto alla parte centrale della distribuzione.

Tabella 6.3: Statistiche di R^2 per l'identificazione locale sulle 109 acquisizioni.

Componente	**Media**	**Mediana**	**Dev. standard**
F_x	0.783	0.882	0.331
F_y	0.897	0.946	0.147
F_z	0.902	0.931	0.111
T_x	0.800	0.895	0.324
T_y	0.886	0.908	0.107
T_z	0.800	0.876	0.301

Il confronto diretto tra modello globale e locale è riportato nella Tabella 6.4.

Tabella 6.4: Confronto tra i valori medi di R^2 globale e locale.

Componente	**Globale**	**Locale**	$\mathbf{\Delta R^2}$
F_x	-0.110	0.783	0.892
F_y	0.406	0.897	0.491
F_z	0.453	0.902	0.449
T_x	-0.106	0.800	0.907
T_y	0.307	0.886	0.579
T_z	0.059	0.800	0.742

Per tutte le componenti il valore medio di

$$\Delta R^2 = R^2_{\text{locale}} - R^2_{\text{globale}} \tag{6.5}$$

è positivo. Gli incrementi maggiori si osservano per T_x e F_x, rispettivamente pari a circa 0.907 e 0.892, seguiti da T_z con circa 0.742. Il miglioramento non riguarda quindi una sola componente del wrench, ma è presente in tutte le sei grandezze considerate.

Tale risultato indica che, nelle condizioni sperimentali analizzate, l'impiego di parametri costanti per l'intera acquisizione non è sufficiente a rappresentare con la stessa efficacia la variabilità dell'interazione lungo l'intera prova. La suddivisione in finestre consente invece al modello equivalente di adattarsi alle variazioni locali osservate nel tempo. Questo miglioramento deve essere interpretato come effetto di una maggiore flessibilità descrittiva del modello locale e non come evidenza dell'esistenza di sei specifiche fasi biomeccaniche del movimento.

6.5 Analisi degli errori di ricostruzione

Il confronto basato su R^2 è stato affiancato dall'analisi di RMSE e MAE. I valori medi sulle 109 acquisizioni sono riportati in Tabella 6.5.

Per le componenti di forza, RMSE e MAE sono espressi rispettivamente in N, mentre per le componenti di momento sono espressi in Nm. Il passaggio dall'identificazione

Tabella 6.5: Valori medi di RMSE e MAE per identificazione globale e locale.

	RMSE		**MAE**	
Componente	**Globale**	**Locale**	**Globale**	**Locale**
F_x	3.860	1.534	3.036	1.090
F_y	7.124	2.965	5.655	2.134
F_z	6.949	2.810	5.476	1.989
T_x	0.882	0.344	0.712	0.240
T_y	0.519	0.208	0.417	0.145
T_z	0.401	0.172	0.312	0.117

globale a quella locale riduce entrambe le metriche per tutte le componenti. Il risultato ottenuto con R^2 è pertanto confermato anche da indicatori espressi direttamente nelle unità fisiche del wrench.

6.6 Analisi in funzione della traiettoria

La dipendenza dei risultati dalla traiettoria è stata analizzata mantenendo separati i nove gruppi sperimentali. La Tabella 6.6 riporta i valori medi di R^2 globale e locale per ciascuna componente.

Tabella 6.6: Valori medi di R^2 globale per gruppo di traiettoria.

Gruppo	F_x	F_y	F_z	T_x	T_y	T_z
Acqua alto	-0.643	0.618	0.525	-0.106	-0.275	0.225
Acqua basso	-0.090	0.332	0.712	-1.470	0.302	-0.444
Cerchi	0.658	0.729	0.616	0.709	0.622	0.477
Multi cerchi	0.598	0.625	0.039	0.572	0.586	0.512
Linee – gruppo 1	0.796	0.538	0.479	0.506	0.792	0.565
Linee – gruppo 2	0.812	0.072	0.130	-0.111	0.780	0.608
Porta	0.232	0.759	0.389	0.227	0.238	0.647
Rotazioni	0.427	-0.815	-0.312	-0.885	0.324	0.268
Zip	-1.218	0.136	0.596	0.579	0.515	-0.966

Valori medi di R^2 locale per gli stessi gruppi.

Gruppo	F_x	F_y	F_z	T_x	T_y	T_z
Acqua alto	0.590	0.917	0.909	0.779	0.780	0.815
Acqua basso	0.759	0.904	0.954	0.533	0.893	0.700
Cerchi	0.983	0.982	0.977	0.981	0.981	0.971
Multi cerchi	0.870	0.887	0.784	0.880	0.864	0.852
Linee – gruppo 1	0.997	0.991	0.992	0.989	0.998	0.994
Linee – gruppo 2	0.945	0.756	0.880	0.725	0.943	0.865
Porta	0.866	0.949	0.872	0.907	0.869	0.937
Rotazioni	0.932	0.594	0.687	0.597	0.874	0.852
Zip	0.654	0.897	0.935	0.940	0.941	0.559

La finestratura migliora la ricostruzione in tutti i gruppi. Le differenze sono particolarmente evidenti nelle traiettorie per le quali alcune componenti globali assumono valori negativi, come nelle acquisizioni *Acqua basso*, *Rotazioni* e *Zip*. Per

esempio, nel gruppo *Zip* il valore medio di R^2 per F_x passa da -1.218 a 0.654, mentre per T_z passa da -0.966 a 0.559. Nel gruppo *Rotazioni*, T_x passa da -0.885 a 0.597.

Al contrario, alcune traiettorie presentano già una discreta capacità di ricostruzione globale e raggiungono valori locali molto elevati. Il caso più evidente è rappresentato da *Linee – gruppo 1*, per il quale tutti i valori medi locali sono prossimi a 1. Anche il gruppo *Cerchi* presenta valori locali compresi tra circa 0.97 e 0.98.

Questi risultati mostrano che la qualità del modello globale dipende sensibilmente dal movimento eseguito, mentre l'identificazione locale riduce in modo marcato tale dipendenza dal punto di vista della ricostruzione del wrench.

6.7 Analisi del condizionamento numerico

Per valutare la sensibilità numerica dell'identificazione è stato calcolato il numero di condizionamento della matrice di regressione,

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}. \tag{6.6}$$

Sulle 109 acquisizioni, il numero di condizionamento globale presenta una media pari a

$$\overline{\kappa}_G = 1.07 \times 10^5, \tag{6.7}$$

ma una mediana pari a

$$\kappa_{G,\text{med}} = 5.34 \times 10^2. \tag{6.8}$$

Il valore minimo è circa 1.78×10^2, mentre il massimo raggiunge 6.72×10^5. La notevole differenza tra media e mediana indica una distribuzione fortemente asimmetrica: la maggior parte di alcune famiglie di acquisizioni presenta valori dell'ordine di 10^2–10^3, mentre specifiche traiettorie raggiungono valori dell'ordine di 10^5.

Per l'identificazione locale, considerando per ogni acquisizione la media dei condition number delle sei finestre, si ottiene

$$\overline{\kappa}_L = 3.94 \times 10^5, \tag{6.9}$$

con mediana

$$\kappa_{L,\text{med}} = 1.23 \times 10^3. \tag{6.10}$$

Il massimo della media locale per acquisizione raggiunge circa 4.71×10^6. Anche in questo caso la distribuzione è fortemente asimmetrica e l'identificazione locale risulta, in generale, più sensibile dal punto di vista numerico.

L'analisi per traiettoria permette di chiarire l'origine di tale comportamento. Le mediane del numero di condizionamento sono riportate in Tabella 6.7.

Tabella 6.7: Mediana del numero di condizionamento globale e della media locale per gruppo di traiettoria.

Gruppo	$\kappa_{G,\text{med}}$	$\kappa_{L,\text{med}}$
Acqua alto	3.58×10^2	7.90×10^2
Acqua basso	5.45×10^2	1.21×10^3
Cerchi	4.30×10^5	1.49×10^6
Multi cerchi	3.28×10^5	5.81×10^5
Linee – gruppo 1	5.34×10^5	3.58×10^6
Linee – gruppo 2	4.68×10^5	7.16×10^5
Porta	2.66×10^2	6.63×10^2
Rotazioni	2.08×10^5	7.04×10^5
Zip	5.39×10^2	1.66×10^3

La tabella evidenzia due comportamenti nettamente differenti. Le traiettorie *Acqua alto*, *Acqua basso*, *Porta* e *Zip* presentano mediane globali dell'ordine di 10^2, mentre *Cerchi*, *Multi cerchi*, i due gruppi di *Linee* e *Rotazioni* presentano valori dell'ordine di 10^5.

Il condizionamento risulta quindi fortemente dipendente dalla traiettoria. Una possibile interpretazione, coerente con la struttura del problema di regressione, è che alcuni movimenti producano colonne del regressore fortemente correlate o non forniscano un'eccitazione sufficiente di tutti i gradi di libertà necessari per stimare indipendentemente i coefficienti delle matrici complete. Tale interpretazione non richiede che la ricostruzione del wrench sia scadente: riguarda invece la robustezza con cui i singoli parametri possono essere determinati dai dati disponibili.

6.8 Ricostruzione del wrench e identificabilità dei parametri

Il confronto tra R^2 e condizionamento mostra chiaramente che accuratezza della ricostruzione e identificabilità dei parametri costituiscono due aspetti distinti.

Un esempio particolarmente significativo è rappresentato da *Linee – gruppo 1*. In questo gruppo i valori medi locali di R^2 sono compresi tra 0.989 e 0.998, mentre la mediana del condizionamento locale è pari a circa 3.58×10^6. Analogamente, per il gruppo *Cerchi* i valori medi locali di R^2 sono compresi tra 0.971 e 0.983, nonostante una mediana del condizionamento locale di circa 1.49×10^6.

Questi casi mostrano che una matrice di regressione mal condizionata può comunque consentire di riprodurre accuratamente il wrench sui dati utilizzati per l'identificazione. Tuttavia, in presenza di forte collinearità tra i regressori, combinazioni differenti dei coefficienti possono produrre risposte simili. Di conseguenza, piccoli cambiamenti nei dati possono determinare variazioni rilevanti nei singoli elementi stimati di $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$.

Per tale ragione, nella presente analisi R^2, RMSE e MAE vengono utilizzati per valutare la capacità descrittiva del modello, mentre il numero di condizionamento viene utilizzato per discutere la robustezza numerica dell'identificazione. Un elevato valore di R^2 non viene quindi interpretato automaticamente come evidenza dell'identificazione univoca dei singoli parametri meccanici equivalenti.

6.9 Parametri equivalenti di rigidezza e smorzamento

Per ciascuna identificazione sono state stimate matrici complete

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6\times6}, \qquad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6\times6}. \tag{6.11}$$

La scelta di matrici complete permette di mantenere nel modello sia i contributi diretti sia quelli incrociati tra le componenti traslazionali e rotazionali. Tuttavia, i risultati sul condizionamento impongono cautela nell'interpretazione quantitativa dei singoli coefficienti.

In particolare, le matrici identificate non vengono considerate come una misura assoluta e invariabile della rigidezza e dello smorzamento biomeccanico dell'arto umano. Esse rappresentano parametri equivalenti del sistema di interazione nelle specifiche condizioni sperimentali e possono dipendere dalla postura, dalla traiettoria, dall'orientamento del TCP e dalla modalità di partecipazione dell'operatore.

L'obiettivo principale dell'identificazione è pertanto verificare se una struttura meccanica equivalente basata su rigidezza e smorzamento sia in grado di descrivere il wrench osservato e valutare come tale capacità cambi tra una parametrizzazione globale e una locale. L'analisi dei singoli elementi di $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ deve essere sempre accompagnata dalla verifica del condizionamento del regressore.

6.10 Classificazione delle modalità di interazione

La campagna sperimentale è stata progettata includendo quattro modalità di interazione. La condizione *normale* corrisponde all'esecuzione naturale del gesto; la condizione *assistito* comprende le prove nelle quali l'operatore accompagna intenzionalmente il movimento; la condizione *contrastato* comprende le prove nelle quali l'operatore esercita un'azione opposta al movimento imposto; infine, la condizione *condizionato* comprende prove intenzionalmente eseguite in configurazioni meno naturali o meno favorevoli, ad esempio modificando la postura o la direzione dell'interazione.

La distribuzione prevista dalla campagna sperimentale è riportata in Tabella 6.8.

La categoria *condizionato* non rappresenta un insieme di prove non classificabili, ma una parte intenzionale del protocollo sperimentale, introdotta per verificare il comportamento della procedura in condizioni differenti dall'esecuzione naturale. Nella presente analisi quantitativa i risultati principali vengono tuttavia riportati sull'intera

Tabella 6.8: Classificazione sperimentale delle acquisizioni in funzione della modalità di interazione.

Categoria	**Descrizione**	**N. acquisizioni**
Normale	Esecuzione naturale del gesto	43
Assistito	Accompagnamento intenzionale del movimento	18
Contrastato	Opposizione intenzionale al movimento	18
Condizionato	Esecuzione volutamente resa meno naturale o condizionata	30
Totale		**109**

campagna e per gruppo di traiettoria, poiché questa suddivisione è direttamente associabile in modo univoco alle 109 acquisizioni elaborate e consente inoltre di interpretare il forte effetto osservato sul condizionamento numerico.

6.11 Discussione complessiva dei risultati

L'analisi delle 109 acquisizioni mostra che il modello relativo

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}} \tag{6.12}$$

fornisce risultati sensibilmente differenti a seconda che i parametri vengano identificati globalmente oppure localmente.

Con una singola coppia di matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$, i valori medi di R^2 variano da -0.110 a 0.453. La suddivisione in sei finestre porta invece i valori medi in un intervallo compreso tra 0.783 e 0.902. Contestualmente, RMSE e MAE diminuiscono per tutte le componenti del wrench. L'insieme di queste metriche indica che una parametrizzazione locale descrive meglio i segnali misurati rispetto a una parametrizzazione costante sull'intera acquisizione.

Il miglioramento della ricostruzione non coincide però con un miglioramento del condizionamento. La mediana del numero di condizionamento passa da circa 5.34×10^2 nel caso globale a circa 1.23×10^3 considerando la media delle sei finestre locali per acquisizione. Inoltre, l'analisi per traiettoria mostra che alcune famiglie di movimento raggiungono valori dell'ordine di 10^5–10^6 pur mantenendo valori locali di R^2 molto elevati.

Questo risultato costituisce un elemento centrale nell'interpretazione del modello. La finestratura aumenta la flessibilità della rappresentazione e permette di seguire meglio le variazioni dell'interazione durante il movimento, ma riduce contemporaneamente la quantità e la varietà dei dati disponibili in ciascuna regressione. Proprio per questo motivo, la scelta di sei finestre è stata adottata come compromesso metodologico tra risoluzione temporale e disponibilità di dati per l'identificazione. In presenza di traiettorie che eccitano un insieme limitato di direzioni, la riduzione dei

campioni disponibili localmente può rendere più difficile separare in maniera robusta il contributo dei singoli regressori.

È inoltre importante ribadire che le sei finestre non rappresentano una segmentazione biomeccanica del gesto. Il loro ruolo è esclusivamente quello di introdurre una descrizione a tratti e di verificare sperimentalmente se tale descrizione riesca a riprodurre meglio il wrench rispetto a un unico modello globale.

I risultati supportano quindi l'impiego del modello come rappresentazione equivalente dell'interazione e come strumento per la ricostruzione del wrench, soprattutto nella formulazione locale. Non supportano invece, da soli, l'interpretazione dei singoli coefficienti stimati come proprietà biomeccaniche assolute dell'arto umano.

6.12 Considerazioni finali

La nuova formulazione basata su spostamento e velocità relativi consente di riferire entrambi i contributi del modello alla medesima traiettoria target. Applicata alle 109 acquisizioni, essa evidenzia una marcata differenza tra identificazione globale e locale.

L'identificazione locale mediante sei finestre consecutive migliora sistematicamente, in media, il coefficiente di determinazione e riduce RMSE e MAE per tutte le componenti del wrench. La scelta delle sei finestre va interpretata come un compromesso metodologico tra una maggiore risoluzione temporale e la necessità di mantenere in ogni intervallo un numero sufficiente di campioni per la regressione; non corrisponde quindi all'individuazione di sei fasi biomeccaniche del movimento. La qualità della ricostruzione dipende comunque dalla traiettoria e dalla componente considerata.

Parallelamente, l'analisi del numero di condizionamento mostra che la robustezza numerica dell'identificazione dipende fortemente dalla geometria del movimento. Le traiettorie *Porta*, *Acqua alto*, *Acqua basso* e *Zip* presentano valori mediani globali dell'ordine di 10^2, mentre *Cerchi*, *Multi cerchi*, *Linee* e *Rotazioni* raggiungono valori dell'ordine di 10^5.

La principale conclusione dell'analisi è pertanto la necessità di distinguere la capacità del modello di ricostruire il wrench dalla capacità di identificare in modo robusto i singoli parametri. Le matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ devono essere interpretate come parametri equivalenti dipendenti dalla specifica condizione di interazione, mentre le metriche di ricostruzione e il condizionamento devono essere considerati congiuntamente per valutare la qualità dell'identificazione.

Capitolo 7

Conclusioni

7.1 Sintesi del lavoro

Il presente lavoro di tesi ha avuto come obiettivo lo studio dell'interazione fisica tra un operatore umano e un robot collaborativo, con particolare riferimento alla possibilità di descrivere il wrench di interazione mediante un modello meccanico equivalente basato su rigidezza e smorzamento.

L'attività sperimentale è stata svolta utilizzando un manipolatore collaborativo UR5e programmato per eseguire differenti traiettorie cartesiane predefinite. Nell'impostazione adottata, il robot segue un movimento imposto mediante controllo di posizione, mentre l'operatore interagisce fisicamente con il terminale. L'obiettivo non è quindi l'identificazione della dinamica propria del robot, ma la caratterizzazione della relazione tra lo scostamento rispetto alla traiettoria programmata e il wrench misurato durante l'interazione.

Il modello finale adottato è

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}}(t), \tag{7.1}$$

con

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{actual}}(t) - \mathbf{x}_{\text{target}}(t), \tag{7.2}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\text{actual}}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{\text{target}}(t). \tag{7.3}$$

In questo modo sia il contributo elastico sia quello viscoso sono riferiti alla stessa traiettoria target. La velocità target traslazionale è stata ricavata numericamente dalla posa programmata utilizzando i timestamp acquisiti, mentre la velocità angolare target è stata ottenuta a partire dalle rotazioni relative tra orientamenti consecutivi. Il contributo inerziale è stato trascurato come semplificazione coerente con le condizioni sperimentali considerate, caratterizzate da movimenti programmati a dinamica contenuta.

L'identificazione è stata eseguita mediante minimi quadrati utilizzando matrici complete 6×6 per la rigidezza equivalente $\mathbf{K}$ e lo smorzamento equivalente $\mathbf{B}$. Sono state confrontate due strategie: una identificazione globale, basata su un'unica coppia

di matrici per l'intera acquisizione, e una identificazione locale, ottenuta suddividendo ciascuna prova in sei finestre consecutive e non sovrapposte.

La scelta di utilizzare sei finestre costituisce una scelta metodologica adottata come compromesso tra due esigenze contrapposte. Da un lato, una suddivisione più fine consente di aumentare la risoluzione temporale della descrizione locale e quindi di seguire più da vicino le variazioni dell'interazione lungo la prova; dall'altro, riducendo eccessivamente la durata delle finestre si riduce anche il numero di campioni disponibili per la regressione, con possibili effetti negativi sulla stabilità dell'identificazione. Le sei finestre non devono quindi essere interpretate come specifiche fasi biomeccaniche del gesto, ma come intervalli temporali utilizzati per verificare quanto una descrizione locale possa rappresentare meglio la variabilità dell'interazione rispetto a un unico modello globale.

7.2 Principali risultati

La procedura è stata applicata a 109 acquisizioni valide, comprendenti differenti traiettorie e differenti modalità di interazione. Il confronto tra identificazione globale e locale costituisce il principale risultato sperimentale del lavoro.

Nel caso globale, i valori medi di R^2 sulle 109 acquisizioni sono risultati pari a

$$\begin{aligned} R^2_{F_x} &= -0.110, \quad R^2_{F_y} = 0.406, \quad R^2_{F_z} = 0.453, \\ R^2_{T_x} &= -0.106, \quad R^2_{T_y} = 0.307, \quad R^2_{T_z} = 0.059. \end{aligned} \tag{7.4}$$

L'utilizzo di una singola coppia di matrici costante per tutta la prova mostra quindi limiti evidenti, soprattutto per F_x, T_x e T_z. La presenza di valori medi negativi per alcune componenti evidenzia inoltre che, in determinate acquisizioni, il modello globale non riesce a rappresentare adeguatamente l'intero andamento del wrench.

Con l'identificazione locale i valori medi diventano invece

$$\begin{aligned} R^2_{F_x} &= 0.783, \quad R^2_{F_y} = 0.897, \quad R^2_{F_z} = 0.902, \\ R^2_{T_x} &= 0.800, \quad R^2_{T_y} = 0.886, \quad R^2_{T_z} = 0.800. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Il miglioramento medio di R^2 è positivo per tutte le componenti ed è pari a circa 0.892 per F_x, 0.491 per F_y, 0.449 per F_z, 0.907 per T_x, 0.579 per T_y e 0.742 per T_z.

La stessa tendenza è confermata da RMSE e MAE. Per le forze, l'RMSE medio passa da 3.860 a 1.534 N per F_x, da 7.124 a 2.965 N per F_y e da 6.949 a 2.810 N per F_z. Per i momenti passa da 0.882 a 0.344 Nm per T_x, da 0.519 a 0.208 Nm per T_y e da 0.401 a 0.172 Nm per T_z. Anche il MAE diminuisce per tutte le sei componenti.

Nel complesso, le tre metriche utilizzate convergono verso la stessa osservazione: nelle condizioni sperimentali considerate, una parametrizzazione locale descrive il wrench misurato in modo più efficace rispetto a una parametrizzazione costante sull'intera acquisizione. Il risultato indica che la relazione equivalente tra scostamento, velocità relativa e wrench non rimane necessariamente invariata durante tutta la prova

e che una sola coppia di matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ può risultare insufficiente a rappresentare con la stessa accuratezza l'intera evoluzione temporale dell'interazione.

Tale miglioramento non deve tuttavia essere interpretato come prova dell'esistenza di sei distinte fasi fisiche o biomeccaniche. La suddivisione in sei finestre rappresenta infatti uno strumento metodologico per confrontare una descrizione globale con una descrizione maggiormente locale della stessa acquisizione.

7.3 Influenza della traiettoria

L'analisi per gruppo di traiettoria ha mostrato che le prestazioni del modello e, soprattutto, il condizionamento della regressione dipendono in maniera rilevante dal movimento eseguito. Le 109 acquisizioni comprendono i gruppi *Acqua alto*, *Acqua basso*, *Cerchi*, *Multi cerchi*, due gruppi di *Linee*, *Porta*, *Rotazioni* e *Zip*.

L'identificazione locale migliora il valore medio sintetico di R^2 in tutti i gruppi considerati. In alcuni casi il miglioramento è particolarmente marcato: per le traiettorie di rotazione il valore medio sulle sei componenti passa da circa -0.166 nel caso globale a 0.756 nel caso locale, mentre per *Acqua basso* passa da circa -0.110 a 0.790. Anche nei gruppi che presentano già una buona ricostruzione globale, la suddivisione in finestre produce un ulteriore incremento della qualità di adattamento.

La dipendenza dalla traiettoria risulta ancora più evidente analizzando il numero di condizionamento. Le mediane globali sono dell'ordine di 10^2 per *Acqua alto*, *Acqua basso*, *Porta* e *Zip*, mentre raggiungono valori dell'ordine di 10^5 per *Cerchi*, *Multi cerchi*, *Linee* e *Rotazioni*. La geometria del movimento e l'eccitazione prodotta nei diversi gradi di libertà hanno quindi un ruolo rilevante nella possibilità di separare numericamente i contributi dei regressori.

7.4 Ricostruzione del wrench e identificabilità dei parametri

Uno degli aspetti più significativi emersi dall'analisi è la necessità di distinguere la capacità del modello di ricostruire il wrench dalla robustezza con cui vengono identificati i singoli coefficienti delle matrici $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$.

Sull'intera campagna, il numero di condizionamento globale presenta una media di circa

$$\overline{\kappa}_G = 1.07 \times 10^5, \tag{7.6}$$

ma una mediana molto più bassa,

$$\kappa_{G,\mathrm{med}} = 5.34 \times 10^2. \tag{7.7}$$

Nel caso locale, considerando per ogni acquisizione la media dei valori ottenuti nelle sei finestre, la media complessiva è pari a circa

$$\overline{\kappa}_L = 3.94 \times 10^5, \tag{7.8}$$

mentre la mediana è circa

$$\kappa_{L,\text{med}} = 1.23 \times 10^3. \tag{7.9}$$

La forte differenza tra media e mediana deriva dalla presenza di famiglie di traiettorie sistematicamente più mal condizionate. Questo comportamento non coincide necessariamente con una scarsa capacità di ricostruzione. Ad esempio, per *Linee – gruppo 1* il valore medio locale di R^2 sulle sei componenti è circa 0.994, nonostante una mediana del condizionamento locale di circa 3.58×10^6. Per il gruppo *Cerchi* il valore medio locale di R^2 è circa 0.979, con una mediana del condizionamento locale di circa 1.49×10^6.

Questi risultati mostrano che un'elevata accuratezza sui dati utilizzati per l'identificazione non garantisce che ogni coefficiente sia determinato in modo stabile e indipendente. In presenza di regressori fortemente correlati, combinazioni differenti dei parametri possono infatti produrre risposte simili. Di conseguenza, piccoli cambiamenti nei dati possono determinare variazioni rilevanti nei singoli elementi stimati delle matrici.

Per questo motivo, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{B}$ devono essere interpretate come matrici di parametri equivalenti dell'interazione nelle specifiche condizioni sperimentali. I risultati ottenuti non consentono di attribuire automaticamente ai singoli coefficienti il significato di proprietà biomeccaniche assolute e invarianti dell'arto umano.

7.5 Limiti del lavoro e sviluppi futuri

Il lavoro svolto ha permesso di verificare l'applicabilità di una rappresentazione equivalente basata su rigidezza e smorzamento e di confrontare in maniera sistematica identificazione globale e locale. I risultati evidenziano tuttavia alcuni limiti che costituiscono anche possibili direzioni di sviluppo.

Un primo aspetto riguarda l'identificabilità dei parametri. L'utilizzo di matrici complete 6×6 permette di includere sia i contributi diretti sia quelli incrociati tra traslazioni e rotazioni, ma richiede che i dati contengano informazione sufficiente per distinguere i diversi regressori. I valori elevati del numero di condizionamento osservati per alcune traiettorie suggeriscono quindi di approfondire in futuro l'eccitazione dei singoli gradi di libertà e la struttura della matrice di regressione. Potrebbe essere utile confrontare il modello completo con formulazioni a dimensionalità ridotta o con strutture vincolate, valutando se sia possibile mantenere una buona ricostruzione riducendo contemporaneamente la sensibilità numerica dei parametri.

Un secondo sviluppo riguarda la finestratura. Nel presente lavoro sono state utilizzate sei finestre consecutive e non sovrapposte per tutte le acquisizioni. Tale scelta non deriva dall'individuazione di sei fasi biomeccaniche né da un'ottimizzazione

sistematica del numero di segmenti, ma da un compromesso metodologico tra risoluzione temporale e quantità di dati disponibile in ciascuna identificazione. Aumentare il numero di finestre permetterebbe, in linea di principio, di seguire variazioni più rapide dell'interazione, ma ridurrebbe contemporaneamente il numero di campioni presenti in ogni intervallo; diminuirlo aumenterebbe invece i dati disponibili per la stima, riducendo però la capacità di adattamento locale.

Un possibile sviluppo futuro consiste quindi nel confrontare differenti numeri e durate delle finestre, oppure nell'introdurre strategie di segmentazione adattativa, valutando contemporaneamente accuratezza di ricostruzione e condizionamento della regressione. In questo modo sarebbe possibile determinare in maniera più sistematica il compromesso tra risoluzione locale e robustezza numerica dell'identificazione.

Un ulteriore approfondimento riguarda le differenti modalità di partecipazione dell'operatore. La campagna sperimentale è stata progettata includendo condizioni normali, assistite, contrastate e condizionate. Un'analisi dedicata e completamente tracciabile di tali categorie permetterebbe di studiare in modo più specifico come la partecipazione umana influenzi i parametri equivalenti, le metriche di ricostruzione e il condizionamento della regressione.

Infine, sarebbe utile estendere la validazione a ulteriori soggetti, posture e traiettorie e verificare la capacità dei parametri identificati di descrivere dati non utilizzati nella regressione. Una validazione su acquisizioni indipendenti consentirebbe di distinguere ulteriormente la capacità di adattamento ai dati dalla capacità di generalizzazione del modello.

7.6 Considerazioni finali

I risultati ottenuti mostrano che il modello

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\dot{\mathbf{x}} \tag{7.10}$$

costituisce una rappresentazione utile dell'interazione fisica osservata nelle condizioni sperimentali considerate. Il riferimento della componente elastica e di quella viscosa alla medesima traiettoria target rende coerente la formulazione del modello con il confronto tra movimento programmato e movimento effettivamente realizzato.

L'identificazione globale evidenzia i limiti di una parametrizzazione costante durante l'intera acquisizione, mentre l'identificazione mediante sei finestre locali produce un miglioramento sistematico di R^2, RMSE e MAE. Il risultato supporta quindi l'utilità di una descrizione locale, nella quale i parametri equivalenti possono assumere valori differenti in intervalli temporali diversi della stessa acquisizione, senza attribuire a tali intervalli un significato biomeccanico predefinito.

La suddivisione in sei finestre deve pertanto essere interpretata come una scelta metodologica finalizzata a verificare la capacità di una rappresentazione locale di adattarsi alla variabilità dell'interazione. Essa costituisce un compromesso tra la

possibilità di aumentare la risoluzione temporale del modello e la necessità di mantenere, all'interno di ogni finestra, una quantità di dati sufficiente per l'identificazione dei parametri.

Parallelamente, l'analisi del condizionamento mostra che la qualità della ricostruzione non può essere utilizzata, da sola, come misura dell'affidabilità dei singoli parametri. Alcune traiettorie permettono infatti di ottenere valori di R^2 locali molto elevati pur presentando regressioni fortemente mal condizionate. La valutazione del modello deve quindi considerare congiuntamente le metriche di ricostruzione e le proprietà numeriche del problema di identificazione.

Nel complesso, il lavoro fornisce una metodologia sperimentale e numerica per descrivere l'interazione uomo–robot attraverso parametri meccanici equivalenti, mettendo contemporaneamente in evidenza i vantaggi della rappresentazione locale e i limiti legati all'identificabilità delle matrici complete. I risultati ottenuti costituiscono una base per successive analisi orientate a rendere la stima dei parametri più robusta, a definire in maniera più sistematica la strategia di finestratura e a studiare la dipendenza del modello dalla traiettoria e dalla modalità di partecipazione dell'operatore.

Bibliografia

[1] Gloria Beraldo, Albin Bajrami, Alessandro Umbrico, Gabriella Cortellessa, and Matteo Claudio Palpacelli. Ai-enabled framework for augmenting upper limb rehabilitation with a social robot. In *2024 20th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA)*, pages 1–8, Genova, Italy, 2024. IEEE.

[2] Giorgia Chiriatti. *Robotic Systems for the Upper Limb Rehabilitation*. PhD thesis, Università Politecnica delle Marche, Ancona, Italy, 2023.

[3] Albin Bajrami, Matteo Claudio Palpacelli, Federico Neri, and Massimo Callegari. Static performance analysis of the tiago social robot for upper limb rehabilitation. In *Proceedings of the ASME 2025 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE2025)*. ASME, 2025.

[4] Neville Hogan. Impedance control: An approach to manipulation: Part i—theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107(1):1–7, 1985.

[5] Chenguang Yang and Etienne Burdet. A model of reference trajectory adaptation for interaction with objects of arbitrary shape and impedance. In *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 4121–4126, San Francisco, CA, USA, 2011. IEEE.

[6] Albin Bajrami, Gloria Beraldo, Matteo Claudio Palpacelli, Tapio Heikkila, and Gabriella Cortelessa. Markerless upper limb motion tracking: A comparative evaluation of multi-view approaches. In *2025 IEEE International Conference on Metrology for eXtended Reality, Artificial Intelligence and Neural Engineering (MetroXRAINE)*, pages 818–823. IEEE, 2025.

[7] Albin Bajrami, Gloria Beraldo, Gabriella Cortellessa, Alessandro Umbrico, and Matteo Claudio Palpacelli. Challenges of human-robot mimicry: From motion sensing to imitation. 2025.

[8] Toshio Tsuji, Kazuhiro Goto, Masamitsu Moritani, Makoto Kaneko, and Pietro Morasso. Spatial characteristics of human hand impedance in multi-joint arm movements. In *Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Symposium on Intelligent Robots and Systems*, volume 1, pages 423–430, Munich, Germany, 1994. IEEE.

[9] Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. *Robotica industriale: modellistica e controllo di manipolatori*. McGraw-Hill Libri Italia, 1 edition, 1995.