



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in Ingegneria Meccanica

STUDIO DI UNA MOLLA RISONANTE
STUDY OF A RESONANT SWINGING SPRING

Relatore: Chiar.mo

Prof. **Marco Coco**

Tesi di Laurea di:

Davide Ottavi

A.A. 2022 / 2023

Indice

1	Introduzione	3
2	Preliminari Teorici	5
2.1	Il Moto Armonico	5
2.2	Il Moto Armonico Forzato	6
2.3	Le Oscillazioni Smorzate	7
2.4	Il Moto Armonico Smorzato e Forzato	9
3	Equazioni Dinamiche per le Oscillazioni della Molla	11
3.1	Le Equazioni Esatte del Moto	11
3.2	Il Modello Lineare	13
3.3	Il Modello Conico	15
4	Soluzioni Invarianti	16
4.1	I Modelli Concavi e Convessi	16
4.2	Il Modello Ellittico-Parabolico	19
5	Movimento Quasi Conico	28
5.1	Il Metodo del Bilanciamento Armonico	28
6	Piccole Ampiezze di Perturbazioni Generali	40
6.1	Le Equazioni di Modulazione per coordinate fissate	40
6.2	La Soluzione dell'Equazione di Perturbazione per C	47
7	Conclusioni	57

1 Introduzione

Nel presente elaborato di laurea si investiga il moto di un pendolo elastico, un sistema meccanico costituito da una massa sospesa da un punto fissato attraverso una molla in grado di allungarsi, ma non di piegarsi, messa in moto dalla gravità. Questo problema è stato approfonditamente studiato in lettura, ad esempio in [3].

L'obiettivo dello studio della dinamica del sistema è quello di determinare le equazioni del moto, prima approssimando il problema al caso bidimensionale, poi studiandolo lungo le tre dimensioni.

Vengono utilizzate piccole ampiezze in modo da poter applicare appropriate tecniche perturbative ottenendo un sistema integrabile ed evitando il comportamento caotico riconducibile ad ampiezze finite. Dal modello lineare si osserva che il sistema assume due variazioni: una verticale data dall'oscillazione della molla ed una orizzontale data dall'oscillazione del pendolo.

Nel caso bidimensionale si osserva la precessione del piano invariante, ossia il movimento rotatorio del piano in cui oscilla il pendolo stesso. Si osserva che se inizialmente risulta essere quasi verticale, la risonanza ha come conseguenza lo sviluppo di una oscillazione orizzontale con un piccolo momento angolare. Il moto risulta essere prevalentemente piano e assume un comportamento periodico cambiando le direzioni del piano oscillante in maniera strettamente dipendente dalle condizioni iniziali. Le soluzioni ottenute sono di tipo ellittico parabolico.

Successivamente viene studiato il caso conico per cui il momento angolare rispetto alla verticale viene considerato non nullo. Il moto risulterà essere perfettamente integrabile ottenendo un comportamento variabile dipendente dall'angolo azimutale, ossia l'angolo compreso tra la verticale e la retta passante per il punto fisso e la massa. Il moto perturbato risulta essere una oscillazione veloce modulata da un involuppo di bassa frequenza che dipende da termini fissati e dal raggio alla base del moto conico. Si osservano tre casi: uno per cui le perturbazioni di energia sono nel moto orizzontale e due per cui risultano essere invarianti della forma sinusoidale.

Di seguito si studiano le piccole ampiezze di perturbazioni generali per le quali bisogna osservare il sistema attraverso due scale del tempo, una più veloce dell'altra. Si approfondisce il caso tridimensionale e si determinano le variabili del moto. Infine attraverso la definizione della perturbazione per una delle variabili si studia il potenziale del moto in funzione della variabile stessa e osservando che verrà scambiata energia periodicamente dall'oscillazione del pendolo al molleggiamento della molla.

2 Preliminari Teorici

2.1 Il Moto Armonico

Il moto armonico è un moto di tipo oscillatorio caratterizzato da un'equazione differenziale del secondo ordine espressa come:

$$m\ddot{q} + kq = 0. \quad (1)$$

$q(t)$ è la coordinata libera del sistema. Questa equazione può essere scritta nella forma:

$$\ddot{q} + w^2q = 0 \quad (2)$$

$w^2 = \frac{k}{m}$ e definisce delle *oscillazioni lineari libere*.

Il moto armonico sarà descritto da due costanti A e B secondo l'equazione:

$$q(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt). \quad (3)$$

Allo stesso modo si può scrivere:

$$q(t) = r \cos(wt + \sigma) \quad (4)$$

Le due equazioni sono equivalenti quando l'*ampiezza* r scelta risulta essere uguale a:

$$r^2 = A^2 + B^2.$$

Un'altra grandezza importante è la *fase* σ che si ottiene da:

$$\cos \sigma = \frac{A}{r}, \quad \sin \sigma = \frac{-B}{r}.$$

I valori di A e B sono forniti dalle condizioni iniziali, cioè dai valori q_0 e \dot{q}_0 assunte dal sistema per $t = 0$. Nello specifico si ha che

$$q_0 = A, \quad \dot{q}_0 = wB$$

. I rispettivi valori di r e σ sono dati da:

$$r^2 = q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{w^2}, \quad \tan \sigma = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{q}_0}{q_0 w}$$

. Qualunque siano le condizioni iniziali il punto materiale compie oscillazioni armoniche di *periodo* $T = \frac{2\pi}{w}$ *ampiezza* r e *fase iniziale* σ .

2.2 Il Moto Armonico Forzato

Un possibile caso ottenuto a partire dal moto armonico è quello di un punto sul quale agisce una forza $F(t)$ detta *forzante*. L'equazione del moto può essere scritta nella forma:

$$\ddot{q} + w^2 q = f(t) \quad (5)$$

In cui $f(t) = \frac{F(t)}{m}$ e definisce un' *oscillazione lineare forzata*. La soluzione in questo caso è:

$$q(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt) + \tilde{q}(t). \quad (6)$$

In cui si ha $\tilde{q}(t)$ soluzione particolare della (5).

Risulta essere importante approfondire il caso di una forza sinusoidale:

$$f(t) = \Gamma \cos(vt), \quad (\Gamma > 0).$$

Applicando l'ipotesi di $v \neq w$ una soluzione particolare della (5) è:

$$\tilde{q}(t) = \frac{\Gamma}{w^2 - v^2} \cos(vt).$$

Da cui si ottiene:

$$q(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt) + \frac{\Gamma}{w^2 - v^2} \cos(vt). \quad (7)$$

Introducendo una nuova variabile $\epsilon = v - w$ è verificato che

$$\cos(vt) = \cos(\epsilon t + wt) = \cos(\epsilon t) \cos(wt) + \sin(\epsilon t) \sin(wt)$$

$$w^2 - v^2 = -(2w + \epsilon)\epsilon.$$

Sostituendo i termini nella (7) si ottiene:

$$q(t) = \left[-\frac{\Gamma}{(2w + \epsilon)\epsilon} \cos(\epsilon t) + A \right] \cos(wt) + \left[\frac{\Gamma}{(2w + \epsilon)\epsilon} \sin(\epsilon t) + B \right] \sin(wt). \quad (8)$$

Per ϵ molto piccolo le grandezze in gioco variano molto lentamente nel tempo dando luogo ad oscillazioni con ampiezza modulata lentamente detta *battimento*.

Per $\epsilon = 0$ risulta che $v = w$ ed in particolare si ha:

$$\tilde{q}(t) = \frac{\Gamma}{2w^2} [wt \sin(wt) - \cos(wt)],$$

pertanto:

$$q(t) = q_0 \cos(wt) + \frac{\dot{q}_0}{w} \sin(wt) + \frac{\Gamma}{2w^2} [wt \sin(wt) - \cos(wt)] \quad (9)$$

con q_0 e \dot{q}_0 condizioni iniziali. Dalla (9) si deduce che nel caso di un moto armonico forzato con forzante sinusoidale, l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente con il tempo. Tale fenomeno, detto di *risonanza*, avviene quando viene applicata una sollecitazione periodica al sistema di frequenza pari alla sua oscillazione propria ovvero la frequenza alla quale il sistema oscilla autonomamente quando è libero di farlo, senza essere influenzato da forze esterne.

2.3 Le Oscillazioni Smorzate

In questo caso si considera il moto armonico tenendo conto della resistenza del mezzo in cui avviene. Si applica una forza di natura viscosa che si oppone al moto in maniera proporzionale alla velocità del punto pari a $-h\dot{q}$. h è un coefficiente che quantifica la smorzamento. L'equazione del moto sarà:

$$m\ddot{q} + h\dot{q} + kq = 0. \quad (h > 0, k > 0) \quad (10)$$

Moltiplicando l'equazione per \dot{q} e sostituendo $\ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{q}^2}{dt}$ e $\dot{q} = \frac{1}{2} \frac{dq^2}{dt}$ si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 \right) = -h \dot{q}$$

Si può osservare che, nel caso in cui $h = 0$, la somma dell'energia potenziale e l'energia cinetica si conserva:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2 \right) = E_0.$$

E_0 è l'energia totale del sistema nell'istante iniziale.

Nel caso in cui $h > 0$, invece l'equazione differenziale può essere espressa come:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \sigma^2 q = 0 \quad \left(\gamma = \frac{h}{2m} > 0; \theta^2 = \frac{k}{m} \right) \quad (11)$$

γ è definito *fattore di smorzamento*.

La soluzione generale dell'equazione differenziale si ottiene da:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \sigma^2 = 0.$$

Il discriminante è $(\gamma^2 - \sigma^2)$ e definisce tre possibilità:

1. $(\gamma^2 - \sigma^2) > 0, (\gamma > \sigma) \iff k < \frac{h^2}{4m}$
2. $(\gamma^2 - \sigma^2) = 0, (\gamma = \sigma) \iff k = \frac{h^2}{4m}$
3. $(\gamma^2 - \sigma^2) < 0, (\gamma < \sigma) \iff k > \frac{h^2}{4m}$

Studiando i vari casi si ottiene:

1. $\gamma > \sigma$ si definisce *moto sovrasmorzato*, le radici di λ sono reali e diverse tra loro: definito $w^2 = \gamma^2 - \sigma^2 > 0$ le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -\gamma - w, \quad \lambda_2 = -\gamma + w$$

pertanto l'equazione (11) diventa:

$$x(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 \exp(wt) + c_2 \exp(-wt)] \quad (12)$$

c_1 e c_2 sono due quantità dipendenti dalle condizioni iniziali:

$$q_0 = c_1 + c_2 \quad \dot{q}_0 = -\gamma(c_1 + c_2) + w(c_2 - c_1).$$

Segue che $c_1 = \frac{q_0}{2} - \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{2w}$ e $c_2 = \frac{q_0}{2} + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{2w}$. Sostituendo nella (12) si ottiene:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[q_0 \cosh(wt) + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{w} \sinh(wt)] \quad (13)$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

2. $\gamma = \sigma$ si definisce *smorzamento critico*, le radici di λ sono reali e coincidenti. La soluzione generale dell'equazione è:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 + c_2 t].$$

Dalle condizioni iniziali si ottengono c_1 e c_2 tali che

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[q_0 + (\dot{q}_0 + \gamma q_0)t]. \quad (14)$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

3. $\gamma < \sigma$ si definisce *oscillazione smorzata*, le radici di λ sono complesse coniugate: definito $w^2 = \gamma^2 - \sigma^2 > 0$ le soluzioni sono:

$$\lambda_1 = -\gamma - iw, \quad \lambda_2 = -\gamma + iw$$

Pertanto l'equazione diventa:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)[c_1 \cos(wt) + c_2 \sin(wt)] \quad (15)$$

e sostituendo c_1 e c_2 determinati dalle condizioni iniziali, si ha:

$$q(t) = \exp(-\gamma t)\left[q_0 \cos(wt) + \frac{\dot{q}_0 + \gamma q_0}{w} \sin(wt)\right] \quad (16)$$

Si osserva che $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$.

In tutte le casistiche, a prescindere dalle condizioni iniziali, il moto risulta essere *smorzato* dal termine $\exp(-\gamma t)$.

2.4 Il Moto Armonico Smorzato e Forzato

Si prende in considerazione il caso smorzato a cui viene applicata una forzante sinusoidale. L'equazione del moto è:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \sigma^2 q = \Gamma \cos(vt). \quad (17)$$

Si introduce una funzione incognita a valori complessi $\epsilon(t)$ necessaria per dedurre una soluzione particolare dell'equazione e si ottiene:

$$\ddot{\epsilon} + 2\gamma\dot{\epsilon} + \sigma^2 \epsilon = \Gamma \exp(ivt). \quad (18)$$

Si osserva che $\Re[\Gamma \exp(ivt)] = \Gamma \cos(vt)$. Una possibile soluzione è della forma

$$\epsilon(t) = A \exp(ivt) \quad (19)$$

da cui si ha:

$$\dot{\epsilon}(t) = Aiv \exp(ivt) \quad \ddot{\epsilon}(t) = -Av^2 \exp(ivt).$$

Per l'uguaglianza tra (18) e (19),

$$A = \frac{\Gamma}{\sigma^2 - v^2 + 2i\gamma v}.$$

Ponendo $\alpha = \sigma^2 - v^2$ e $\beta = 2\gamma v$ e sfruttando l'uguaglianza per ogni numero complesso $\alpha + i\beta$ tale che

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\alpha - i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(i\delta).$$

Si può definire:

$$A = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}} \exp(-i\delta) \quad (20)$$

δ è definito dalle relazioni:

$$\cos \delta = \frac{\sigma^2 - v^2}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}} \quad \sin \delta = \frac{2\gamma v}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}}.$$

Pertanto :

$$\tan \delta = \frac{2\gamma v}{\sigma^2 - v^2}$$

. La soluzione particolare si definisce come:

$$\varepsilon(t) = r \exp[i(vt - \delta)] \quad (21)$$

Nella quale $r = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\sigma^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2}}$.

La parte reale di questa equazione fornisce un integrale particolare reale della (17):

$$\ddot{x}(t) = r \cos(vt - \delta). \quad (22)$$

L'ampiezza dell'oscillazione della soluzione particolare r è sempre finita in quanto fornita da un rapporto con denominatore mai nullo. [1]

3 Equazioni Dinamiche per le Oscillazioni della Molla

3.1 Le Equazioni Esatte del Moto

Il sistema fisico studiato consiste in una molla sospesa da un punto fisso attraverso una molla che può allungarsi e non piegarsi, mossa dalla gravità. La posizione della massa è data dalle sue tre coordinate nello spazio, il sistema ha tre gradi di libertà. Non c'è torsione rispetto alla linea verticale, il momento angolare per unità di massa risulta essere costante. Nel caso in cui sia nullo, il moto ha luogo in un piano, pertanto il sistema ha due gradi di libertà. Si considera l_0 lunghezza della molla a riposo, k la sua rigidità e m la massa presa in studio. All'equilibrio il peso è bilanciato dalla forza elastica:

$$k(l - l_0) = mg$$

Si considerano le coordinate cartesiane (x, y, Z) centrate nel punto di sospensione del pendolo. La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{Z}^2) - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mgZ. \quad (23)$$

Considerando $r = \sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}$. Le equazioni del moto sono date da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{1}{2}k(r - l_0) \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} = -k(r - l_0) \frac{x}{r} = m\ddot{x} \rightarrow -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) x = \ddot{x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{1}{2}k(r - l_0) \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} = -k(r - l_0) \frac{y}{r} = m\ddot{y} \rightarrow -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) y = \ddot{y} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{1}{2}k(r - l_0) \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} - mg = -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) Z - g = \ddot{Z} \quad (26)$$

dove $w_z^2 = \frac{k}{m}$.

Le condizioni di equilibrio si ottengono ponendo nulle le derivate parziali: da (24) si ottiene $x=0$, da (25) $y=0$ e da (26) $Z=-l$ v $Z=2l_0-l$ (per $l < 2l_0$) Le costanti del moto sono fornite dall'*energia* $E=T+V$ e dal *momento angolare per unità di massa* rispetto alla verticale $h=x\dot{y}-y\dot{x}$. Poiché il sistema presenta

due invarianti e tre gradi di libertà non è, in generale, integrabile. Utilizzando le coordinate sferiche (r, θ, φ) con θ angolo misurato rispetto alla verticale verso il basso, si ottiene che

$$\begin{cases} x = -R \cos \varphi \sin \theta \\ y = -R \sin \varphi \sin \theta \\ z = -R \cos \theta \end{cases} \quad (27)$$

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + \dot{\theta}^2 R^2 + \varphi \dot{R}^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}k(R - l_0)^2 + mgR \cos \theta, \quad (28)$$

infatti:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{R} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\varphi} R \sin \varphi \sin \theta - \dot{\theta} R \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{x}^2 &= \dot{R}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 2\dot{\varphi} \dot{R} R \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \\ &- 2\dot{\varphi} \dot{R} R \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta - 2\dot{\varphi} \dot{\theta} R^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \\ &+ \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - 2\dot{\varphi} \dot{\theta} R^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\dot{R} \sin \varphi \sin \theta - \dot{\varphi} R \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} R \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{y}^2 &= \dot{R}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi} \dot{R} R \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta + 2\dot{\theta} \dot{R} R \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + \\ &+ \dot{\varphi}^2 R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} R^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\dot{z} = -\dot{R} \cos \theta + \dot{\theta} R \sin \theta$$

$$\dot{z}^2 = \dot{R}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \theta - 2\dot{\theta} \dot{R} R \cos \theta \sin \theta$$

La somma $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{R}^2 + \dot{\theta}^2 R^2 + \varphi \dot{R}^2 \sin^2 \theta$.

Le equazioni del moto sono date da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} &= m\ddot{R} = k(R - l_0) + mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 + mR \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ \rightarrow \ddot{x} &= -w_z^2(R - l_0) + g \cos \theta + r\dot{\theta}^2 + R \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m \frac{d}{dt}(\dot{\theta} R^2) = +mgR \sin \theta + mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\theta}R^2) = +gR\sin\theta + R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0. \quad (31)$$

Utilizzando le coordinate cilindriche si ottiene:

$$\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad (32)$$

La Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + \dot{\theta}^2 R^2 + \dot{Z}^2) - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mgz, \quad (33)$$

infatti:

$$\dot{x}^2 = \dot{R}^2 \cos^2 \theta - 2\dot{\theta}R \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \theta$$

$$\dot{y}^2 = \dot{R}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}R \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \theta$$

$$\dot{Z}^2 = \dot{Z}^2$$

$$r = \sqrt{R^2 + Z^2}$$

. Le equazioni del moto sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = \ddot{R} = -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) R + R\dot{\varphi}^2 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} = \ddot{Z} = -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) Z - g \quad (35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (36)$$

3.2 Il Modello Lineare

Un modello *lineare* è un modello statistico che cerca di modellare la relazione tra le variabili predittive e la variabile di risposta come una funzione lineare. Con le coordinate cartesiane è conveniente utilizzare moti di piccola ampiezza

per spostarsi dall'origine al punto di equilibrio stabile. La coordinata verticale è $z = Z + l$, con la semplificazione del moto preso con piccole ampiezze, $|x| \ll l$ e $|z| = |Z + l| \ll l$, pertanto, considerando solo i termini lineari, a partire da:

$$\ddot{x} = -w_z^2 \left(\frac{r - l_0}{r} \right) x, \quad w_z^2 = \frac{k}{m}, \quad w_R = \sqrt{\frac{g}{l - l_0}}, \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{l - l_0}, \quad r = \sqrt{l^2} = l,$$

si ottiene:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \left(\frac{r - l_0}{r} \right) x = -\frac{g}{l - l_0} \left(\frac{l - l_0}{l} \right) x = -\frac{g}{l} x = -w_R^2 x$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \left(\frac{r - l_0}{r} \right) y = -\frac{g}{l - l_0} \left(\frac{l - l_0}{l} \right) y = -\frac{g}{l} y = -w_R^2 y.$$

La soluzione può essere scritta come:

$$x = a \cos(w_R t) + b \sin(w_R t) \quad (37)$$

$$y = c \cos(w_R t) + d \sin(w_R t). \quad (38)$$

Risolviendo per $\cos(w_R t)$ e $\sin(w_R t)$ si deduce:

$$(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = (ad - bc)^2.$$

Questa equazione rappresenta la sezione conica centrale.

La proiezione orizzontale del moto è un'ellisse centrata nell'origine attraversato con frequenza w_R ; il moto verticale è regolato da:

$$\ddot{Z} + w_z^2 Z = 0,$$

in cui $w_z = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la frequenza delle oscillazioni elastiche. Per ipotesi non c'è interferenza tra le oscillazioni elastiche e la componente rotazionale per questo si introduce una variabile che mette in relazione i due fenomeni:

$$\epsilon = \frac{w_R}{w_z} = \sqrt{\frac{mg}{kl}}. \quad (39)$$

Si osserva che la frequenza rotazionale è sempre minore di quella elastica: da $\frac{k}{m} = \frac{g}{l - l_0}$ si ottiene:

$$\epsilon^2 = \left(1 - \frac{l_0}{l} \right) < 1$$

pertanto

$$|w_R| < |w_z|.$$

Si nota inoltre che se ϵ è un numero razionale, il moto lineare è periodico, ma se ϵ è irrazionale le variabili non torneranno mai nelle condizioni iniziali, il moto è arbitrariamente chiuso in modo tale da risultare semi-periodico.

3.3 Il Modello Conico

Si considera il moto *conico* con $r, \dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$ costanti. Sfruttando le coordinate sferiche, le equazioni del moto si ottengono a partire da (29), (30) e (31) e sono:

$$rw^2 \sin^2 \theta - w_z^2(r - l_0) + g \cos \theta = 0 \quad (40)$$

$$rw^2 \cos \theta - g = 0 \quad (41)$$

$$r^2 w \sin^2 \theta = h \quad (42)$$

Si osserva che $h = x\dot{y} - y\dot{x}$ è il momento angolare per unità di massa rispetto alla verticale preso non nullo e $\dot{\varphi} = w$.

La relazione tra le variazioni dei vari termini è esprimibile in termini di angolo conico, infatti, poiché

$$g = rw^2 \cos \theta; \quad rw^2 \sin^2 \theta - w_z^2(r - l_0) + g \cos \theta = 0$$

Allora:

$$rw^2 - w_z^2(r - l_0) = 0; \quad g = w_z^2(r - l_0) \cos \theta,$$

quindi si può scrivere che

$$r - l_0 = \frac{g}{w_z^2 \cos \theta} \rightarrow r = l_0 + \frac{g}{w_z^2 \cos \theta}. \quad (43)$$

Si tratta di una relazione della forma $r = a + b \sec \theta$, nonché equazione generale di una conoide.

Poiché $z = -r \cos \theta$ e $\frac{g}{w_z^2} = \epsilon^2 l$,

$$z = -\epsilon^2 l - l_0 \cos \theta.$$

Pertanto per $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, z assume un valore minore di zero; i casi limite risultano essere $z = -l$ per cui $R = 0$ e $z \rightarrow \epsilon^2 l$ per cui $R \rightarrow \infty$.

La velocità angolare è data da:

$$g = rw^2 \cos \theta; \quad rw^2 \sin^2 \theta - w_z(r - l_0) + g \cos \theta = 0$$

infatti si ottiene che $rw^2 = w_z^2(r - l_0)$, pertanto sostituendo in g si ottiene:

$$w^2 = \frac{g}{r \cos \theta} = \left(\frac{r - l_0}{r}\right)w_z^2. \quad (44)$$

Si osserva che per $\theta \rightarrow 0$ $w \rightarrow w_R$ e per $R \rightarrow \infty$ $w \rightarrow w_z$.

4 Soluzioni Invarianti

4.1 I Modelli Concavi e Convessi

Il modello *concavo* si riferisce a una soluzione che presenta un andamento decrescente, rivolto verso il basso. Indica una configurazione in cui le variabili del sistema si muovono in modo tale da convergere verso un equilibrio. Il modello *convesso* al contrario, si riferisce a una soluzione che presenta un andamento crescente, rivolto verso l'alto. Indicare una configurazione in cui le variabili del sistema si muovono in modo tale da divergere da un equilibrio. Si prendono in studio le soluzioni invarianti nelle quali non c'è scambio di energia tra i moti elastici e pendolari. La Lagrangiana viene presa di ordine cubico considerando la massa $m = 1$ ed è uguale a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{Z}^2) - \frac{1}{2}[w_R^2(x^2 + y^2) + w_z^2 z^2] + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2)z \quad (45)$$

dove $\lambda = \frac{l_0 w_z^2}{l^2}$ e $w_z = 2w_R$, valori per cui è verificato lo stato stazionario del movimento.

Si considera il moto lungo il piano x - z , le equazioni in coordinate rettangolari per moti con piccola ampiezza sono date da:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -w_R^2 x + \lambda x z = \ddot{x} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -4w_R^2 z + \frac{1}{2}\lambda x^2 = \ddot{z} \quad (47)$$

definite le forme periodiche di:

$$x = \epsilon(A \cos(wt)) + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

$$z = \epsilon(C \cos(2wt)) + \epsilon^2 z_2 + \dots$$

e dato $w = w_0 + \epsilon w_1 + \dots$, si studiano le equazioni del moto come $O(\epsilon)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -w^2 A \epsilon \cos(wt) + \epsilon^2 \ddot{x}_2 = \\ &= \lambda[\epsilon A \cos(wt) + \epsilon^2 x_2][\epsilon C \cos(2wt) + \epsilon^2 z_2] - w_R^2(\epsilon A \cos(wt) + \epsilon^2 x_2) = \\ &= \lambda \epsilon^2 AC \cos(wt) \cos(2wt) - w_R^2 \epsilon^2 x_2 \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_2 + w_R^2 x_2 = \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \cos(w_R t) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -w^2 C \epsilon \cos(2wt) + \epsilon^2 \ddot{z}_2 = \\ &= \left[\frac{1}{2}\lambda \epsilon^2 A^2 \cos^2(wt)\right] - 4\epsilon w_R^2 C \cos(2w_R t) - 4\epsilon^2 w_R^2 z_2 - 8w_R w_1 \epsilon^2 C \cos(2wt) + \epsilon \ddot{z}_2 = \\ &= \left[\frac{1}{2}\lambda \epsilon^2 A^2 \cos^2(wt)\right] - 4\epsilon^2 w_R^2 z_2 = \\ \ddot{z}_2 + 4w_R^2 z_2 &= 8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2}\lambda A^2 \cos^2(w_R t). \quad (49) \end{aligned}$$

Si definisce *secolare* un termine del tipo $t \sin(t)$, nel quale un fattore crescente come una funzione lineare $f(t) = t$ moltiplica una funzione oscillante con la stessa frequenza della forzante che compare nell'equazione differenziale. [4] Per evitare la risonanza tali termini devono annullarsi:

- nella (48)

$$2w_R w_1 A \cos(w_R t) + \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) = 0.$$

Poiché $\cos(2w_R t) = 2 \cos^2(w_R t) - 1$, allora:

$$AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) = 2AC \cos(w_R t)[\cos^2(w_R t) - 1].$$

Si ottiene così:

$$2 \cos^3(w_R t) - \cos(w_R t)$$

da cui

$$2 \cos^3(w_R t) = \frac{1}{2}(3 \cos(w_R t) + \cos(3w_R t)).$$

Quindi considerando solo i valori che dipendono da $\cos(w_R t)$:

$$2w_R w_1 A \cos(w_R t) + \lambda AC \left[\frac{3}{2} \cos(w_R t) - \cos(w_R t) \right] = 0$$

. Semplificando si ottiene:

$$2w_R w_1 A + \frac{1}{2} \lambda AC = 0. \quad (50)$$

• Nella (49)

$$8w_R w_1 C \cos(2wt) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(wt) = 0,$$

poiché $\cos(2w_R t) = 2 \cos^2(w_R t) - 1$, allora

$$\cos^2(w_R t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2w_R t)).$$

Considerando solo i termini che dipendono da $\cos(2w_R t)$ e sostituendo si ottiene:

$$8w_R w_1 C + \frac{1}{4} \lambda A^2. \quad (51)$$

Le due equazioni per un'ampiezza orizzontale A fissata definiscono C e w_1 tali che

$$w_1 = -\frac{1}{2} \frac{\lambda AC}{2w_R A} = -\frac{1}{4} \frac{C}{w_R} \frac{l_0 w_z^2}{l^2}.$$

Poiché $\epsilon^2 = \frac{w_R^2}{4w_R^2} = 1 - \frac{l_0}{l}$, allora $\frac{l_0}{l} = \frac{3}{4}$, quindi:

$$w_1 = -\frac{3}{4} \frac{4w_R^2}{l} \frac{1}{4} \frac{C}{w_R}$$

Calcolando C si ha che:

$$-2\lambda C^2 = -\frac{1}{4} \lambda A^2 \rightarrow C = \pm \frac{A}{2\sqrt{2}}, \quad (52)$$

di conseguenza:

$$w_1 = \mp \frac{3\sqrt{2}A}{16l}w_R. \quad (53)$$

A seconda del segno considerato si hanno due soluzioni:

- per C preso positivo, e di conseguenza w_1 negativo,

$$z = \epsilon(C \cos(2wt)) + \epsilon^2 z_2 + \dots =$$

$$\frac{A}{2\sqrt{2}} \cos(2w_R t) = \frac{A}{2\sqrt{2}} [2 \cos^2(w_R t) - 1] = \frac{A}{\sqrt{2}} [\cos^2(w_R t) - \frac{1}{2}],$$

sapendo che $\frac{x}{A} = \cos(w_R t)$ si può scrivere:

$$z = \frac{A}{\sqrt{2}} [(\frac{x}{A})^2 - \frac{1}{2}]$$

$$w = w_0 + \epsilon w_1 + \dots = w_R - \frac{3\sqrt{2}A}{16l}w_R = (1 - \frac{3\sqrt{2}A}{16l})w_R$$

- per C preso negativo, e di conseguenza w_1 positivo,

$$z = -\frac{A}{\sqrt{2}} [(\frac{x}{A})^2 - \frac{1}{2}]$$

$$w = (1 + \frac{3\sqrt{2}A}{16l})w_R$$

Nel primo caso si ottiene una traiettoria concava, nel secondo convessa. Si osserva che in quest'ultimo la frequenza risulta leggermente aumentata. Infine c'è una terza soluzione per $A=w_1 = 0$ e C arbitrario. Questa corrisponde ad oscillazioni puramente verticali, ma risulta essere instabile.

4.2 Il Modello Ellittico-Parabolico

In termini di moto, un'equazione ellittica può rappresentare una condizione di equilibrio o uno stato stazionario, mentre un'equazione parabolica può rappresentare cambiamenti nel tempo. L'uso di un modello *ellittico-parabolico* permette di studiare sistemi complessi in cui è importante considerare sia il

comportamento stazionario che quello dinamico nel tempo. Si studia il caso tridimensionale per piccole ampiezze. La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}[w_R^2(x^2 + y^2) + w_z^2 z^2] + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2)z \quad (54)$$

Le equazioni del moto sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -w_R^2 x + \lambda x z = \ddot{x}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -w_R^2 y + \lambda y z = \ddot{y}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -4w_R^2 z + \frac{1}{2}\lambda x^2 = \ddot{z}. \quad (57)$$

Definite le forme periodiche di:

$$x = \epsilon(A \cos(wt)) + \epsilon^2 x_2 + \dots,$$

$$y = \epsilon(B \sin(wt)) + \epsilon^2 y_2 + \dots,$$

$$z = \epsilon(C \cos(2wt)) + \epsilon^2 z_2 + \dots$$

e dato

$$w = w_0 + \epsilon w_1 + \dots,$$

si studiano le equazioni del moto come $O(\epsilon)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -w^2 A \epsilon \cos(wt) + \epsilon^2 \ddot{x}_2 = \\ \lambda[\epsilon A \cos(wt) + \epsilon^2 x_2][\epsilon C \cos(2wt) + \epsilon^2 z_2] - w_R^2(\epsilon A \cos(wt) + \epsilon^2 x_2) &= \\ = \lambda \epsilon^2 AC \cos(wt) \cos(2wt) - w_R^2 \epsilon^2 x_2 & \\ \ddot{x}_2 + w_R^2 x_2 = \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2A w_R w_1 \cos(w_R t) & \quad (58) \end{aligned}$$

$$\ddot{y} = -w^2 B \epsilon \sin(wt) + \epsilon^2 \ddot{y}_2 =$$

$$\begin{aligned} \lambda[\epsilon B \sin(w_R t) \epsilon C \cos(2w_R t) - w_R^2(\epsilon B \sin(w_R t) + \epsilon^2 y_2)] &= \\ = \lambda \epsilon^2 BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) - w_R^2 \epsilon^2 y_2 & \end{aligned}$$

$$\ddot{y}_2 + w_R^2 y_2 = \lambda BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \sin(w_R t) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -w^2 C \epsilon \cos(2wt) + \epsilon^2 \ddot{z}_2 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 A^2 \cos^2(wt) + \frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 B^2 \sin^2(wt) \right] - 4\epsilon w_R^2 C \cos(2w_R t) - 4\epsilon^2 w_R^2 z_2 = \\ &= -8w_R w_1 \epsilon^2 C \cos(2wt) + \epsilon \ddot{z}_2 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 A^2 \cos^2(wt) + \frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 B^2 \sin^2(wt) \right] - 4\epsilon^2 B w_R^2 z_2 \\ \ddot{z}_2 + 4w_R^2 z_2 &= 8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(w_R t) + \frac{1}{2} \lambda B^2 \sin^2(w_R t). \quad (60) \end{aligned}$$

I termini secolari devono annullarsi:

- nella (58)

$$\lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2A w_R w_1 \cos(w_R t) = 0.$$

Poiché $\cos(2w_R t) = 2\cos^2(w_R t) - 1$, allora

$$AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) = 2AC \cos(w_R t) [\cos^2(w_R t) - 1].$$

Si ottiene così $2\cos^3(w_R t) - \cos(w_R t)$, da cui

$$2\cos^3(w_R t) = \frac{1}{2}(3\cos(w_R t) + \cos(3w_R t)),$$

quindi studiando solo i termini dipendenti da $\cos(w_R t)$:

$$2w_R w_1 A \cos(w_R t) + \lambda AC \left[\frac{3}{2} \cos(w_R t) - \cos(w_R t) \right] = 0.$$

Semplificando si ottiene:

$$2w_R w_1 A + \frac{1}{2} \lambda AC = 0. \quad (61)$$

- Nella (59)

$$\lambda BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \sin(w_R t) = 0.$$

Poiché $\cos(2w_R t) = 1 - 2\sin^2(w_R t)$, allora

$$BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) = 2BC \sin(w_R t) [1 - \sin^2(w_R t)].$$

Si ottiene così $-2 \sin^3(w_R t) + \sin(w_R t)$, da cui

$$2 \sin^3(w_R t) = \frac{1}{2}(-3 \sin(w_R t) + \sin(3w_R t)),$$

quindi studiando solo i termini dipendenti da $\sin(w_R t)$:

$$2w_R w_1 B \sin(w_R t) + \lambda BC \left[-\frac{3}{2} \sin(w_R t) + \sin(w_R t)\right] = 0.$$

Semplificando si ottiene:

$$2w_R w_1 B - \frac{1}{2} \lambda BC = 0. \quad (62)$$

- Nella (60)

$$8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(wt) + \frac{1}{2} \lambda B^2 \sin^2(wt) = 0,$$

poiché $\cos^2(w_R t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2w_R t))$ e $\sin^2(w_R t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2w_R t))$, sostituendo e considerando i termini dipendenti da $\cos(2w_R t)$, si ottiene:

$$8w_R w_1 C + \frac{1}{4} \lambda (A^2 - B^2) \quad (63)$$

Si osserva che $A = 0$ o $B = 0$ ottengo le soluzioni convesse e concave, per $C=0$ ottengo il moto conico se $A = B$ e $w_1 = 0$, per $ABC = 0$ non esistono soluzioni. Le soluzioni più generali del moto si ottengono trasformando le equazioni con il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad (64)$$

Calcolando si ha:

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \eta = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ \zeta = z \end{cases}$$

La corrispondente Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{1}{2}[w_R^2(\xi^2 + \eta^2) + w_z^2 \zeta^2] + \frac{1}{2} \lambda (\xi^2 + \eta^2) \zeta. \quad (65)$$

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = ma_a &= -w_R^2 \xi + \lambda \xi \zeta = \ddot{\xi} + 2\mathbf{w} \times (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})^{\mathbf{T}} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times (\xi, \eta, \zeta)^{\mathbf{T}}) = \\ &= \ddot{\xi} - 2\Omega \dot{\eta} - \Omega^2 \xi \\ \ddot{\xi} + (w_R^2 - \Omega^2) \xi - 2\Omega \dot{\eta} &= \lambda \epsilon \zeta\end{aligned}\quad (66)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \lambda \eta \zeta &= \ddot{\eta} + 2\eta \dot{\xi} - \Omega^2 \eta + w_R^2 \eta \\ \ddot{\eta} + (w_R^2 - \Omega^2) \eta + 2\Omega \dot{\xi} &= \lambda \eta \xi\end{aligned}\quad (67)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = -4w_R^2 \zeta + \frac{1}{2} \lambda (\xi^2 + \eta^2) &= \ddot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} + 4w_R^2 \zeta &= \frac{1}{2} \lambda (\xi^2 + \eta^2)\end{aligned}\quad (68)$$

Si osserva che nelle equazioni compaiono i termini Ω^2 , $2\Omega \dot{\xi}$ e $2\Omega \dot{\eta}$ che sono dovuti alla Forza di Coriolis, infatti nello studio dell'accelerazione assoluta a_a vengono considerate le componenti di trascinamento e di Coriolis.

Definite le forme periodiche di:

$$\xi = \epsilon(A \cos(wt)) + \epsilon^2 \xi_2 + \dots,$$

$$\eta = \epsilon(B \sin(wt)) + \epsilon^2 \eta_2 + \dots,$$

$$\zeta = \epsilon(C \cos(2wt)) + \epsilon^2 \zeta_2 + \dots$$

e dato

$$\Omega = \epsilon \Omega_1 + \dots,$$

le equazioni del primo ordine non contengono Ω , pertanto si ha:

$$\xi_1 = A \cos(w_R t); \quad \eta_1 = B \sin(w_R t); \quad \zeta_1 = C \cos(2w_R t).$$

Si è sostituito w con $w_0 = w_R$. Il moto è ellittico lungo la proiezione orizzontale, mentre lungo le proiezioni $\xi - \zeta$ e $\eta - \zeta$ è parabolico, uno convesso e uno concavo. Le equazioni del secondo ordine sono:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -w^2 A \epsilon \cos(wt) + \epsilon^2 \ddot{\xi}_2 = \lambda \xi \zeta + 2\Omega \dot{\eta} - (w_R^2 + \Omega^2) \xi = \\ &= \lambda [\epsilon A \cos(wt)] [\epsilon C \cos(2wt)] - (w_R^2 + \Omega^2) \epsilon A \cos(wt) + \epsilon^2 \xi_2 + 2\Omega \dot{\eta} \\ \ddot{\xi}_2 + w_R^2 \xi_2 &= \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2Aw_R w_1 \cos(w_R t) + 2\Omega_1 w_R B \cos(w_R t)\end{aligned}\quad (69)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= -w^2 B \epsilon \sin(wt) + \epsilon^2 \ddot{\eta}_2 = \lambda [\epsilon^2 BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t)] + \\ &\quad - (w_R^2 - \Omega^2) (\epsilon B \sin(w_R t) + \epsilon^2 \eta_2) + 2\epsilon^2 \Omega_1 w_R A \sin(w_R t) \\ \ddot{\eta}_2 + w_R^2 \eta_2 &= \lambda BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \sin(w_R t) + 2\Omega_1 w_R A \sin(w_R t)\end{aligned}\quad (70)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} &= -4w^2 C \epsilon \cos(2wt) + \epsilon^2 \ddot{\zeta}_2 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 A^2 \cos^2(wt) + \frac{1}{2} \lambda \epsilon^2 B^2 \sin^2(wt) \right] - 4w_R^2 [\epsilon C \cos(2w_R t) + \epsilon \zeta_2] \\ \ddot{\zeta}_2 + 4w_R^2 \zeta_2 &= 8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(w_R t) + \frac{1}{2} \lambda B^2 \sin^2(w_R t).\end{aligned}\quad (71)$$

I termini secolari devono annullarsi:

- nella (69)

$$\lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2Aw_R w_1 \cos(w_R t) + 2\Omega_1 w_R B \cos(w_R t) = 0.$$

Poiché $\cos(2w_R t) = 2 \cos^2(w_R t) - 1$, allora:

$$AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) = 2AC \cos(w_R t) [\cos^2(w_R t) - 1].$$

Si ottiene così $2 \cos^3(w_R t) - \cos(w_R t)$ da cui:

$$2 \cos^3(w_R t) = \frac{1}{2} (3 \cos(w_R t) + \cos(3w_R t)),$$

quindi studiando solo i termini dipendenti da $\cos(w_R t)$:

$$2w_R w_1 A \cos(w_R t) + \lambda AC \left[\frac{3}{2} \cos(w_R t) - \cos(w_R t) \right] 2\Omega_1 w_R B \cos(w_R t) = 0.$$

Semplificando si ottiene:

$$2w_R w_1 A + \frac{1}{2} \lambda AC + 2\Omega_1 w_R B = 0. \quad (72)$$

- Nella (70)

$$\lambda BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \sin(w_R t) + 2\Omega_1 w_R A \sin(w_R t) = 0,$$

poiché $\cos(2w_R t) = 1 - 2\sin^2(w_R t)$, allora:

$$BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) = 2BC \sin(w_R t) [1 - \sin^2(w_R t)].$$

Si ottiene così $-2\sin^3(w_R t) + \sin(w_R t)$ da cui:

$$2\sin^3(w_R t) = \frac{1}{2}(-3\sin(w_R t) + \sin(3w_R t)).$$

Quindi studiando solo i termini dipendenti da $\sin(w_R t)$:

$$2w_R w_1 B \sin(w_R t) + \lambda BC \left[-\frac{3}{2} \sin(w_R t) + \sin(w_R t) \right] 2\Omega_1 w_R A \sin(w_R t) = 0.$$

Semplificando si ottiene:

$$2w_R w_1 B - \frac{1}{2} \lambda BC + 2\Omega_1 w_R A = 0. \quad (73)$$

- Nella (71)

$$8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(w_R t) + \frac{1}{2} \lambda B^2 \sin^2(w_R t) = 0,$$

poiché $\cos^2(w_R t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2w_R t))$ e $\sin^2(w_R t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2w_R t))$, sostituendo e considerando i termini dipendenti da $\cos(2w_R t)$ si ottiene:

$$8w_R w_1 C + \frac{1}{4} \lambda (A^2 - B^2) = 0. \quad (74)$$

Noti $\lambda = \frac{l_0 w_z^2}{l^2 z}$; $\epsilon^2 = \frac{w_R^2}{4w_1^2} = (1 - \frac{l_0}{l})$, si calcolano le soluzioni per valori di A e B dati:

$$\begin{cases} 8w_R w_1 C + \frac{1}{4}\lambda(A^2 - B^2) \\ 2w_R w_1 B - \frac{1}{2}\lambda BC + 2\Omega_1 w_R A = 0 \\ 2w_R w_1 A + \frac{1}{2}\lambda AC + 2\Omega_1 w_R B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1} \\ 2w_R w_1 B - \frac{1}{2}\lambda B[-\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1}] + 2\Omega_1 w_R A = 0 \\ 2w_R w_1 A + \frac{1}{2}\lambda A[-\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1}] + 2\Omega_1 w_R B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1} \\ 2w_R w_1 B + \frac{1}{64w_R w_1}\lambda^2 B(A^2 - B^2) + 2\Omega_1 w_R A = 0 \\ 2w_R w_1 A - \frac{1}{64w_R w_1}\lambda^2 A(A^2 - B^2) + 2\Omega_1 w_R B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1} \\ 128w_R^2 w_1^2 B + \lambda^2 B(A^2 - B^2) + 128\Omega_1 w_R^2 w_1 A = 0 \\ 128w_R^2 w_1^2 A - \lambda^2 A(A^2 - B^2) + 128\Omega_1 w_R^2 w_1 B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1} \\ 128w_R^2 w_1^2 B + \lambda^2 B(A^2 - B^2) = +128[\frac{-128w_R^2 w_1^2 A - \lambda^2 A(A^2 - B^2)}{128w_R^2 w_1 B}]w_R^2 w_1 A = 0 \\ \Omega_1 = -\frac{128w_R^2 w_1^2 A - \lambda^2 A(A^2 - B^2)}{128w_R^2 w_1 B} \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{aligned} 128w_R^2 w_1^2 B^2 + \lambda^2 B^2(A^2 - B^2) &= -128w_R^2 w_1^2 A^2 + \lambda^2 A^2(A^2 - B^2) = \\ &= 128w_R^2 w_1^2(B^2 - A^2) - \lambda(B^2 - A^2)(B^2 + A^2) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{cases} C = -\frac{\lambda(A^2 - B^2)}{32w_R w_1} \\ w_1^2 = \frac{\lambda^2(B^2 + A^2)}{128w_R^2} \\ \Omega_1 = -\frac{128w_R^2 w_1^2 A - \lambda^2 A(A^2 - B^2)}{128w_R^2 w_1 B} \end{cases}$$

quindi:

$$w_1 = \pm \frac{\sqrt{(B^2 + A^2)}}{8\sqrt{2}} \frac{\lambda}{w_R}.$$

Sostituendo λ :

$$w_1 = \pm \frac{3\sqrt{2(B^2 + A^2)}}{16l} w_R \quad (75)$$

A questo punto è possibile definire le altre variabili:

$$C = \frac{(B^2 - A^2)\lambda}{32w_R(\pm \frac{3\sqrt{2(B^2 + A^2)}}{16l} w_R)} = \frac{B^2 + A^2 \frac{3w_R^2}{l}}{32w_R(\pm \frac{3\sqrt{2(B^2 + A^2)}}{16l})} = \mp \frac{A^2 - B^2}{2\sqrt{2(A^2 B^2)}} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{128w_R^2 w_1^2 A - \lambda^2 A(A^2 - B^2)}{128w_R^2 w_1 B} = \frac{\frac{1}{2}\lambda BC - 2w_R w_1 B}{2w_R A} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\lambda B[\mp \frac{A^2 - B^2}{2\sqrt{2(A^2 B^2)}}] - 2w_R w_1 B}{2w_R A} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{3w_R^2}{l} B \mp \frac{A^2 - B^2}{2\sqrt{2(A^2 + B^2)}}}{2w_R A} - \frac{2w_R \pm \frac{3\sqrt{2(B^2 + A^2)}}{16l} w_R B}{2w_R A} = \\ &= \pm \frac{1}{8} \frac{3(A^2 - B^2)Bw_R}{lA\sqrt{2(A^2 + B^2)}} \pm \frac{w_R B}{16lA} 3\sqrt{2(A^2 + B^2)} = \\ &= \pm \frac{3w_R B}{8lA} \left[\frac{A^2 - B^2}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} + \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}}{2} \right] \\ \Omega_1 &= \pm \frac{3Bw_R}{8lA} \frac{2A^2}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} = \pm \frac{3ABw_R}{4l} \left(\frac{1}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} \right) \quad (77) \end{aligned}$$

5 Movimento Quasi Conico

5.1 Il Metodo del Bilanciamento Armonico

Il metodo del *bilanciamento armonico* è un metodo di simulazione ibrido tempo/frequenza che permette di ottenere la simulazione del fenomeno attraverso la risoluzione di un sistema non lineare algebrico.[3] Si assume $w_z = 2w_R$, si utilizzano i termini fino al terzo ordine e le coordinate cilindriche con $z=Z+l$.

La Lagrangiana è della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}[w_R^2 R^2 + w_z^2 z^2] + \frac{1}{2}\lambda(R^2)z \quad (78)$$

Le equazioni del moto sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = \ddot{R} = -w_R^2 R + R\dot{\varphi}^2 + \lambda R z \quad (79)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} = \ddot{Z} = -w_z^2 z + \frac{1}{2}\lambda R^2 \quad (80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\varphi}) = h. \quad (81)$$

con h momento angolare per unità di massa.

Considerando il caso base con $\ddot{R} = \ddot{z} = 0$; $\dot{\varphi}=w_0$ costante e trascurando il termine $\lambda R z$ in quanto molto piccolo, si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{R} + w_R^2 R = +Rw_0^2 \\ \ddot{Z} + w_z^2 z = +\frac{1}{2}\lambda R^2 \\ R^2 w_0 = h \end{cases} \begin{cases} w_R^2 R = +Rw_0^2 \\ w_z^2 z = +\frac{1}{2}\lambda R^2 \\ R^2 w_0 = h \end{cases} \begin{cases} w_R^2 R = R \frac{h^2}{R^4} \\ 4w_R^2 z = +\frac{3}{2} \frac{w_R^2}{l} R^2 \\ R^2 w_0 = h \end{cases} \begin{cases} w_R^2 = \frac{h^2}{R^4} \\ z_0 = +\frac{3R_0}{8l} R_0 \\ R^2 w_0 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{\frac{h}{w_R}} \\ z_0 = +\frac{3R_0}{8l} R_0 \\ R^2 w_0 = h \end{cases} .$$

Allora per $R_0 \ll l$, $z_0 \ll R_0$. Si tratta pertanto di uno dei moti conici. Per il moto ellittico se x e y variano con frequenza w_R , R avrà frequenza $w_z = 2w_R$. Si cercano le soluzioni nella forma:

$$R = R_0 + S(t) \cos(w_z t + \theta(t)) \quad (82)$$

$$z = z_0 + C(t) \cos(w_z t + \gamma(t)). \quad (83)$$

Si assumono $S(t)$, $C(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$ variabili lentamente e S , C , z_0 piccoli rispetto a R_0 .

Studiando \ddot{R} e \ddot{Z} e sostituendo R e z , si ottengono le equazioni del moto:

- da (82) e (83)

$$\dot{R} = \dot{S}(t) \cos(w_z t + \theta(t)) - S(t)(w_z + \dot{\theta}(t)) \sin(w_z t + \theta(t))$$

$$\begin{aligned} \ddot{R} = & \ddot{S}(t) \cos(w_z t + \theta(t)) - 2\dot{S}(t)(w_z + \dot{\theta}(t)) \sin(w_z t + \theta(t)) + \\ & - S(t)\ddot{\theta}(t) \sin(w_z t + \theta(t)) - S(t)(w_z + \dot{\theta}(t))^2 \cos(w_z t + \theta(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{Z} = \dot{C}(t) \cos(w_z t + \varphi(t)) - C(t)(w_z + \dot{\varphi}(t)) \sin(w_z t + \varphi(t))$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z} = & \ddot{C}(t) \cos(w_z t + \varphi(t)) - 2\dot{C}(t)(w_z + \dot{\varphi}(t)) \sin(w_z t + \theta(t)) + \\ & - C(t)\ddot{\varphi}(t) \sin(w_z t + \varphi(t)) - C(t)(w_z + \dot{\varphi}(t))^2 \cos(w_z t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

- e da (79) e (80)

$$\ddot{R} = -w_R^2 R + R\dot{\varphi}^2 + \lambda R z$$

$$\ddot{R} + w_R^2 [R_0 + S(t) \cos(w_z t + \theta(t))] =$$

$$= \lambda [R_0 + S(t) \cos(w_z t + \theta(t))] [z_0 + C(t) \cos(w_z t + \gamma(t))] + [R_0 + S(t) \cos(w_z t + \theta(t))] \dot{\varphi}$$

$$\ddot{Z} = -w_z^2 z + \frac{1}{2} \lambda R^2$$

$$\ddot{Z} + w_z^2 [z_0 + C(t) \cos(w_z t + \gamma(t))] = \frac{1}{2} \lambda [R_0 + S(t) \cos(w_z t + \theta(t))].$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} & -2\dot{S}(t)w_z \sin(w_z t + \theta(t)) - 2S(t)w_z \dot{\theta}(t) \cos(w_z t + \theta(t)) = \\ & = \lambda R_0 C(t) [\sin(\theta - \varphi) \sin(w_z t + \theta) + \cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta)] \end{aligned}$$

con $\sin(\theta - \varphi) \sin(w_z t + \theta) + \cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta) = \cos(w_z t + \varphi(t))$.

$$\begin{aligned} & -2\dot{C}(t)w_z \sin(w_z t + \varphi(t)) - 2C(t)w_z \dot{\varphi}(t) \cos(w_z t + \varphi(t)) = \\ & = \lambda R_0 S(t) [\sin(\varphi - \theta) \sin(w_z t + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta)] = \\ & = -\lambda R_0 S(t) [\sin(\theta - \varphi) \sin(w_z t + \theta)] + \lambda R_0 S(t) [\cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta)] \end{aligned}$$

con $\sin(\varphi - \theta) \sin(w_z t + \varphi) + \cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta) = \cos(w_z t + \theta(t))$

Per il metodo del bilanciamento armonico, si eguagliano i coefficienti del seno e del coseno:

$$\bullet -2\dot{S}(t)w_z \sin(w_z t + \theta(t)) = \lambda R_0 C(t) [\sin(\theta - \varphi) \sin(w_z t + \theta)]$$

$$\dot{S}(t) = -\frac{\lambda R_0 C(t) [\sin(\theta - \varphi)]}{2w_z} \quad (84)$$

$$\bullet -2S(t)w_z \dot{\theta}(t) \cos(w_z t + \theta(t)) = \lambda R_0 C(t) [\cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta)]$$

$$S(t) \dot{\theta}(t) = -\frac{\lambda R_0 C(t) [\cos(\theta - \varphi)]}{2w_z} \quad (85)$$

$$\bullet -2\dot{C}(t)w_z \sin(w_z t + \varphi(t)) = -\lambda R_0 S(t) [\sin(\theta - \varphi) \sin(w_z t + \theta)]$$

$$\dot{C}(t) = \frac{\lambda R_0 S(t) [\sin(\theta - \varphi)]}{2w_z} \quad (86)$$

$$\bullet -2C(t)w_z \dot{\varphi}(t) \cos(w_z t + \varphi(t)) = \lambda R_0 S(t) [\cos(\theta - \varphi) \cos(w_z t + \theta)]$$

$$C(t) \dot{\varphi}(t) = -\frac{\lambda R_0 S(t) [\cos(\theta - \varphi)]}{2w_z}. \quad (87)$$

$\frac{\lambda R_0}{2w_z}$ è un termine ricorrente che per semplicità può essere scritto come ν .

Queste equazioni possono essere risolte in termini di funzioni elementari: si definiscono

$$N^2 = S^2 + C^2; \quad H = SC \cos(\theta - \varphi),$$

queste sono *costanti de moto*. Ciò si può dimostrare:

$$\begin{aligned} \frac{dN^2}{dt} &= \frac{dS^2}{dt} + \frac{dC^2}{dt} = 2S\dot{S} + 2C\dot{C} = \\ &= -2vSC(t)[\sin(\theta - \varphi)] + v2CS(t)[\sin(\theta - \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \dot{S}C \cos(\theta - \varphi) + \dot{C}S \cos(\theta - \varphi) - SC(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \sin(\theta - \varphi) = \\ &= -vC^2(t)[\sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi)] + vS^2(t)[\sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi)] + \\ &- [+vS^2(t)[\sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi)] - vC^2(t)[\sin(\theta - \varphi) \cos(\theta - \varphi)]] = 0. \end{aligned}$$

Con il momento angolare rispetto alla verticale, h , si hanno tre costanti indipendenti, pertanto il moto è completamente integrabile. Derivando una equazione per C differenziando \dot{C} ed utilizzando le altre equazioni di modulazione si eliminano le altre variabili:

$$\begin{aligned} \dot{C} &= vS \sin(\theta - \varphi) \\ \frac{d\dot{C}}{dt} &= \frac{d^2C}{dt^2} = v\dot{S} \sin(\theta - \varphi) + vS \cos(\theta - \varphi)[\dot{\theta} - \dot{\varphi}] = \\ &= -v^2C \sin^2(\theta - \varphi) - v^2C \cos^2(\theta - \varphi) + v^2 \frac{S^2}{C} \cos^2(\theta - \varphi) = \\ &= -v^2C - v^2C \cos^2(\theta - \varphi) - v^2C \cos^2(\theta - \varphi) + v^2 \frac{S^2}{C} \cos^2(\theta - \varphi) = \\ &= -v^2C + v^2 \frac{S^2}{C} \cos^2(\theta - \varphi) \\ \frac{d^2C}{dt^2} + v^2C &= v^2 \frac{S^2}{C} \cos^2(\theta - \varphi) = v^2 \frac{H^2}{C^3}. \end{aligned}$$

Definito $\tau = tv$ si ha che $d\tau = tdv$ e pertanto $dt = \frac{\tau}{dv}$. Sostituendo si ottiene: $\frac{d^2C}{d\tau^2} + C = \frac{H^2}{C^3}$. Questa è isomorfa all'equazione di un moto dipendente da una forza centrale che varia in proporzione con la distanza, ma la variabile è il tempo piuttosto che l'*angolo azimutale*. Integrando quanto ottenuto si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2 C}{d\tau^2} + C - \frac{H^2}{C^3} d\tau &= \int \frac{d^2 C}{d\tau^2} d\tau + \int C d\tau - \int -\frac{H^2}{C^3} d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int 2 \frac{d^2 C}{d\tau^2} d\tau + \frac{1}{2} C^2 - H^2 \frac{C^{-2}}{-2} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{dC}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[C^2 - \frac{H^2}{C^2} \right] = \text{cost}
\end{aligned}$$

Si possono ottenere soluzioni più semplici introducendo le variabili $\Sigma = S \exp(i\theta)$ ed $\Xi = C \exp(i\varphi)$. Le equazioni di modulazione possono essere espresse in funzioni di queste variabili, in particolar modo di Σ ed Ξ ottenute derivando rispetto a τ

\dot{S} e \dot{C} sono ottenute derivando rispetto a t , pertanto bisogna cambiare l'operatore di derivazione in τ :

$$S' = \frac{\tilde{S}}{d\tau} = \frac{S}{dtv} = \frac{S}{vdt} = \frac{1}{v} \dot{S}$$

allo stesso modo si ottiene:

$$C' = \frac{1}{v} \dot{C}.$$

A questo punto si ottengono le variabili desiderate:

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= \frac{1}{v} \dot{S} \exp(i\theta) + \frac{1}{v} S \exp(i\theta) \dot{\theta} = -C \sin(\theta - \varphi) \exp(i\theta) - iC \exp(i\theta) \cos(\theta - \varphi) = \\
&= C \exp(i\theta) [-\sin(\theta - \varphi) - i \cos(\theta - \varphi)] = -iC \exp(i\theta) [\cos(\theta - \varphi) - i \sin(\theta - \varphi)] = \\
&= -iC \exp(i\theta) \exp(-i(\theta - \varphi)) = iC \exp(i\theta - i\theta + i\varphi) = -iC \exp(i\varphi) = -i\Xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi' &= \frac{1}{v} \dot{C} \exp(i\varphi) + \frac{1}{v} C \exp(i\varphi) \dot{\varphi} = S \sin(\theta - \varphi) \exp(i\varphi) - iS \exp(i\varphi) \cos(\theta - \varphi) = \\
&= S \exp(i\varphi) [\sin(\theta - \varphi) - i \cos(\theta - \varphi)] = -iS \exp(i\varphi) [\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)] = \\
&= -iS \exp(i\varphi) \exp(i(\theta - \varphi)) = iS \exp(i\theta - i\varphi + i\varphi) = -iS \exp(i\theta) = -i\Sigma.
\end{aligned}$$

Le nuove variabili saranno governate da

$$\Sigma'' + \Sigma = 0 \quad \Xi'' + \Xi = 0,$$

infatti:

$$\begin{aligned}\Sigma'' &= (\Sigma')' = (-i\Xi)' = -i\Xi' = -i(-i\Sigma) = -1\Sigma = -\Sigma \\ \Xi &= (\Xi)' = (i - \Sigma)' = -i\Sigma' = -i(-i\Xi) = -1\Xi = -\Xi.\end{aligned}$$

Le soluzioni delle seguenti equazioni si ottengono costruendo il polinomio caratteristico associato: $\lambda^2 + 1 = 0$, quindi $\lambda_{1,2} = \pm i$. Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned}\Sigma(\tau) &= C_1 \exp(\lambda_1 \tau) + C_2 \exp(\lambda_2 \tau) = C_1 \exp(i\tau) + C_2 \exp(-i\tau) = \\ &= C_1(\cos \tau + i \sin \tau) + C_2(\cos \tau - i \sin \tau) = (C_1 + C_2) \cos \tau + (C_1 - C_2) \sin \tau.\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali $\Sigma(0) = C_1 + C_2$ $\Sigma'(0) = (iC_1 - iC_2)$, quindi:

$$\Sigma(\tau) = \Sigma(0) \cos \tau + \Sigma(0)' \sin \tau \quad (88)$$

Allo stesso modo si ottiene:

$$\Xi(\tau) = \Xi(0) \cos \tau + \Xi(0)' \sin \tau. \quad (89)$$

Notando $R - R_0 = \Re[\Sigma \exp(iw_z \tau)]$ e $z - z_0 = \Re[\Xi \exp(iw_z \tau)]$, quindi:

$$\begin{aligned}R - R_0 &= \Re[S \exp(i\theta) \exp(iw_z \tau)] = \Re[S \exp(i(\theta + w_z \tau))] = S \cos(w_z \tau + \theta) \\ z - z_0 &= \Re[C \exp(i\varphi) \exp(iw_z \tau)] = \Re[C \exp(i(\varphi + w_z \tau))] = C \cos(w_z \tau + \theta).\end{aligned}$$

Partendo da (88) si definisce $\Sigma' = C_0[\sin(\varphi_0 + i \cos(\varphi_0))]$, considerando la parte reale si ha:

$$R = R_0 + S_0 \cos(w_z t + \theta_0) \cos(vt) + C_0 \sin(w_z t + \theta_0) \sin(vt). \quad (90)$$

Da (89) si ha $\Xi = S_0[\sin(\varphi_0) - i \cos(\varphi_0)]$, considerando il valore reale si ha:

$$z = z_0 + C_0 \cos(w_z t + \varphi_0) \cos(vt) + S_0 \sin(w_z t + \varphi_0) \sin(vt) \quad (91)$$

In cui S_0, C_0, θ_0 e φ_0 sono i valori iniziali arbitrarie. Il moto perturbato risulta essere una oscillazione veloce, di frequenza w_z e modulata da un inviluppo di bassa frequenza. La frequenza di modulazione $v = \frac{\lambda R_0}{2w_z}$ come si nota dipende da termini fissati e dal raggio dello stato di base del moto conico.

Si studiano tre casi particolari:

- nel primo caso, rappresentato dalla fig.1, le perturbazioni di energia sono nel moto orizzontale, pertanto $z(0) = z_0$ e $C_0 = 0$, quindi

$$R = R_0 + S_0 \cos(w_z t + \theta_0) \cos(vt)$$

$$z = z_0 + S_0 \sin(w_z t + \varphi_0) \sin(vt)$$

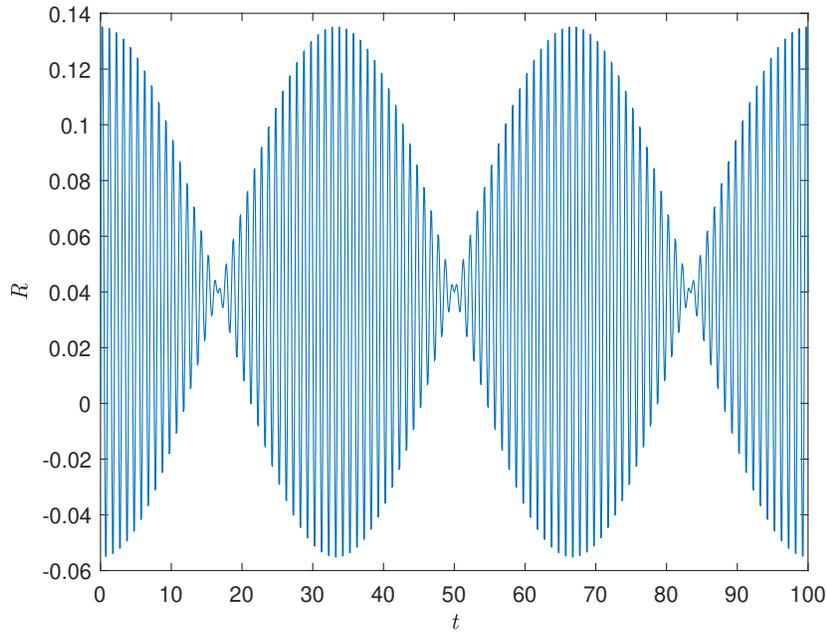


Figura 1: Perturbazione del moto conico ottenuta nel primo caso

L'evoluzione del moto radiale e verticale variano sinusoidalmente con completo trasferimento della perturbazione energetica avanti e indietro.

Il periodo di involuppo di modulazione è $\frac{2\pi}{v}$; il periodo di modulazione stessa è pari a $\frac{\pi}{v} = \tau_m$. Nel primo ordine il moto orizzontale è un'ellisse, il tempo per un ciclo (due massimi di R) è $\tau_R = \frac{4\pi}{w_z}$. Considerando le parentesi angolari come una media di questo tempo,

$$\langle R \rangle = R_0; \quad \langle R^2 \rangle = R_0^2; \quad \langle \dot{\varphi} \rangle = w_R.$$

La variazione angolare di un ciclo è:

$$\Delta\varphi(\tau_R) = \int_0^{\tau_R} \dot{\varphi} dR = \tau_R w_R = 2\pi.$$

In questo ordine di approssimazione non c'è precessione dell'ellisse.

Fig.1 rappresenta l'esempio numerico del primo caso considerati $S_0 = 0.01$;
 $\theta_0 = \varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$.

Il moto conico ha come posizione iniziale $x_0 = 0.04$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0.0006$.

I parametri del moto sono: $g = \pi^2$; $k = 4\pi^2$; $e = \frac{1}{2}$; $w_R = \pi$; $w_z = 2\pi$; $A = 0.01$; $91B = 0.005$; $w_1 = 3\sqrt{(2 + (A^2 + B^2)/16)}w_R$; $h = x_0 y_0$ e le velocità iniziali sono $\dot{x}_0 = 0$ e $\dot{z}_0 = \frac{1}{2}y_0 = 0.06283$. Si investiga la distanza radiale studiata al variare del tempo durante 100 secondi.

```

l=1;
m=1;
g=pi.^2;
k=4*pi.^2;
e=1/2;
w_R=pi;
w_z=2*pi;
A=0.01;
B=0.005;
w1=3*sqrt(2+(A^2+B^2)/16)*w_R;
h=0.04*0.12566;
b=(3*w_R.^2)/1;
R_0=sqrt(h/w_R);
v=(b*R_0)/(2*w_z);
sigma_0=-pi/2;
theta_0=-pi/2;
c_0=0;
S_0=0.1;
T=[0:0.1:100];
R=zeros(size(T));
figure;
for t=2:length(T)
    R(t)=R_0+ S_0*cos(w_z.*T(t)+ sigma_0).*cos(v.*T(t))+c_0*sin(w_z.*T(t)+ theta_0).*sin(v.*T(t));
end
plot(T, R)
xlim([0,100]);

```

Figura 2: Codice MATLAB per ottenere la Fig.1

Fig.2 è il codice MATLAB che, tenendo conto delle condizioni sopra citate, permette di ottenere il grafico del comportamento di R, distanza radiale, nel tempo. Essa viene campionata in intervalli di tempo pari a 0.01 secondi a par-

tire dallo 0 fino ad arrivare a 100 e plottata per tutti i valori assunti.

- nel secondo caso mostrato, in fig.3, si hanno $C_0 = S_0$ e $\theta_0 = \varphi_0 = 0$ La soluzione è:

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 + S_0 \cos(w_z t + \theta_0) \cos(vt) + S_0 \sin(w_z t + \theta_0) \sin(vt) = \\
 &= R_0 + S_0 \cos[(w_z - v)t] \\
 z &= z_0 + S_0 \sin(w_z t + \varphi_0) \sin(vt) S_0 \cos(w_z t + \theta_0) \cos(vt) = \\
 &= z_0 + S_0 \cos[(w_z - v)t].
 \end{aligned}$$

Questa risulta essere invariante della forma sinusoidale. La frequenza è leggermente diminuita, le variazioni del raggio orizzontale sono comprese tra un massimo pari ad $a = R_0 + S_0$ ed un minimo pari a $b = R_0 - S_0$ in una traiettoria approssimativamente ellittica.

Il tempo necessario affinché R possa variare tra un massimo e l'altro sarà pari a:

$$\tau = \frac{4\pi}{w_z - v} = \frac{4\pi}{w_z} \frac{1}{1 - \frac{v}{w_z}} \approx \frac{4\pi}{w_z} (1 + \eta)$$

con $\eta = \frac{v}{w_z}$.

Poiché $\langle R \rangle = R_0$; $\langle R^2 \rangle = R_0^2$; $\langle \dot{\varphi} \rangle = w_R$,

$$\Delta\varphi(\tau) = \int_0^{\tau_R} \dot{\varphi} dt = \tau w_R = 2\pi(1 + \eta).$$

L'ellisse ruoterà di un angolo $2\pi\eta$ nel tempo τ per questo la sua precessione è:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{2\pi\eta}{\tau} = 2\pi\eta \frac{w_z - v}{4\pi} = \frac{\eta}{2} (w_z - v) = \frac{\eta}{2} w_z (1 - \eta) = \\
 &= \eta w_R (1 + \eta) \approx \eta w_R = \frac{\lambda R_0}{4w_z}.
 \end{aligned}$$

Questa condizione è un particolare esempio del moto ellittico parabolico invariante.

Fig.3 rappresenta l'esempio numerico del secondo caso per cui il moto conico ha come posizione iniziale $x_0 = 0.04, y_0 = 0; z_0 = 0.0006$.
 I parametri del moto sono: $g = \pi.^2; k = 4\pi.^2; e = \frac{1}{2}; w_R = \pi; w_z = 2\pi; A = 0.01; B = 0.005; w_1 = 3\sqrt{(2 + (A^2 + B^2)/16)}w_R; h = x_0y_0$ e le velocità iniziali sono $\dot{x}_0 = 0$ e $\dot{z}_0 = \frac{1}{2}\dot{y}_0 = 0.06283$. Si osserva la condizione $C_0 = S_0=0.01$ e $\theta_0 = \varphi_0 = 0$. Si investiga la distanza radiale studiata al variare del tempo durante 100 secondi.

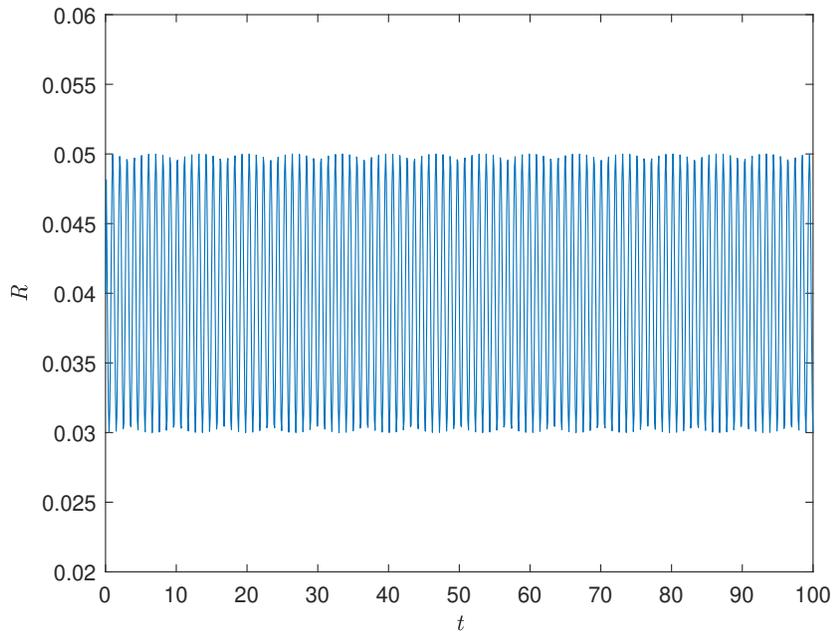


Figura 3: Perturbazione del moto conico ottenuta nel secondo caso

Fig.4 è il codice MATLAB che, tenendo conto delle condizioni sopra citate, permette di ottenere il grafico del comportamento di R, distanza radiale, nel tempo. Essa viene campionata in intervalli di tempo pari a 0.01 secondi a partire dallo 0 fino ad arrivare a 100 e plottata per tutti i valori assunti.

```

l=1;
m=1;
g=pi.^2;
k=4*pi.^2;
e=1/2;
w_R=pi;
w_z=2*pi;
A=0.01;
B=0.005;
w1=3*sqrt(2+(A^2+B^2)/16)*w_R;
h=0.04*0.12566;
b=(3*w_R.^2)/1;
R_0=sqrt(h/w_R);
v=(b*R_0)/(2*w_z);
S_0=0.01;
T=[0:0.1:100];
R=zeros(size(T));
figure;
R(1)=R_0;
for t=2:length(T)
    R(t)=R_0+ S_0*cos(w_z.*T(t)+ sigma_0).*cos(v.*T(t))+C_0*sin(w_z.*T(t)+ theta_0).*sin(v.*T(t));
end
plot(T, R)
ylim([0.02,0.06]);
xlim([0,100]);

```

Figura 4: Codice MATLAB per ottenere la Fig.3

- Il terzo caso, rappresentato dalla fig.5, consiste nella condizione $C_0 = -S_0$ e $\theta_0 = \varphi_0 = 0$ che corrisponde ad un ellisse in regressione con $w=w_z + v$.

A questo punto è possibile definire

$$\tau = \frac{4\pi}{w_z + v} = \frac{4\pi}{w_z} \frac{1}{1 + \frac{v}{w_z}} \approx \frac{4\pi}{w_z} (1 - \eta) = -\frac{4\pi}{w_z} (\eta - 1)$$

La sua precessione sarà:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2\pi\eta}{\tau} = 2\pi\eta \frac{-(w_z - v)}{4\pi} = \frac{-\eta}{2} (w_z + v) = \\ &= -\eta w_z (1 + \eta) \approx -\eta w_z \end{aligned}$$

Fig.5 rappresenta l'esempio numerico del terzo caso per cui il moto conico ha come posizione iniziale $x_0 = 0.04$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0.0006$.

I parametri del moto sono: $g = \pi.^2$; $k = 4\pi.^2$; $e = \frac{1}{2}$; $w_R = \pi$; $w_z = 2\pi$; $A = 0.01$; $B = 0.005$; $w_1 = 3\sqrt{(2 + (A^2 + B^2)/16)}w_R$; $h = x_0 y_0$ e le velocità iniziali sono $\dot{x}_0 = 0$ e $\dot{z}_0 = \frac{1}{2}\dot{y}_0 = 0.06283$. Si osserva la condizione $C_0 = -S_0=0.01$ e $\theta_0 = \varphi_0 = 0$. Si investiga la distanza radiale studiata al variare del tempo durante 100 secondi.

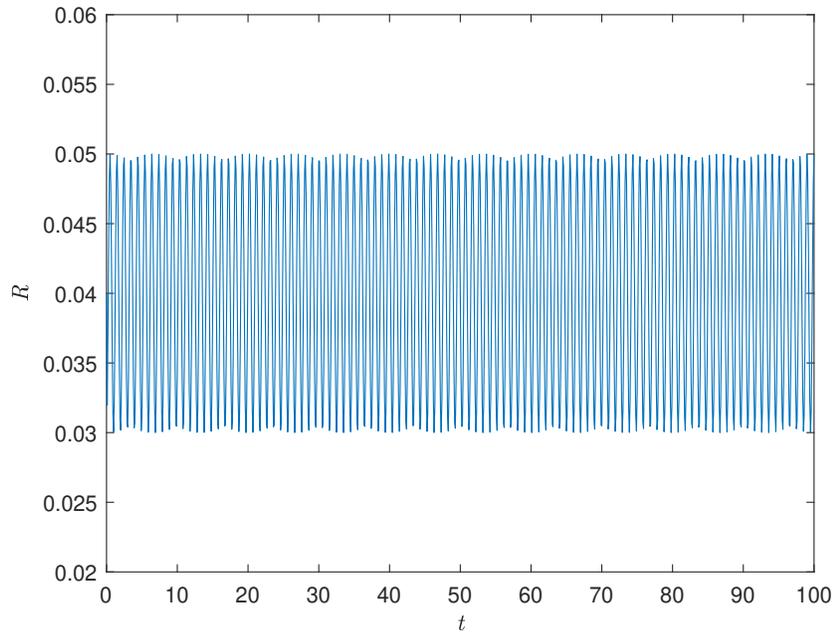


Figura 5: Perturbazione del moto conico ottenuta nel terzo caso

Fig.6 è il codice MATLAB che, tenendo conto delle condizioni sopra citate, permette di ottenere il grafico del comportamento di R , distanza radiale, nel tempo. Essa viene campionata in intervalli di tempo pari a 0.01 secondi a partire dallo 0 fino ad arrivare a 100 e plottata per tutti i valori assunti.

```

l=1;
m=1;
g=pi.^2;
k=4*pi.^2;
e=1/2;
w_R=pi;
w_z=2*pi;
A=0.01;
B=0.005;
w1=3*sqrt(2+(A^2+B^2)/16)*w_R;
h=0.04*0.12566;
b=(3*w_R.^2)/1;
R_0=sqrt(h/w_R);
v=(b*R_0)/(2*w_z);
sigma_0=0;
theta_0=0;
c_0 =0.01;
S_0 =-0.01;
T=[0:0.1:100];
R=zeros(size(T));
figure;
R(1)=R_0;
for t=2:length(T)
    R(t)=R_0+ S_0*cos(w_z.*T(t)+ sigma_0).*cos(v.*T(t))+c_0*sin(w_z.*T(t)+ theta_0).*sin(v.*T(t));
end
plot(T, R)
ylim([0.02,0.06])
xlim([0,100]);

```

Figura 6: Codice MATLAB per ottenere la Fig.5

6 Piccole Ampiezze di Perturbazioni Generali

6.1 Le Equazioni di Modulazione per coordinate fissate

Si studia il generico caso di un moto con piccole perturbazioni in cui ϵ rappresenta l'ampiezza caratteristica. Assumendo piccole ampiezze, la Lagrangiana è pari a :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}[w_R^2(x^2 + y^2) + w_z^2 z^2] + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2)z \quad (92)$$

e le equazioni saranno:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \ddot{x} = -w_R^2 x + \lambda x z = \ddot{x} + w_R^2 x = \lambda x z \quad (93)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \ddot{y} = -w_R^2 y + \lambda y z = \ddot{y} + w_R^2 y = \lambda y z \quad (94)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \ddot{z} = -w_z^2 z + \frac{1}{2}\lambda(y^2 + z^2) = \ddot{z} + w_z^2 z = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2) \quad (95)$$

Utilizzando la tecnica dei due tempi o il metodo di molteplici scale di tempo, si assume che ci siano due scale del tempo, una veloce con $t = t_0$ e una lenta con

$t_1 = \epsilon t$. Le soluzioni espresse in ϵ sono:

$$x = \epsilon x_1(t_0, t_1) + \epsilon^2 x_2(t_0, t_1) + \dots$$

$$y = \epsilon y_1(t_0, t_1) + \epsilon^2 y_2(t_0, t_1) + \dots$$

$$z = \epsilon z_1(t_0, t_1) + \epsilon^2 z_2(t_0, t_1) + \dots$$

La derivata rispetto al tempo dipenderà da entrambe le scale:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} = D_0 + \epsilon D_1$$

Le soluzioni di ordine più basso saranno:

$$x_1 = A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1))$$

$$y_1 = B(t_1) \sin(w_R t_0 + \beta(t_1))$$

$$z_1 = C(t_1) \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)).$$

Le ampiezze e le fasi dipenderanno solo da t_1 .

Le equazioni del secondo ordine saranno :

- A partire da: $x = \epsilon A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + \epsilon^2 x_2(t_0, t_1)$, derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D_0 \epsilon A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + D_0 \epsilon^2 x_2(t_0, t_1) + \\ &+ D_1 \epsilon^2 A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + \dots \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= D_0^2 \epsilon A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + D_0^2 \epsilon^2 x_2(t_0, t_1) + \\ &+ D_0 D_1 \epsilon^2 A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)). \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\ddot{x} = D_0^2 x_2 + 2D_0 D_1 x.$$

Sostituendo nell'equazione (93) si ottiene:

$$D_0^2 x_2 + w_R^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 + \lambda x_1 z_1 = R_x. \quad (96)$$

- Procedendo analogamente per y si ottiene:

$$D_0^2 y_2 + w_R^2 y_2 = -2D_0 D_1 y_1 + \lambda y_1 z_1 = R_y. \quad (97)$$

- Allo stesso modo per z si ottiene:

$$D_0^2 z_2 + w_z^2 z_2 = -2D_0 D_1 z_1 + \frac{1}{2}\lambda(x_1^2 + y_1^2) = R_z \quad (98)$$

Assumendo che $2w_R = w_z$, è possibile definire opportunamente R_x, R_y e R_z :

- per R_x si considerano separatamente i termini della (96).

Da $-2D_0 D_1 A(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1))$, derivando rispetto a D_0 , si ottiene :

$$-2D_1 A w_R \sin(\alpha - w_R t_0).$$

Scrivendo lo sviluppo in serie di Taylor del seno si consegue:

$$\sin(\alpha - w_R t_0) = -\sin(\alpha + w_R t_0) - \alpha \cos(\alpha + w_R t_0),$$

da cui:

$$2D_1 A w_R \sin(\alpha + w_R t_0) - 2D_1 A w_R \alpha \cos(\alpha + w_R t_0).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 z_1 &= \lambda A(t_1) C(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) = \\ &= \lambda A(t_1) C(t_1) \cos(w_R t_0 + \alpha(t_1)) \cos(2w_R t_0 + \gamma(t_1)) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + 2w_R t_0 + \gamma) + \cos(w_R - 2w_R \alpha - \gamma)] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(3w_R t_0 + \alpha + \gamma) + \cos(-w_R + \alpha - \gamma)] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) \cos(2\alpha - \gamma) + \sin(w_R t_0 + \alpha) \sin(2\alpha - \gamma)] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda AC \cos[(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)]. \end{aligned}$$

In cui il termine $\cos(3w_R t_0 + \alpha + \gamma)$ può non essere considerato poiché con un'altra pulsazione.

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} R_x &= 2w_R D_1 A \sin(w_R t_0 + \alpha) + 2D_1 A w_R \alpha \cos(w_R t_0 + \alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] + NST \end{aligned}$$

- Procedendo analogamente per R_y si ottiene:

$$\begin{aligned} -2D_0D_1y_1 &= -2D_1B(w_R \sin(\beta - w_R t_0)) = \\ &= 2D_1Bw_R \sin(\beta + w_R t) + 2D_1Bw_R \beta \cos(\alpha + w_R t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda y_1 z_1 &= \lambda BC \cos(w_R t_0 + \beta(t_1)) \cos(2w_R t_0 + \gamma(t_1)) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda BC \cos[(w_R + \beta) - (2\beta - \gamma)] \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} R_y &= 2w_R D_1 B \sin(w_R t_0 + \beta) + 2D_1 B w_R \beta \cos(w_R t_0 + \beta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda BC [\cos(w_R t_0 + \beta) - (2\beta - \gamma)] + NST \end{aligned}$$

- per R_z :

$$\begin{aligned} -2D_0D_1z_1 &= -2D_1Cw_z \sin(\gamma - w_z t_0) = \\ &= w_z 2D_1C \sin(\gamma + w_z t_0) + 2D_1C\gamma \cos(\gamma + w_z t_0) \\ \frac{1}{2} \lambda(x_1^2 + y_1^2) &= \frac{1}{4} \lambda [A^2(t_1) \cos^2(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + B^2(t_1) \cos^2(w_R t_0 + \beta(t_1))] = \\ &= \frac{1}{4} \lambda [A^2(t_1)(1 + \cos(2w_R t_0 + 2\alpha)) + B^2(t_1)(1 + \cos(2w_R t_0 + 2\beta(t_1)))] = \\ &= \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos(2w_R t_0 + 2\alpha) + B^2 \cos(2w_R t_0 - 2\beta)] = \\ &= \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\alpha - \gamma)) + B^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\beta - \gamma))] \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} R_z &= 2w_z D_1 C \sin(w_z t_0 + \gamma) + 2D_1 C w_z \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\alpha - \gamma)) + B^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\beta - \gamma))] + NST \end{aligned}$$

Ad ogni termine si aggiunge NST che denota le grandezze non secolari. I termini secolari devono annullarsi:

- In R_x si ha:

$$\begin{aligned}
& 2w_R D_1 A \sin(w_R t_0 + \alpha) + 2D_1 A w_R \alpha \cos(w_R t_0 + \alpha) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] = 0 \\
& 2w_R D_1 \dot{A} \sin(w_R t_0 + \alpha) + 2w_R A \dot{\alpha} \cos(w_R t_0 + \alpha) + 2w_R A \alpha \cos(w_R t_0) + \\
& \quad - 2w_R A \alpha \sin(w_R t_0 + \alpha) + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] = 0 \\
& 2w_R \dot{A} \sin(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] = 0 \\
& 4w_R \dot{A} \sin(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] = 0 \\
& 4w_R \dot{A} \sin(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) \cos(2\alpha - \gamma) + \\
& \quad + \sin(w_R t_0 + \alpha) \sin(2\alpha - \gamma)] = 0.
\end{aligned}$$

Allora:

$$\sin(w_R t_0 + \alpha(t_1)) [4w_R \dot{A} + \lambda AC \sin(2\alpha - \gamma)] = 0.$$

Quindi si ottiene che:

$$\dot{A} = -\frac{\lambda}{4w_R} AC \sin(2\alpha - \gamma)$$

- Da

$$\begin{aligned}
& 2w_R D_1 B \sin(w_R t_0 + \beta) + 2D_1 B w_R \beta \cos(w_R t_0 + \beta) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \lambda BC [\cos(w_R t_0 + \beta) - (2\beta - \gamma)] = 0
\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
& 2w_R \dot{B} \sin(w_R t_0 + \beta(t_1)) + 2w_R B \dot{\beta} \cos(w_R t_0 + \beta(t_1)) + \\
& \quad + 2w_R \beta \dot{B} \cos(w_R t_0 + \beta) - 2w_R B \beta \dot{\beta} \sin(w_R t_0 + \beta) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \lambda BC [\cos(w_R t_0 + \beta) \cos(2\beta - \gamma) + \sin(w_R t_0 - \beta) \sin(2\beta + \gamma)] = 0.
\end{aligned}$$

Allora:

$$\sin(w_R t_0 + \beta(t_1)) [4w_R \dot{B} + \lambda BC \sin(2\beta - \gamma)] = 0$$

Quindi si ottiene che :

$$\dot{B} = -\frac{\lambda}{4w_R} BC \sin(2\beta - \gamma)$$

• Da

$$2w_z D_1 C \sin(w_z t_0 + \gamma) + 2D_1 C w_z \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma) + \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\alpha - \gamma)) + B^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\beta - \gamma))] = 0,$$

si ha:

$$\begin{aligned} & 2w_z \dot{C} \sin(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + 2w_z C \dot{\gamma} \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \\ & + 2w_z \dot{C} \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + 2w_z C \dot{\gamma} \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \\ & - 2w_z C \gamma \dot{\gamma} \sin(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \frac{1}{4} \lambda [A^2 (\cos(w_z t_0 + \gamma) \cos(2\alpha - \gamma) + \\ & - \sin(w_z t_0 + \gamma) \sin(2\alpha - \gamma)) + B^2 (\cos(w_z t_0 + \gamma) \cos(2\beta - \gamma) + \\ & - \sin(w_z t_0 + \gamma) \sin(2\beta - \gamma))] = 0. \end{aligned}$$

Allora:

$$2 \sin(w_z t_0 + \gamma(t_1)) [4w_R \dot{C} - \frac{1}{4} (A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + B^2 \sin(2\beta - \gamma))] = 0.$$

Quindi si ottiene che:

$$\dot{C} = \frac{\lambda}{16w_R} (A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + B^2 \sin(2\beta - \gamma))$$

• Da

$$2w_R D_1 A \sin(w_R t_0 + \alpha) + 2D_1 A w_R \alpha \cos(w_R t_0 + \alpha) + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] = 0$$

si ha:

$$\begin{aligned} & 2w_R \dot{A} \sin(w_R t_0 + \alpha(t_1)) + 2w_R A \dot{\alpha} \cos(w_R t_0 + \alpha) + \\ & + 2w_R \dot{A} \alpha \cos(w_R t_0 + \alpha) - 2w_R A \alpha \dot{\alpha} \sin(w_R t_0 + \alpha) + \\ & + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) \cos(2\alpha - \gamma) + \sin(w_R t_0 + \alpha) \sin(2\alpha - \gamma)] = 0. \end{aligned}$$

Allora:

$$2w_R A \dot{\alpha} \cos(w_R t_0 + \alpha) + \frac{1}{2} \lambda AC \cos(w_R t_0 + \alpha) \cos(2\alpha - \gamma) = 0.$$

Quindi si ottiene che:

$$\dot{\alpha} = \frac{\lambda}{4w_R} C \cos(2\alpha - \gamma)$$

• Da

$$2w_R D_1 B \sin(w_R t_0 + \beta) + 2D_1 B w_R \beta \cos(w_R t_0 + \beta) + \frac{1}{2} \lambda B C [\cos(w_R t_0 + \beta) - (2\beta - \gamma)] = 0$$

si ha:

$$\begin{aligned} & 2w_R \dot{B} \sin(w_R t_0 + \beta(t_1)) + 2w_R B \dot{\beta} \cos(w_R t_0 + \beta(t_1)) + \\ & + 2w_R \dot{B} \beta \cos(w_R t_0 + \beta) + 2w_R B \dot{\beta} \cos(w_R t_0 + \beta) + \\ & - 2w_R B \beta \dot{\beta} \sin(w_R t_0 + \beta) + \frac{1}{2} \lambda B C [\cos(w_R t_0 + \beta) \cos(2\beta - \gamma) + \\ & + \sin(w_R t_0 - \beta) \sin(2\beta + \gamma)] = 0. \end{aligned}$$

Allora

$$2w_R B \dot{\beta} \cos(w_R t_0 + \beta(t_1)) + \frac{1}{2} \lambda B C \cos(w_R t_0 + \beta) \cos(2\beta - \gamma) = 0.$$

Quindi si ottiene che:

$$\dot{\beta} = -\frac{\lambda}{4w_R} \cos(2\beta - \gamma)$$

• Da

$$2w_z D_1 C \sin(w_z t_0 + \gamma) + 2D_1 C w_z \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma) + \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\alpha - \gamma)) + B^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\beta - \gamma))] = 0,$$

si ha:

$$\begin{aligned} & 2w_z \dot{C} \sin(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + 2w_z C \dot{\gamma} \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \\ & + 2w_z \dot{C} \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + 2w_z C \dot{\gamma} \cos(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \\ & - 2w_z C \gamma \dot{\gamma} \sin(w_z t_0 + \gamma(t_1)) + \frac{1}{4} \lambda [A^2 (\cos(w_z t_0 + \gamma) \cos(2\alpha - \gamma) + \\ & - \sin(w_z t_0 + \gamma) \sin(2\alpha - \gamma)) + B^2 (\cos(w_z t_0 + \gamma) \cos(2\beta - \gamma) + \\ & - \sin(w_z t_0 + \gamma) \sin(2\beta - \gamma))] = 0. \end{aligned}$$

Quindi si ottiene che:

$$\dot{\gamma} = -\frac{\lambda}{16w_R} \left[\frac{A^2}{C} \cos(2\alpha - \gamma) + \frac{B^2}{C} \cos(2\beta - \gamma) \right]$$

$\frac{\lambda}{4w_R}$ essendo termine comune può essere posto pari ad una costante.

Si può notare come per $B = 0$ il sistema si riduce al caso planare.

6.2 La Soluzione dell'Equazione di Perturbazione per C

Il sistema ha tre costanti del moto:

- $N^2 = A^2 + B^2 + 4C^2$, infatti si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dN^2}{dt_1} &= \frac{dA^2}{dt_1} + \frac{dB^2}{dt_1} + 4\frac{dC^2}{dt_1} = \\ &= 2A\dot{A} + 2B\dot{B} + 8C\dot{C} = \\ &= 2A(-kAC \sin(2\alpha - \gamma)) + 2B(-kBC \sin(2\beta - \gamma)) + 2C(k(A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + \\ &\quad + B^2 \sin(2\beta - \gamma))) - 2A^2Ck \sin(2\alpha - \gamma) - 2B^2Ck \sin(2\beta - \gamma) + \\ &\quad + 2A^2Ck \sin(2\alpha - \gamma) + 2B^2Ck \sin(2\beta - \gamma) = 0\end{aligned}$$

dove si è usato che :

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{\lambda}{4w_R} AC \sin(2\alpha - \gamma) \\ \dot{B} &= -\frac{\lambda}{4w_R} BC \sin(2\beta - \gamma) \\ 4\dot{C} &= \frac{\lambda}{4w_R} (A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + B^2 \sin(2\beta - \gamma))\end{aligned}$$

- $H = A^2 \cos(2\alpha - \gamma) + B^2C \cos(2\beta - \gamma)$, infatti si ha :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= 2\dot{A}AC \cos(2\alpha - \gamma) + A^2C(\dot{\gamma} - 2\dot{\alpha}) \sin(2\alpha - \gamma) + \\ &\quad + A^2\dot{C} \cos(2\alpha - \gamma) + 2\dot{B}BC \cos(2\beta - \gamma) + \\ &\quad + B^2C(\dot{\gamma} - 2\dot{\beta}) \sin(2\beta - \gamma) + B^2\dot{C} \cos(2\beta - \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned}2\dot{A}AC \cos(2\alpha - \gamma) + A^2\dot{C} \cos(2\alpha - \gamma) - A^2C(2\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) \sin(2\alpha - \gamma) + \\ + 2\dot{B}BC \cos(2\beta - \gamma) + B^2\dot{C} \cos(2\beta - \gamma) - B^2C(2\dot{\beta} - \dot{\gamma}) \sin(2\beta - \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Risolvendo:

$$2AC \cos(2\alpha - \gamma) \left(-\frac{\lambda}{4w_R} AC \sin(2\alpha - \gamma)\right) + A^2 \cos(2\alpha - \gamma) \left(\frac{\lambda}{16w_R} (A^2 \sin(2\alpha - \gamma) +\right.$$

$$\begin{aligned}
& +B^2 \sin(2\beta - \gamma) - A^2 C \sin(2\alpha - \gamma) \left(\frac{-\lambda}{2w_R} C \cos(2\alpha - \gamma) \right) + \\
& - \frac{\lambda}{16w_R} A^2 C \sin(2\alpha - \gamma) \left(\frac{A^2}{C} \cos(2\alpha - \gamma) + \frac{B^2}{C} \cos(2\beta - \gamma) \right) + \\
& - \frac{\lambda}{4w_R} 2BC \cos(2\beta - \gamma) BC \sin(2\beta - \gamma) + \frac{\lambda}{16w_R} B^2 \cos(2\beta - \gamma) (A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + \\
& + B^2 \sin(2\beta - \gamma)) - \frac{\lambda}{4w_R} B^2 C \sin(2\beta - \gamma) C \cos(2\beta - \gamma) + \\
& - \frac{\lambda}{16w_R} B^2 C \sin(2\beta - \gamma) \left(\frac{A^2}{C} \cos(2\alpha - \gamma) + \frac{B^2}{C} \cos(2\beta - \gamma) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2w_R} A^2 C^2 \cos(2\alpha - \gamma) \sin(2\alpha - \gamma) + \frac{\lambda}{16w_R} A^4 \cos(2\alpha - \gamma) \sin(2\alpha - \gamma) + \\
& + \frac{\lambda}{16w_R} A^2 B^2 \cos(2\alpha - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) + \frac{\lambda}{2w_R} A^2 C^2 \cos(2\alpha - \gamma) \sin(2\alpha - \gamma) + \\
& - \frac{\lambda}{16w_R} A^4 \cos(2\alpha - \gamma) \sin(2\alpha - \gamma) - \frac{\lambda}{16w_R} A^2 B^2 \sin(2\alpha - \gamma) \cos(2\beta - \gamma) + \\
& - \frac{\lambda}{2w_R} B^2 C^2 \cos(2\beta - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) + \frac{\lambda}{16w_R} A^2 B^2 \sin(2\alpha - \gamma) \cos(2\beta - \gamma) + \\
& + \frac{1}{16} B^4 \cos(2\beta - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) + \frac{\lambda}{2w_R} B^2 C^2 \cos(2\beta - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) + \\
& - \frac{\lambda}{16w_R} A^2 B^2 \sin(2\beta - \gamma) \cos(2\alpha - \gamma) - \frac{\lambda}{16w_R} B^4 \cos(2\beta - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) = 0
\end{aligned}$$

- $J = AB \sin(\alpha - \beta)$, infatti si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt_1} &= \dot{A}B \sin(\alpha - \beta) + A\dot{B} \sin(\alpha - \beta) + AB(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \cos(\alpha - \beta) = 0 \\
& \frac{\lambda}{4w_R} AC \sin(2\alpha - \gamma) (B \sin(\alpha - \beta)) - \frac{\lambda}{4w_R} ABC \sin(2\beta - \gamma) \sin(\alpha - \beta) + \\
& - \frac{\lambda}{4w_R} ABC \cos(2\alpha - \gamma) \cos(\alpha - \beta) - \frac{\lambda}{4w_R} ABC \cos(2\beta - \gamma) C \cos(\alpha - \beta) = 0.
\end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{4w_R} ABC \sin(2\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \beta) - \frac{\lambda}{4w_R} ABC \sin(2\beta - \gamma) \sin(\alpha - \beta) + \\
& - \frac{\lambda}{4w_R} ABC \cos(2\alpha - \gamma) \cos(\alpha - \beta) + \frac{\lambda}{4w_R} ABC \cos(2\beta - \gamma) \cos(\alpha - \beta) = 0
\end{aligned}$$

Risolvendo:

$$-(\sin(2\alpha - \gamma) + \sin(2\beta - \gamma)) + \cos(2\beta - \gamma) - \cos(2\alpha - \gamma) \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

$$\begin{aligned} & -\sin(\alpha - \beta)(\sin(2\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\gamma) \cos(2\alpha) + \sin(2\beta) \cos(\gamma) + \\ & -\sin(\gamma) \cos(2\beta)) + (\cos(2\beta) \cos(\gamma) + \sin(2\beta) \sin(\gamma) + \\ & -\cos(2\alpha) \cos(\gamma) - \sin(2\alpha) \sin(\gamma)) \cos(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\sin(\alpha - \beta)(\cos(\gamma)(\sin(2\alpha) + \sin(2\beta)) + \\ & -\sin(\gamma)(\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)) + (\cos(\gamma)(\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)) + \\ & + \sin(\gamma)(\sin(2\beta) - \sin(2\alpha))) \cos(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\sin(\alpha - \beta)(\cos(\gamma)(2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)) + \\ & -\sin(\gamma)(2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)) + \\ & + \cos(\gamma)(2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)) + \\ & + \sin(\gamma)(2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta))) \cos(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} & 2 \cos(\alpha - \beta) \cos(\gamma) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \\ & + 2 \sin(\gamma) \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) + \\ & - 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \sin(\gamma) \sin(\alpha - \beta) + \\ & - 2 \sin(\alpha - \beta) \cos(\gamma) \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0. \end{aligned}$$

N^2 e H sono variabili dell'energia e $w_R J$ è il momento angolare mediato. Derivando una equazione per C e utilizzando le costanti del moto per eliminare le altre variabili, si ottiene:

$$\dot{C} = -\frac{\lambda}{4w_R}(A^2 \sin(2\alpha - \gamma) + B^2 \sin(2\beta - \gamma))$$

$$\dot{C}^2 = \frac{k^2}{4}(A^4 \sin^2(2\alpha - \gamma) + 2A^2 B^2 \sin(2\alpha - \gamma) \sin(2\beta - \gamma) + B^4 \sin^2(2\beta - \gamma))$$

$$\begin{cases} \dot{C}^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2((4C^2 - N^2)^2 - \frac{H^2}{C^2} - 4J^2) \\ \dot{H} = A^2 C \cos(2\alpha - \gamma) + B^2 C \cos(2\beta - \gamma) \\ \dot{J} = AB \sin(\alpha - \beta) \\ N^2 = A^2 + B^2 + 4C^2 \end{cases}$$

$$\dot{C}^2 = \frac{k^2}{4}((4C^2 - N^2)^2 - \frac{H^2}{C^2} - 4J^2)$$

E' possibile ridurre tale equazione nella forma standard moltiplicando per C^2 . A questo punto si introduce una nuova variabile $u = \frac{4C^2}{N^2}$, modificando la scala temporale come $\tau = 4Nt$.

La relazione tra C e u è data da:

$$C = \sqrt{\frac{N^2 u}{4}} \rightarrow dC = \frac{1}{\sqrt{\frac{N^2 u}{4}}} \frac{N^2}{4} du$$

Allo stesso modo tra t e τ si ha:

$$t = \frac{\tau}{kN} \rightarrow dt = \frac{1}{kN} d\tau$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{2}{2\sqrt{N^2 u}} \frac{N^2}{4} \frac{du}{\frac{1}{kN} d\tau} = \frac{kN^3}{4\sqrt{N^2 u}} \frac{du}{d\tau}$$

Da cui:

$$\frac{du}{d\tau} = 4 \frac{\sqrt{N^2 u}}{kN^3} \frac{dC}{dt}$$

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)^2 = \frac{(kN^3)^2}{16N^2 u} \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = \frac{16u}{k^2 N^4} \left(\frac{dC}{dt}\right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16u}{k^2 N^4} \frac{k^2}{16} ((uN^2 - N^2)^2 - \frac{4H^2}{uN^2} - 4J^2) = u(u-1)^2 - \frac{4H^2}{N^6} - \frac{4uJ^2}{N^4} \\
&\quad \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} u(u-1)^2 - \frac{2H^2}{N^6} - \frac{2uJ^2}{N^4} \\
&\quad \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 + V(u) = -\frac{2H^2}{N^6}.
\end{aligned}$$

Si definisce $J = \frac{2J}{N^2}$ e $E = -\frac{2H^2}{N^6}$ ottenendo:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 + V(u) = E \quad (99)$$

Tale equazione è isomorfa con l'equazione dell'energia di una particolare unità di massa con posizione u ed energia E che si muove con potenziale $V(u)$.

Il potenziale sarà dato da :

$$V(u) = \frac{1}{2} u((u-1)^2 - \frac{4J^2}{N^4}) = \frac{1}{2} (u^3 - 2u^2 + u(1 - \frac{4J^2}{N^4})) = \frac{1}{2} (u^3 - 2u^2 + u(1 - J^2)).$$

Si osserva che l'equazione ha tre zeri:

$$V(u) = 0 \rightarrow u(u^2 - 2u + (1 - J^2)) = 0.$$

Da cui:

- $u_1 = 0$
- $u^2 - 2u + (1 - J^2) = 0 \rightarrow u_{2/3} = u \pm \sqrt{1 - (1 - J^2)} = u \pm \sqrt{J^2}$
 - $u_2 = u + J$
 - $u_3 = u - J$

Da definizione $E \leq 0$ e $0 \leq u \leq 1$ perciò $-1 \leq J \leq 1$.

Inoltre $\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 + V(u) = 0$ permette di definire

$$\left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad (100)$$

infatti si ha:

$$\begin{aligned}
&(u^2 - u_2u - u_1u + u_1u_2)(u - u_3) = u^3 - u^2u_3 - u_2u^2 + \\
&\quad + uu_2u_3 - u_1u^2 - uu_1u_3 + u_1u_2u + u_1u_2u_3 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^3 - u^2(1 - J) - u^2(1 + J) + u(1 - J)(1 + J) + \\
&-u_1 u^2 - uu_1(1 - J) + uu_1(1 + J) + u_1(1 - J)(1 + J) = \\
&= u^3 - 2u^2 + u(1 - J^2) = \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2.
\end{aligned}$$

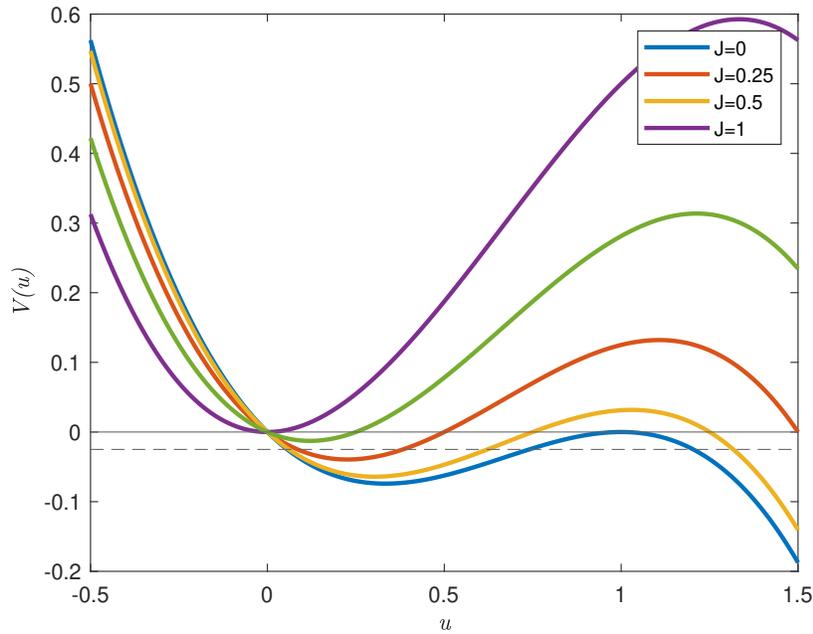


Figura 7: Variazione di $V(u)$ al variare di u

Fig.7 definisce la variazione dell'energia potenziale $V(u)$ al variare di u per valori di momento angolare $J \in \{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}, 1\}$. La linea orizzontale un livello di energia $E=-0.025$. Si studiano ora gli equilibri del potenziale.

Considerando il caso in cui $J = 0$ e $E = 0$:

$$V(u) = \frac{1}{2}(u^3 - 2u^2 + u)$$

Si trova un equilibrio instabile per $u = 1$ corrispondente con le oscillazioni puramente verticali della molla. Infatti si ha:

$$\frac{dV(u)}{du} = 0 \rightarrow (3u^2 - 4u + 1) = 0$$

quindi $u = 1$ e $u = \frac{1}{3}$

$$\frac{dV(u)}{du} > 0 \rightarrow u < \frac{1}{3} \vee u > 1$$

La funzione è crescente per $u < \frac{1}{3} \vee u > 1$, mentre è decrescente per $\frac{1}{3} < u < 1$, in particolare $u = 1$ è punto di minimo, quindi è un punto di stato.

L'equazione (99) si riduce a :

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = (u - u_1)^2$$

Quindi:

$$\frac{du}{d\tau} = \sqrt{u}(u - 1) \rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}(u - 1)} = d\tau.$$

Integrando tra τ e τ_0 :

$$\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{\sqrt{u}(u - 1)} du = \int_{\tau}^{\tau_0} d\tau.$$

Facendo un cambio di variabili : $\sqrt{u} = x$ e $du = 2x dx$, si ha:

$$\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{x(x^2 - 1)} 2x dx = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{2}{(x^2 - 1)} dx = 2 \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{x^2 - 1} dx = 2 \tanh^{-1}(x)$$

$$2 \tanh^{-1}(\sqrt{u}) = \tau - \tau_0 \rightarrow \tanh^{-1}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2}(\tau - \tau_0),$$

quindi si ha:

$$u = \tanh^2\left(\frac{1}{2}(\tau - \tau_0)\right)$$

Si ottiene così: $u = \frac{4C^2}{N^2}$, da cui:

$$C = \frac{N}{2}\sqrt{u} = \frac{1}{2}N \tanh\left(\frac{1}{2}kN(\tau - \tau_0)\right),$$

$$S^2 = A^2 + B^2 = N^2 - 4C^2 = N^2 - 4\left(\frac{1}{4}N^2 \tanh^2\left(\frac{1}{2}kN(\tau - \tau_0)\right)\right) =$$

$$N^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}kN(\tau - \tau_0)\right)$$

Pertanto:

$$S = N \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}kN(\tau - \tau_0)\right)$$

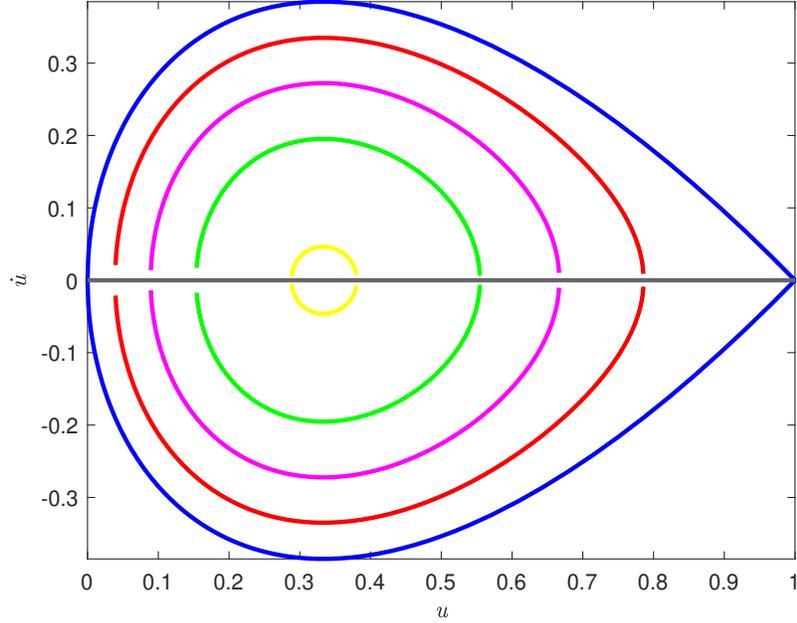


Figura 8: Curve (\dot{u}, u) per $J = 0$ e per valori di $E \in \{-0.073; -0.055; -0.037; -0.018; 0.000\}$

Qualunque sia il punto iniziale, tutta l'energia si trasferisce nel moto della molla, ma il processo continuerà per sempre.

In generale, u varia periodicamente tra u_1 e u_2 .

Studiando quanto riportato in fig.8 si ha che ogni curva rappresenta la proiezione della traiettoria dell'involuppo della modulazione per una particolare energia. Il centro corrisponderà a $u = \frac{1}{3}$ con un valore non mutato di u che corrisponde alle soluzioni concave e convesse.

Introducendo una nuova variabile $w = \sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}$, si deduce che $u = w^2(u_2 - u_1) + u_1$.

Inoltre, ricordando la (100):

$$dw = \frac{1}{2\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}} \frac{1}{u_2 - u_1} du \quad (101)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 &= \frac{1}{4(u_2 - u_1)^2 \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}} \left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = \\
&= \frac{(w^2(u_2 - u_1))(w^2(u_2 - u_1) + u_1 - u_2)(w^2(u_2 - u_1) + u_1 - u_3)}{4(u_2 - u_1)(w^2(u_2 - u_1) + u_1 - u_1)} = \\
&= \frac{1}{4(u_2 - u_1)} (u_2 - u_1)(w^2 - 1)(w^2(u_2 - u_1) + u_1 - u_3) = \\
&= \frac{1}{4} (w^2 - 1)(u_1 - u_3) \left(1 + \frac{w^2(u_2 - u_1)}{u_1 - u_3}\right) = \\
&= \frac{u_3 - u_1}{4} (1 - w^2) \left(1 - \frac{w^2(u_2 - u_1)}{u_3 - u_1}\right) = \nu^2 (1 - w^2)(1 - k^2 w^2).
\end{aligned}$$

In cui $\nu = \frac{u_3 - u_1}{4}$ e $k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$.

La soluzione di questa equazione è :

$$\left(\frac{dw}{d\tau}\right) = \nu \sqrt{1 - w^2} \sqrt{1 - k^2 w^2}.$$

Integrando:

$$\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2} \sqrt{1 - k^2 w^2}} dw = \int_{\tau}^{\tau_0} \nu d\tau = \nu(\tau - \tau_0).$$

La soluzione generale diventa:

$$w = sn(\nu(\tau - \tau_0))$$

Sostituendo w si ottiene:

$$u = (u_2 - u_1) sn^2(\nu(\tau - \tau_0)) + u_1 \quad (102)$$

che rappresenta una funzione ellittica di modulo k .

Definendo

$$\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2} \sqrt{1 - k^2 w^2}} dw = K,$$

in cui K è l'integrale dell'ellittico completo, la funzione $sn\theta$ avrà periodo $4K$ e sostituendo nuovamente i valori di u e τ si deduce che

$$C = \sqrt{\frac{uN^2}{4}} = \sqrt{\frac{N^2}{4} ((u_2 - u_1) sn^2(\nu(\tau - \tau_0)) + u_1)}.$$

Si può scrivere:

$$C = \frac{N}{2} \sqrt{(u_2 - u_1) sn^2(\nu k N(\tau - \tau_0))} \quad (103)$$

$$S = \sqrt{N^2 - 4C^2} = \sqrt{N^2 - uN^2} = N\sqrt{1-u}$$

Si può scrivere:

$$S = N\sqrt{(1-u_1) - (u_2 - u_1)sn^2(nukN(\tau - \tau_0))} \quad (104)$$

Queste ampiezze dell'oscillazione varieranno con periodo pari a $T = \frac{2k}{\nu k N}$. Nel caso speciale di $E = 0$ e $J = 0$, $u_1 = 0, u_2 = u_3 = 1$ e $k = 1$, quindi $snx \approx \tanh x$, $cnx \approx \operatorname{sech} x$, quindi C e S saranno come (103) e (104).

Nel caso in cui $u_1 = u_2$, C e S sono costanti, non ci sarà dunque scambio di energia tra le componenti di molleggiamento e oscillazione. [2]

7 Conclusioni

Nel corso di questo studio, sono state analizzate dettagliatamente le equazioni differenziali ordinarie che descrivono il comportamento dinamico di un sistema complesso. Attraverso l'uso di trasformazioni di variabili e l'identificazione di costanti del moto, è stato possibile ottenere equazioni più semplici in modo da poter raggiungere una comprensione più approfondita del sistema.

Il modello bidimensionale ha sottolineato il comportamento conico del pendolo definendo il moto attraverso l'equazione:

$$(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = (ad - bc)^2.$$

La proiezione di questo fenomeno risulterà essere un'ellisse centrata nell'origine. Si osserva che attraverso il rapporto tra la frequenza dell'oscillazione e della rotazione, è possibile definire il moto arbitrariamente chiuso e semi-periodico.

Il modello conico definito attraverso le coordinate sferiche ha permesso di definire due condizioni limite: definiti $z = -r \cos \theta$ e $\frac{g}{w_z} = \epsilon^2 l$, si ha che per $z = -l$, $R = 0$ e, per $z \rightarrow \epsilon^2 l$, $R \rightarrow \infty$.

Studiando la velocità angolare è stato possibile definire due comportamenti: diminuendo l'angolo di oscillazione, questa risulterà dipendere dal valore della frequenza del moto elastico, mentre aumentando la distanza radiale la velocità angolare dipenderà dalla frequenza della rotazione.

Attraverso i modelli concavo e convessi si è studiato il modello periodico del moto lungo il piano $x - z$ ottenendone le equazioni:

$$\ddot{x}_2 + w_R^2 x_2 = \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \cos(w_R t)$$

$$\ddot{z}_2 + 4w_R^2 z_2 = 8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(w_R t).$$

I due modelli saranno forniti dallo studio del moto con le variabili C e w_1 che avranno soluzione positiva e negativa.

Con il modello Ellittico-Parabolico si è studiato quanto fatto con il modello concavo e convesso, ma nel caso tridimensionale. Le equazioni del moto ottenute sono:

$$\ddot{x}_2 + w_R^2 x_2 = \lambda AC \cos(w_R t) \cos(2w_R t) + 2Aw_R w_1 \cos(w_R t)$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_2 + w_R^2 y_2 &= \lambda BC \sin(w_R t) \cos(2w_R t) + 2w_R w_1 \sin(w_R t) \\ \dot{z}_2 + 4w_R^2 z_2 &= 8w_R w_1 C \cos(2w_R t) + \frac{1}{2} \lambda A^2 \cos^2(w_R t) + \frac{1}{2} \lambda B^2 \sin^2(w_R t).\end{aligned}$$

Per ottenere soluzioni più generali si è studiato il sistema cambiando le coordinate e ottenendo le equazioni del moto considerando ovviamente la forza di Coriolis. Il modello Ellittico-Parabolico sarà definito attraverso tre variabili C, w_1 e la componente data dal moto relativo: Ω_1 . Anche in questo caso devono essere studiati i due casi definiti dal segno delle variabili.

Con il Bilanciamento Armonico si è osservato il comportamento reciproco tra la distanza radiale e assiale attraverso le coordinate cilindriche. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -w_R^2 R + R\dot{\varphi}^2 + \lambda R z \\ \ddot{Z} &= -w_z^2 z + \frac{1}{2} \lambda R^2\end{aligned}$$

e a partire da queste, considerando il comportamento periodico del moto è stato possibile definire i tre casi per cui si ottengono la perturbazione dell'energia nel moto orizzontale e le invarianti sinusoidali.

Infine attraverso le piccole ampiezze di perturbazioni generali è stato possibile osservare il comportamento del moto attraverso due scale di tempo, una più veloce dell'altra, per cui è possibile definire il comportamento della distanza radiale rispetto le tre direzioni:

$$\begin{aligned}R_x &= 2w_R D_1 A \sin(w_R t_0 + \alpha) + 2D_1 A w_R \alpha \cos(w_R t_0 + \alpha) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda AC [\cos(w_R t_0 + \alpha) - (2\alpha - \gamma)] + NST \\ R_y &= 2w_R D_1 B \sin(w_R t_0 + \beta) + 2D_1 B w_R \beta \cos(w_R t_0 + \beta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda BC [\cos(w_R t_0 + \beta) - (2\beta - \gamma)] + NST \\ R_z &= 2w_z D_1 C \sin(w_z t_0 + \gamma) + 2D_1 C w_z \gamma \cos(w_z t_0 + \gamma) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \lambda [A^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\alpha - \gamma)) + B^2 \cos((w_z t_0 + \gamma) + (2\beta - \gamma))] + NST\end{aligned}$$

dove ad ogni termine si aggiunge NST che denota le grandezze non secolari. Studiando le equazioni delle perturbazioni per C è stato possibile definire la

variazione dell'energia potenziale $V(u) = u(u^2 - 2u + (1 - J^2))$ al variare di u per vari valori del momento angolare e la variazione di $\frac{1}{2}(\frac{du}{dr})^2 + V(u) = E$ al variare di u per valori di E , adeguatamente rappresentati graficamente.

Riferimenti bibliografici

- [1] Paolo Biscari et al. *Meccanica razionale*. Vol. 138. Springer Nature, 2022.
- [2] Peter Lynch. *Resonant Motions of the Swinging Spring*. Citeseer, 1999.
- [3] Diego Masotti. “La Tecnica del Bilanciamento Armonico come strumento per la Simulazione e l’Analisi di Stabilità e di Rumore di Sistemi Non Lineari: dal Circuito di Potenza con Induttori all’Oscillatore a Radiofrequenza”. Università degli Studi di Bologna, 1995.
- [4] Daniele Lagomarsino Oneto. “Sviluppi Perturbativi a Scale Multiple nei Problemi di Trasporto a Grande Scala per Applicazione in Modelli Oceanografici”. Università degli studi di Genova, 2014.

Ringraziamenti

Ringrazio il professore Marco Coco per la sua disponibilità e l'impegno che mette quotidianamente nel suo lavoro.

Ringrazio i miei genitori per l'amore, la disponibilità e il conforto che mi hanno sempre dato.

Ringrazio le mie sorelle, per il vostro affetto e soprattutto: Enia per la tua disponibilità, Elisa per la tua spensieratezza.

Ringrazio Aurora per essere stata la mia forza nei momenti più difficili, per avermi sopportato nelle giornate storte e amato ogni giorno.

Ringrazio Mattia per aver sempre voluto il meglio per me, grazie per il tuo supporto, la tua pazienza e la tua sopportazione. Grazie per essere il mio amico di sempre

Ringrazio Mirco ed Eleonora per avermi aiutato a passare momenti spensierati.

Ringrazio tutti gli "Amici dell'Univpm", specie chi mi ha fatto mangiare volentieri Polpette e Panzerotti. Grazie per i giorni passati insieme come fossimo una vera famiglia.

Ringrazio i miei coinquilini per le coperte condivise nei giorni più freddi e le escursioni al mare nei giorni più caldi.

Ringrazio i "Pomeli" per essere stati coetanei da cui trarre ispirazione e da ammirare.

Ringrazio Davidone, Giorgio, Leonardo, Giova, Plik e Marco per essere stati amici di cui potersi fidare.

Ringrazio Zio Luigi per avermi sempre cercato con grande affetto.

Ringrazio i miei Sacerdoti per le loro benedizioni.

Ringrazio me stesso per aver dato il giusto peso alle priorità.