



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea Magistrale in Scienze Economiche e
Finanziarie, Banche e Mercati

RISK HEDGING E COINTEGRAZIONE

Relatore: Chiar.mo

Tesi di laurea di:

Prof. Giulio Palomba

Tea Di Giuseppe

Anno accademico 2018-2019

Indice

1	Introduzione	5
1.1	<i>Risk hedging</i> e metodi di misurazione del rischio	5
1.1.1	Indici simmetrici di misurazione del rischio	12
1.1.2	Indici asimmetrici di misurazione del rischio	16
1.2	La Teoria del portafoglio di Markowitz	32
1.3	TEV, VaR e la frontiera di portafoglio	36
2	<i>Pair trading e Cointegrazione</i>	43
2.1	Cointegrazione	43
2.2	Strategie di <i>hedging</i> attraverso l'analisi di cointegrazione	46
2.3	<i>Pair Trading</i>	53
2.3.1	<i>Cointegration method</i>	55
2.3.2	<i>Distance method</i>	64
2.3.3	<i>Stochastic spread method</i>	66
3	Strategia di <i>pair trading</i>	73
3.1	Dataset	73
3.2	Il modello empirico	75

3.3	Analisi dei risultati	77
4	Conclusioni	89
	Bibliografia	93

Capitolo 1

Introduzione

1.1 *Risk hedging* e metodi di misurazione del rischio

Il concetto di rischio associato ad un investimento indica la probabilità che il valore ottenuto alla conclusione delle operazioni effettuate da un investitore, sia differente rispetto alla relativa previsione, stimata in sede di pianificazione iniziale in vista dell'allocazione del capitale oggetto d'investimento. Differenti sono le tipologie di rischio che possono influenzare le scelte d'investimento, e dunque i risultati ottenibili attraverso le strategie implementate dal generico investitore nel raggiungimento dei propri obiettivi. Allo stesso modo, diverse sono le determinanti del rischio, come ad esempio: l'andamento dei mercati, la tipologia degli strumenti finanziari, variabilità dei tassi d'interesse e di cambio, l'evolversi delle condizioni economiche, situazione politica o shock di liquidità.

Per la classificazione delle differenti tipologie di rischio, presentiamo innan-

zitutto il **rischio di credito** che, nel rapporto tra due soggetti nelle vesti di creditore e debitore, misura la capacità del debitore di adempiere ai propri obblighi di pagamento degli interessi e di rimborso del capitale. Con tale definizione ci si riferisce al caso estremo per il quale il debitore venga meno agli obblighi assunti nei confronti della controparte e dunque dichiarato insolvente. Tuttavia lo stesso rischio di credito può indicare, in via generale, la riduzione del valore del credito collegata ad un deterioramento del merito creditizio del soggetto debitore (*credit spread risk*). In base all'ambito su cui ci si focalizza, è possibile derivare diverse accezioni dello stesso rischio di credito, come:

- **rischio di insolvenza** (*default risk*), connesso alla capacità di solvenza della controparte debitoria;
- **rischio di migrazione**, legato al *rating* dell'emittente ed in particolare ad un suo deterioramento (*downgrading*);
- **rischio di spread**, ovvero un innalzamento degli *spread*, o premio per il rischio, legato all'andamento dei dati di mercato;
- **rischio di recupero**, dipeso sia dai tempi di recupero che dal valore di realizzo che potrà mostrarsi inferiore a quello definito ex ante;
- **rischio Paese**, quindi eventi di natura politica o legislativa che incidono sulla probabilità di *default*;
- **rischio di controparte**, caso particolare del rischio di credito dove si innesca una probabilità di perdita di natura bilaterale, infatti, questo prevede il rischio che la controparte di una transazione, avente a oggetto

determinati strumenti finanziari, risulti inadempiente ai propri obblighi contrattuali, prima del regolamento della transazione stessa;

- **rischio di concentrazione**, risultante dalla concentrazione delle transazioni nei confronti di un unico soggetto, area geografica o settore economico.

Proseguendo con il **rischio di liquidità**, invece, questo risulta tanto minore quanto maggiore è il grado di liquidità di un titolo, visto che l'investitore troverà più facilmente una controparte sul mercato disposta ad acquistare i propri titoli. Un titolo può dirsi liquido quando le operazioni di compravendita, eseguite su di esso, avvengono in maniera rapida e poco costosa. Una misura del rischio di liquidità è data dal *bid-ask spread*, ovvero la differenza fra il prezzo lettera, al quale l'operatore di mercato è disposto a vendere, ed il prezzo denaro, quello a cui è disposto ad acquistare. All'aumentare dello *spread* si riduce la liquidità del titolo ed aumenta il relativo rischio. Inoltre, il *bid-ask spread* rappresenta un profitto per i fornitori di liquidità (*market maker, dealer, broker* o investitori istituzionali), dunque questo sarà tanto più elevato quanto maggiore è il loro potere contrattuale, o quanto minore sia la concorrenza. Ulteriore punto da non tralasciare riguarda la presenza di asimmetrie informative che contribuiscono ad ampliare lo *spread*. Se la probabilità di concludere operazioni, con soggetti che detengono un set informativo maggiormente completo è alta, la conseguenza razionale prevede di aumentare la differenza fra il prezzo denaro ed il prezzo lettera al fine di poter coprire i costi legati ad eventuali asimmetrie informative.

Il **rischio di mercato** rappresenta la probabilità che, a causa di eventi avversi di mercato (variazioni di prezzo, tassi d'interesse o di cambio), la performance associata ad un investimento differisca dal rendimento atteso stimato inizialmente. Sotto questo aspetto possiamo distinguere fra:

- **rischio di mercato generico (sistemico)**, il quale è legato ad eventi e fattori non prevedibili che impattano sulla generalità dei titoli, per cui impossibile da evitare (dipendente dall'andamento generale dei mercati);
- **rischio specifico (non sistemico)**, connesso alle caratteristiche peculiari dei singoli titoli o dell'emittente. È possibile agire su quest'ultimo attraverso il processo di diversificazione di portafoglio, selezionando titoli che seguano andamenti opposti rispetto a specifici fattori di mercato. Di conseguenza si evita la concentrazione del patrimonio investito in un unico mercato o strumento finanziario, applicando dunque una diversificazione sia quantitativa che qualitativa, riducendo così l'effetto del rischio specifico su quello complessivo.

Tra le sottocategorie del rischio di mercato si hanno:

- il **rischio tasso d'interesse**, ovvero il rischio di riduzione del patrimonio o del margine d'interesse, derivante da variazioni sfavorevoli dei tassi. Nel caso dell'investimento in un titolo obbligazionario, questo equivale al rischio di prezzo, rappresentativo dell'effetto subito dal valore dell'obbligazione in seguito a variazioni dei tassi di mercato;

- il **rischio di cambio**, dove sono protagoniste le attività denominate in valute diverse da quella domestica e quindi soggette ad oscillazioni nei saggi di cambio fra divise;
- il **commodity risk**, derivante dalle fluttuazioni dei prezzi delle materie prime;
- il **rischio azionario**, che indica l'impatto proveniente da variazioni nei prezzi dei titoli. Tali fluttuazioni del prezzo azionario potrebbero provocare gravi perdite se non si predispone un'idonea copertura a tale eventualità.

Un ulteriore aspetto, da tenere sotto controllo, è quello legato al **rischio sistemico**. La recente crisi, scoppiata nel 2007-2008 negli USA come crisi dei mutui *subprime*, per poi raggiungere, negli anni successivi, il settore reale dell'economia, fino a sfociare nel 2010 nella crisi del debito sovrano, ha sottolineato l'importanza che assume la capacità di misurare il rischio caratterizzante l'intero sistema finanziario. L'ormai alta interconnessione fra i differenti mercati finanziari rende indispensabile l'istituzione di un piano di gestione dei rischi, a livello internazionale, per salvaguardare la stabilità sistemica, sia a scopi preventivi che correttivi. Sarà opportuno valutare il contributo di ogni singola istituzione, all'interno del sistema, con maggior osservanza per le imprese il cui singolo operato sia in grado di mettere a repentaglio gli equilibri di mercato. Dunque, per rischio sistemico si intende una tipologia di rischio che valuti l'instabilità del sistema finanziario, da non confondere con il semplice rischio sistematico, o rischio di mercato. Nel rischio sistemico, infatti,

si concentra un maggior numero di variabili computative, che tengono conto di molteplici aspetti tra cui lo stesso rischio di mercato non diversificabile, il rischio di contagio o eventuali *spillover* negativi. Pur non essendoci una specifica ed universale definizione di rischio sistemico, riporto ad esempio l'accezione descritta da Billio et al. (2012), secondo i quali, questo è da intendersi come un qualsiasi insieme di circostanze che minacci la stabilità o la fiducia del pubblico nel sistema finanziario. Inoltre, sempre facendo riferimento alle parole di Billio et al. (2012), per definizione il rischio sistemico coinvolge il sistema finanziario, un'insieme di istituzioni interconnesse che intrattengono fra loro relazioni commerciali, attraverso le quali l'illiquidità, l'insolvenza e le perdite possono propagarsi rapidamente durante i periodi di difficoltà finanziaria.

Accanto alla sfera del rischio si affianca il concetto dell'*hedging*. Il termine *hedging* fa riferimento a strategie di mercato attuate al fine di intervenire a favore della copertura di eventuali rischi a cui sia esposto un determinato investimento. Per *hedging* si intende dunque un meccanismo di protezione che, rispetto ad un portafoglio investito in differenti strumenti finanziari, ha come obiettivo quello di ridurre il rischio complessivo di portafoglio. In tale contesto si inserisce la dinamica rappresentante uno dei pilastri fondamentali dell'analisi quantitativa in finanza, ossia la gestione del *trade-off* fra rischio e rendimento. Un generico investitore, considerato il proprio grado di avversione al rischio, sarà disposto ad accettare uno specifico livello di rischiosità in vista della promessa di un dato rendimento atteso futuro, adeguato rispetto ai propri obiettivi. Attraverso l'implementazione di una strategia di *hedging*,

intervenendo a copertura dei rischi assunti, potrebbe richiedersi il sacrificio di parte del rendimento potenziale atteso a beneficio della riduzione della volatilità caratterizzante la posizione assunta. Con il termine volatilità si vuole intendere una misura della variabilità del rendimento di un'attività finanziaria. La volatilità può quindi definirsi come uno strumento di misurazione del rischio, ossia un indicatore della dispersione dei rendimenti di un'attività finanziaria attorno alla loro media in un determinato intervallo temporale. Essa, traducendo in termini concreti e analitici la nozione di rischio associato ad un investimento, permette di dipingere un quadro generale delle potenzialità di guadagno o perdita. La misura statistica a cui di solito è associata la volatilità è la deviazione standard dei rendimenti.

Nel presente lavoro di tesi, innanzitutto, nei paragrafi successivi, in quanto introduttivi, si procederà alla presentazione di differenti metodologie di misurazione del rischio associato ad un investimento. Infine si tratterà il problema relativo all'ottimizzazione di portafoglio, citando dapprima Markowitz (1959) per poi discutere della derivazione della frontiera di portafoglio efficiente attraverso i concetti di *TEV* e *VaR*.

Nel secondo Capitolo ci si addentra nel cuore dell'analisi che si intende proporre, al suo interno si discuterà infatti delle tecniche di *hedging* realizzate attraverso l'utilizzo dell'analisi di cointegrazione, nello specifico, la strategia protagonista è quella del *pair trading*.

Il terzo Capitolo segna il passaggio dalla teoria alla pratica, dove viene riportato un esempio di concreta applicazione della tecnica di arbitraggio statistica del *pair trading*.

1.1.1 Indici simmetrici di misurazione del rischio

Soffermandoci sulla sfera del rischio associato ad un titolo, questo può osservarsi sotto due diversi aspetti: sia come rischio di natura simmetrica, sia come rischio di natura asimmetrica. Nel primo caso esso descrive la probabilità che il valore futuro del titolo stesso si discosti dal suo rendimento atteso; nel secondo caso invece si fa riferimento unicamente alla situazione in cui i rendimenti futuri del titolo si attestino al di sotto del suo valore atteso. Da un punto di vista generale il rischio viene percepito in quanto condizione di pericolo, cioè avversa agli obiettivi d'investimento dell'operatore di mercato, per cui identificabile in un contesto di perdita.

Tra gli strumenti di misurazione e quantificazione del rischio simmetrico si hanno:

- varianza (storica o campionaria):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2$$

con

r_i = rendimenti di periodo del titolo;

\bar{r} = media aritmetica dei rendimenti del titolo;

n = numero di periodi considerati.

Talvolta si può considerare la sua radice quadrata che corrisponde alla deviazione standard o allo scarto quadratico medio, ovvero indice di

dispersione dei valori assunti da una variabile aleatoria rispetto al suo valore medio.

- varianza mobile:

$$\hat{\sigma}_{r,t}^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=t-\tau-1}^t (r_i - \bar{r}_t)^2$$

dove

$$\bar{r}_t = \frac{1}{\tau} \sum_i r_i;$$

τ = ampiezza dell'intervallo selezionato.

In questa misura di volatilità il periodo di osservazione viene diviso in vari intervalli di ampiezza τ . La varianza è quindi calcolata aggiungendo di volta in volta un'osservazione più recente ed eliminando quella più lontana, mantenendo in questo modo costante il numero di osservazioni di riferimento. Il rendimento medio \bar{r}_t viene anch'esso ricalcolato periodicamente seguendo la medesima logica sopra descritta. Tale regola di aggiornamento, nel suo processo iterativo di calcolo, si basa sul concetto per il quale l'influenza delle osservazioni lontane da quella t -esima decresca sempre più.

- varianza Riskmetrics:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(r_t - \bar{r}_t)^2$$

con

$\hat{\sigma}_{t-1}^2$ = varianza riferita al periodo precedente;

$\lambda \in [0, 1]$.

Metodologia introdotta dalla J.P. Morgan in cui la volatilità al tempo t è calcolata come combinazione convessa della stima della volatilità al tempo $t - 1$ e del quadrato della differenza fra il rendimento al tempo t e la rispettiva media. Notiamo come ponendo il coefficiente $\lambda = 1 \Rightarrow \hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{t-1}^2$, ovvero la volatilità attuale non è influenzata dalle nuove informazioni racchiuse nel secondo termine della formula, per cui rimane costante. Se invece λ è posto pari a 0, la stima della varianza coincide con lo scarto della media al quadrato riferito all'ultima osservazione. Nella scelta del valore di λ generalmente si procede minimizzando una funzione obiettivo, come ad esempio la deviazione standard. La J. P. Morgan, sulla base dell'esperienza empirica, suggerisce di impostare un λ pari circa a 0,9.

- average true range (ATR):

Fu Wilder (1978), nel suo lavoro "*New concepts in technical trading systems*", a presentare innanzitutto il *True Range (TR)* definito come il maggiore fra:

- la differenza tra il prezzo massimo e il minimo del periodo corrente;
- il valore assoluto della differenza tra il prezzo di chiusura del periodo precedente e il prezzo massimo del periodo corrente;
- il valore assoluto della differenza tra il prezzo di chiusura del periodo precedente e il prezzo minimo del periodo corrente.

L'*ATR* viene calcolato come una media su 14 giorni del *TR*. Notiamo come si vadano a considerare non solo il prezzo di chiusura dello strumento finanziario, ma anche i valori massimo e minimo dello stesso. Come misura della volatilità storica, l'*ATR* è utilizzato al fine di valutare le oscillazioni di prezzo giornaliere, inizialmente introdotto da Wilder nel settore delle *commodity*, ma ora estendibile ad ogni titolo o indice di mercato.

- tracking error volatility:

$$TEV = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(r_i - r_{b,i}) - TE]^2}{n - 1}}$$

$$TE = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r_{b,i})}{n}$$

dove

$TE = tracking\ error$, ossia il valore atteso degli scostamenti dei rendimenti del titolo dal *benchmark*;

$r_{b,i}$ = rendimenti di periodo del *benchmark*;

La *tracking error volatility* viene inserita come misura di variabilità degli scostamenti dei rendimenti di un titolo dal *benchmark* di riferimento, rispetto al valore atteso degli scostamenti stessi. Utile ad esempio nel-

l'ambito dell'investimento in fondi comuni dove risulta interessante verificare le capacità del gestore del fondo nel generare extraprofiti rispetto all'indice di riferimento.

Ad ogni modo qualunque sia il metodo di misurazione del rischio associato ad un investimento, in virtù dell'obiettivo di minimizzazione dello stesso, vista una specifica soglia di rendimento appetibile per l'investitore, saranno da preferirsi quegli strumenti finanziari in corrispondenza dei quali si registrano bassi valori degli indicatori di rischio: minore è la varianza, minore è la rischiosità di portafoglio.

1.1.2 Indici asimmetrici di misurazione del rischio

Ora, considerando solamente le manifestazioni negative del valore di un titolo in riferimento al suo rendimento obiettivo, si definiscono gli strumenti asimmetrici di misurazione del rischio.

- Value at Risk

Innanzitutto, presentiamo il calcolo del *Value at Risk* (*VaR*), metodologia che permette di stimare la massima perdita potenziale che un investitore possa subire in relazione ad un determinato fattore di rischio, in un investimento, entro un orizzonte temporale prestabilito ed in corrispondenza di un definito livello di confidenza.

Da un punto di vista generale tre sono le tipologie principali per la derivazione del *VaR*: l'approccio parametrico, di simulazione storica e simu-

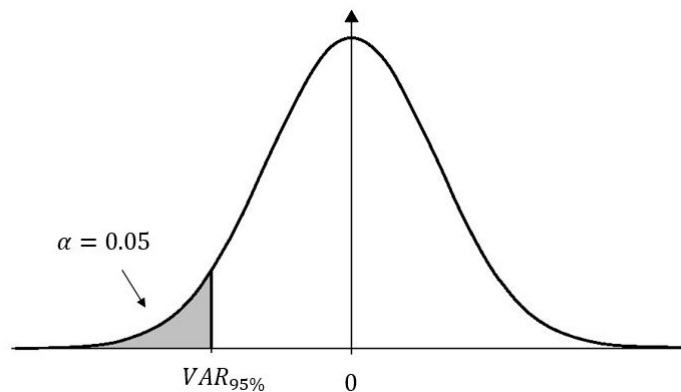


Figura 1.1: Esempio di VaR calcolato su un intervallo di confidenza al livello $(1 - \alpha) = 95\%$

lazione Monte Carlo o il metodo semiparametrico secondo modelli basati sulla teoria dei Valori o Eventi Estremi.

Seguendo l'approccio di tipo **parametrico** (modelli *varianza-covarianza*) si presentano due diverse modalità di stima del rischio: una in funzione delle variazioni dei rendimenti del titolo (modello *asset normal*), l'altra presuppone invece il legame dei suddetti rendimenti con fattori di rischio che ne influenzino l'andamento. In questo secondo caso il *VaR* dipenderà dalle deviazioni standard dei fattori di mercato considerati (modello *delta normal*).

Nello specifico, per quanto riguarda il modello *delta normal*, la massima perdita potenziale della posizione i -esima calcolata in riferimento al fattore di rischio j -esimo è data dalla formula:

$$VaR_{i,j} = VM_i \delta_{ij} \alpha \sigma_j \sqrt{\Delta t}$$

dove

VM_i = valore di mercato della posizione i -esima;

δ_{ij} = indice di sensibilità del valore della posizione i -esima al variare del fattore di rischio j -esimo;

α = valore critico di identificazione dell'intervallo di confidenza prescelto (distribuzione normale standardizzata);

σ_j = deviazione standard giornaliera del fattore di rischio;

Δt = orizzonte di valutazione.

Ad esempio, se la posizione assunta nell'investimento è in azioni, l'indicatore di sensibilità associato alla quantificazione del rischio sistematico di mercato va a coincidere con il *beta*, che indica la sensibilità del rendimento di un titolo a variazioni unitarie del premio per il rischio di mercato, così come descritto nel *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). L'equazione caratteristica del CAPM pone in relazione il rendimento di un titolo con la sua rischiosità, valutata in corrispondenza di un unico fattore di rischio: il *beta*.

$$r_i = r_f + \beta(r_m - r_f)$$

dove

r_i = rendimento atteso del titolo i ;

r_f = rendimento dell'attività priva di rischio;

β = coefficiente di misurazione del rischio sistemico. Per ogni variazione

di un punto percentuale dell'extrarendimento atteso del portafoglio di mercato, il β quantifica la variazione percentuale dell'extrarendimento del titolo i : $r_i - r_f = \beta(r_m - r_f)$;

r_m = rendimento atteso del portafoglio di mercato;

$(r_m - r_f)$ = premio atteso per il rischio sistemico.

Tornando alla discussione circa la determinazione di δ nel calcolo del VaR , ipotizzando un investimento in obbligazioni, dove il fattore di rischio è connaturato dalla variazione dei rendimenti o tassi d'interesse di mercato, il δ si identificherebbe con la *duration* modificata, in quanto misura della sensibilità del valore del titolo al rischio di tasso. Ogni posizione finanziaria tuttavia potrebbe essere soggetta a molteplici fattori di rischio che ne condizionino il valore. In tal caso sarà questa suddivisa in sub-posizioni, ognuna delle quali sensibile ad un unico fattore di rischio. Generalizzando, il calcolo del VaR di un portafoglio di strumenti finanziari soggetti ad n fattori di rischio può così definirsi:

$$VaR_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n (VM_i \delta_i \alpha \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (VM_i \delta_i \alpha \sigma_i)(VM_j \delta_j \alpha \sigma_j) \rho_{ij}} \quad (1.1)$$

con

ρ_{ij} = coefficiente di correlazione fra i differenti fattori di rischio i e j .

Il concetto fondamentale che emerge dall'analisi della formula (1.1) è il beneficio traibile dall'inserimento nel portafoglio di titoli che siano corre-

lati in un certo modo. Ovvero la procedura di diversificazione, attraverso un'opportuna combinazione dei titoli nei quali si intenda investire, permette di ottenere un valore stimato del VaR inferiore rispetto alla mera media ponderata dei VaR dei singoli titoli. Lo strumento chiave su cui intervenire è il coefficiente $\rho_{ij} \in [-1, 1]$, il quale misura del grado di correlazione lineare fra le coppie di titoli (x_i, y_i) . In particolare notiamo come un contributo positivo alla riduzione del VaR si determini in corrispondenza di un valore di ρ_{ij} via via decrescente, attraverso l'influenza esercitata sul secondo termine della formula sopra riportata.

Il VaR di **simulazione storica** si basa invece sull'intenzione di stimare il rischio futuro sulla base dei prezzi passati. Una volta scelto l'*holding period*, selezionati i fattori di mercato rilevanti e calcolata la rispettiva serie storica dei rendimenti, la procedura può riassumersi come segue:

1. Individuazione dei valori storici assunti dal portafoglio in relazione ai fattori di rischio prescelti;
2. Calcolo delle variazioni percentuali di valore assunte dal portafoglio nel periodo di detenzione;
3. Rivalutazione della posizione attuale del portafoglio tramite l'applicazione delle variazioni storiche stimate nel punto precedente;
4. Scelto il livello di confidenza, si procede estraendo dalla distribuzione di probabilità il percentile desiderato attraverso cui calcolare la massima perdita potenziale dell'investimento preso in esame.

Nella **simulazione Monte Carlo**, diversamente dalla simulazione storica che nella procedura di calcolo utilizza le serie storiche dei fattori di rischio, si generano distribuzioni casuali che approssimano l'andamento delle variabili d'interesse. Anche in questo caso suddividiamo il processo di valutazione in vari step:

1. Si assume a priori la legge di probabilità che regola l'andamento dei fattori di mercato su cui è "mappato" il portafoglio;
 2. A partire dalla distribuzione derivata al punto precedente, viene simulata l'evoluzione di ogni fattore di mercato n volte;
 3. Calcolo dei rendimenti di portafoglio in base alle variazioni dei fattori di rischio simulati;
 4. Taglio della distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato in relazione all'intervallo di confidenza prescelto.
- semi deviazione standard:

$$SDS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\min(0, r_i - \bar{r})]^2}{n - 1}}$$

Vediamo come nel calcolo della SDS intervengano solo gli scostamenti negativi dalla media. Di fatto ciò che si intende stimare è il rischio di incorrere in perdita investendo nel titolo considerato.

- downside deviation:

$$DD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [\min(0, r_i - r_{ob})]^2}{n - 1}}$$

r_{ob} = rendimento minimo fissato dall'investitore;

Differentemente dal calcolo della semi deviazione standard, nella *downside deviation* il rendimento obiettivo da cui calcolare gli scostamenti non è individuato dal valore atteso del rendimento del titolo, bensì da un *minimum acceptable return* fissato dall'investitore, ed in particolare, con osservanza alle variazioni negative.

- maximum drawdown (MDD):

Utilizzato come una delle principali misure di rischio relativo alla massima perdita di valore subita da un portafoglio d'investimento. Differentemente dal *VaR*, il quale identifica contesti di perdita potenziali che possono manifestarsi in futuro, il MDD fa riferimento alla serie storica del valore di mercato assunto dal portafoglio in un determinato periodo di tempo. Dunque il MDD descrive situazioni negative realmente registrate nel passato. Innanzitutto bisogna definire il *drawdown* (DD):

$$DD_t = \sup[0, \sup_{i \in [0, t]} R_i - R_t]$$

dove

R_i = rendimento al tempo i -esimo.

Questo indica il ribasso del valore di un investimento manifestatosi in un certo periodo t , quindi misura della perdita di valore successiva ad un punto di massimo. Da qui è possibile derivare il *Maximum DrawDown* come:

$$MDD = \sup_{t \in [0, T]} [\sup_{i \in [0, t]} R_i - R_t],$$

ovvero la massima perdita registrata fra un picco ed un punto di minimo nella distribuzione temporale del valore del portafoglio.

- *Expected Shortfall*

Per concludere, attraverso l'utilizzo dell'*Extreme Value Theory*, si apre una finestra sull'importanza della quantificazione delle perdite estreme che potenzialmente possano verificarsi nei mercati finanziari. In particolare è questa una teoria dove i modelli statistici, in riferimento ad una determinata distribuzione di probabilità, descrivono scenari estremi di notevole deviazione dalla media, ovvero si cattura il comportamento assunto dalla variabile d'interesse sulle code della distribuzione, per poi procedere con una previsione del relativo rischio. Per eventi estremi si intendono dunque quegli eventi caratterizzati da una bassa frequenza ma un elevato impatto in termini di perdite sul fenomeno oggetto di studio. In tale contesto inseriamo il concetto di *Expected Shortfall* (ES). L'ES è una misura di *tail risk* che quantifica la perdita potenziale scaturibi-

le nelle code della distribuzione *profit&loss* di un investimento. Ovvero quella parte della distribuzione in cui la performance negativa eccede il *VaR*. Rispetto ad un determinato livello di confidenza α , si ha:

$$ES_\alpha = E[X|X > VaR_\alpha]$$

con

X = perdita di portafoglio registrata nell'orizzonte temporale preso in considerazione;

VaR_α = *value at risk* calcolato con un livello di confidenza pari ad α .

Tale indicatore permette di visualizzare i casi in cui le perdite eccedenti il *VaR* risultino significative. Per cui, nelle scelte d'investimento, soffermandosi unicamente sullo studio del *value at risk*, si andrebbe in contro ad una perdita di informazioni rilevanti.

- *Marginal Expected Shortfall*

Approdando al contesto specifico della misurazione del rischio sistemico, Acharya et al. (2010) introducono il *Marginal Expected Shortfall* (MES), individuato come il rendimento atteso di un'istituzione finanziaria, i , condizionato ad un contesto di stress per il sistema finanziario, s , nel suo complesso. Ovvero, la perdita attesa per i , che possa verificarsi nel momento in cui il mercato registri una perdita superiore rispetto al *VaR*

calcolato, in corrispondenza del livello di confidenza α .

$$MES_{\alpha}^{i|s} = E[X^i | X^s \leq VaR_{\alpha}^s]$$

dove

X^i = rendimento dell'istituzione i ;

X^s = rendimento riferito all'intero sistema;

VaR_{α}^s = valore soglia del sistema.

In sintesi si può affermare che: il MES misura la sensibilità della *performance* di portafoglio a eventi di mercato particolarmente negativi.

- Sistemic Expected Shortfall

Acharya et al. (2010), inoltre, propongono il *Sistemic Expected Shortfall* (SES). Questo misura lo *shortfall* di capitale di un'impresa finanziaria, capace di catturare la dinamica del *downside risk* rispetto all'intero sistema.

$$SES^i = E[za_i - w_i | W < zA]$$

con

w_i = capitale della banca i ;

z = frazione dell'*asset* a_i ;

W = capitale bancario aggregato;

A = attività aggregate.

Attraverso tale impostazione è possibile quantificare la propensione della singola banca ad essere sottocapitalizzata quando l'intero sistema si trovi in una situazione di sottocapitalizzazione.

- Conditional Value at Risk

Adrian and Brunnermeier (2011), nel proprio lavoro, effettuano una valutazione del rischio sistemico attraverso lo strumento del *Conditional Value at Risk (CoVaR)*, al fine di identificare quale sia il contributo apportato dalle singole istituzioni oggetto d'analisi, sia in condizioni di stress che di normalità. Quindi, ricordando il *VaR* come il quantile in corrispondenza del quale si registra una probabilità pari ad α affinché le perdite si attestino al di sotto della massima perdita potenziale:

$$P[X \leq VaR_\alpha] = \alpha$$

Gli autori definiscono il $CoVaR_\alpha^{j|i}$ come il *VaR* dell'istituzione j (sistema finanziario) condizionato all'evento $C(X^i)$ relativo all'ente i :

$$P[X^j \leq CoVaR_\alpha^{j|i} | C(X^i)] = \alpha$$

L'evento condizionante viene posto uguale al VaR_α^i . Ovvero, il *value at risk* condizionale di j è calcolato sotto ipotesi di difficoltà finanziaria per l'istituto i . A questo punto, l'intenzione è quella di isolare dalla misurazione la componente derivante dal contributo della singola istituzione al

rischio sistemico. Il processo di calcolo consiste nel sottrarre al $CoVaR$, esaminato sotto condizione di stress per i , il VaR del sistema, quando l'istituzione sia in uno stato di normalità, individuato con lo stato mediano.

$$\Delta CoVaR_{\alpha}^{j|i} = CoVaR_{\alpha}^{j|X^i=VaR_{\alpha}^i} - CoVaR_{\alpha}^{j|X^i=Median(X^i)}$$

Girardi and Ergün (2013) modificano la definizione del $CoVaR$, riportata da Adrian and Brunnermeier (2011), condizionando la distribuzione di probabilità ad un caso più generale dove $C(X^i) = (X^i \leq VaR_{\alpha}^i)$, piuttosto che eguagliare il rendimento dell'istituzione i , posta sotto stress finanziario, al livello del VaR_{α}^i . In questo modo gli autori vogliono cogliere le dinamiche connesse alla manifestazione di perdite più acute. Sotto tale ipotesi, Girardi and Ergün (2013) derivano il contributo al rischio sistemico di una singola istituzione i , come:

$$\Delta CoVaR_{\alpha}^{j|i} = \left[\frac{CoVaR_{\alpha}^{j|X^i=VaR_{\alpha}^i} - CoVaR_{\alpha}^{j|X^i=Median(X^i)}}{CoVaR_{\alpha}^{j|X^i=Median(X^i)}} \right] 100$$

- Asymmetric CoVaR

Sulla scia dell'utilizzo del $CoVaR$ come metodo di misurazione del rischio sistemico, López-Espinosa et al. (2012) propongono l'*Asymmetric CoVaR*. L'idea di fondo mira a voler superare il limite riscontrato nell'implementazione del $CoVaR$ per il settore bancario. Infatti gli autori dimostrano come il $CoVaR$ sottostimi il reale contributo delle banche

al rischio sistemico. È determinante riuscire ad inquadrare l'influenza esercitata da queste ultime nel contesto finanziario, in quanto le stesse banche rivestono un ruolo da protagoniste, come variabili da controllare, nell'operazione volta a salvaguardia della stabilità sistemica.

- SRISK

Brownless and Engle (2015) definiscono una misura per il rischio sistemico (SRISK), che sia in grado di catturare lo *shortfall* di capitale di una determinata impresa in relazione a condizioni di mercato critiche. L'equazione di derivazione dello SRISK è:

$$\begin{aligned} SRISK_t^i &= E_t[CS_{t+h}^i | X_{t+1:t+h}^s < C] = \\ &= W_t^i [kLVG_t^i - (1 - k)LRMES_t^i - 1] \end{aligned}$$

con

CS_{t+h}^i = *shortfall* di capitale dell'impresa i su un orizzonte temporale pari ad h :

$$CS_t^i = kA_t^i - W_t^i = k(D_t^i + W_t^i) - W_t^i$$

dove

k = frazione di capitale prudenziale;

W_t^i = valore di mercato dell'*equity*;

D_t^i = valore contabile del debito;

A_t^i = valore dei quasi-*asset*.

Dunque il CS^i è espresso come la differenza tra la riserva di capitale che l'impresa debba detenere ed il capitale totale;

LVG_t^i = quasi-*leverage ratio* $\frac{D_t^i + W_t^i}{W_t^i}$;

$LRMES_t^i$ = *long-run* MES, calcolato come il valore atteso del rendimento multiperiodale del capitale dell'impresa i , condizionato all'evento sistemico caratterizzante l'analisi;

$$LRMES_t^i = E_t[X_{t+1:t+h}^i | X_{t+1:t+h}^s < C]$$

In linea di principio, gli autori inseriscono, nella propria valutazione delle perdite attese di capitale condizionate al declino del mercato, gli aspetti caratterizzanti la singola istituzione, come il rapporto di leverage, le dimensioni e naturalmente la sfera del rischio. Brownless and Engle (2015) mostrano come le istituzioni con più alti valori di SRISK si rivelino le più significative in termini di contributi alla sottocapitalizzazione del settore finanziario in tempo di crisi. Inoltre, la somma degli SRISK per ogni impresa, restituisce una misura del rischio sistemico complessivo.

- Component Expected Shortfall

Banulescu and Dumitrescu (2015) teorizzano un indicatore di rischio sistemico che permetta di individuare l'influenza, in termini assoluti, della singola istituzione finanziaria sull'ES riferita all'intero sistema. Si

definisce così la *Component Expected Shortfall* (CES):

$$CES_t^i = w_t^i MES_t^i$$

con w_t^i rappresentativo della dimensione dell'impresa i , ovvero la capitalizzazione di mercato. Inoltre la somma dei CES imputati ad ogni singola impresa, costituente il sistema, restituisce il valore dell'ES complessivo del sistema.

- *Distress Insurance Premium*

Un'ulteriore metodologia a cui far riferimento è quella proposta da Huang et al. (2009), sintetizzata nel *Distress Insurance Premium* (DIP). Fra le variabili utilizzate come input nel computo del DIP si hanno: la probabilità di *default*, la *loss given default*, le correlazioni fra i rendimenti e peso delle passività. Dunque, come punto di partenza, gli autori costituiscono un portafoglio composto dall'insieme delle passività totali riferite all'intero sistema bancario. Ogni singolo istituto bancario andrà a contribuire al rischio sistemico in proporzione al peso, esercitato dalle passività delle stesse, sul totale. L'indicatore del rischio sistemico è definito come il premio assicurativo istituito a garanzia del salvataggio da eventuali perdite eccessive registrate per tale portafoglio. Huang et al. (2009) calcolano il DIP come l'aspettativa, *risk-neutral*, di perdita del portafoglio che eguagli o superi una soglia minima di settore (L_{min}). Nello specifico, posto L_i la perdita relativa alla banca i e $\sum_{i=1}^n L_i = L$ la perdita totale di

portafoglio:

$$DIP = E[L|L \geq L_{min}]$$

- Composite Indicator of Systemic Stress

Soffermandosi sulla visione del sistema finanziario in condizioni di stress, misurato sulla base di specifici indici d'interesse, Holló et al. (2012) propongono, invece, il cosiddetto *Composite Indicator of Systemic Stress* (CISS). Il CISS, in quanto *financial stress index*, si pone come obiettivo la stima dell'instabilità corrente caratterizzante il sistema nel suo complesso. La statistica è così costituita:

$$CISS_t = (w \circ s_t)C_t(w \circ s_t)'$$

dove

w = vettore dei pesi;

s_t = vettore dei subindici;

C_t = matrice di correlazione *time-varying* fra i subindici;

$w \circ s_t$ = prodotto di Hadamard.

Quindi si introduce nel calcolo la ponderazione per cinque differenti variabili, racchiuse nel vettore s_t , rappresentante i fattori omogenei di stress rilevabili per ogni osservazione: mercato monetario, mercato obbligazionario, mercato azionario, settore degli intermediari finanziari e mercato dei cambi. In aggiunta, per quanto riguarda l'impostazione dei pesi, questi vengono definiti in base all'importanza rivestita dal subindice nel-

l'economia reale. In questo modo è possibile catturare la dinamica di trasmissione di stress finanziari nell'economia reale.

1.2 La Teoria del portafoglio di Markowitz

La teoria del portafoglio studia la ricerca dell'allocazione ottimale del capitale investito in attività finanziarie, in funzione dei relativi indicatori di rischio e rendimento. Dunque, di fronte ad un portafoglio composto da n titoli, questa si propone di definire la giusta composizione delle percentuali di investimento in ciascun titolo, ciò al fine di massimizzare il rendimento atteso di portafoglio, in vista di un determinato obiettivo di rischio, o minimizzare il rischio complessivo, rispetto ad un dato livello di rendimento. Bisogna qui citare il lavoro di Markowitz (1952) "*Portfolio selection*", è a lui che si attribuisce la derivazione della teoria moderna del portafoglio, raggiunta attraverso la trattazione formale del *trade-off* che sussiste fra rischio e rendimento.

Innanzitutto, la metodologia descritta dall'autore si suddivide in due fasi: una prima parte di natura *oggettiva* che si sostanzia nell'applicazione del criterio media-varianza ed in corrispondenza del quale, sotto una serie di ipotesi iniziali, ogni investitore raggiungerà il medesimo risultato ovvero la definizione della frontiera efficiente (l'insieme dei portafogli efficienti).

Preso un portafoglio di n titoli rischiosi in cui si investe una percentuale pari a x_i in ogni titolo, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, con μ_i e σ_i rispettivamente rendimento atteso e deviazione standard del titolo i , il valore atteso e la varianza di

portafoglio saranno date dalle seguenti formule:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Da cui, l'impostazione classica del problema di ottimizzazione di Markowitz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} x' \Omega x \\ x' \mu = \mu_p \\ x' e = 1 \end{array} \right.$$

dove:

Ω = matrice di varianze e covarianze;

x = vettore dei pesi;

μ = vettore dei rendimenti dei titoli costituenti il portafoglio;

μ_p = vincolo relativo al valore obiettivo del rendimento di portafoglio;

e = vettore somma, le cui componenti sono tutte uguali ad 1.

Rappresentiamo poi sul piano $(\sigma; \mu)$ ogni combinazione possibile, otterremo così differenti portafogli, ognuno in corrispondenza di una determinata media e una specifica varianza:

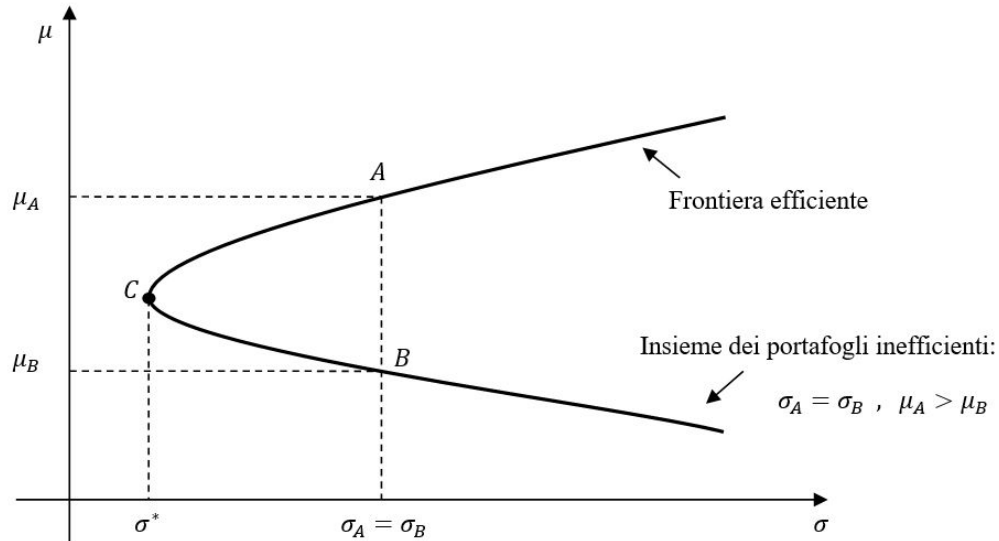


Figura 1.2: Frontiera efficiente di portafoglio

Ora, il criterio media-varianza ci porta a selezionare i portafogli che per uno stesso valore di μ_i minimizzano la deviazione standard. In questo modo si delinea la frontiera efficiente, un insieme di portafogli che, secondo la metodologia seguita, risultano maggiormente efficienti sulla base dei due obiettivi di massimizzazione dei rendimenti e minimizzazione della varianza. Pertanto, vista l'ipotesi iniziale di efficienza di mercato, secondo cui tutti gli operatori sono a conoscenza delle medesime informazioni e sono in accordo sul livello futuro dei prezzi, quindi dei rendimenti, delle covarianze, delle varianze e dei coefficienti di correlazione attesi, ogni investitore giungerà alla medesima soluzione: la frontiera efficiente è unica.

Nel caso in cui, dato un portafoglio costituito dai soli due titoli A e B , si intenda investire una quantità maggiore di quella disponibile nel titolo più rischioso, che prometta quindi un rendimento maggiore, è possibile far affida-

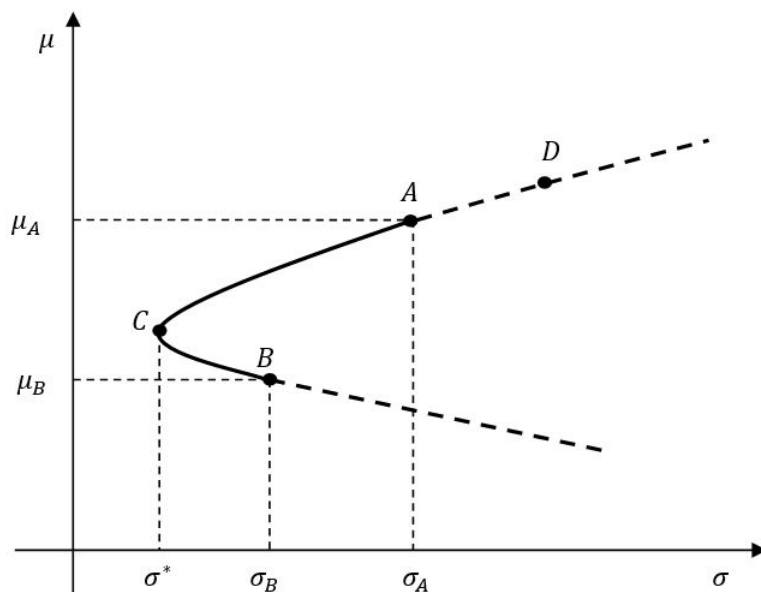


Figura 1.3: Esempio del meccanismo di vendita allo scoperto

mento alla così detta vendita allo scoperto. Ciò che cambia a livello computazionale è il segno negativo che contraddistingue i pesi x_i , relativi ai titoli in portafoglio venduti allo scoperto. Nell'esempio di due soli *asset* (Figura 1.3), il punto B indica il portafoglio investito unicamente nel titolo meno rischioso mentre nel punto A si ha $x_A = 1$, l'arco \widehat{AB} rappresenta invece tutte le possibili combinazioni ottenibili sotto l'ipotesi di assenza di vendite allo scoperto, $x_i > 0 \forall i$. Una quota negativa investita nel titolo meno rischioso B , permette di andare oltre il punto A ed acquistare così un quantitativo del secondo titolo maggiore rispetto alle disponibilità attuali (punto D).

A questo punto ci si addentra nella seconda fase del procedimento di ottimizzazione, quella *soggettiva*. Ad entrare in gioco sono le preferenze dell'investitore, rappresentate dalla funzione di utilità. Il portafoglio ottimale sarà differente per ogni soggetto: dipenderà infatti dalla propensione al rischio

dell'investitore e sarà quella combinazione che oltre ad essere efficiente, massimizza il benessere dell'individuo.

Come riportato nel lavoro di Markowitz (1952), il criterio media-varianza implica l'utilizzo di un meccanismo di diversificazione maggiormente efficiente rispetto alla diversificazione naïve, legata all'incremento del numero dei titoli detenuti in portafoglio al fine di ridurre la varianza totale. Investendo ad esempio in titoli appartenenti allo stesso settore sarà maggiormente probabile che, in caso di eventi di mercato avversi, le performance di tali titoli subiscano allo stesso modo effetti negativi. Sarà opportuno investire in titoli correlati fra loro negativamente così da sfruttare eventuali effetti compensativi sui risultati complessivi, visto l'opposto comportamento registrato di fronte a determinate condizioni di mercato. In conclusione, nell'intento di minimizzare la varianza, non è sufficiente investire in un alto numero di titoli, ma è necessario evitare la selezione di titoli altamente correlati fra loro.

1.3 TEV, VaR e la frontiera di portafoglio

Il rapporto caratterizzante il servizio di gestione di portafoglio tipicamente prevede l'affidamento, da parte del cliente, della gestione delle attività detenute e delle scelte d'investimento da effettuarsi con l'obiettivo di battere il *benchmark* di riferimento. Un elemento importante da considerare riguarda le commissioni di incentivo, generalmente legate alle performance ottenute dalla gestione attiva di portafoglio, le quali costituiscono uno stimolo determinante per il gestore in quanto i propri guadagni variano al variare dei profitti genera-

ti. Sotto quest'ottica il gestore potrebbe essere interessato ad incrementare la rischiosità complessiva, al fine di aumentare il guadagno atteso e di conseguenza la propria remunerazione. Di fronte a tale possibilità solitamente vengono introdotte clausole contrattuali volte a ridurre i rischi connessi agli eventuali conflitti d'agenzia che possano insorgere. L'investitore è quindi interessato a valutare la capacità della gestione attiva di portafoglio nel produrre eccessi di rendimento rispetto al *benchmark* preso in esame, ovvero giungere ad una quantificazione del cosiddetto *active risk*, attraverso l'osservazione del *tracking error*. Il focus d'interesse trasla così verso l'indice di rischio rappresentato dalla TEV, in quanto misura della variabilità degli scostamenti dei rendimenti attesi di portafoglio rispetto a quelli raggiunti dal relativo *benchmark*. La letteratura, dunque, si evolve rispetto alla teoria di Markowitz (1959) il cui risultato prevede la definizione della *Mean-Variance Frontier* (MVF), approdando verso lo studio della cosiddetta *Mean-TEV Frontier* (MTF) di Roll (1992), proseguendo con Jorion (2003) e la *Constrained TEV Frontier* (CTF), Alexander and Baptista (2008) con la *Constrained Mean-TEV Frontier* (CMTF) e Palomba and Riccetti (2012) con la *Fixed VaR-TEV Frontier* (FVTF).

Partendo dall'articolo del 1992 di Roll, egli formalizza il *TEV criterion*: minimizzare la TEV per un dato livello di TE. Differentemente dalla MVF, dove il ragionamento è basato su una visione di rischio per via assoluta, tale procedura coinvolge una dimensione di rischio in termini relativi rispetto al *benchmark*. L'autore dimostra come la soluzione a cui si giunge risulta essere subottimale rispetto alla frontiera efficiente elaborata da Markowitz, stimando anche la perdita di efficienza come la distanza orizzontale, nel piano $(\sigma^2; \mu)$,

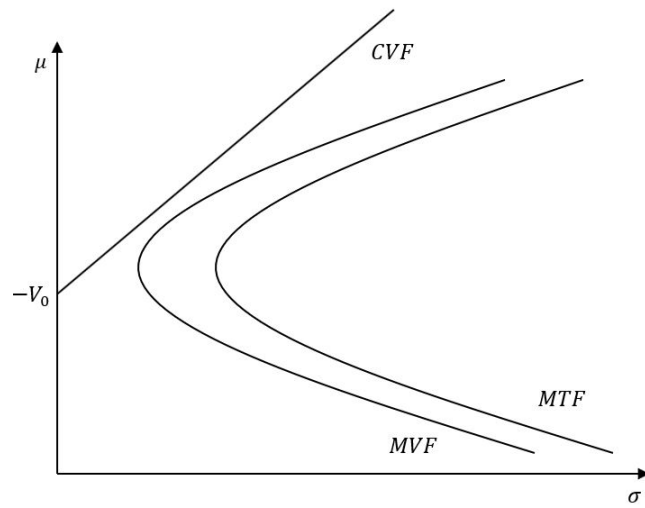
fra le due frontiere MVF e MTF (quest'ultima non è altro che una traslazione orizzontale della frontiera efficiente).

Accanto alla *TEV* un'ulteriore strumento del *risk management*, utilizzato nella ponderazione delle scelte d'investimento, è il *Value at Risk*. Nella derivazione della frontiera facciamo quindi riferimento alla *Constrained Value at Risk Frontier* (CVF) (Jorion, 2003), la quale risulta indipendente dal *benchmark*, ma connessa al limite imposto dal gestore sulla massima perdita, $VaR = V_0$, e all'intervallo di confidenza prescelto $(1 - \alpha)\%$, lavorando sotto ipotesi di normalità, con μ_p e σ_p rispettivamente valore atteso e deviazione standard di portafoglio e z_α valore critico della distribuzione standard:

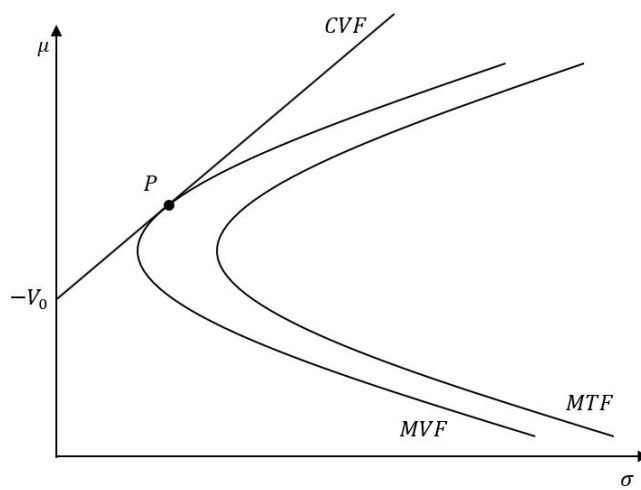
$$\mu_p = z_\alpha \sigma_p - V_0 .$$

Alexander and Baptista (2008) identificano invece la *Constrained Mean-TEV Frontier* (CMTF), come l'insieme delle soluzioni di allocazione delle risorse disponibili, in coerenza con gli obiettivi in termini di *VaR* ed in corrispondenza dei portafogli con la minore *TEV*. Gli autori propongono in questo modo cinque diversi casi in relazione al grado di estensione del limite introdotto (mediante un alto livello di confidenza).

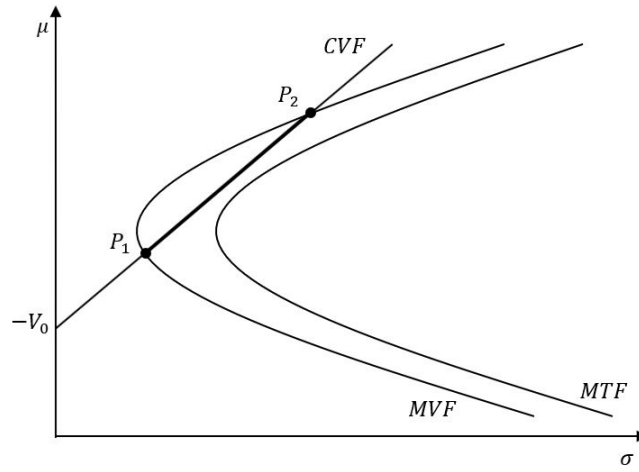
Nella figura (a) è descritto il caso di *small bound*, vista la mancata intersezione fra le frontiere tracciate, la CMTF risulta vuota. Vediamo invece come nelle figura (b) la CMTF si configuri in un unico portafoglio rappresentato dal punto di tangenza fra la CVF e la MTF. Per un *moderate bound* invece la regione di frontiera è indicata da un segmento (figure (c) e (d)). Infine nel



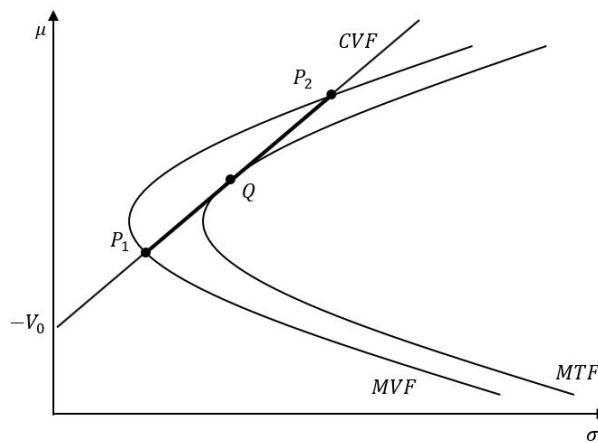
(a) small bound



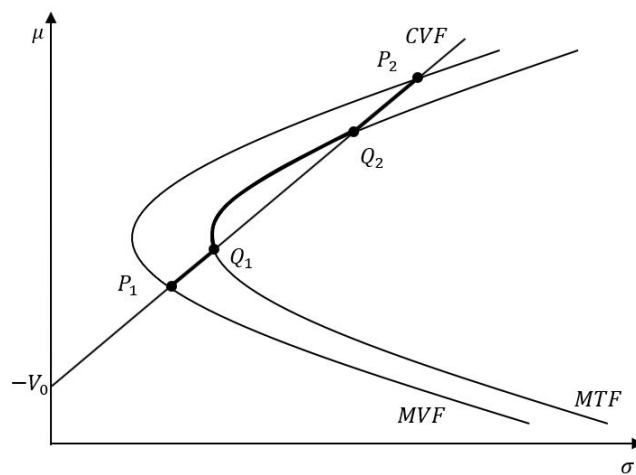
(b) small bound



(c) moderate bound



(d) moderate bound



(e) large bound

large bound vediamo come la CMTF sia costituita da due segmenti e un arco, infatti, nello specifico $\widehat{Q_1Q_2}$ risulta dominare il segmento $\overline{Q_1Q_2}$, favorendo in questo modo una riduzione della perdita di efficienza (figura (e)).

Facendo ora riferimento al lavoro di Palomba and Riccetti (2012), gli autori presentano una soluzione in cui l'idea di fondo consiste nell'apporre non solo un limite a livello di VaR, ma introdurre anche una soglia di massima tolleranza per quanto riguarda la TEV. Tale processo va a concretizzarsi nella *Fixed VaR-TEV Frontier*. Perciò tale metodologia, che non presuppone un iter di minimizzazione, concede la possibilità di gestire il *trade-off* fra obiettivi di VaR e TEV. Anche in questo caso si procede con la derivazione della frontiera attraverso lo studio di differenti tipologie di limite imposto dal gestore sul VaR, tenendo a mente la restrizione gravante sulla $TEV \leq T_0$ (anche qui, come ipotesi di partenza, si utilizza un alto livello di confidenza). Riportando ad esempio il caso *large bound*:

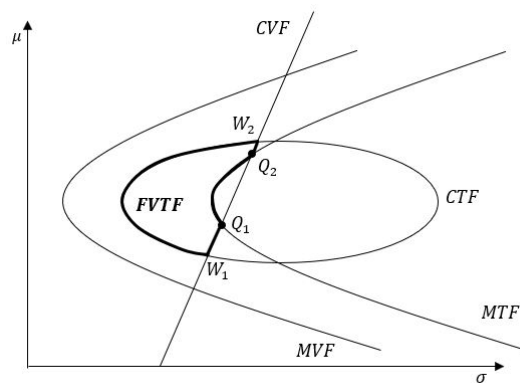


Figura 1.4: *large bound*

Notiamo come sia l'arco $\widehat{Q_1Q_2}$ ad appartenere alla FVTF, in quanto domina i punti del segmento $\overline{Q_1Q_2}$. In questa situazione il gestore è posto di fronte

ad una scelta: ridurre la TEV al di sotto del valore fissato T_0 aumentando il rischio complessivo o mantenere un livello stabile di $TEV = T_0$ riducendo di conseguenza la perdita di efficienza. Affiora pertanto la presenza di un *trade-off* fra rischio assoluto e relativo. Inoltre, nel confronto tra la CMTF e la FVTF, quest'ultima concede di selezionare portafogli in corrispondenza di una perdita di efficienza inferiore.

Capitolo 2

Pair trading e Cointegrazione

2.1 Cointegrazione

Come si è visto nel capitolo precedente, nella teoria del portafoglio tradizionale la logica alla base delle scelte d'investimento è guidata dall'analisi media-varianza in vista della ricerca della percentuale d'investimento ottimale che conduca alla minimizzazione della varianza, in quanto misura del rischio assunto complessivo di portafoglio, per un dato livello di rendimento. Dunque, tale strategia di ottimizzazione si concentra sullo studio delle relazioni di correlazione tra i titoli selezionati, valorizzando così una valutazione secondo un'ottica di breve periodo. Risulta invece interessante prestare attenzione a dinamiche di lungo periodo, dato che i mercati finanziari, per loro natura, possono dirsi altamente co-dipendenti. Come evidenziato da Alexander (1999) "strategie di gestione degli investimenti basate unicamente sulla volatilità e correlazione fra i rendimenti, non garantiscono performance nel lungo periodo". Vi è la

necessità di migliorare tali metodologie guidate dall'analisi rischio-rendimento prendendo in considerazione l'esistenza di eventuali trend comuni nelle serie dei prezzi delle attività finanziarie. Questo è esattamente ciò che avviene mediante lo studio delle relazioni di cointegrazione. Per **cointegrazione** si intende la possibile presenza di trend comuni nelle serie storiche dei prezzi delle attività finanziarie costituenti il portafoglio selezionato. Se gli *spread*, ovvero le combinazioni lineari delle serie dei prezzi, risultano *mean-reverting*, i relativi prezzi saranno legati da un andamento comune nel lungo periodo e potranno così definirsi cointegrati. Come asserisce lo stesso Alexander (1999) cointegrazione e correlazione sono collegate fra loro, ma esprimono concetti ben differenti, infatti, un'alta correlazione dei rendimenti non implica necessariamente un'alta cointegrazione nelle corrispondenti serie dei prezzi, o viceversa.

Procedendo per gradi introduciamo innanzitutto la nozione di *mean-reversion* di una serie storica. Un processo stocastico y_t può dirsi **stazionario** in senso **debole** $I(0)$ (in covarianza), se questo è caratterizzato da una media ed una varianza finite e costanti nel tempo:

- $E[y_t] = \mu$
- $Var(y_t) = \sigma^2$

con una funzione di autocovarianza, o autocorrelazione, anch'esse indipendenti rispetto al fattore temporale (eventualmente legate alla distanza fra y_t e y_{t-k}):

- $\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)], \forall t$
- $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}, \forall t$

Il concetto di *mean-reversion* deriva da queste proprietà in quanto, presa una serie storica dei rendimenti dove questi si discostino momentaneamente dal valore medio stimato, ci si attende in futuro un comportamento di convergenza verso la rispettiva media.

Da un punto di vista generale una combinazione lineare di due serie $I(0)$ è sicuramente stazionaria; se d'altro canto combiniamo linearmente una serie $I(1)$ con una serie $I(0)$ otterremo nuovamente un processo $I(1)$. Mentre prese due serie $I(1)$ x_t e y_t è possibile che combinate in maniera opportuna, restituiscano un processo stazionario in covarianza: le due serie si dicono cointegrate. Preso il vettore y_t formato da n componenti non stazionarie, $I(1)$, il seguente sistema $z_t = \beta' y_t$ può dirsi cointegrato se per opportuni valori costituenti la **matrice di cointegrazione** $\beta \Rightarrow z_t \sim I(0)$. Il vettore z_t ha dimensioni $r \times 1$, dove r indica il **rango di cointegrazione**, cioè il numero di relazioni di cointegrazione che possono generarsi date le n serie di partenza. La matrice β avrà quindi dimensioni pari a $n \times r$, sarà impossibile per tale matrice raggiungere il rango pieno. Andando infatti per logica, se β avesse rango pieno allora \exists la matrice inversa $(\beta')^{-1}$ e nello specifico potremmo scrivere $y_t = (\beta')^{-1} z_t$, y_t sarebbe a questo punto una combinazione lineare di un processo stazionario, dunque a sua volta $y_t \sim I(0)$, entrando in contraddizione con quanto supposto in precedenza: $y_t \sim I(1)$. Pertanto, dato y_t di dimensioni $n \times 1$ il rango di cointegrazione potrà al massimo essere uguale a $n - 1$. Inoltre, ogni trasformazione del tipo: $Kz_t = K\beta'y_t$, dove con $K\beta'$ si identifica una combinazione lineare delle righe della matrice di cointegrazione β' , genera un processo che a sua volta è stazionario, di conseguenza β è definita a meno di trasformazioni

lineari invertibili.

Tra le diverse metodologie di verifica dell'esistenza di cointegrazione fra le serie storiche, si hanno il metodo proposto da Engle and Granger (1987) e la procedura di Johansen (1991), quest'ultima incentrata sull'utilizzo degli autovalori della matrice di cointegrazione in riferimento al modello presentato in forma VECM, il cui metodo di stima è quello della massima verosimiglianza. Generalmente preferibile in ambito multivariato e nel caso in cui non siano note a priori né il rango né la matrice di cointegrazione.

2.2 Strategie di *hedging* attraverso l'analisi di cointegrazione

In linea di principio è possibile suddividere le strategie di *hedging* in due classi: statica e dinamica. Il principale elemento di distinzione fra le due tecniche risiede nella frequenza di ribilanciamento del portafoglio selezionato. Nelle strategie di copertura di natura statica, infatti, il portafoglio costituito al tempo t , secondo uno specifico set informativo, rimane invariato durante l'intero *holding period*, contrariamente a ciò che accade nel caso dinamico. Rispetto all'approccio discusso finora, l'intento è quello di basare l'analisi delle scelte d'investimento sul concetto di cointegrazione fra le serie storiche dei prezzi, relativi agli *asset* in cui si investe, piuttosto che un'ottimizzazione tradizionale di portafoglio incentrata sulla correlazione tra i rendimenti. Correlazione e cointegrazione sono sicuramente legate fra loro ma, come già detto in precedenza, un'alta correlazione fra i rendimenti non necessariamente implica un'alta coin-

tegrazione fra le rispettive serie dei prezzi. Da un lato la correlazione, come misura di breve periodo, esprime i co-movimenti fra i rendimenti, i quali sono soggetti a varie instabilità nel corso del tempo. Le strategie di *hedging* basate sull'indice di correlazione richiedono infatti un frequente ribilanciamento delle posizioni sui titoli in portafoglio, al fine di seguire l'andamento del *benchmark*. Dall'altro la cointegrazione misura i co-movimenti dei prezzi nel lungo periodo, evidenziando la possibile presenza di trend stocastici in comune anche laddove si registrino bassi valori negli indici di correlazione fra i rendimenti. Dunque le strategie di *hedging*, basate sul concetto di cointegrazione, potranno garantire una maggior efficienza secondo un'ottica di lungo periodo (Alexander, 1999).

Alexander (1999) procede nello studio di un modello cointegrato fra l'indice dei prezzi *European, Asian and Far East* (EAFE) Morgan Stanley e i rispettivi indici dei Paesi interessati, sia in un'ottica di copertura che di opportunità di arbitraggio.

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \varepsilon_t$$

dove:

y_t = indice del logaritmo dei prezzi EAFE;

x_i = indice del logaritmo dei prezzi del paese i -esimo;

Nel momento in cui la combinazione lineare fra l'indice e il portafoglio risulta stazionaria, i due possono dirsi cointegrati, ovvero, il portafoglio seguirà l'andamento dell'indice nel lungo periodo. Nel breve periodo, infatti, questi potrebbero momentaneamente divergere nell'attesa di ristabilirsi lungo il trend d'equilibrio. Procedendo attraverso la metodologia di Engle and Granger (1987) si testa la stazionarietà dei residui ε_t raffiguranti la *tracking error*.

All'aumentare della stazionarietà della TE aumenta il legame di cointegrazione tra le variabili oggetto di studio.

Tra gli indicatori di performance aggiustati per il rischio l'autore sottolinea la funzionalità dell'*information ratio*, in particolare nell'analisi *out-of-sample*.

$$IR = \frac{TE}{TEV}$$

Difatti l'*information ratio*, calcolato all'interno del campione, risulta sempre nullo vista l'ipotesi base del modello di regressione secondo cui la media dei residui è pari a zero. Il generico operatore sarà spinto a selezionare la combinazione di portafoglio che presenta un valore dell'IR maggiore, perché corrispondente ad un'alta *tracking error*, o specularmente, ad una bassa variabilità degli scostamenti medi dal rendimento del *benchmark*. Se nelle valutazioni *out-of-sample* gli IR, relativi a diversi periodi consecutivi, risultano alti e ampiamente autocorrelati, il criterio di selezione di portafoglio può dirsi stabile. Un'alta autocorrelazione fra gli IR implica che: se nel periodo t il portafoglio selezionato raggiunge una buona performance, vi sono altrettante aspettative positive per il periodo $t + 1$.

Per concludere le strategie d'investimento tradizionali non garantiscono la stazionarietà del TE, dove il più delle volte segue il comportamento di un *random walk*. Inoltre queste richiedono un frequente ribilanciamento del portafoglio, affinché la strategia di copertura rimanga allineata al *benchmark*. Attraverso l'utilizzo dell'analisi di cointegrazione è invece possibile ottenere TE stazionari e sfruttare l'evidenza per la quale il portafoglio di copertura sia *mean-*

reverting rispetto all'indice di riferimento, ed ideare un'opportuna strategia d'investimento.

Per citare un ulteriore esempio si ha “*Optimal hedging with the vector autoregressive model*” di Gatarek and Johansen (2014), un lavoro in cui gli autori identificano la strategia di copertura (statica) in funzione della correlazione e cointegrazione degli *asset* esaminati. L'obiettivo è quello di analizzare le proprietà del portafoglio di ottimo, sotto l'ipotesi per la quale i prezzi delle attività siano guidati da un *Vector Autoregressive Model*. Dove per *optimal hedge* si intende la selezione del portafoglio a varianza minima.

Come punto di partenza si definisce la variabile endogena y_{1t} , come:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t}$$

dove y_{2t} variabile esogena:

$$y_{2t} = y_{2,t-1} + u_{2t}$$

con u_t i.i.d. $N(0; \Phi)$, dove:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui i residui siano autocorrelati o correlati la regressione porterà a stime distorte dei parametri. Gli autori, dunque, propongono l'introduzione di un termine di correzione che permetta di superare tale problema. Da qui si

deriva:

$$y_{1t} = \beta y_{2,t-1} + \beta u_{2t} + u_{1t} = \beta y_{2,t-1} + v_{1t}$$

La matrice di varianza e covarianza dei termini di disturbo, con $v_{1t} = \beta u_{2t} + u_{1t}$,

è:

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} + \beta^2 \phi_{22} + 2\beta \phi_{12} & \phi_{12} + \beta \phi_{22} \\ \phi_{21} + \beta \phi_{22} & \phi_{22} \end{pmatrix}$$

Si identifica così $\beta^{Corr} = \phi_{22}^{-1}(\phi_{12} + \beta \phi_{22})$ il quale ingloba le informazioni relative alle dinamiche di correlazione fra v_{1t} e u_{2t} .

Dal punto di vista teorico possiamo scrivere:

$$E[v_{1t}|u_{2t}] = \frac{Cov(v_{1t}, u_{2t})}{Var(u_{2t})} u_{2t} = \frac{\phi_{21} + \beta \phi_{22}}{\phi_{22}} u_{2t} = \beta^{Corr} u_{2t}$$

da cui:

$$E[y_{1t}|y_{2t}, y_{2,t-1}] = E[\beta y_{2t} + v_{1t}|u_{2t}] = \beta y_{2t} + \beta^{Corr} u_{2t} = \beta y_{2t} + \beta^{Corr} \Delta y_{2t}$$

arrivando dunque alla costruzione della seguente formula:

$$y_{1t} = \beta y_{2,t-1} + \beta^{Corr} \Delta y_{2t} + \eta_{1t}$$

Notiamo come la *correlation correction* (β^{Corr}) intervenga a correzione delle stime distorte del parametro di cointegrazione β , infatti, per costruzione η_{1t} risulta incorrelato a u_{2t} :

$$Cov(\eta_t, u_{2t}) = E[(u_{1t} - \phi_{12}\phi_{22}^{-1}u_{2t}), u_{2t}] = \phi_{12} - \phi_{12}\phi_{22}^{-1}\phi_{22} = 0$$

Impostiamo ora il portafoglio di copertura costituito al tempo t :

$$s_t = y_{1t} - \beta_h y_{2t}$$

sarà questo rappresentativo di una posizione lunga sull'*asset* y_{1t} ed una corta su y_{2t} . Nello specifico β_h quantifica l'ammontare investito nella seconda attività, al fine di coprire la posizione aperta in y_{1t} . Pertanto ciò che si sta descrivendo è una *long-short strategy* il cui punto focale è costituito dall'*holding period*, h . A questo punto si deriva la variazione del valore del portafoglio dopo h periodi, $s_{t+h} - s_t$, connessa alle variazioni dei fattori di rischio per i quali sia stata implementata la strategia di copertura. Possiamo quindi definire l'errore di copertura come:

$$e_t(h) = s_{t+h} - s_t = y_{1,t+h} - y_{1t} - \beta_h(y_{2,t+h} - y_{2t})$$

L'obiettivo degli autori, ora, è quello di minimizzare la variabilità di tale *hedging error* rispetto al fattore temporale e dato il set informativo $\mathcal{I}_t = \sigma(y_k, k \leq t)$:

$$\min_{\beta_h} \text{Var}(e_t(h) \mid \mathcal{I}_t) = \min_{\beta_h} \text{Var}(s_{t+h} \mid \mathcal{I}_t)$$

Trattandosi di un'*hedging* statico s_t non è soggetto a ribilanciamenti nel tempo, in quanto portafoglio stazionario avrà varianza costante. La soluzione

del problema di ottimo così impostato, con le u_i *i.i.d.* $(0, \Phi)$, sarà:

$$\beta_h^* = \beta + h^{-1} \phi_{22}^{-1} \phi_{21} = h^{-1} [\beta(h-1) + \beta^{Corr}]$$

dove la varianza minima:

$$Var(y_{1,t+h} - \beta_h^* y_{2,t+h} | \mathcal{I}_t) = \phi_{11} - h^{-1} \phi_{12} \phi_{22}^{-1} \phi_{21} \quad (2.1)$$

Prestando attenzione al risultato raggiunto dagli autori, notiamo come la formula (2.1) sintetizzi entrambi gli aspetti relativi alle componenti di breve e lungo periodo. Infatti nel caso in cui $h = 1$, e dunque nel breve termine, il parametro relativo all'*optimal hedge* β_h^* sarà uguale al *beta* corrispondente la *correlation correction* $\beta^{Corr} = (\phi_{22}^{-1} \phi_{21} + \beta)$. D'altronde se $h \rightarrow \infty$ allora $\beta_h^* = \beta$, quindi, contrariamente al caso precedente, la strategia di copertura sarà incentrata sulla relazione di cointegrazione piuttosto che guidata dalle dinamiche di correlazione. Attraverso tale studio, gli autori arrivano a verificare come asintoticamente la volatilità del portafoglio ottimo coincida con quella del portafoglio costruito mediante la strategia di copertura basata sulla cointegrazione. Dimostrano poi, anche come sia subottimale affidarsi a strategie di *hedging* guidate dalla correlazione in situazioni con un ampio *holding period*. In tali situazioni, infatti, all'aumentare di h aumenta la volatilità di portafoglio, incrementando la rischiosità dell'investimento.

2.3 *Pair Trading*

Il *pair trading* è una strategia di arbitraggio statistico basata sullo sfruttamento del momentaneo *misppricing* fra coppie di azioni. In sostanza questa strategia trae vantaggio dalla temporanea deviazione delle serie storiche dei prezzi da un equilibrio di lungo periodo a cui queste tendono. Innanzitutto, per arbitraggio statistico si intende una strategia d'investimento che prevede la possibilità di ottenere un guadagno da una situazione di inefficienza di mercato nel prezzaggio di determinati strumenti finanziari. Le origini del *pair trading* risalgono agli anni '80, dove fu per la prima volta elaborato ed eseguito da un team di matematici, fisici ed informatici, guidato dall'analista quantitativo Nunzio Tartaglia della Morgan Stanley, con l'obiettivo di trovare opportunità di arbitraggio nel mercato dell'*equity*. Da qui si diffonde l'utilizzo del *pair trading*, come una strategia cosiddetta *market-neutral*, sia da parte di *hedge funds* che da diverse banche di investimento. Essenzialmente l'idea caratterizzante il *pair trading* prevede, come prima cosa, l'identificazione di una coppia di titoli, le cui serie storiche dei prezzi presentino un andamento simile nel tempo. Ovvero i due titoli sarebbero legati da una relazione di equilibrio di lungo periodo, dalla quale potrebbero deviare nel breve periodo, ed è questo che crea un'opportunità di guadagno per il trader. Nel momento in cui si registra una specifica divergenza fra i prezzi della coppia, si apre una posizione *long-short* sui titoli in questione, acquistando il titolo sottostimato e vendendo allo scoperto il titolo sopravvalutato. Nonostante il provvisorio disallineamento delle serie, queste sono spinte a convergere in futuro verso la loro situazione di equilibrio. Le posizioni saranno quindi chiuse una volta

raggiunta la convergenza delle serie, ottenendo così un profitto. La posizione netta del portafoglio costituito sarà pari a zero, ecco perché questa può dirsi una strategia *market-neutral*. Il concetto principale consta nel ritenere che ciò che si è verificato in passato è destinato a ripetersi nel futuro. Si è quindi in opposizione alle strategie d'investimento basate invece sui fondamentali, le quali tentano di prevedere il comportamento dei fattori economici che possano influenzare il prezzo dei titoli.

Per quanto riguarda la definizione del prezzo delle attività finanziarie è possibile procedere per via assoluta o in termini relativi. Nel primo caso il prezzo deriva dall'analisi dei fondamentali, come ad esempio attraverso l'attualizzazione dei flussi di cassa futuri generati dall'attività, al corrispettivo tasso di interesse che ne rispecchi l'indice di rischiosità. Dal punto di vista relativo, invece, può dirsi che ad attività considerate come perfetti sostituti corrisponderà lo stesso prezzo. Ovvero, sotto quest'ottica, non abbiamo informazioni sull'ammontare concreto del prezzo degli *asset*, ma sul loro rapporto, cioè su come il valore dell'uno debba quantificarsi rispetto al valore dell'altro.

Ora, tornando al *pair trading*, è possibile affermare che, al fine di raggiungere un guadagno, è necessario che si presenti una variazione del prezzo relativo e che tale deviazione sia *mean-reverting*, quindi destinata a tornare verso la propria situazione di equilibrio.

Differenti sono le metodologie di implementazione del *pair trading*, dove l'obiettivo comune è quello di comprendere secondo quale legge avvenga la selezione delle coppie. I titoli dovranno appartenere allo stesso settore? Bisogna considerare titoli con un alto indice di liquidità? Qual è il momento giusto

per intervenire sul mercato, sfruttare la momentanea divergenza ed aprire una posizione *long-short*? Quando risulta maggiormente conveniente la chiusura delle proprie posizioni?

2.3.1 Cointegration method

Ricordiamo innanzitutto il **metodo** guidato dalle relazioni di **cointegrazione** esistenti fra le coppie di titoli selezionati, facendo riferimento al lavoro di Vidyamurthy (2004). Date le serie storiche dei prezzi, identificabili come processi non stazionari, l'intento è quello di basare le proprie scelte strategiche sull'analisi dei trend comuni che leghino l'andamento delle serie nel tempo. In pratica, si cerca quel vettore di cointegrazione, tra le serie dei prezzi $I(1)$, che renda il sistema stazionario.

Presi due titoli l e s , si intende investire equamente in entrambi gli *asset*, in modo tale che $\alpha P_t^l = P_t^s$. In termini logaritmici l'equazione d'investimento può scriversi:

$$0 = \log(\alpha) + \log(P_t^l) - \log(P_t^s)$$

Prendendo in considerazione un *holding period* unitario, il rendimento di tale investimento sarà pari a:

$$\log\left(\frac{P_t^l}{P_{t-1}^l}\right) - \log\left(\frac{P_t^s}{P_{t-1}^s}\right)$$

Dunque per poter comprendere quale sia il comportamento delle serie dei

prezzi, su cui ideare una strategia profittevole, è sufficiente soffermarsi sulla previsione della differenza $[\log(P_t^l) - \log(P_t^s)]$, quindi ragionare in termini relativi piuttosto che assoluti sui singoli valori di P_t^l o P_t^s .

L'autore procede seguendo l'approccio a due-step di Engle and Granger (1987). Per cui, viste le serie del logaritmo dei prezzi non stazionarie, se esiste una combinazione lineare stazionaria delle stesse, allora le coppie di titoli selezionati potranno dirsi cointegrate. La regressione di cointegrazione sarà uguale a:

$$\log(P_t^l) = \alpha + \gamma \log(P_t^s) + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Successivamente, attraverso l'applicazione del test ADF sui residui, si verifica la stazionarietà del sistema, indagando sull'esistenza o meno di una relazione di equilibrio di lungo periodo. Uno dei limiti di tale metodologia risiede nella sensibilità dei risultati all'ordine delle variabili esogene ed endogene ed il conseguente effetto subito dalle serie dei residui su cui si effettueranno i test di stazionarietà. Inoltre bisogna considerare il caso di assenza di cointegrazione, la quale porterebbe alla definizione di previsioni inaffidabili a causa della regressione spuria stimata. Sarebbe quindi opportuno incrementare i test di cointegrazione e confrontarne poi i risultati, così da raggiungere una maggior ponderata valutazione. Lo *spread* sarà quindi:

$$spread_t = \log(P_t^l) - \gamma \log(P_t^s) = \alpha + \varepsilon_t$$

dove l'equazione è rappresentativa di un portafoglio costituito da una posizione

lunga in una unità dell'*asset* l ed una posizione corta su γ unità di s , con un valore atteso di lungo periodo pari ad α . In conclusione, Vidyamurthy (2004) suggerisce l'utilizzo dei risultati di cointegrazione al fine di poter individuare la momentanea divergenza fra le serie del logaritmo dei prezzi, sfruttando così un'opportunità di arbitraggio profittevole dovuta al *mispricing*. Nel caso in cui lo *spread* si trovi al di sotto (sopra) del suo valore d'equilibrio, per una quantità reputata sufficiente, si apre una posizione lunga (corta) sul portafoglio, acquistando (vendendo) una unità del titolo l e vendendo allo scoperto (acquistando) γ unità di s . Dunque, il fulcro dell'intera analisi risiede nella capacità di stimare quel valore soglia, in corrispondenza del quale si dà il via alla strategia, che porti al conseguimento del massimo profitto potenziale.

Herlemont (2004), nel proprio lavoro, propone la stessa metodologia descritta da Vidyamurthy (2004) nella scelta delle coppie per strategie d'investimento di *pair trading*. Quindi, coinvolgendo il legame di cointegrazione (Engle and Granger, 1987) fra le serie storiche dei titoli prescelti, l'autore intende selezionare quelli che presentino un *beta di mercato* simile, in quanto misura della sensibilità del rendimento del titolo a variazioni delle condizioni di mercato. Dunque, come punto di partenza, si individuano titoli le cui serie dei prezzi presentino un andamento simile nel tempo, ovvero il cui rapporto sia costante. Nel momento in cui si registra una deviazione da tale equilibrio, nasce un'opportunità di arbitraggio e, se la storia è destinata a ripetersi, quindi i prezzi relativi risultano *mean-reverting*, si otterrà un guadagno una volta ristabilita la precedente relazione d'equilibrio. Lo step successivo prevede una

selezione delle coppie, generate al punto precedente, attraverso l'introduzione di un limite affinché la strategia possa dirsi *market-neutral*. La regola d'interesse consiste nell'analizzare lo *spread* fra i *beta* delle coppie. In particolare saranno selezionate quelle coppie con un valore del *beta spread* non superiore a 0.2. Inoltre, ad influenzare il numero delle coppie intervengono sia la volatilità che l'omogeneità del settore di appartenenza dei titoli. Per il primo fattore, infatti, ci si aspetta che all'aumentare della volatilità del settore minore sarà il numero delle coppie che andranno a formarsi. Rispetto all'omogeneità, invece, si distingue fra il settore commerciale e quello finanziario, dove quest'ultimo porterà all'individuazione di un maggior numero di coppie visto il più alto grado di omogeneità. In questo modo è possibile assicurare la costruzione di una strategia sia *market-neutral* che *sector-neutral*.

Passando ora alla definizione della *trading rule*, si avrà l'apertura di una posizione quando il rapporto dei prezzi dei due titoli incontri per due volte consecutive il limite corrispondente a due volte la deviazione standard e la chiusura quando il rapporto si riattesti sul suo valore medio.

Come suggerito dallo stesso autore, non vi è interesse ad aprire una posizione su una coppia con un ampio *spread* che continua a crescere. Ecco perchè la *trigger rule* prevede che la banda relativa al doppio della deviazione standard sia oltrepassata due volte, al fine di garantire l'effettiva convergenza della serie verso il suo valore atteso.

Allo scopo di prevenire la possibilità di incorrere in perdite eccessive, Herlemont (2004) definisce una legge di contenimento del rischio. La *stop-loss*, che porta alla chiusura della propria esposizione, è fissata ad una perdita massima

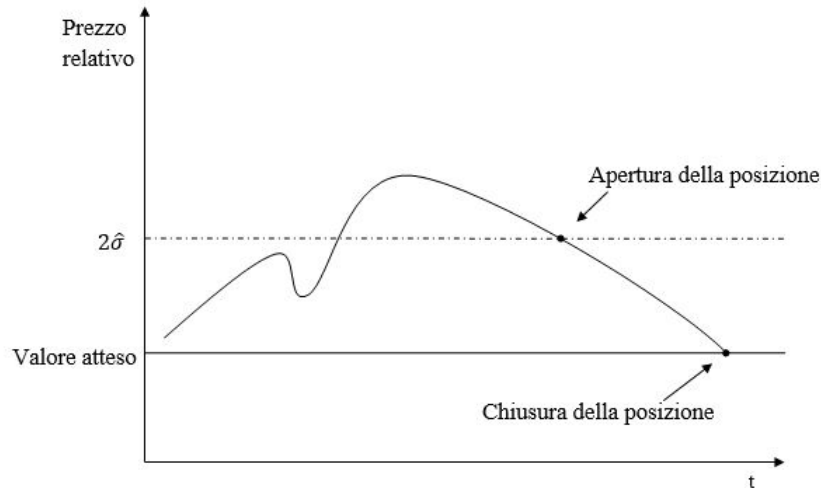


Figura 2.1: Esempio di *trading rule*

del 20% del valore iniziale della posizione assunta. Inoltre la strategia d'investimento prevede un *holding period* non superiore a 50 giorni. Tale lasso di tempo è ritenuto sufficiente affinché le serie dei prezzi raggiungano la convergenza, in media stimata entro un termine di 35 giorni, e idoneo a garantire un eventuale contenimento delle perdite.

In conclusione, questa strategia di *pair trading* permette di eliminare il rischio sistematico, attraverso l'assunzione di posizioni cosiddette *market-neutral*, così come il rischio di settore. La selezione dei titoli caratterizzanti le coppie, infatti, avviene in corrispondenza di *beta-spread* di mercato relativamente bassi, per cui trascurabili. Dunque l'attenzione si sposta sul rischio non sistematico, legato all'andamento dei singoli titoli, il quale potrebbe portare al mancato raggiungimento della *mean-reversion* o comunque ad una divergenza entro il limite dei 50 giorni. Ecco perchè, oltre alle regole della *stop-loss* e dell'*holding period* massimo, bisogna affidarsi anche alla tecnica di diversificazione attra-

verso l'investimento in differenti coppie al fine di ridurre il rischio specifico.

Nel novero delle strategie di arbitraggio statistico, nello specifico del *pair trading*, costruite sulla nozione di cointegrazione, citiamo Caldeira and Moura (2013). La loro procedura, nell'intento di implementare un investimento *market-neutral*, può suddividersi in due fasi. La prima fase consiste nell'operazione di selezione delle coppie di titoli costituenti il portafoglio d'investimento. In particolare andranno a scegliersi titoli i cui prezzi siano legati da una combinazione lineare stazionaria. Quindi, una volta effettuato un test ADF per la verifica della stazionarietà delle serie storiche considerate e verificato che queste siano tutte integrate dello stesso ordine, $I(1)$, il passo seguente riguarda l'analisi di cointegrazione. Gli autori adottano sia la procedura a due step di Engle and Granger (1987) che il test di Johansen (1991). A questo punto si subentra nella seconda fase, contraddistinta dall'avvio dell'attività di negoziazione di portafoglio. Innanzitutto si definisce lo *spread*, al tempo t , fra i titoli della coppia:

$$\varepsilon_t = P_t^l - \gamma P_t^s$$

caratterizzato da una posizione lunga sull'*asset* l , al prezzo P_t^l , ed una corta su s , al prezzo P_t^s .

La *trading rule* è però istituita sullo *z-score*, o valore dello *spread* normalizzato, come misura della distanza intercorrente fra i residui di cointegrazione e lo stato di equilibrio in unità di deviazione standard: $z_t = \frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}$, con μ_ε e σ_ε rispettivamente valore atteso e deviazione standard dello *spread*. In questi termini, se lo *z-score* risulta inferiore alla soglia pari a -2 volte la deviazio-

ne standard, il portafoglio si trova al di sotto del suo valore di equilibrio di lungo periodo (sottovalutato). In tal caso si procede all'acquisto dell'*asset* l e alla vendita di s . Nella situazione simmetricamente opposta, con lo z -score superiore a 2 volte la deviazione standard, il portafoglio si attesta al di sopra del suo valore di equilibrio (sopravvalutato). Dunque si venderà l acquistando s . Pertanto, l'apertura di una posizione nei titoli della coppia avverrà in corrispondenza di $|z_t| > 2$, per poi procedere alla chiusura quando $z_t = 0$. Similmente a quanto accade per Herlemont (2004), Caldeira and Moura (2013) inseriscono una regola di *stop-loss*, al fine di evitare di incorrere in ingenti perdite. Sotto quest'ottica, gli autori, dopo aver analizzato differenti percentuali di restrizione, fra il 3%, 5% e 7%, impostano come *stop-loss* la chiusura della posizione caratterizzata da una perdita del 7%. Inoltre, anche per l'*holding period* viene impostato un valore massimo, così come in Herlemont (2004). Il limite è prefissato a 50 giorni. Difatti, il tempo stimato necessario alla convergenza in media è pari a 10 giorni. Attendere ulteriormente per la chiusura, potrebbe condurre verso una condizione non più profittevole.

Dati P_t^l , il prezzo dell'*asset* acquistato, e P_t^s , il prezzo dell'attività venduta allo scoperto, il rendimento netto della coppia *i-esima* al tempo t può indicarsi come:

$$r_{it} = \ln \left(\frac{P_t^l}{P_{t-1}^l} \right) - \gamma \ln \left(\frac{P_t^s}{P_{t-1}^s} \right) + 2 \ln \left(\frac{1-C}{1+C} \right), \quad (2.2)$$

dove C sono i costi di transazione.

Vediamo come la formula (2.2), comprenda al suo interno il computo dei costi di transazione delle posizioni movimentate nell'operazione di investimento. L'equazione può intuitivamente spiegarsi come segue. Si supponga di acquista-

re l'attività h al prezzo P_{t-1}^h , nell'istante $(t - 1)$, e vendere la stessa al tempo t al prezzo P_t^h . Introducendo nell'analisi i costi di transazione dovuti, al regolamento delle operazioni, il costo d'acquisto sarà pari a $P_{t-1}^h(1 - C)$, mentre il profitto dovuto alla vendita a $P_t^h(1 - c)$. È possibile così scrivere il rendimento netto come:

$$\ln \left(\frac{P_t^h(1 - C)}{P_{t-1}^h(1 + C)} \right) = \ln \left(\frac{P_t^h}{P_{t-1}^h} \right) + \ln \left(\frac{1 - C}{1 + C} \right) = r_t^h + \ln \left(\frac{1 - C}{1 + C} \right)$$

Ragionando in termini di portafoglio, p , il rendimento complessivo sarà calcolato come la media ponderata dei singoli rendimenti delle N coppie, dove i pesi, w_{it} , indicheranno le percentuali di investimento in ciascuna coppia: $R_t^p = \sum_{i=1}^N w_{it} R_{it}$.

In aggiunta Caldeira and Moura (2013) propongono un criterio addizionale per la scelta delle coppie, seguendo l'approccio di Dunis et al. (2010). Il criterio basa la selezione delle coppie sul confronto dell'indice di Sharpe.

Lo *Sharpe-ratio* è un indice di performance aggiustato per il rischio dato da:

$$SR_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

dove:

R_p = rendimento medio di portafoglio;

R_f = rendimento del titolo privo di rischio;

σ_p = deviazione standard di portafoglio.

Tale indice prende in esame sia l'aspetto relativo al rischio che la sfera del rendimento, aumenta all'aumentare del rendimento del portafoglio d'investimento e diminuisce all'aumentare della rischiosità. In questo modo vengono individuate le 20 coppie, cointegrate, che presentano il maggior valore dell'indice di Sharpe, su cui procedere poi con l'attività di negoziazione.

Per quanto inerisce la liquidità delle attività oggetto di valutazione, si protende verso l'utilizzo di titoli con un alto grado di liquidità, al fine di ridurre il rischio di *slippage*¹ ed i relativi costi in termini di *bid-ask spread*. Inoltre, costume generale nelle strategie di *pair trading*, prevede l'impiego di titoli, costituenti la coppia, appartenenti allo stesso settore. Al contrario, Caldeira and Moura (2013) non adottano questa restrizione, quindi sarà possibile negoziare anche coppie di titoli non appartenenti al medesimo settore, purchè la loro relazione soddisfi la condizione di *mean-reversion*.

Infine, si esegue un confronto della strategia fin ora descritta con una naïve, con l'obiettivo di verificare la sua concreta convenienza in termini di redditività. Ebbene è possibile seguire un *bootstrap method*, come in Gatev et al. (2006), dove le performance legate all'approccio di Caldeira and Moura (2013) siano in raffronto con quelle delle coppie derivanti dal criterio di tipo naïve, ovvero, generate secondo un processo casuale. In linea generale i *bootstrap methods* prevedono la stima di un determinato modello più volte, attraverso l'utilizzo di dati simulati. I valori derivanti dalle simulazioni vengono poi utilizzati per fare inferenza sui dati effettivi. Per ogni *bootstrap*, gli autori sostituiscono

¹Il rischio di *slippage* indica la possibilità che il prezzo di apertura al momento dell'immissione dell'ordine, a causa di improvvisi movimenti di mercato, differisca da quello di effettiva esecuzione dello stesso.

ai titoli effettivi quelli casuali, che detengono un rendimento simile come per le attività costituenti la coppia effettiva. In media, si registrano rendimenti, relativi alle *random pairs*, inferiori rispetto a quelli delle *cointegrated pairs*:

$$R_t^{naive} = \sum_{i=1}^N w_{i,t} r_{i,t} + 2N \ln \left(\frac{1-C}{1+C} \right)$$

In aggiunta, anche le deviazioni standard dei rendimenti sono maggiori rispetto a quelle delle *true pairs*, a dimostrazione del fatto che le coppie simulate non siano abbinate in modo efficiente.

2.3.2 *Distance method*

Un ulteriore **metodo** di riferimento nello studio della strategia di *pair trading* è quello della **distanza**, come analizzato da Gatev et al. (2006). In primo luogo per distanza si intende la somma dei quadrati delle differenze fra le due serie dei prezzi normalizzate. Le coppie vengono quindi selezionate in base ad un criterio di minimizzazione di tale distanza. Gli autori suddividono il periodo di studio in due parti: il *formation period* ed il *trading period*. Nel *formation period* (12 mesi) avviene la formazione delle coppie. Innanzitutto si prendono in considerazione titoli relativamente liquidi, al fine di facilitare la selezione delle coppie, eliminando quindi quelli che non siano stati oggetto di negoziazione per uno o più giorni. Ogni coppia è poi generata attraverso la tecnica di minimizzazione della distanza. Nel *trading period* (6 mesi) avviene la negoziazione concreta delle coppie frutto della fase precedente. La *trigger rule* prevede di avviare la strategia d'arbitraggio nel momento in cui i prezzi

relativi alla coppia divergano per un certo ammontare e chiuderla una volta invertito il processo. L'indice prescelto è la deviazione standard storica, stimata nel *formation period*. In particolare una posizione viene aperta quando lo spread supera il limite di due volte il valore della deviazione standard. Si procede alla chiusura a seguito della nuova intersezione delle serie dei prezzi, dovuta alla forza di convergenza che lega il loro andamento nel tempo. Gli autori attendono il giorno successivo alla registrazione della divergenza (convergenza) per poter intraprendere (chiudere) la strategia, acquistando l'*asset* sottovalutato e vendendo quello sopravvalutato. L'intento è di evitare l'effetto del *bid-ask bounce*. Generalmente gli ordini di acquisto, immessi sul mercato, vengono eseguiti al prezzo *ask*, mentre gli ordini di vendita al prezzo *bid*. Se così fosse il *bid-ask spread* rimarrebbe costante. Tuttavia non sempre questo accade. Spesso gli acquirenti scambiano al prezzo *bid* ed i venditori potrebbero negoziare al prezzo *ask*. In questo modo, il prezzo di un determinato titolo si trova ad oscillare rapidamente nell'intervallo *bid-ask*. Pertanto, lo scenario appena descritto inquadra il fenomeno del *bid-ask bounce*. Nell'analisi empirica effettuata da Gatev et al. (2006), su dati giornalieri nel periodo fra il 1962 e Dicembre 2002 delle azioni U.S. liquide dal CRSP, si evidenzia la differenza esistente fra i rendimenti calcolati: da un lato in base alla negoziazione intrapresa (conclusa) al termine dello stesso giorno relativo alla divergenza (convergenza) e dall'altro attendendo il giorno seguente. Nel primo caso le stime risultano distorte verso l'alto, infatti, nel secondo caso si registra una caduta nei valori dei rendimenti, nonostante rimangano comunque positivi. Tale discesa dei profitti simboleggia come una buona parte degli stessi, inerenti alla prima modalità

d'investimento, sia dovuta al *bid-ask bounce*. Nonostante ciò, è difficile stabilire l'effettiva porzione di guadagno dovuta a questo fattore e allo stesso tempo quale sia invece l'influenza esercitata dalla *mean-reversion*. Il generico trader, nella costituzione del portafoglio d'investimento, andrà quindi a preferire titoli le cui serie dei prezzi presentino frequenti ed ampi *spread* contraddistinti dal requisito di *mean-reversion*. Tra i vantaggi nell'utilizzo di tale metodologia, sicuramente bisogna riconoscere la semplicità applicativa, nonostante la scelta della distanza minima come criterio di selezione delle coppie sia sub-ottimale dal punto di vista analitico.

2.3.3 *Stochastic spread method*

Presentiamo ora il **metodo** dello *stochastic spread* elaborato da Elliott et al. (2005). L'analisi si sposta dal campo discreto a quello continuo, dove lo *spread* fra i prezzi delle attività costituenti la coppia risulta guidato da un processo stocastico stazionario Ornstein-Uhlenbeck, più una componente di disturbo gaussiana.

Innanzitutto il processo di Ornstein-Uhlenbeck si presenta come un processo stocastico di Gauss-Markov, che soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$dx_t = k(\theta - x_t)dt + \sigma dW_t \quad (2.3)$$

dove:

W_t = moto Browniano standard su $t \in [0, +\infty)$;

k = velocità di adattamento della serie verso il valore d'equilibrio. Per ($k < 0$)

il processo risulta divergente ovvero repulsivo, i casi di nostro interesse prevedono quindi ($k > 0$) affinché sia soddisfatta la proprietà di *mean-reversion*;
 θ = valore atteso di lungo periodo;
 $\sigma > 0$ = volatilità.

La relazione (2.3) non è altro che la versione nel continuo di un processo autoregressivo di ordine uno, generalmente preferibile a quest'ultimo nel caso in cui si abbiano a disposizione dati ad alta frequenza. È possibile chiarire tale affermazione attraverso la risoluzione dell'equazione differenziale caratterizzante il modello:

$$dx_t = k(\theta - x_t)dt + \sigma dW_t$$

Applicando il lemma di Ito²:

$$d(e^{kt}x_t) = [ke^{kt}x_t + e^{kt}k(\theta - x_t)]dt + e^{kt}\sigma dW_t$$

Successivamente, integrando fra il periodo $t - 1$ e t , si ottiene:

$$e^{kt}x_t - e^{k(t-1)}x_{t-1} = \theta(e^{kt} - e^{k(t-1)}) + \epsilon_t$$

$$x_t = \theta(1 - e^{-k\Delta t}) + e^{-k\Delta t}x_{t-1} + \varepsilon_t$$

²Dato il processo stocastico x_t che soddisfa la seguente equazione differenziale $dx_t = \mu(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t$, con W_t moto Browniano, e presa una funzione $f \in C^{1,2}$: si definisce il processo $Z(t) = f(t, x_t)$, il cui differenziale stocastico, applicando la serie di Taylor troncata al secondo termine, sarà pari a: $df(t, x_t) = \frac{\delta f}{\delta t}dt + \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(dx)^2$

Questo modello è ampiamente utilizzato in campo finanziario nello studio della volatilità dei prezzi delle attività finanziarie. Vasicek (1977) sfrutta tale relazione nell'analisi dell'andamento dei tassi d'interesse di mercato nell'articolo "*An equilibrium characterisation of the term structure*" (1997). Essenzialmente l'idea dell'autore è quella di prevedere i movimenti dei tassi in un determinato intervallo di tempo, catturando la dinamica della *mean-reversion* delle rispettive serie.

Tornando allo *stochastic spread method* di Elliott et al. (2005), si definisce la variabile latente x , la quale segue un processo Ornstein-Uhlenbeck (2.3), mentre lo *spread* y_t , definito come la differenza fra i prezzi dei due *asset* in via assoluta, piuttosto che considerando i *log-price*, può scriversi come:

$$y_t = x_t + Hw_t$$

con:

$$w_t \sim \mathcal{N}(0, 1);$$

$$H > 0$$

A questo punto, nella scelta della strategia da seguire, le decisioni dell'investitore faranno affidamento sulla previsione del valore assunto dallo *spread*, il cui andamento è principalmente guidato da una componente stazionaria.

Do et al. (2006), i quali prenderanno ad esempio lo studio di Elliott et al. (2005) nella stesura del proprio lavoro, inquadrano tre rilevanti vantaggi a qualifica di tale metodo. In primo luogo, dal punto di vista empirico, è possibile cattu-

rare la componente stazionaria, essendo la *mean-reversion* il punto focale del *pair trading*. Inoltre, in quanto modello continuo, si dimostra efficiente sotto l'aspetto previsivo. Infine, si riconosce la semplicità di stima dei parametri del modello, attraverso lo stimatore di massima verosimiglianza. D'altro canto l'analisi è basata sulla differenza tra i prezzi, mentre Do et al. (2006) suggeriscono un'impostazione sulle log-differenze. Difatti, generalmente, la media nel lungo periodo dello *spread* fra i prezzi potrebbe non essere costante, ma ampliarsi al loro aumento e diminuire al decrescere degli stessi. Ad eccezione del caso in cui i titoli vengano negoziati ad un prezzo simile.

Sulla scia del modello continuo presentato da Elliott et al. (2005), si delinea lo ***stochastic residual-spread method*** di Do et al. (2006), il quale considera il *mispricing*, intercorrente tra le serie dei prezzi relativi, come una situazione di momentaneo disequilibrio, quantificato attraverso una specifica *residual spread function* $G(R_t^A, R_t^B, U_t)$, con $R_t^{A,B}$ rendimenti osservati dei titoli *A* e *B* e U_t variabile esogena. Il punto di vista, in questo modo, trasla dall'analisi del prezzo a quella del rendimento, adottando come modello di equilibrio dei mercati finanziari quello a tre fattori di Fama and French (1995). Le equazioni matematiche che definiscono lo *stochastic residual spread model*, in forma discreta, sono:

transition equation:

$$x_t = \theta(1 - e^{-k\Delta}) + e^{-k\Delta}x_{t-1} + \varepsilon_t$$

measurement equation:

$$y_t = x_t + \Gamma r_t^m + Hw_t$$

dove:

$r_t^m = [(R^1 - r_f) \cdots (R^n - r_f)]$, vettore degli extrarendimenti degli n fattori di rischio rispetto al titolo *risk-free*, nel modello di Fama and French (1995);

$\Gamma = [(\beta_1^A - \beta_1^B) \cdots (\beta_n^A - \beta_n^B)]$, con β_j^i coefficiente di sensibilità del rendimento del titolo i -esimo a variazioni del fattore di rischio j -esimo (Fama and French, 1995).

Nelle tradizionali strategie di *pair trading* l'apertura di una posizione in titoli avviene nel momento in cui la divergenza fra le serie dei prezzi raggiunge un certo ammontare. Nel metodo proposto dagli autori la *trigger rule* prevede l'avvio delle negoziazioni quando l'*accumulated residual spread*, relativo alle serie dei rendimenti, è sufficientemente ampio. Per poi procedere alla chiusura delle posizioni assunte una volta raggiunto l'equilibrio di lungo periodo.

Attraverso il momentaneo *mispricing*, esistente all'interno dei mercati finanziari, Liu and Timmermann (2012) teorizzano l'***Optimal Convergence Trade Strategies***, mediante lo studio del problema inerente le scelte di portafoglio. Il modello, presentato dagli autori, fa affidamento principalmente sull'*error correction model*, per un tempo continuo (Engle and Granger, 1987). Questo, grazie alle sue dinamiche correttive, volte a guidare le scelte del generico investitore, permette di trarre vantaggio da una situazione di disequilibrio

nell'attuale prezzaggio di specifici strumenti finanziari. Liu and Timmermann (2012), inoltre, andranno a verificare e dimostrare come sia subottimale, rispetto alla propria metodologia, preferire il metodo *delta-neutral* al fine di costruire un portafoglio *market-neutral*, prendendo come modello di equilibrio dei mercati finanziari il CAPM.

Capitolo 3

Strategia di *pair trading*

3.1 Dataset

In questo capitolo verranno descritti i risultati ottenuti attraverso la simulazione di una strategia di *pair trading*, effettuata su un set di dati riferiti ai prezzi giornalieri di chiusura di un insieme di indici di borsa, tra cui:

- il **NASDAQ Composite Index**, indice ponderato per la capitalizzazione di mercato, composto da azioni ordinarie, ricevute di deposito, *Real Estate Investment Trust* (REIT), *tracking stock* ed interessi in società in accomandita, quotate sul Nasdaq;
- lo **Standard & Poor's 500 Index (SP)**, indice di borsa rappresentativo delle 500 maggiori società statunitensi, considerato come il miglior indicatore di titoli azionari a grande capitalizzazione;

- **Ibovespa Index (BVSP)**, riferito al mercato azionario brasiliano e costituito dalle azioni più negoziate in borsa;
- **CAC40**, indice replicante i 40 titoli azionari francesi con maggior capitalizzazione;
- **DAX30 (GDAXI)**, composto dai 30 titoli a più alta capitalizzazione della borsa di Francoforte;
- **NIKKEI 225 (N225)**, indice ponderato sui prezzi per le 225 società *blue chip* giapponesi, quotate sulla Borsa di Tokyo;
- **Hang Seng Index (HSI)**, indice ponderato per la capitalizzazione di mercato, il quale rispecchia circa il 65% della capitalizzazione totale nella Borsa di Hong Kong;
- **Austrian Traded Index(ATX)**, principale indice azionario della borsa di Wiener, contenente i primi 20 titoli in termini di capitalizzazione e volume delle transazioni;
- **MXX**, indice rappresentativo del mercato azionario Messicano;
- **Amsterdam Exchange Index (AEX)**, indice di riferimento della Borsa Olandese, costituito dai 25 titoli azionari più scambiati sull'Euro-next Amsterdam.

Il periodo di osservazione va dal Gennaio 1994 al Luglio 2019. I dati utilizzati si riferiscono al prezzo di chiusura, aggiustato per i dividendi ed eventuali *split*, la cui fonte è Yahoo Finance.

3.2 Il modello empirico

La procedura che si prenderà ad esempio, nella costruzione dell'algoritmo di *pair trading*, è quella descritta da Caldeira and Moura (2013).

Innanzitutto le singole serie vengono analizzate al fine di valutare la stazionarietà o meno delle stesse. Attraverso l'applicazione del test ADF si evince la non stazionarietà delle serie, e si accerta che siano tutte integrate dello stesso ordine, $I(1)$.

A questo punto, come primo step, è possibile proseguire con l'analisi di cointegrazione. In questa fase, il così detto *formation period*, avviene la formazione delle coppie candidate all'inclusione nel portafoglio d'investimento. L'algoritmo, prendendo come base di partenza il primo anno, esegue il test di Johansen (Johansen, 1991) fra tutte le possibili coppie di indici, reiterando il processo ogni sei mesi, sino all'ultima osservazione del campione. Per ogni coppia, per la quale il rango di cointegrazione risulta uguale ad uno, si definisce lo *spread*, $\varepsilon_t = P_t^l - \gamma P_t^s$, come combinazione lineare stazionaria delle due serie dei prezzi $I(1)$, derivante dallo studio del modello in forma ECM.

Da questo istante si entra nella fase dell'algoritmo dedicata al trading. Il *trading period* comprende i sei mesi immediatamente successivi ad ogni *formation period*. Come *trigger rule* si adotta la stessa metodologia vista in Caldeira and Moura (2013), prendendo come valore soglia quello di due volte la deviazione standard storica dello *spread*. Come si evince dallo studio esposto nel paragrafo (2.3.1), l'opportunità di aprire una posizione sulla coppia implica la presenza di un momentaneo *mispricing* fra le serie dei prezzi dei due indici, attraverso il quale è possibile trarre un vantaggio. I due *asset* costituenti la

coppia sono infatti legati da una relazione di equilibrio, alla quale tendono nel lungo periodo. D'altro canto, nel breve periodo, è possibile che, a causa di eventuali inefficienze di mercato, si registri una divergenza da tale situazione di equilibrio, che crea un'opportunità d'investimento profittevole per il *trader*. Le potenzialità di guadagno sono dunque legate alla forza di convergenza delle due serie.

La *trading rule* è impostata sull'osservazione dello *z-score*, $z_t = \frac{\varepsilon_t - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}$. Ogni qualvolta z_t si attesti al di sopra della soglia massima superiore pari a 2, il portafoglio investito nella coppia risulta sopravvalutato, l'opzione conveniente consiste nel vendere allo scoperto il portafoglio stesso, ovvero vendere l'*asset l* ed acquistare *s*. Simmetricamente se $z_t < -2$ il portafoglio è sottovalutato, quindi al di sotto del suo equilibrio di lungo periodo, dunque converrà acquistare *l* e vendere *s*. Le posizioni saranno chiuse una volta che lo *spread* si ristabilisce lungo il suo equilibrio di lungo periodo. Nello specifico l'algoritmo procederà alla chiusura delle posizioni aperte, rispettivamente alla vendita e all'acquisto del portafoglio, quando $z_t < 0.5$ o $z_t > -0.5$. In aggiunta a questo schema generale, così come in Caldeira and Moura (2013) o Herlemont (2004), si aggiunge una regola di *stop-loss*. L'obiettivo è quello di evitare di incorrere in perdite eccessive che vadano a corrodere gli eventuali guadagni raggiunti con l'implementazione della suddetta strategia di arbitraggio. Dunque ogni posizione non sarà mantenuta per più di 50 giorni, vista la stima del tempo necessario alla convergenza, in media, uguale a 15 giorni. Nel caso in cui, una volta aperta una posizione, lo *spread* non si ristabilisca verso il proprio valore di equilibrio di lungo periodo ma continui a divergere, o il periodo di aggiu-

stamento risulta superiore al limite dei 50 giorni, la posizione verrà chiusa. Inoltre, al termine del *trading period* ogni posizione, che risulti ancora aperta, verrà comunque chiusa.

3.3 Analisi dei risultati

Giunti a questo punto, si effettua l'analisi dei risultati ottenuti attraverso l'applicazione concreta dell'algoritmo sopra descritto al *dataset* oggetto di studio. La Tabella 3.1 sintetizza il risultato dell'analisi di cointegrazione effettuata su alcune coppie di indici selezionati, per il periodo fra il il Gennaio 1998 e Dicembre 1998, assieme alla stima del relativo coefficiente di correlazione ρ_{ij} . È possibile affermare, ad esempio, che le coppie AEX-CAC40, AEX-GDAXI o NASDAQ-S&P500 nonostante il coefficiente ρ_{ij} sia particolarmente alto, non vengono inserite nel portafoglio d'investimento, in quanto queste non superano il test di cointegrazione. Situazione diametralmente opposta per quanto riguarda invece la coppia HSI-ATX, dove il test di cointegrazione indica la presenza di una relazione di lungo periodo stazionaria fra i due indici, nonostante il coefficiente di correlazione sia relativamente vicino allo zero. Tale evidenza empirica risulta coerente con il pensiero di Alexander (1999), già esposto nel paragrafo (2.2), secondo il quale correlazione e cointegrazione sono due concetti sicuramente legati fra loro, ma un'alta correlazione non implica necessariamente un'alta cointegrazione e viceversa. Inoltre lo stesso autore ricorda come l'indice di correlazione sia connesso ad andamenti di breve periodo delle variabili, mentre l'attuale analisi intende cogliere aspetti guidati da di-

Coppia	Coefficiente di correlazione ρ_{ij}	Cointegrazione
AEX - CAC40	0.9457	NO
AEX - GDAXI	0.9389	NO
NASDAQ - S&P500	0.9616	NO
HSI - ATX	0.1130	SI
ATX - MXX	0.7038	SI

Tabella 3.1: Correlazione *vs* Cointegrazione, dati riferiti al periodo Gennaio-Dicembre 1998.

namiche di lungo periodo, dunque legate allo studio della stazionarietà dello *spread* fra le variabili. Successivamente si andranno infatti a confrontare i risultati ottenuti dal *pair portfolio*, contro l'utilizzo di decisioni d'investimento basate sulle correlazioni fra gli indici di mercato.

In ogni periodo il portafoglio d'investimento sarà composto dalle coppie di indici cointegrati, secondo il *fully invested weighting scheme* (Caldeira and Moura, 2013).

Si riporta di seguito un esempio di serie cointegrate, estrapolando i dati riferiti al periodo Gennaio-Dicembre 2012, per i due indici HSI e ATX (Figura 3.1). Notiamo empiricamente come l'andamento delle due serie storiche dei prezzi sia simile nel tempo, con un trend osservato di natura crescente. Quest'ultima caratteristica porta a sviluppare uno studio sulla relazione di cointegrazione basata sul cosiddetto caso 3 della procedura di Johansen (Johansen, 1991).

Estrapolando poi l'andamento della relazione stazionaria fra i due indici, ovvero dello *spread* (Figura 3.2), notiamo come questo oscilla attorno allo zero in quanto valore di equilibrio del modello, vista la standardizzazione delle variabili effettuata a monte. Come già esposto nel paragrafo (2.3.1), Caldeira

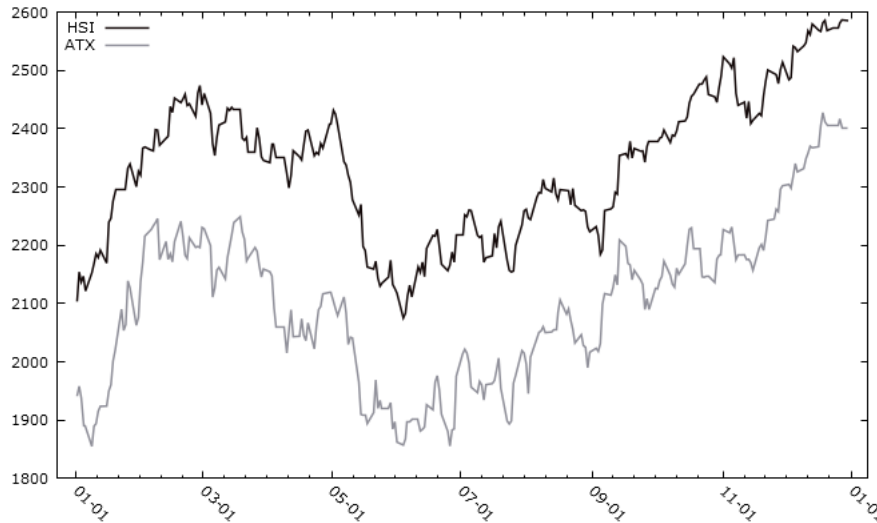


Figura 3.1: Serie storiche dei prezzi, Gennaio-Dicembre 2012

and Moura (2013) definiscono infatti lo *z-score* come misura della distanza dei residui di cointegrazione dall'equilibrio in unità di deviazione standard.

La Figura 3.2, inoltre, permette di chiarire visivamente quale sia il metodo seguito dall'algorithm nella fase di *trading*. Terminati i 12 mesi dedicati alla selezione delle coppie cointegrate, nel primo semestre del 2013 sarà intrapresa l'attività di negoziazione. Osservando le due soglie principali, in corrispondenza di ± 2 , si procederà all'apertura di una posizione ogni qualvolta lo *spread* superi tali limiti. Non è altro che una *long-short strategy* dove si acquista l'*asset* sottovalutato e si vende allo scoperto quello sopravvalutato. Da qui in poi si attende la nuova convergenza della serie verso il suo valore atteso, impostando la chiusura della posizione aperta una volta superata la seconda soglia di ± 0.5 . L'apertura così come la chiusura di una posizione genera l'esecuzione, nello stesso istante, di due transazioni, aventi ad oggetto gli *asset* costituenti la coppia. Sotto quest'ottica è necessario discutere dei costi di transazione

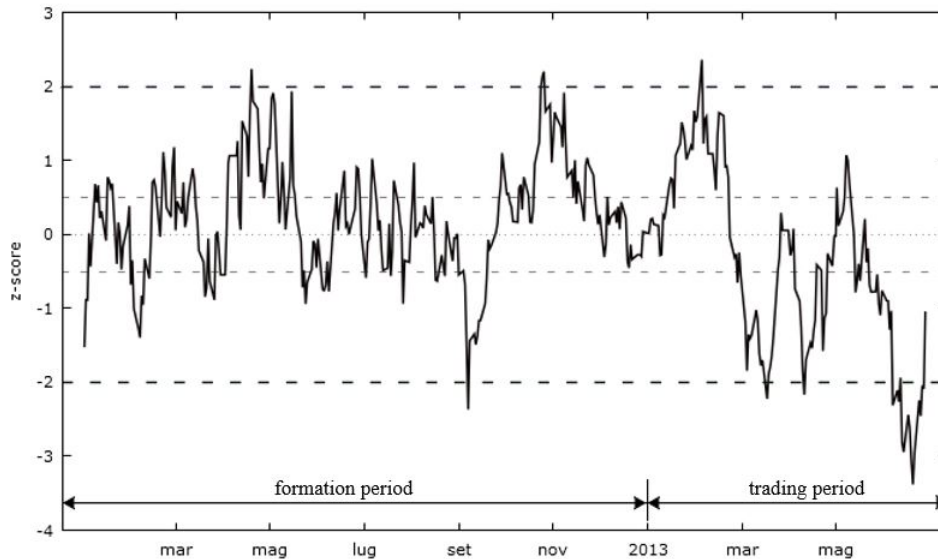


Figura 3.2: Spread normalizzato fra i due indici HSI-ATX per il periodo Gennaio 2012-Giugno 2013.

che intervengano nell'operazione d'investimento. A livello teorico, è possibile condurre un'analisi escludendo i costi di transazione, questo con l'obiettivo di semplificare lo studio e di valutare unicamente la logica alla base del metodo sottostante la strategia. D'altro canto, l'eliminazione dei suddetti costi non garantisce una concreta ed appropriata stima della realtà di mercato. Difatti variazioni nei costi di transazione influenzano la profittabilità nell'esecuzione di una specifica transazione. Allo stesso modo, come in Caldeira and Moura (2013), nel presente studio si considerano costi di transazione pari allo 0.25% applicato ad ogni singola operazione, dunque per ogni apertura o chiusura la spesa totale ammonterà allo 0.5%.

A seguire si esaminano le performance realizzate nell'esecuzione di tale strategia di *pair*, dove per le modalità di calcolo dei rendimenti si rimanda sempre a Caldeira and Moura (2013). La Tabella (3.2) riporta, per ogni periodo di

osservazione, il rendimento medio giornaliero, la deviazione standard e il *daily Sharpe Ratio*¹. In alcuni periodi il rendimento è pari a zero, ciò trova ragione sia, a volte, nella mancanza di cointegrazione scaturita dall'analisi nel *formation period*, sia dal mancato superamento delle soglie di riferimento nel *trading period*, ovvero nonostante la presenza di coppie cointegrate non si presenta la convenienza ad investire sulle stesse. Inoltre, in alcuni casi, il rendimento risulta negativo, la spiegazione a tale comportamento è dipesa dalla necessità di chiusura forzata delle posizioni una volta raggiunto il termine del periodo di negoziazione, o per rispetto della *stop-loss*. Solo dall'analisi giornaliera dei sottoperiodi, emerge la possibilità di chiusura in perdita di alcune posizioni a causa dei guadagni esigui rispetto ai relativi costi di transazione da dover sostenere, ma tali casi si dimostrano sporadici e compensati dalle successive negoziazioni, sulla stessa coppia e nello stesso *trading period*, che garantiscono un risultato complessivo positivo. Il rendimento medio giornaliero maggiore si registra rispetto all'anno di formazione 2018, ma da notare come ad un maggior rendimento sia associato un indice di rischio altrettanto più alto rispetto ad altri periodi. Notiamo poi come una delle performance più basse si trovi in corrispondenza degli anni 2006-2007 con un incremento della relativa volatilità, anche se il risultato peggiore si manifesta nel secondo semestre del 1995.

Si mettono ora a confronto i risultati ottenuti tramite l'investimento attraverso la strategia di *pair* contro due differenti alternative. La prima prevede di investire in un portafoglio composto dagli *spread* fra le coppie cointegrate così definito $s_t = P_t^l - P_t^s$. Dunque, questa seconda strategia di *trading*, pur

¹Calcolato come il rapporto fra il rendimento medio di portafoglio e la deviazione standard di portafoglio.

Formation period	Trading period	Rendimento medio giornaliero	Dev. st. giornaliera	Sharpe Ratio	#coppie cointegrate	#coppie negoziate
01/94 - 12/94	01/95 - 06/95	0,0042647329	0,0046355102	0,920013702	3	2
07/94 - 06/95	07/95 - 12/95	-0,000644566	0,0016250612	-0,396641062	2	2
01/95 - 12/95	01/96 - 06/96	0,000474883	0,0019902498	0,238604722	4	1
07/95 - 06/96	07/96 - 12/96	0,00697812	0,015066388	0,463158124	2	1
01/96 - 12/96	01/97 - 06/97	0,00232104	0,0049402242	0,469824831	2	2
07/96 - 06/97	07/97 - 12/97	0,00136404	0,0017078485	0,798689111	3	3
01/97 - 12/97	01/98 - 06/98	/	/	/	1	0
07/97 - 06/97	07/98 - 12/98	0,00939548	0,016267852	0,577548898	1	1
01/98 - 12/98	01/99 - 06/99	0,000796768	0,0012378006	0,64369657	2	1
07/98 - 06/98	07/99 - 12/99	/	/	/	0	0
01/99 - 12/99	01/00 - 06/00	0,00212483	0,0025778064	0,824278348	4	4
07/99 - 06/00	07/00 - 12/00	/	/	/	0	0
01/00 - 12/00	01/01 - 06/01	/	/	/	0	0
07/00 - 06/01	07/01 - 12/01	0,0026233481	0,012281326	0,21360463	5	3
01/01 - 12/01	01/02 - 06/02	0,0025455	0,0034377803	0,740448713	11	11
07/01 - 06/02	07/02 - 12/02	0,0002704555	0,004714779	0,057363346	2	2
01/02 - 12/02	01/03 - 06/03	0,00126943	0,0024430433	0,519610111	2	2
07/02 - 06/03	07/03 - 12/03	0,00050835096	0,00059991178	0,847376193	2	2
01/03 - 12/03	01/04 - 06/04	/	/	/	1	0
07/03 - 06/04	07/04 - 12/04	0,002507448	0,003648336	0,687285382	2	2
01/04 - 12/04	01/05 - 06/05	0,000987424	0,0018912506	0,52210109	7	3
07/04 - 06/05	07/05 - 12/05	-1,0100431e-005	0,00057102934	-0,017688112	9	9
01/05 - 12/05	01/06 - 06/06	0,000238216	0,00044587032	0,534271938	8	6
07/05 - 06/06	07/06 - 12/06	/	/	/	3	0
01/06 - 12/06	01/07 - 06/07	0,0012042	0,0018617047	0,646826535	1	1
07/06 - 06/07	07/07 - 12/07	0,00018674867	0,00092730574	0,201388455	1	1
01/07 - 12/07	01/08 - 06/08	/	/	/	0	0
07/07 - 06/08	07/08 - 12/08	0,0027111055	0,0086371608	0,313888506	6	4
01/08 - 12/08	01/09 - 06/09	0,000341168	0,0011396156	0,299371121	9	7
07/08 - 06/09	07/09 - 12/09	-0,00028426134	0,0016672301	-0,170499165	6	5
01/09 - 12/09	01/10 - 06/10	-0,000322066	0,0019752633	-0,163049655	8	8
07/09 - 06/10	07/10 - 12/10	/	/	/	0	0
01/10 - 12/10	01/11 - 06/11	0,000122265	0,00054304119	0,225148667	2	2
07/10 - 06/11	07/11 - 12/11	/	/	/	2	0
01/11 - 12/11	01/12 - 06/12	0,00365466	0,0055117303	0,663069454	3	3
07/11 - 06/12	07/12 - 12/12	/	/	/	2	0
01/12 - 12/12	01/13 - 06/13	0,00057527	0,001032047	0,557406785	2	2
07/12 - 06/13	07/13 - 12/13	4,5102385e-005	0,0016222771	0,0278019	1	1
01/13 - 12/13	01/14 - 06/14	/	/	/	0	0
07/13 - 06/14	07/14 - 12/14	0,0023262307	0,0052760044	0,44090765	3	3
01/14 - 12/14	01/15 - 06/15	/	/	/	2	0
07/14 - 06/15	07/15 - 12/15	0,00075585054	0,0017091837	0,442228966	2	2
01/15 - 12/15	01/16 - 06/16	0,00217395	0,0030965823	0,70204819	2	2
07/15 - 06/16	07/16 - 12/16	0,0064274191	0,033202789	0,193580699	5	4
01/16 - 12/16	01/17 - 06/17	0,000290092	0,0003956661	0,733173754	9	5
07/16 - 06/17	07/17 - 12/17	0,0014753118	0,001861668	0,792467722	1	1
01/17 - 12/17	01/18 - 06/18	/	/	/	0	0
07/17 - 06/18	07/18 - 12/18	/	/	/	0	0
01/18 - 12/18	01/19 - 06/19	0,0132449	0,02711975	0,488385771	1	1

Tabella 3.2: *Pair trading portfolio performance*

selezionando le coppie che superano il test di Johansen (Johansen, 1991), non va a prendere in considerazione la relazione stazionaria derivante dall'ECM fra gli indici di ogni coppia, ma analizzerà l'andamento della semplice differenza tra i prezzi. Come terza metodologia, il portafoglio viene generato in base alle dinamiche associate al coefficiente di correlazione fra le coppie di indici. Quindi, in tale contesto, verranno selezionate le coppie con un indice di correlazione superiore allo 0.9, investendo poi sul relativo *spread*, ancora definito come $s_t = P_t^l - P_t^s$, laddove vengano superate le medesime soglie di $\pm 2\sigma$.

Dalla Tabella(3.3) si evidenzia innanzitutto come le performance realizzate dalla strategia di *pairs trading* siano in generale superiori rispetto agli altri due casi, sottolineando come la nostra strategia garantisca un rendimento maggiore anche nel periodo corrispondente la crisi finanziaria sfociata fra il 2007-2008. Infatti, riferendosi all'anno 2008, si osserva un rendimento maggiore per il *pair portfolio*, seppur in rapporto ad un indice di rischio superiore. Spostando però l'attenzione sull'indice di performance aggiustato per il rischio, lo *Sharpe Ratio* per la prima strategia supera il livello di quello delle due concorrenti ed inoltre il MDD è uguale a 2.83, differentemente dal 4.22 dello *spread portfolio* e dal 6.3 del *correlation portfolio*. Un basso valore del MDD garantisce una variabilità dei rendimenti più stabile nel tempo.

Anno	PAIR PORTFOLIO				SPREAD PORTFOLIO				CORRELATION PORTFOLIO			
	\bar{r}	$\bar{\sigma}$	Sharp Ratio	MDD	\bar{r}	$\bar{\sigma}$	Sharp Ratio	MDD	\bar{r}	$\bar{\sigma}$	Sharp Ratio	MDD
1995	0.001796165	0.004236971	0.423926554	0.4816845	0.000397278	0.000793924	0.500398679	0.28163693	0	0.00020095	0.000919929	0
1996	0.003669602	0.011132211	0.329638221	0.5605103	0.000178129	0.000978789	0.181989589	0.57747882	0.000585774	0.000765098	0.218440771	0.368814556
1997	0.001821368	0.003703696	0.491770324	0.34312252	0.000364402	0.000833736	0.437071774	1.15320334	0.000585774	0.000765098	0.765619568	0.900459574
1998	0	0	0	2.663622	0	0	0	1.15320334	6.61e-05	0.000931486	0.070966284	1.437994023
1999	0.000393802	0.000955812	0.412008131	2.7570327	0	0	0	1.15320334	0.000181785	0.002279899	0.079733795	1.843859103
2000	0.002160015	0.005515941	0.391595044	3.09962623	0.000250535	0.000738875	0.339076539	1.52012552	0.000131945	0.001723472	0.07655767	2.448568371
2001	0.001296588	0.008716578	0.148749628	2.22421626	0.000254176	0.000507936	0.500410683	1.90877558	0.000265131	0.000534987	0.495584005	2.850728651
2002	0.001391782	0.004250748	0.327420577	1.975106046	0.000224669	0.000387596	0.579049278	2.367978464	0.000217062	0.000464004	0.467802002	3.32485319
2003	0.000878671	0.001807823	0.486038209	1.909558346	-3.19e-05	0.000460521	-0.069377487	2.73462896	0.000131724	0.000414732	0.317612338	3.51990168
2004	0.001234588	0.002846961	0.433651195	1.978899926	0	0	0	2.73462896	7.77e-05	0.000456094	0.170307217	4.2005789
2005	0.000484902	0.001475967	0.32853171	1.954169674	-2.34e-06	0.000388841	-0.006005027	3.187652857	-0.000138339	0.000532531	-0.259776426	4.54288744
2006	0.000118191	0.000335392	0.352396535	2.137601007	3.59e-05	0.000196033	0.18295864	3.538636083	0.000211707	0.00035275	0.595896137	4.99029552
2007	9.23e-05	0.000657327	0.140420701	2.689077217	0.000457064	0.001170112	0.390615134	3.789042383	5.10e-06	0.000193522	0.026361706	5.5369592
2008	0.001334848	0.006199131	0.215328292	2.830219194	4.83e-05	0.000258835	0.18662296	4.223264193	-1.11e-05	0.00040448	-0.027380835	6.3040734
2009	2.81e-05	0.001450815	0.019382926	2.814828531	9.01e-05	0.000197926	0.452279543	4.451503353	-4.73e-05	0.00063773	-0.071920849	6.615671
2010	-0.000159184	0.001395297	-0.114086274	3.065900401	0.000137333	0.000381817	0.359683949	4.724090353	0.000222637	0.000477591	0.466166657	6.946901841
2011	6.07e-05	0.000386641	0.156895632	3.112626671	1.43e-05	0.000260222	0.055074866	5.440746903	0.000163919	0.000204713	0.800725894	7.800258942
2012	0.001806361	0.004278802	0.422165278	3.286958751	-0.000106873	0.000255475	-0.418333107	5.848264913	4.72e-05	0.000149084	0.316328379	8.097832822
2013	0.000306625	0.001375081	0.222987123	3.003102838	0.000175571	0.000457283	0.383944275	6.151324183	0.000107915	0.000397383	0.271564209	8.589946305
2014	0.001149744	0.003880924	0.296255205	3.060097262	7.35e-05	0.000216721	0.339031752	6.404140022	0.000145729	0.000875517	0.166449081	8.837562305
2015	0.000373583	0.001257592	0.297062021	3.153144413	0.000271498	0.000715007	0.379713438	6.642378102	0.000133248	0.000636453	0.209360314	8.895472285
2016	0.004251229	0.023497748	0.180920688	3.458570123	0.000725804	0.001314307	0.552233481	7.25070632	-3.46e-05	0.000208857	-0.1165690879	8.964468785
2017	0.000875911	0.001464922	0.597923386	2.39809019	2.32e-06	0.000278735	0.008317382	7.7707376	8.41e-05	0.000384777	0.218639888	9.379295207
2018	0	0	0	2.39809019	0	0	0	7.7707376	0.000273933	0.000620868	0.441209726	9.762604927
1° sem 2019	0.013244961	0.027119847	0.488386291	3.50083019	0	0	0	7.7707376	-6.80e-05	9.45e-05	-0.719480459	10.1212742

Tabella 3.3: Confronto fra le tre differenti strategie di trading

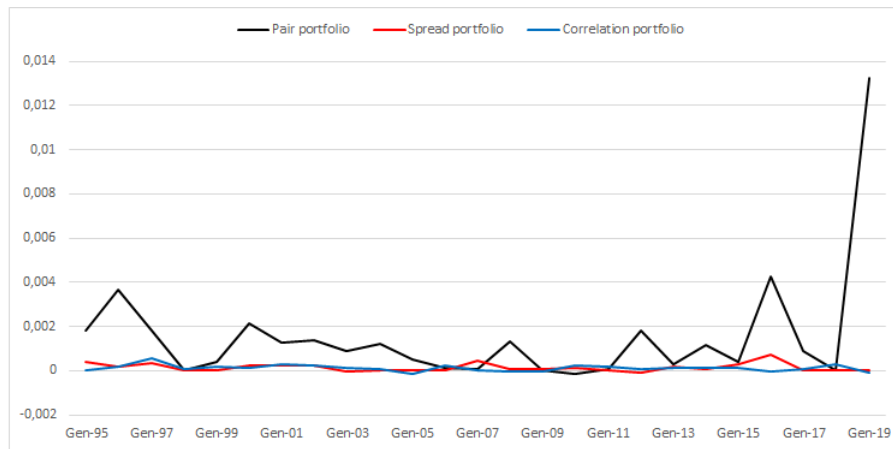


Figura 3.3: Rendimenti medi giornalieri per le tre strategie di arbitraggio a confronto, 1995-2019.

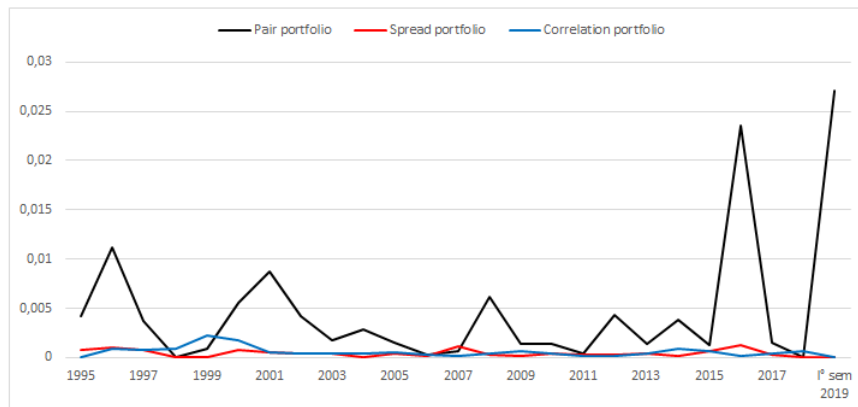


Figura 3.4: Deviazioni standard medie giornaliere per le tre strategie di arbitraggio a confronto, 1995-2019.

Parlando in termini di profitto cumulato sull'intero periodo di osservazione (Figura 3.6) il rendimento giornaliero per la strategia di *pair*, nel complesso, continua a crescere fino al 2005-2006 dove il *trend* cambia e inizia la sua discesa. Tale comportamento risulta in linea con il contesto macroeconomico corrispondente la crisi finanziaria scoppiata fra il 2007-2008. Quindi, nono-

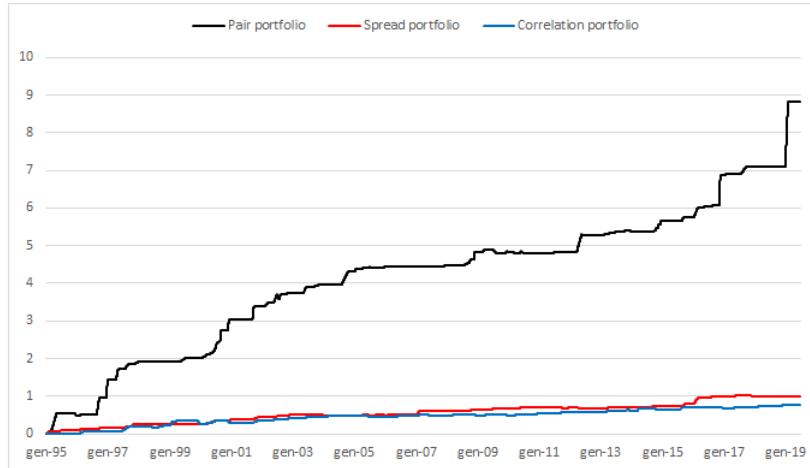


Figura 3.5: Rendimenti medi giornalieri cumulati per le tre strategie di arbitraggio a confronto, 1995-2019.

stante la presenza di difficoltà a livello sistemico, che portarono al manifestarsi di significative perdite per differenti strategie di arbitraggio statistico, nel caso del *pair trading*, seppur si verifichi una riduzione dei profitti, questi rimangono positivi e superiori agli altri due casi (Figura 3.7). La volatilità a sua volta tende ad aumentare ma rimanendo comunque all'interno di soglie sostenibili di rischiosità. I profitti torneranno poi gradualmente ad aumentare iniziando dalla fine del 2008 e nel primo semestre del 2009. Attraverso un'analisi, condotta giorno per giorno, vista la mancata esclusione dei costi di transazione, in molti casi si registra un rendimento molto basso rispetto alla media o addirittura negativo, comportamento che si manifesta con maggior frequenza nello *spread* e nel *correlation portfolio*.

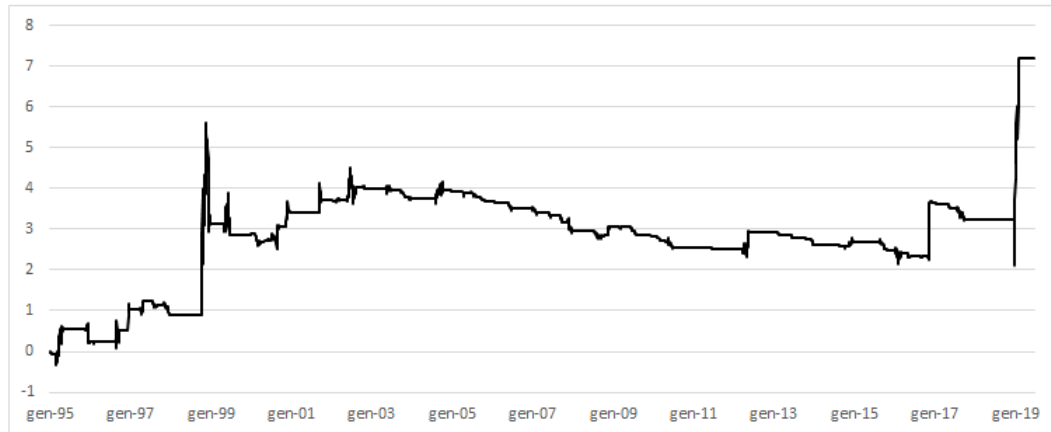


Figura 3.6: Rendimento giornaliero cumulato della strategia di *pair trading* 1995-2019.

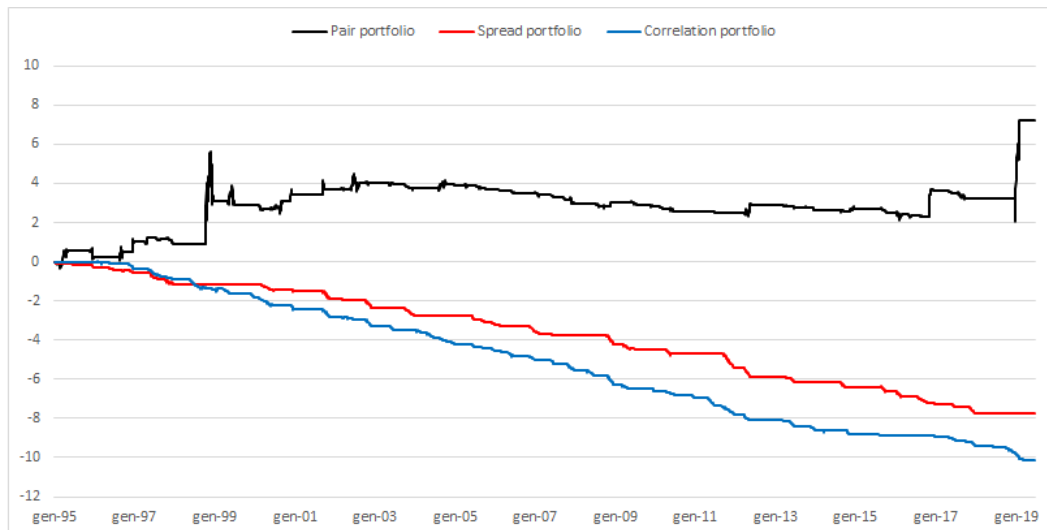


Figura 3.7: Rendimenti giornalieri cumulati delle tre tecniche a confronto, 1995-2019.

Capitolo 4

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi, attraverso un excursus su differenti metodologie di *portfolio hedging* mediante l'utilizzo delle relazioni di cointegrazione, si concentra sullo studio dell'applicazione ad un caso concreto della strategia di arbitraggio statistica quale il *pair trading*. È stato interessante scoprire come sia possibile applicare, nella realtà, i risultati teorici derivanti dallo studio dell'andamento delle serie storiche dei prezzi delle variabili considerate. L'intera logica sottostante la strategia è legata all'osservazione delle serie per coppie, in particolare si esamina la *mean-reversion* della combinazione lineare istituita su ogni coppia di indici, analizzando il modello cointegrato in forma ECM. Per ogni periodo di osservazione, sulle 28 possibili coppie, vengono generate in media 3 coppie che superano con successo il test di Johansen, le quali accedono al passo successivo inerente la fase di *trading*.

Come confermato dall'analisi empirica, è possibile generare profitti significativamente superiori mediante l'utilizzo di tale tecnica di arbitraggio rispetto

ad altre messe a confronto nel capitolo precedente, con un livello di rischiosità contenuto, il quale rimane mediamente al di sotto dello 0.5% durante tutto il periodo.

Quella del *pair trading* è una strategia ampiamente flessibile, è possibile infatti adattarla alle diverse esigenze dell'operatore di mercato. Ad esempio si potrebbero variare le soglie riferite alla *trigger rule*, impostando un livello soglia inferiore e sfruttare in questo modo maggior opportunità d'investimento. Difatti, nello studio proposto al Capitolo 3, il limite fissato a 2σ in alcuni casi portava ad eliminare dalle negoziazioni talune coppie che risultavano invece cointegrate, secondo il test di Johansen. Altra variabile soggetta a potenziali modifiche è il fattore temporale, potendo variare la durata del *formation* o del *trading period*, così come estendere l'intero studio sull'analisi dei dati ad alta frequenza piuttosto che su base giornaliera. Un ulteriore punto d'interesse riguarda l'analisi di settore, ovvero la valutazione da effettuare a priori nella scelta degli *asset* oggetto del campione (Herlemont, 2004). In corrispondenza delle modalità di inserimento delle coppie nel portafoglio di negoziazione e della successiva quantificazione del contributo in termini di rischio e rendimento apportato da ognuna di esse, anzichè utilizzare uno schema di natura naïve si potrebbe incorporare all'analisi lo studio delle allocazioni ottimali di portafoglio. Allo stesso modo si potrebbe variare lo schema di riferimento nel calcolo dei rendimenti e adottare ad esempio il *committed capital scheme*, dove andrà a considerarsi anche il costo opportunità per le risorse stanziare a favore delle coppie cointegrate, che non saranno poi negoziate durante il *trading period*.

L'altra faccia della medaglia però è collegata allo stesso principio che guida

la logica dell'intera strategia, ovvero la relazione di lungo periodo intercorrente fra gli *asset* della coppia. Investire nella coppia cointegrata, infatti, include l'evenienza che la divergenza dalla relazione di equilibrio, la quale crea essa stessa l'opportunità di aprire una posizione e guadagnare dal momentaneo *mispricing*, sia invece fonte di perdita per il *trader*. Tanto è vero che, se le serie non tornano più all'equilibrio o i tempi di aggiustamento sono eccessivamente lunghi, si potrebbe incorrere in perdite significative. Ecco la ragione dell'inserimento di una soglia limite all'investimento, in questo caso prevista per 50 giorni, ma si potrebbe anche pensare di aggiungere una soglia connessa al fattore rendimento oltre che a quello temporale. Ad esempio la chiusura della posizione potrebbe avvenire nel momento in cui si registri un rendimento inferiore al -2% .

Infine, impostando il discorso in termini di rendimento, spicca l'importanza attribuita al ruolo dei costi di transazione. Muovendosi ad esempio sui dati ad alta frequenza, in taluni casi nonostante la presenza di un'opportunità di arbitraggio questa potrebbe rivelarsi impossibile da mettere in pratica, per via delle spese che a prescindere superano il potenziale guadagno. Gli stessi risultati al Capitolo 3 dimostrano come i costi di transazione influenzino negativamente i rendimenti di periodo, riducendo il margine di profitto realizzabile. Si potrebbero così incorporare nel modello costi di transazione differenti, deducibili da analisi di mercato che tengano conto di ulteriori fattori oltre quelli computati da Caldeira and Moura (2013).

Bibliografia

Acharya, V., L. Pedersen, T. Philippon, and M. Richardson

2010. *Measuring Systemic Risk*. New York University: Working Paper.

Adrian, T. and M. Brunnermeier

2011. *COVAR*. Federal Reserve Bank of New York: Working Paper.

Alexander, C.

1999. Optimal hedging using cointegration. *Philosophical Transaction of the Royal Society Series A*, 357:2039–2058.

Alexander, G. J. and A. M. Baptista

2008. Active portfolio management with benchmarking: adding a value-at-risk constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32:779–820.

Banulescu, G. D. and E. I. Dumitrescu

2015. Which are the sifs? a component expected shortfall approach to systemic risk. *Journal of Banking and Finance*, 50:575–588.

Billio, M., M. Getmansky, A. Lo, and L. Pelizzon

2012. Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors. *Journal of Financial Economics*, 104:535–559.

BM&FBOVESPA

2014. *BM&FBOVESPA INDICES: CONCEPTS AND PRACTICES MANUAL*. BM&FBOVESPA: [publisher unknown].

Brownless, C. T. and R. F. Engle

2015. Srisk: A conditional capital shortfall measure of systemic risk. *SSRN*.

Caldeira, J. F. and G. V. Moura

2013. Selection of a portfolio of pairs based on cointegration: A statistical arbitrage strategy. *Brazilian Review of Finance*, 11:49–80.

Do, B., R. Faff, and K. Hamza

2006. A new approach to modeling and estimation for pairs trading. *School of Mathematical Sciences, Monash University*.

Dunis, C. L., G. Giorgini, J. Laws, and J. Rudy

2010. Statistical arbitrage and high-frequency data with an application to eurostoxx 50 equities. *CIBEF Working Papers*.

Elliott, R. J., J. V. DerHoek, and W. P. Malcolm

2005. Pairs trading. *Quantitative Finance*, 5:271–276.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger

1987. Cointegration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55:251–276.

Fama, E. and K. French

1995. Size and book-to-market factors in earnings and returns. *Journal of Finance*, Pp. 131–155.

Gatarek, L. T. and S. Johansen

2014. Optimal hedging with the vector autoregressive model. *Tinbergen Institute*.

Gatev, E., W. N. Goetzmann, and K. G. Rouwenhorst

2006. Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule. *The Review of Financial Studies*, 19:797–827.

Girardi, G. and A. Ergün

2013. Systemic risk measurement: Multivariate garch estimation of covar. *Journal of Banking and Finance*, 37:3169–3180.

Herlemont, D.

2004. Pairs trading, convergence trading, cointegration.

Holló, D., M. Kremer, and M. L. Duca

2012. *CISS - a composite indicator of systemic stress in the financial system*.
European Central Bank: ECB Working Paper No. 1426.

Huang, X., H. Zhou, and H. Zhu

2009. A framework for assessing the systemic risk of major financial institutions. *Journal of Banking and Finance*, 33:2036–2049.

Johansen, S.

1991. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive model. *Econometrica*, 59:1551–1580.

Jorion, P.

2003. Portfolio optimization with constraints on tracking error. *Financial Analysts Journal*, 59:70–82.

Lei, Y. and J. Xu

2015. Costly arbitrage through pairs trading. *Journals of Economic Dynamics and Control*, 56:1–19.

Liu, J. and A. Timmermann

2012. Optimal convergence trade strategies. *Rady School of Management*.

López-Espinosa, G., A. Moreno, A. Rubia, and L. Valderrama

2012. Short-term wholesale funding and systemic risk: A global covar approach. *Journal of Banking and Finance*, 36:3150–3162.

Markowitz, H. M.

1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–90.

Markowitz, H. M.

1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley.

Palomba, G. and L. Riccetti

2012. Portfolio frontiers with restrictions to tracking error volatility and value at risk. *Journal of Banking and Finance*, 36:2604–2615.

Roll, R.

1992. A mean/variance analysis of tracking error. *Journal of Portfolio Management*, 18:13–22.

Ross, S. A.

1976. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13:341–360.

Uhlenbeck, E. G. and L. S. Ornstein

1930. On the theory of the brownian motion. *Physical Review*, 36:823–841.

Vasicek, O. A.

1977. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188.

Vidyamurthy, G.

2004. *Pairs Trading, Quantitative Methods and Analysis*. Canada: John Wiley & Sons.

Wilder, J. W.

1978. *New concepts in technical trading systems*. Winston-Salem, North Carolina: Hunter Publishing Company.