



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Studio sulla sincronizzazione attraverso
modelli matematici ed empirici
Study of synchronisation with
mathematical and empirical models**

Candidato:
Matteo Guiducci

Relatore:
Prof. Pierpaolo Belardinelli

Anno Accademico 2021-2022



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA

**Studio sulla sincronizzazione attraverso
modelli matematici ed empirici
Study of synchronisation with
mathematical and empirical models**

Candidato:
Matteo Guiducci

Relatore:
Prof. Pierpaolo Belardinelli

Anno Accademico 2021-2022

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCANICA
Via Brezze Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

Ringraziamenti

Un sentito grazie al Prof. Pierpaolo Belardinelli per avermi seguito nello sviluppo della tesi. Una menzione va anche alla mia famiglia e a tutti coloro che mi hanno supportato e mi sono stati a fianco durante questo percorso.

Ancona, Febbraio 2023

Matteo Guiducci

Sommario

La sincronizzazione è un fenomeno tanto invisibile quanto presente in natura, e le sue dinamiche sono oggetto di studio in svariati campi scientifici. In questo elaborato è stata fatta un'introduzione teorica del fenomeno e sulle ricerche più importanti a riguardo che si sono susseguite nella storia. Si è poi passati alla trattazione di alcuni modelli capaci di interpretare attraverso leggi matematiche i sistemi in cui tende a manifestarsi la sincronizzazione, andando ad evidenziarne infine i limiti e possibili miglioramenti nella parte conclusiva. Per la stesura di questo elaborato sono state preve visione di svariate fonti sull'argomento, le quali sono tutte allegate in coda al documento.

Indice

1	La sincronizzazione: presentazione generale del fenomeno	1
1.1	Introduzione alla sincronizzazione	1
1.2	Sincronizzazione nelle specie animali	2
1.3	Sincronizzazione negli oggetti inanimati	3
1.4	Primi studi sull'oscillazione del pendolo	6
1.4.1	Il pendolo di Huygens	6
1.4.2	Il modello di Van Der Pol	7
1.5	Introduzione al modello matematico dei metronomi	8
1.5.1	Le equazioni del moto	8
2	Studio della sincronizzazione dei metronomi mediante Matlab	11
2.1	Il modello sperimentale	11
2.1.1	Preparazione del modello	11
2.1.2	Registrazione e conversione del segnale in Matlab	13
2.1.3	Differenze tra fase e controfase all'interno dei grafici	18
2.2	Il modello matematico	20
2.2.1	Semplificazione del sistema in equazioni del primo ordine	21
2.2.2	Impostazione dei parametri: le condizioni iniziali	22
2.2.3	Impostazione dei parametri: le costanti del modello	23
2.2.4	Stesura del codice su Matlab	24
2.3	Confronto tra grafico del modello reale e matematico	27
2.3.1	Confronto tra i due modelli in fase	29
2.3.2	Confronto tra i due modelli in controfase	30
3	La sincronizzazione delle lucciole	33
3.1	Introduzione al fenomeno	33
3.1.1	Primi studi sul fenomeno	33
3.1.2	Costruzione dei primi modelli	34
3.1.3	Applicazioni della sincronizzazione delle lucciole	35
3.2	Come comunicano le lucciole: la trasmissione dei dati	35
3.2.1	Modello pacemaker resettabile	35
3.3	Primi modelli basati sulla sincronizzazione	37
3.3.1	La curva di risposta di fase (PCR)	37
3.3.2	Integrate and Fire Oscillators (IFO)	38
3.3.3	Light Controlled Oscillators (LCO)	40
3.3.4	Altri modelli per la sincronizzazione delle lucciole	43

Indice

3.4	Comparazione tra IFO e LCO	44
3.5	Caratterizzazione della risposta alla sincronizzazione	47
3.5.1	Introduzione	47
3.5.2	Primo modello	47
3.5.3	Interazione tra maschi e femmine a livello grafico	50
3.6	Esempio di simulazione delle lucciole tramite algoritmo di Strogatz .	51
3.6.1	Illustrazione del funzionamento	51
3.6.2	Analisi dell'andamento del gioco	53
4	Possibili migliorie dei modelli proposti	55
4.1	Miglioramento modello basato sui metronomi	55
4.1.1	Modifiche al modello	55
4.1.2	Migliorie nella registrazione	56
4.2	Limiti e miglioramenti nello studio sulla sincronia delle lucciole . . .	58

Elenco delle figure

1.1	Esempio di un banco di pesci, da [1]	1
1.2	Immagine di uno stormo di uccelli, da [2]	2
1.3	Immagine di due metronomi che poggiano su una base leggera in legno sostenuta da due lattine vuote, da [3]	4
1.4	Immagine del ponte visto dal lato sud del Tamigi, da [4]	5
1.5	Copertina dell'edizione originale de <i>Horologium Oscillatorium</i> , da [5]	6
1.6	Schizzo raffigurante il pendolo costruito da Huygens, appartenente all'opera originale	7
2.1	I due metronomi	12
2.2	Il righello	12
2.3	Le due lattine	13
2.4	Settaggio esperimento	14
2.5	Grafico relativo alla Figure 2 con i plot blu (a) e rosso (b)	17
2.6	Andamento della sincronizzazione del fenomeno	18
2.7	Plot della registrazione eseguita con metronomi in controfase	19
2.8	Evoluzione della dinamica dei metronomi in controfase	19
2.9	Range di sincronizzazione dei metronomi fatti partire in controfase	20
2.10	Rappresentazione della lunghezza di r_{cm}	24
2.11	Grafico con le quattro soluzioni plottate	27
2.12	Grafico con le variabili θ_1 e θ_2	28
2.13	Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo	28
2.14	Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo	29
2.15	Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo	30
2.16	Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo	31
2.17	Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo	31
3.1	Modello pacemaker resettabile da [6]	36
3.2	Immagine presa da [7] raffigurante: (a) Andamento della sincronizzazione per due IFO accoppiati; (b) Sfasamento per differenti β con $I = 1.25$; (c) Differenti valori di I quando si ha $\beta = 0.1$. (b) e (c) raffigurano delle PRC con $\eta = 1$	39
3.3	Andamento dei parametri necessari a determinare la PCR dei vari LCO, da [7]	41
3.4	PRC ottenuta risolvendo le equazioni differenziali degli LCO, da [7]	42

Elenco delle figure

3.5	Lingue di Arnold per LCO basato su <i>Pteroptyx cribellata</i> , da [7]. A ogni barra colorata è associato un valore di ρ . Sono indicati alcuni dei rapporti possibili (1:1, 2:3, 3:4, 1:2)	43
3.6	Interfaccia utente all'interno di NetLogo, da [8]	44
3.7	Andamento dell'istante di sincronizzazione in funzione di N LCO (in alto) e N IFO (in basso) con i seguenti valori di σ_{rel} : (a) ed (e) pari a 0, (b) ed (f) 0.10×10^{-4} , (c) ed (g) 2.24×10^{-4} e (d) ed (h) 7.07×10^{-4} . Le dimensioni del cerchio sono proporzionali al valore di PTS e la linea verticale rappresenta la deviazione standard. Figura proveniente da [7]	45
3.8	Variazione del grafico in 3.7 ma con β variabile	46
3.9	Confronto tra le configurazioni di IFO e LCO, da [9]	46
3.10	Andamento dei segnali associati al maschio (a) e alla femmina (b) di <i>Photinus carolinus</i> , da [10]	48
3.11	Sequenze di segnali emessi dai maschi (blu) e dalle femmine (rosa) di due differenti specie appartenenti al genere <i>Photinus</i> , da [7]: (a) <i>collustrans</i> ($n_{fmaschio} = n_{ffemmina} = 1$), e (b) <i>greeni</i> ($n_{fmaschio} = 2, n_{ffemmina} = 1$).	50
3.12	Caratteristiche oscillatorie di diverse speci <i>Photinus</i> , da [7]	51
3.13	(a) Svolgimento del gioco a quattro giocatori considerando le quattro variazioni della regola 5 già introdotti. La griglia di gioco può anche essere di forma triangolare (b) o ottagonale (c) . Figura proveniente da [7]	53
3.14	Prima riga: evoluzione del segnale delle quattro lucciole [7]. Seconda riga: diagrammi per osservare se avviene la sincronizzazione in più casi diversi	54
4.1	Area di percezione del suono per microfono classico (a) e microfono direzionale (b)	57

Capitolo 1

La sincronizzazione: presentazione generale del fenomeno

1.1 Introduzione alla sincronizzazione

La sincronizzazione è il processo in cui due o più sistemi interagiscono fra loro in modo da generare movimento reciproco. Si tratta di un fenomeno presente in molteplici contesti, sia fisici che in altri campi scientifici.

Numerosi esempi in cui ha origine la sincronizzazione si possono ritrovare nel mondo animale: il modo in cui gli sciame di lucciole si sincronizzano fra loro accendendosi e spegnendosi alle stesse frequenze [11], gli uccelli che cantano all'unisono, oppure il modo organizzato con cui i banchi di pesci si spostano per fronteggiare i predatori [12].

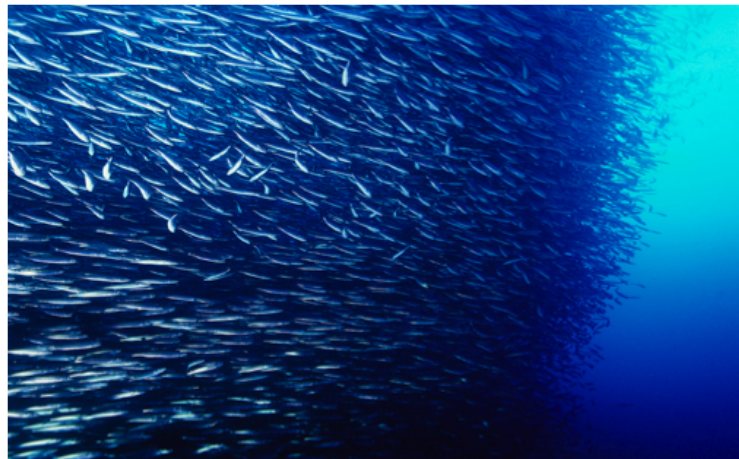


Figura 1.1: Esempio di un banco di pesci, da [1]

Anche gli esseri umani, nella vita di tutti i giorni, sono protagonisti di attività (ad esempio il canto, il ballo o la musica) da cui ha origine la sincronizzazione reciproca: un esempio di questo comportamento, lo si può banalmente trovare nel modo in cui una folla di persone applaude [13].

Normalmente, a conclusione di una qualunque manifestazione, ad esempio un concerto, le persone presenti tendono ad applaudire in maniera disordinata, poiché

ognuno applaude con la propria frequenza ignorando il ritmo disordinato prodotto dagli altri presenti; tuttavia, se a quella stessa folla venisse chiesto di applaudire in maniera sincronizzata, si udiranno prima degli applausi confusionari, per poi rapidamente stabilizzarsi e battere all'unisono.

In questo caso un risultato del genere era facilmente prevedibile, in quanto gli esseri umani, essendo creature più intelligenti delle altre specie animali sono stati immediatamente capaci di allineare i propri battiti di mani non appena è stato chiesto loro di fare ciò.

Il dubbio sorge quando comportamenti simili si possono ritrovare anche negli animali, dove la sincronizzazione non avviene a comando, ma in maniera assolutamente spontanea.

1.2 Sincronizzazione nelle specie animali

Come detto in precedenza, in numerose specie di animali avvengono dei comportamenti che portano alla sincronizzazione, specialmente per difendersi dagli attacchi dei predatori.

Un esempio è dato dal modo con cui gli stormi di uccelli, non appena avvistato il pericolo, tendono a disperdersi e ricomporsi, generando un incredibile spettacolo armonioso.



Figura 1.2: Immagine di uno stormo di uccelli, da [2]

A differenza degli esseri dotati di intelletto come gli umani, ciò che avviene qui non è dettato dal senso di coordinazione reciproca; infatti ogni membro del gruppo tende a darsi una coreografia da solo.

1.3 Sincronizzazione negli oggetti inanimati

Per cercare di dare una risposta al funzionamento di tale fenomeno, un ricercatore di Oxford, Ian Kuzan, realizzò un modello informatico in grado di riprodurre il comportamento di uno sciame.

Ogni elemento di questo sciame deve seguire tre regole precise: essere consapevole solo di ciò che gli sta attorno, allinearsi con gli elementi adiacenti e mantenersi ad una distanza costante da questi ultimi.

In questo modo si riesce a riprodurre un sistema che si comporta in maniera molto simile a uno sciame. Esiste tuttavia un'ulteriore regola: quando un predatore si avvicina, tutti i membri dello sciame tendono a disperdersi in maniera casuale in tutte le direzioni, per poi ricompattarsi secondo le regole citate prima non appena il pericolo si è allontanato.

E'importante sottolineare come ognuno tende a disperdersi agendo in maniera indipendente, senza curarsi del resto del branco, ed è per tale limitazione che questo modello di tipo informatico non fornisce appieno una risposta sul come funziona la sincronizzazione.

Un altro esempio con cui si è riusciti a fare maggiore chiarezza sulla sincronizzazione è dato dagli sciami di lucciole osservabili nelle zone fluviali del sud-est asiatico [11]. In particolare è stato osservato come gli esemplari maschi tendono ad accendersi e spegnersi più volte di seguito, al fine di sincronizzarsi; tale comportamento ha il fine di attirare le femmine con lo scopo di accoppiarsi.

Proprio questa armoniosa sincronizzazione, assente negli sciami che risiedevano nelle terre occidentali, ha destato l'interesse dei primi colonizzatori europei giunti per la prima volta in queste terre. Da queste osservazioni sono arrivati i primi documenti scientifici sull'argomento, in cui si è cercato di giustificare questa strana tendenza all'ordine da parte delle lucciole come una sorta di illusione percepita dall'occhio umano. Quest'ultimo fenomeno descritto verrà trattato maggiormente nel dettaglio nel Capitolo 3.

1.3 Sincronizzazione negli oggetti inanimati

Alla luce dei vari casi presentati nel paragrafo precedente, si potrebbe pensare che il requisito essenziale per riuscire a sincronizzarsi sia quello di essere viventi, ma non è così.

Infatti, anche gli oggetti inanimati sono capaci di potersi sincronizzare tra loro. Un esempio lo si può trovare nel funzionamento dei laser [14], in un comportamento che è denominato sincronia atomica.

A differenza della maggior parte delle fonti di luce artificiali, dove la luce emanata presenta varie sfumature di colore (a causa delle varie frequenze che si sovrappongono), la luce emanata dai laser presenta degli atomi che pulsano tutti insieme alla stessa frequenza, restituendo una luce di un solo colore ben distinguibile.

Uno dei primi esperimenti con cui si è riusciti a dimostrare che anche gli oggetti tendono in qualche modo a sincronizzarsi è anche uno dei più semplici da realizzare:

Capitolo 1 La sincronizzazione: presentazione generale del fenomeno

per farlo si utilizza una coppia di metronomi, ovvero degli strumenti che generano degli impulsi regolari per far andare a tempo i musicisti quando suonano.

Normalmente, se si posizionano entrambi i metronomi su un tavolo, una volta attivati questi tenderanno ad andare in sintonia raramente, se non mai. Infatti, l'unica maniera con cui i metronomi possono influenzarsi vicendevolmente avviene attraverso lo scambio di forze meccaniche che si propagano nel mentre battono il ritmo.

Questo è dovuto al fatto che la struttura su cui poggiano i due metronomi, essendo stabile, impedisce a questi ultimi di comunicare tra loro tramite le loro forze meccaniche, impedendo la sincronizzazione.

Si procede dunque con un altro tentativo, questa volta posizionando i metronomi su una piattaforma mobile come visto in Figura 1.3, la quale è composta da una base sottile (può essere un libro, una tavoletta, un righello) che poggia su due corpi volventi identici (possono essere due bottiglie o lattine vuote).

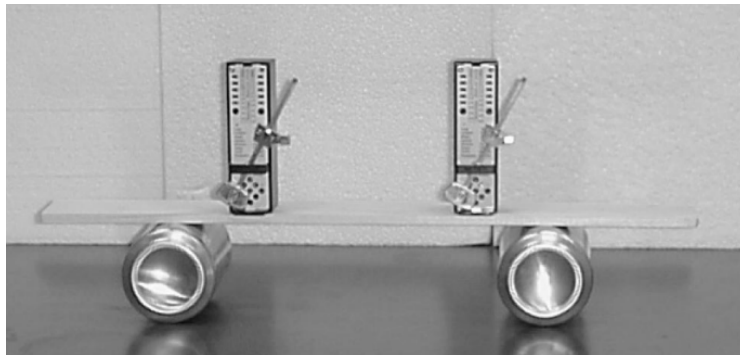


Figura 1.3: Immagine di due metronomi che poggiano su una base leggera in legno sostenuta da due lattine vuote, da [3]

Una volta fatto ciò, si fanno partire i due metronomi fuori sincrono, e dopo qualche secondo questi inizieranno ad andare allo stesso ritmo, contrariamente a quanto successo nel caso precedente.

La spiegazione al perché questo succeda la si può individuare in un fatto che accadde a Londra agli inizi del 2000, quando fu inaugurato il Millennium Bridge, un ponte pedonale che attraversava il Tamigi. La struttura, realizzata in acciaio, era molto sottile, e aveva dei cavi esterni sui lati che la sostenevano (Figura1.4).



Figura 1.4: Immagine del ponte visto dal lato sud del Tamigi, da [4]

Una delle particolarità di questo ponte era che i cavi non scendevano dall'alto verso la base, ma erano collocati lateralmente al ponte, dando l'immagine di un enorme nastro che collegava le due sponde del fiume.

Il giorno dell'inaugurazione, al ponte accorsero migliaia di londinesi desiderosi di camminarci sopra, ma accadde qualcosa di sorprendente: a causa dell'enorme numero di persone, il ponte iniziò ad oscillare lateralmente da destra a sinistra, e per mantenere l'equilibrio la gente si mise a camminare a piccoli passi spingendo i piedi verso i lati, e procedendo con lo stesso ritmo con cui il ponte oscillava.

Ecco, la situazione descritta è molto simile all'esperimento mostrato in Figura 1.3, dove la piattaforma instabile (il ponte), costringe i metronomi (le persone), a oscillare con la stessa frequenza per mantenere la struttura in equilibrio. Ma come potevano centinaia di persone muoversi oscillando all'unisono da una parte all'altra senza sapere a che frequenza andare?

La prima persona a far luce su questo mistero è stata un ingegnere strutturale dell'università di Cambridge, di nome Allan Mc Robie [15]. Attraverso un modello che simulava con una buona approssimazione il comportamento del ponte, egli ha dimostrato che bastava camminare normalmente per indurre il movimento alla struttura.

Inoltre, se si provava a camminare mettendo un piede davanti all'altro, si perdeva l'equilibrio, perciò bisognava procedere a passi laterali, come nel pattinaggio.

Le persone, mentre camminavano, erano dunque forzate a sincronizzare il passo con la frequenza di oscillazione del ponte, impedendo a quest'ultimo di fermarsi.

Per spiegare dunque in che modo ha origine la sincronizzazione, è molto utile studiarla attraverso dei sistemi in cui si ha l'oscillazione di due o più corpi, tra cui quello dei metronomi.

1.4 Primi studi sull'oscillazione del pendolo

In origine la sincronizzazione è stata inizialmente studiata attraverso i comportamenti oscillatori dei pendoli, le cui dinamiche sono state utili per dare un'interpretazione del fenomeno in chiave matematica.

1.4.1 Il pendolo di Huygens

Il primo rilevante documento scientifico a trattare l'argomento è datato 1673, quando il matematico Christiaan Huygens [16] pubblicò il suo *Horologium Oscillatorium*, una delle opere più rilevanti sulla meccanica del XVII secolo.

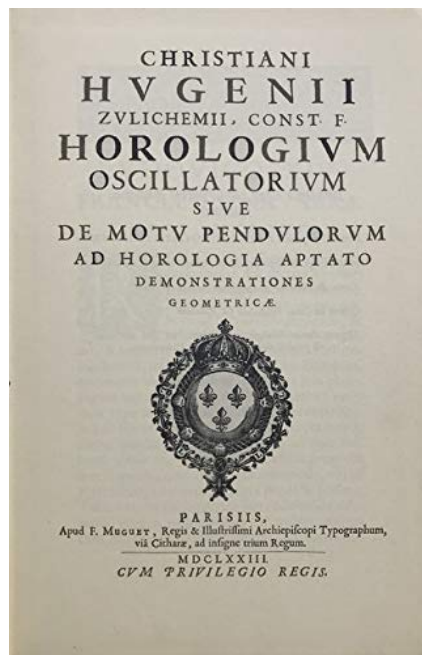


Figura 1.5: Copertina dell'edizione originale de *Horologium Oscillatorium*, da [5]

All'interno dell'opera egli tratta del comportamento del pendolo a orologeria, costruito da lui stesso nel 1657 come in Figura 1.6.

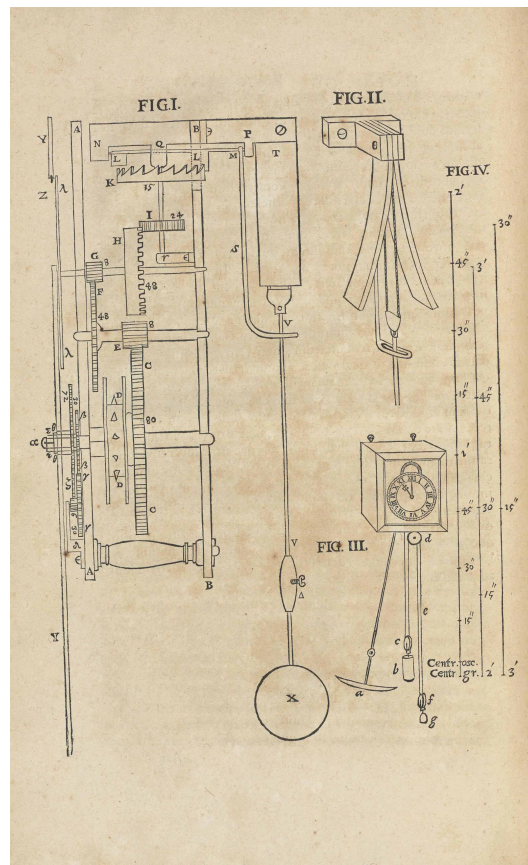


Figura 1.6: Schizzo raffigurante il pendolo costruito da Huygens, appartenente all'opera originale

Huygens è stato il primo a studiare i sistemi con due pendoli poggiati su una base comune, osservando come, dopo un certo tempo, i due pendoli oscillassero alla stessa frequenza, ma sfasati di 180° .

Continuando a studiare il comportamento dei pendoli, egli è riuscito a fornire delle soluzioni a problemi di dinamica descritti in [16]: la derivazione della formula del periodo di oscillazione di un pendolo oscillante e di un pendolo composto, oltre a fornire risposte riguardo lo studio del centro di oscillazione.

Per ottenere tali risultati, egli ha formulato l'ipotesi secondo la quale il baricentro degli oggetti pesanti non può sollevarsi. A partire dal modello costruito da Huygens si è arrivati al sistema introdotto nel paragrafo 1.4.1, costituito da due metronomi su una leggera piattaforma mobile.

1.4.2 Il modello di Van Der Pol

Il sistema basato sui metronomi, per la sua facilità di assemblaggio e per il risalto delle forze meccaniche, risulta estremamente utile per uno studio sperimentale della sincronizzazione.

Dal punto di vista matematico, il comportamento dei metronomi può essere analizzato attraverso delle equazioni differenziali che si rifanno agli oscillatori non conservativi dell'ingegnere Balthazar Van Der Pol [17].

In particolare, prendendo in esame l'equazione del moto di un singolo metronomo su una base mobile [3],

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mr_{cm}g}{I} \sin \theta + \epsilon \left[\left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{mr_{cm} \cos \theta}{I} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1.1)$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e la verticale, m la massa del pendolo, r_{cm} la distanza tra del centro di massa da un punto di riferimento che giace sulla verticale, g l'accelerazione di gravità, e x la posizione orizzontale della base.

Si ha che i primi due termini dell'equazione descrivono il moto classico del pendolo, mentre il terzo costituisce il termine di Van der Pol, il quale aumenta la velocità angolare per $\theta < \theta_0$ mentre la fa decrescere per $\theta > \theta_0$.

Per piccoli valori di ϵ , vengono prodotte oscillazioni stabili con un ampiezza pari a $2\theta_0$.

A partire dai risultati ottenuti da questi modelli di equazioni differenziali, si ottengono dei grafici dove è possibile individuare, al variare di specifici valori, delle zone dove i metronomi sono sincronizzati in fase oppure in fuorifase [3].

Inoltre, è possibile ricondursi ad una specifica regione di quel grafico partendo da un'equazione differenziale del primo ordine, la cui risoluzione è facilmente ritrovabile nei libri di testo.

1.5 Introduzione al modello matematico dei metronomi

In base a quanto detto nel precedente paragrafo, è dunque possibile studiare la sincronizzazione di due metronomi che oscillano andando a osservare l'evoluzione di specifici parametri (ovvero gli angoli e la velocità angolare) nel tempo.

L'espressione matematica di tali parametri può essere ricavata risolvendo un sistema di equazioni, e attraverso software come Matlab si possono calcolare i valori di tali soluzioni senza doverlo fare a mano o su carta.

L'obiettivo è dunque la creazione di un modello matematico che, attraverso la risoluzione di equazioni e creazione di grafici, sia in grado di emulare un sistema reale di due metronomi che oscillano su base mobile come trattato in precedenza.

1.5.1 Le equazioni del moto

Prima di passare alla costruzione del modello matematico, la cui trattazione seguirà all'interno del Capitolo 2, è importante analizzare nel dettaglio le leggi che permettono di definire le dinamiche del fenomeno, a partire dall'equazione del moto

di un singolo metronomo che oscilla su una base mobile [3]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mr_{cm}g}{I} \sin\theta + \epsilon \left[\left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{mr_{cm} \cos\theta}{I} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1.2)$$

dove l'ultimo termine descrive l'influenza della base mobile sul metronomo, e costituisce il momento generato da una forza inerziale fittizia $F_{inerziale} = -m \frac{d^2x}{dt^2}$.

Il centro di massa del sistema è dato dalla formula

$$x_{cm} = \frac{Mx + mx_1 + mx_2}{M + 2m}, \quad (1.3)$$

Dove M è la massa della base, m la massa del metronomo, mentre la posizione orizzontale dell'oscillazione del pendolo di ciascun metronomo è data dall'espressione

$$x_i = x + a_i + r_{cm} \sin\theta_i \quad (1.4)$$

con $i = 1, 2$; a_i è la posizione orizzontale del metronomo rispetto alla base.

La posizione della base è data da

$$x = -\frac{m}{M + 2m} r_{cm} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \quad (1.5a)$$

con x , θ_1 , e θ_2 dipendenti dal tempo t . Tale equazione descrive l'accoppiamento dei due metronomi, in quanto compaiono i due angoli. In condizioni di riposo, ovvero quando gli angoli θ_1 e θ_2 sono nulli, l'equazione 1.5a può essere semplificata come

$$x_0 = \frac{m}{M + 2m} r_{cm} \quad (1.5b)$$

Dunque, il sistema di equazioni da cui partire con la costruzione del modello è il seguente

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + (1 + \Delta) \sin\theta_1 + \mu \left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_1}{d\tau} - \beta \cos\theta_1 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0 \quad (1.6a)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + (1 - \Delta) \sin\theta_2 + \mu \left(\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_2}{d\tau} - \beta \cos\theta_2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0 \quad (1.6b)$$

nel quale compare un parametro adimensionale $\tau = \omega t$, nel quale si ha

$$\omega^2 = \frac{mr_{cm}g}{I} \quad (1.7)$$

che è la frequenza angolare del metronomo disaccoppiato senza smorzamenti.

L'effetto dello smorzamento è presente nell'espressione

$$\omega_{pen} \approx \omega \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) \quad (1.8)$$

dove γ è un parametro che corregge l'oscillazione del pendolo riportandolo ad un angolo pari a θ_0 , che è l'angolo che compare nel termine di Van der Pol. Si ha

$$\gamma = \frac{\theta_0^2}{6} \quad (1.9)$$

affinchè l'ampiezza dell'oscillazione del singolo metronomo sia pari a $2\theta_0$.

Gli altri parametri presenti nel sistema, oltre a γ , sono Δ , β e μ .

Il termine Δ indica la differenza nelle frequenze con cui i due metronomi oscillano. Il suo valore può essere ricavato andando prima a misurare la frequenza dei singoli metronomi nel caso in cui oscillano singolarmente su un tavolo (ottenendo ω_1 e ω_2), per poi inserirli nella formula

$$\Delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega}. \quad (1.10)$$

Il suo valore può variare cambiando la posizione della massa mobile (la piattaforma) rispetto ad uno dei due metronomi, tuttavia può essere trascurato in quanto assume cifre molto vicine allo zero. Un parametro che dipende in maniera significativa dalle masse del sistema è β , il quale è calcolato tramite l'espressione

$$\beta = \frac{mr_{cm}}{M + 2m} \frac{mr_{cm}}{I}. \quad (1.11)$$

Tale espressione può essere riscritta andando a sostituire le equazioni 1.7 e 1.5b ottenendo

$$\beta = \frac{x_0\omega^2}{g} \quad (1.12)$$

dove x_0 fornisce informazioni sulla posizione della base mobile.

In conclusione c'è il parametro μ , al quale è stato dato un valore a priori di 0,010 per rendere meno complicato il confronto tra i dati del modello delle equazioni e il modello sperimentale.

Capitolo 2

Studio della sincronizzazione dei metronomi mediante Matlab

In questo capitolo sono illustrati i passaggi che hanno portato alla costruzione di un modello matematico in grado di simulare le oscillazioni di due metronomi posti su una base instabile come quella descritta finora. La trattazione seguirà in ordine questi punti:

- Costruzione del modello sperimentale e acquisizione delle oscillazioni dei metronomi tramite registrazione.
- Implementazione delle equazioni su un file Matlab in grado di simulare il comportamento del modello precedente.
- Confronto tra i grafici ottenuti da ambedue i file Matlab.

2.1 Il modello sperimentale

Come prima cosa si è passati alla creazione del sistema da analizzare, prendendo come spunto il modello descritto nel Capitolo 1.

2.1.1 Preparazione del modello

Il modello da emulare è costituito da due metronomi poggianti su una base mobile sorretta da due corpi volventi. I metronomi utilizzati, visibili in Figura 2.1, sono del modello Wittner Super Mini (serie 880), il più piccolo esistente.

Di massa pari a 94g, tali metronomi possono oscillare a un valore di frequenza regolabile manualmente da un valore minimo di 40 battiti al minuto (tempo che in linguaggio musicale è definito "largo"), fino a un valore massimo di 208 (indicato come "prestissimo").

Si è scelta come frequenza di oscillazione il valore massimo, che corrisponde a 104 oscillazioni al minuto (in quanto 2 battiti, o tic, fanno un intervallo).



Figura 2.1: I due metronomi

Per la base si è scelto un comune righello (Figura 2.2, in quanto molto sottile, di massa 52,8g; le sue dimensioni sono 22x3x0,23 cm.



Figura 2.2: Il righello

2.1 Il modello sperimentale

Per finire, la base è sorretta da due lattine vuote (Figura 2.3) di massa 14g, libere di rotolare da sinistra a destra al movimento della base.

Nonostante appartengano a due marche diverse, le lattine hanno le stesse dimensioni.



Figura 2.3: Le due lattine

2.1.2 Registrazione e conversione del segnale in Matlab

Una volta costruito il sistema come raffigurato in Figura 2.4 si è passati alla registrazione vera e propria, la quale è stata effettuata tramite la ripresa dalla fotocamera di un cellulare appoggiato in modo tale da non muoversi.

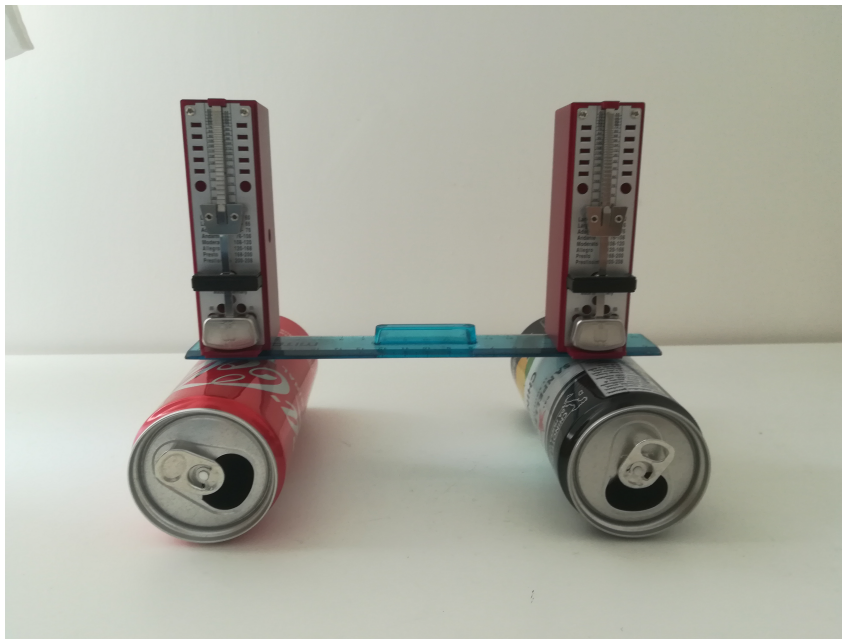


Figura 2.4: Settaggio esperimento

Per avere un quadro più completo dell'esperimento, sono state effettuate due riprese differenti: nella prima i due metronomi venivano fatti oscillare partendo con lo stesso angolo di inclinazione, nella seconda sono stati fatti partire in controfase.

Terminate le registrazioni, sono stati estratti da queste i file audio contenenti i battiti dei due metronomi, e sono stati convertiti in file ".wav", in modo tale da poter essere letti all'interno di Matlab grazie ad un file chiamato *Analyzebeats – registrazione*, il cui codice contiene un comando chiamato

```
[y,Fs]=audioread('Registrazione-fase.wav'), dove:
```

- y è l'elemento che contiene il segnale audio
- F_s rappresenta la frequenza di campionamento

Una volta inserito il file audio da analizzare, il programma permette di effettuare un'analisi del segnale attraverso la creazione di alcuni grafici.

In questo modo è stato possibile avere una lettura del segnale più chiara rispetto alla visione delle registrazioni, con l'obiettivo di individuare, grazie alle immagini delle registrazioni, le zone in cui i battiti dei due metronomi tendono ad avvicinarsi o a distanziarsi.

Il codice per intero è illustrato di seguito

```
[y,Fs]=audioread('Registrazione-fase.wav'); %y contains audio signal
```

```
%and Fs sampling frequency.
```

```
N=50; %Group N samples of audio data to reduce total data set and
```

2.1 Il modello sperimentale

```
%decrease noise.
beatfreq=208; %beats per minute
fsample=48000; % 8000 Hz audio sample (Fs also contains this
%information).
peakseplimit=4; % Look at figure 1 to set this value.

%A metronome beat is only counted if its value exceeds

%peakseplimit and afterwards decreases below peakseplimit.
beat=[];
beatred=[1:length(y)/N]; % reduced length audio data, summing

%N samples together (time interval = N/Fs).
peakbeat=[]; %clear arrays
peakbeatt=[];
peakbeatdeltat=[];
n0=1; % initialize length of array.
for i=1:(length(y)/N)
    beatred(i)=0; %reset amplitude value.
    beatredt(i)=N/2/fsample+i*N/fsample; %time of metronome tick

    %is in middle of N samples.
    for j=1:N %sum absolute value of N amplitude samples.
        beatred(i)=beatred(i)+abs(y((i-1)*N+j));
    end
    if beatred(i)<peakseplimit
        beatreset=1; %if amplitude of sound is below certain value,

        %restart looking for next beat.
    end
    if beatred(i)>peakseplimit
        if beatreset==1 %if sound exceeds peakseplimit, count new

        %metronome beat.
        peakbeat(n0)=beatred(i); %register amplitude of metronome beat.
        peakbeatt(n0)=beatredt(i); %register time of metronome beat.
        beatreset=0; %stop looking for new beats until amplitude of

        %sound drops sufficiently (below peakseplimit).
        if n0>2; %start counting time intervals after at least 2 beats
```

```

%have been detected.
peakbeatdeltat=[peakbeatdeltat peakbeatt(n0)-peakbeatt(n0-1)]; %measure time
end
n0=n0+1; %update beat counter
end
end
end

%%
figure(1)
clf
plot(beatredt,beatred) %plot reduced audio amplitude file.
xlabel('time(s)')
ylabel('Sound_magnitude_(arbitrary_units)')

%%
figure(2) %plot time difference between succesive beats.
clf
plot(peakbeatt(1:length(peakbeatdeltat)),
peakbeatdeltat/(2*60/beatfreq)-0.45,'o' )
hold on
plot(peakbeatt(1:length(peakbeatdeltat)),
-peakbeatdeltat/(2*60/beatfreq)-0.45,'o' )
hold on
plot(peakbeatt(1:length(peakbeatdeltat)),
(peakbeatdeltat/(2*60/beatfreq)-0.45)-(-
peakbeatdeltat/(2*60/beatfreq)+0.45) )

%Two metronomes running at beatfreq bpm. Maximum frequency
%Tbeat=2*60/beatfreq.
%Plot both deltat/Tbeat and 1-deltat/Tbeat. (since sum should always %be 1
%both delay times between beats always occur.
title('Range_di_sincronizzazione_in_fase');
xlabel('time(s)')
ylabel('\Deltat/Tbeat')

```

Questi grafici rappresentano l'andamento nel tempo delle frequenze con cui i metronomi generano i rintocchi, resi individuabile grazie al segnale generato dal codice.

Per fornire una maggiore comprensione sull'oggetto di tale grafico, bisogna soffermarsi su come la sua espressione è codificata nel programma.

Soffermandosi sulla sezione dedicata alla creazione dei grafici, `peakbeatdeltat`

rappresenta l'intervallo di tempo che intercorre tra due tic successivi di entrambi i metronomi, mentre `beatfreq` rappresenta la frequenza dei due metronomi, ossia 208bpm.

Da queste due espressioni sono stati plottati i grafici appartenenti al plot della Figure 2; il primo plot è rappresentato dal colore blu, mentre il secondo dal colore rosso.

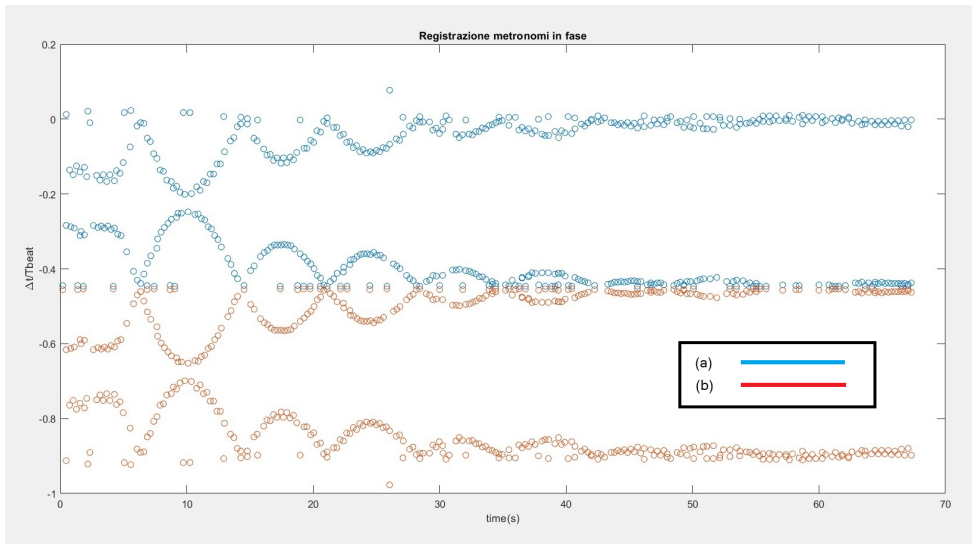


Figura 2.5: Grafico relativo alla Figure 2 con i plot blu (a) e rosso (b)

Osservando il plot (a) in Figura 2.5, per valori di t con cui la sua estremità superiore arriva a toccare la linea dello zero, significa che la differenza tra i battiti dei due metronomi in quell'istante di tempo è nulla, dunque sono sincronizzati.

Visualizzando entrambi i grafici presenti in Figura 2.5, si può dedurre come la sincronizzazione si verifichi nel momento in cui il plot (a) tende ad incontrarsi con il plot (b).

Con questa lettura è possibile capire cosa è accaduto durante la registrazione: i due metronomi partono inizialmente sfalzati, ma dopo qualche secondo si sincronizzano per brevissimo tempo, per poi smettere di battere all'unisono.

Questo continuo alternarsi tra distorsione e riallineamento dei battiti è raccontato dal profilo "collinare" che i due plot assumono. Dopo qualche decina di secondi, i metronomi tendono a sincronizzarsi permanentemente, e dal grafico lo si evince non solo dalla parte superiore del plot (a) che tende a zero, ma anche dalla convergenza della parte inferiore del plot (a) con la parte superiore del plot (b), appiattendosi progressivamente lungo la stessa linea. In questo modo si è riusciti a convertire il segnale acustico della registrazione in un segnale digitalizzato che permette un confronto più semplice e immediato con il modello matematico della simulazione.

Per visualizzare meglio il modo in cui evolve la sincronizzazione all'interno del grafico in Figura 2.5, è stato introdotto un ulteriore plot all'interno della sezione dedicata alla Figure 2.

Si è ottenuto un nuovo grafico, visibile in Figura 2.6 che presenta il plot (a), il plot(b) e un terzo plot (c) che combina i primi due, andando a descrivere il range di sincronizzazione del fenomeno.

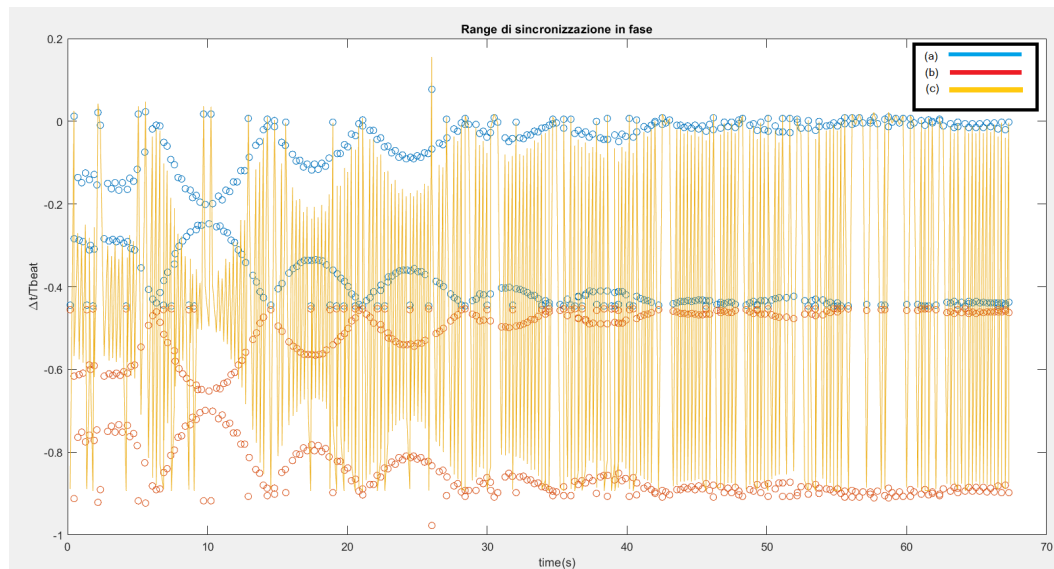


Figura 2.6: Andamento della sincronizzazione del fenomeno

Osservando la figura, si ha sincronizzazione quando i picchi del plot (c) si incrociano con i punti del plot (b) sulla linea dello zero.

Vedendo il grafico nel suo insieme, quando l'ampiezza delle oscillazioni del plot (c) aumenta, maggiore è la tendenza alla sincronizzazione dei due metronomi e viceversa.

2.1.3 Differenze tra fase e controfase all'interno dei grafici

Non potendo ricevere dai grafici lo stesso feedback che si avrebbe osservando la registrazione video, risulta difficile capire quando i due metronomi si muovono in controfase oppure in fase. Per distinguere le due situazioni servendosi unicamente del grafico, sono state effettuate due registrazioni dell'esperimento, con l'unica differenza che risiede nel modo con cui i metronomi sono stati fatti partire: il primo video, il cui segnale convertito fornisce il grafico in Figura 2.5, vede i due metronomi partire con la stessa inclinazione, mentre il secondo (Figura 2.7) presenta i due metronomi che vengono fatti partire in controfase.

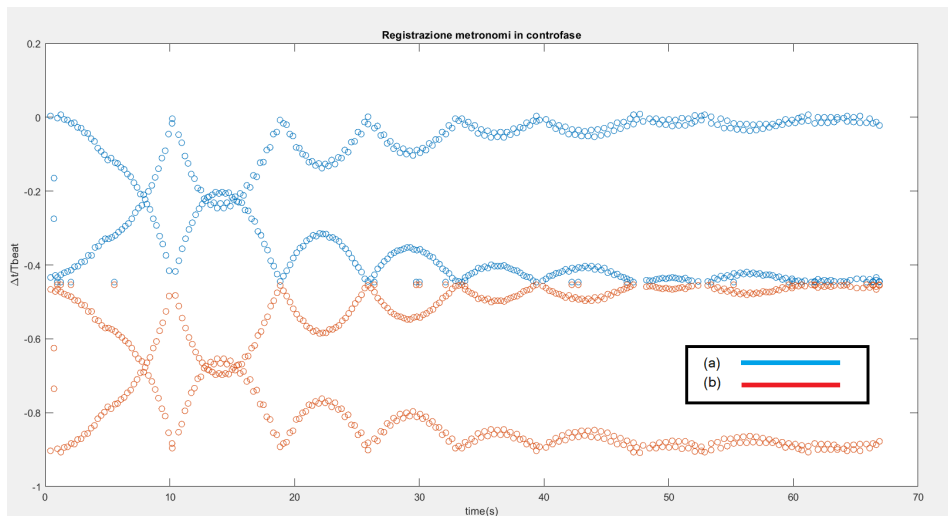


Figura 2.7: Plot della registrazione eseguita con metronomi in controfase

Confrontando l'andamento dei grafici nel tempo con il minutaggio del video, si è riusciti a determinare il momento in cui i metronomi smettono di andare in controfase, e tale cambiamento è evidenziato dalle figure stilizzate dei due metronomi prese ai vari istanti di tempo: in particolare, si ha per $t = 14s$ un ritorno, seppur breve, alla configurazione di controfase, rappresentato nel grafico con l'intrecciarsi delle parti superiori e inferiori dei plot (a) e (b).

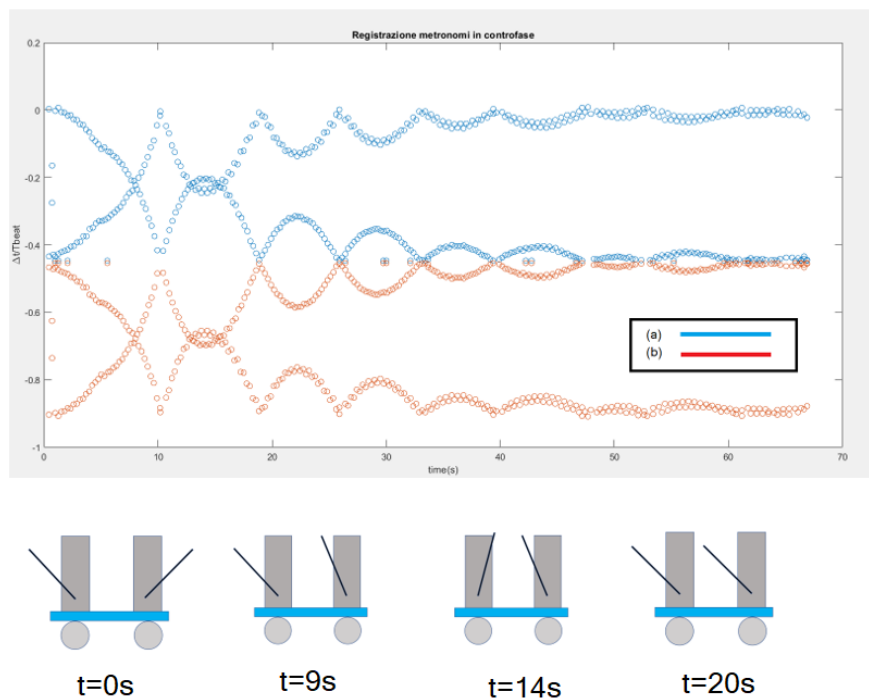


Figura 2.8: Evoluzione della dinamica dei metronomi in controfase

L'istante di tempo in cui il grafico assume lo stesso andamento di quello in Figura 2.5 corrisponde al momento in cui i metronomi non sono più in controfase, deducendo una importante tendenza del fenomeno verso l'allineamento in fase per favorire la sincronizzazione.

Questo comportamento è dovuto dal fatto che le forze scambiate dai metronomi tendono ad annullarsi quando questi sono in controfase, impedendo a questi ultimi di allinearsi con l'oscillazione della base mobile, il cui moto impone ai metronomi di riallinearsi in fase per riuscire a sincronizzarsi.

Per completezza, di seguito è rappresentato il range di sincronizzazione dei metronomi fatti partire in controfase.

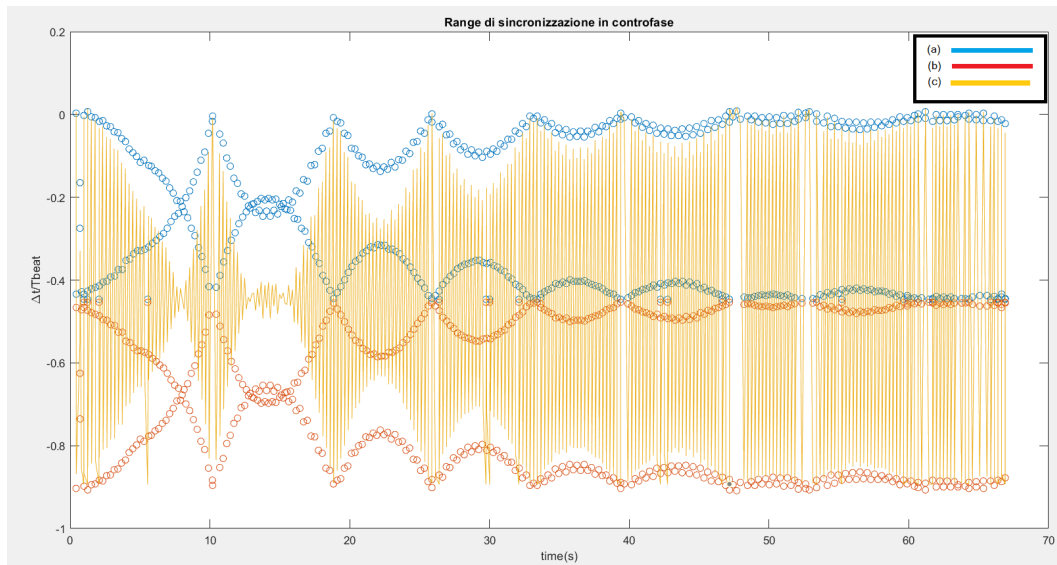


Figura 2.9: Range di sincronizzazione dei metronomi fatti partire in controfase

2.2 Il modello matematico

Si vuole andare a descrivere il sistema accoppiato di equazioni per due metronomi in [3]: esso può essere scritto come

$$\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + (1 + \Delta) \sin \theta_1 + \mu \left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_1}{d\tau} - \beta \cos \theta_1 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} + (1 - \Delta) \sin \theta_2 + \mu \left(\left(\frac{\theta_2}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{d\theta_2}{d\tau} - \beta \cos \theta_2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0 \quad (2.2)$$

dove θ_1 e θ_2 sono variabili dipendenti dal tempo, mentre θ_0 , Δ , μ e β sono costanti riferite all'esperimento.

Risolvere questo sistema può risultare complicato, data la presenza di equazioni differenziali del secondo ordine; per fare ciò occorre utilizzare Matlab, il quale è in grado di eseguire calcoli che a mano possono risultare lunghi e complicati.

Nello specifico, esiste in Matlab un comando che semplifica la risoluzione di equazioni differenziali: tale funzione, chiamata ODE45 (da Ordinary Differential Equation), è in grado di fornire soluzioni al problema del tipo $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$: t è la variabile indipendente, x è un vettore di variabili dipendenti e $f(t, x)$ funzione in t e x . In questo caso la t sarà sostituita dalla τ in quanto proporzionali tra loro dalla relazione $\tau = \omega t$.

2.2.1 Semplificazione del sistema in equazioni del primo ordine

Si consideri il sistema composto dalle equazioni viste nel paragrafo 2.2. Si va a sostituire:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= x_1 \\ \frac{d\theta_1}{d\tau} &= \theta'_1 = x_2 \\ \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} &= \theta''_1 = x'_2 \\ \theta_2 &= x_3 \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} &= \theta'_2 = x_4 \\ \frac{d^2\theta_2}{d\tau^2} &= \theta''_2 = x'_4\end{aligned}$$

In questo modo è possibile ricondursi ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$x'_2 + (1 + \Delta) \sin x_1 + \mu \left(\left(\frac{x_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) x_2 + \beta \cos x_1 (x_2^2 \sin x_1 + x_4^2 \sin x_3) = 0 \quad (2.3)$$

$$x'_4 + (1 - \Delta) \sin x_3 + \mu \left(\left(\frac{x_3}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) x_4 + \beta \cos x_3 (x_2^2 \sin x_1 + x_4^2 \sin x_3) = 0 \quad (2.4)$$

da cui si ricavano a mano le variabili x'_2 e x'_4 che vanno a completare il sistema di derivate $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ qui sotto elencato

$$x'_1 = x_2 \quad (2.5)$$

$$x'_2 = \left[\frac{(1 - \beta \cos^2 x_3) \left[(1 + \Delta) \sin x_1 + \mu \left[\left(\frac{x_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] x_2 + \beta \cos x_1 (x_4^2 \sin x_3 + x_2^2 \sin x_1) \right]}{\beta (\cos^2 x_3 + \cos^2 x_1) - 1} + \frac{\beta \cos x_1 \cos x_3 \left[(1\Delta) \sin x_3 + \mu \left[\left(\frac{x_3}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] x_4 + \beta \cos x_3 (x_4^2 \sin x_3 + x_2^2 \sin x_1) \right]}{\beta (\cos^2 x_3 + \cos^2 x_1) - 1} \right] \quad (2.6)$$

$$x'_3 = x_4 \quad (2.7)$$

$$x'_4 = \left[\frac{(1 - \beta \cos^2 x_1) \left[(1 - \Delta) \sin x_3 + \mu \left[\left(\frac{x_3}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] x_4 + \beta \cos x_3 (x_4^2 \sin x_3 + x_2^2 \sin x_1) \right]}{\beta (\cos^2 x_3 + \cos^2 x_1) - 1} + \frac{\beta \cos x_1 \cos x_3 \left[(1 + \Delta) \sin x_1 + \mu \left[\left(\frac{x_1}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right] x_2 + \beta \cos x_1 (x_4^2 \sin x_3 + x_2^2 \sin x_1) \right]}{\beta (\cos^2 x_3 + \cos^2 x_1) - 1} \right] \quad (2.8)$$

con $x=[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Tale sistema è risolvibile note le condizioni iniziali $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_3(0)$, $x_4(0)$ (che sarebbero i valori iniziali di $\theta_1, \theta'_1, \theta_2, \theta'_2$).

Per poter rendere coerente con il modello reale il comportamento dei metronomi descritto dalle espressioni delle componenti del vettore derivata (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) , sono state impostate le condizioni iniziali nel paragrafo 2.2.2 ed i valori delle costanti nel paragrafo 2.2.3.

2.2.2 Impostazione dei parametri: le condizioni iniziali

Per poter rendere coerente con il modello reale il comportamento dei metronomi descritto dalle espressioni delle componenti del vettore derivata (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) , bisogna impostare i valori delle condizioni iniziali.

Si sono scelti come $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$ il valore di 1.22 radianti (70°): tale valore corrisponde alla massima ampiezza che un metronomo può coprire con una semioscillazione, rendendo possibile eseguire l'esperimento più volte senza dover calibrare con un goniometro l'angolo di partenza.

Per quanto riguarda le velocità iniziali, sono stati presi dei valori molto prossimi allo zero (in quanto i metronomi partono da fermi), per cui si sono scelti valori di velocità compresi tra $[0;0.9]$ rad/s.

In caso si volesse far partire prima un metronomo e poi un altro è necessario imporre la velocità iniziale di uno dei due uguale a zero.

2.2.3 Impostazione dei parametri: le costanti del modello

Affinché il modello costruito su Matlab possa comportarsi in maniera simile all'esperimento reale, sono stati determinati i valori delle costanti corrispondenti al sistema descritto nel paragrafo 2.1.1.

Per il valore di ω , è stato calcolato inizialmente il valore della frequenza del pendolo quando è impostato a 208 bpm, ovvero $f=3,46$ Hz. Secondo tale settaggio il massimo angolo che la bacchetta del metronomo forma con la verticale è pari a $45^\circ(0,78$ rad), che corrisponde a $\theta_0=0,39$ rad (praticamente la metà). A questo valore corrisponde, secondo la relazione

$$\gamma = \frac{\theta_0^2}{6}, \quad (2.9)$$

il valore $\gamma=0,025$. A partire dalla frequenza f è stata ricavata la $\omega_{pen}=2\pi f=21,8$ rad/s; successivamente, dalla formula

$$\omega_{pen} \approx \omega \left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) \quad (2.10)$$

si è ottenuta la velocità angolare media $\omega=21,8$ rad/s. Per quanto riguarda la costante μ , il suo valore è già stato determinato a priori come scritto nel paragrafo 1.5.1.

Gli ultimi parametri da determinare sono associati alle dimensioni e alle masse del sistema reale, ovvero x_0 , la massa del righello, e il parametro β .

Per determinare la posizione della base a riposo si è scelta la condizione per cui i metronomi non si muovono ($\theta_1=0$ e $\theta_2=0$), ovvero l'equazione 1.5b.

Il valore di x_0 dipende unicamente dalle masse e dalla distanza tra il centro di massa del metronomo e il pivot point. Per calcolare il valore di r_{cm} è necessario conoscere le lunghezze che caratterizzano la bacchetta che oscilla, come visto in Figura 2.10.

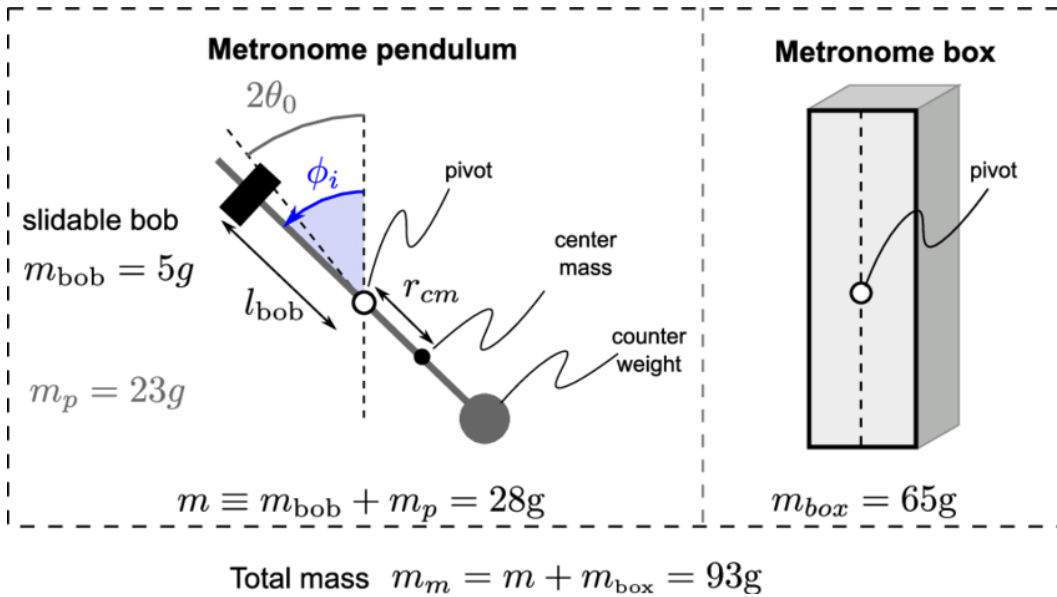


Figura 2.10: Rappresentazione della lunghezza di r_{cm}

Per quanto riguarda le masse, quella del metronomo è già nota, mentre quella del righello è stata calcolata a partire dalla conoscenza del volume e della densità. A partire dalle dimensioni del righello è stato calcolato il volume, mentre per la densità è stato preso il valore associato al materiale di cui è composto, ovvero la plastica ($\rho = 4.0g/cm^3$). In questo modo, grazie ad un semplice calcolo, è stata determinata la massa del righello $M = 52.8g$.

A questo punto sono stati sostituiti i valori di m , M , e r_{cm} all'interno di 1.5b, ottenendo il valore di x_0

$$x_0 = \frac{mr_{cm}}{M + 2m}. \quad (2.11)$$

Ottenuto anche x_0 , è stato calcolato il valore di β , la cui espressione utilizzata è la 1.12, andando a completare il calcolo di tutte le costanti che governano il fenomeno reale.

2.2.4 Stesura del codice su Matlab

Una volta ottenute le espressioni delle componenti del vettore derivata (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) , si può procedere a scrivere su Matlab il codice che sarà in grado di fornire i valori degli angoli e delle velocità angolari dei due metronomi fittizi. Il calcolo delle soluzioni delle equazioni 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 è eseguito dal programma tramite il seguente comando:

`[t,x] = ode45(@odefun, tspan, xinit)`, dove:

- `odefun` è la funzione che comprende le espressioni di tutte le derivate in funzione delle componenti del vettore $x=[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Tale funzione costituisce il sistema $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ citato in precedenza, le cui equazioni sono state scritte all'interno del file.

- `tspan = [tstart,tend]` rappresenta l'intervallo di tempo attraverso il quale si andranno a prendere i valori di $\theta_1, \theta_2, \theta'_1, \theta'_2$ corrispondenti.
- `xinit` rappresenta il vettore delle condizioni iniziali $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))$, note a priori insieme ai parametri delle equazioni: i valori delle condizioni iniziali sono gli stessi di quelli dei metronomi sottoposti alle registrazioni, in modo tale da ottenere una riproduzione più fedele possibile dei dati ottenuti dal modello sperimentale.

Il programma costruito è visualizzabile di seguito:

```
%Matlab ode 45 resolution
%define tstart, tend and the number of time steps n:
tstart = 0;
tend = 70;
tspan = [tstart,tend];
%define the initial conditions
xinit = [1.22;0.9;1.22;0];

%define the output variables:
% x=[theta1,theta1dot,theta2,theta2dot];
% theta1 = x(1);
% theta1dot = x(2);
% theta2 = x(3);
% theta2dot = x(4);
%Here the command ode to find the solution
[t,x] = ode45(@odefun,tspan,xinit);

%plot the solutions
figure(1); clf; hold on
plot(t,x(:,1),'-o');
plot(t,x(:,2),'-o');
plot(t,x(:,3),'-o');
plot(t,x(:,4),'-o');
title('Solution of van der Pol Equation with ODE45');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution x');
legend('theta_1','thetadot_1','theta_2','thetadot_2')

%plot of the metronome's angles
figure(2); clf; hold on
plot(t,x(:,1)/(pi/4),'-o');
plot(t,x(:,3)/(pi/4),'-o');
title('Solution of van der Pol Equation with ODE45');
```

```

xlabel('Time_t');
ylabel('Solution_x');
legend('theta_1','theta_2')

%plot difference between angles
figure(3); clf; hold on
plot(t,(x(:,1)-x(:,3))/(pi/4),'-o');
title('difference_between_metronome_angles');
xlabel('Time_t');
ylabel('angle_difference');

%
%THE INTEGRATION FUNCTION AND THE COSTANTS
%function containing all the first order odes
%Write your constants (beta=b,mu=u,x_0=c,omega=w,gravity=g)
%Write out your first order system of ODEs:
function dxdt = odefun(t,x)
u=0.010;
theta0=0.39;
gamma=((theta0)^2)/6;
c=0.0009;
g=9.81;
wpen=21.8;
w=wpen/(1-(1.5*gamma));
b=(c*w^2)/g;
delta=0.001;

dxdt = zeros(4,1);
dxdt(1) = w*x(2);
dxdt(2) = w*((1-b*(cos(x(3)))^2)*(sin(x(1))+u*x(2)*
((x(1)/theta0)^2-1)+b*cos(x(1))*(x(4)^2*sin(x(3))+
(x(2)^2*sin(x(1)))))+b*cos(x(1))*cos(x(3))*(sin(x(3))+u*x(4)*
((x(3)/theta0)^2-1)+b*cos(x(3))*(x(4)^2*sin(x(3))+
(x(2)^2*sin(x(1)))))))/(b*((cos(x(3)))^2+(cos(x(1)))^2)-1);
dxdt(3) = w*x(4);
dxdt(4) = w*((1-b*(cos(x(1)))^2)*(sin(x(3))+u*x(4)*
((x(3)/theta0)^2-1)+b*cos(x(3))*(x(4)^2*sin(x(3))+
(x(2)^2*sin(x(1)))))+b*cos(x(1))*cos(x(3))*(sin(x(1))+u*x(2)*
((x(1)/theta0)^2-1)+b*cos(x(1))*(x(4)^2*sin(x(3))+
(x(2)^2*sin(x(1)))))))/(b*((cos(x(3)))^2+(cos(x(1)))^2)-1);

```


end

Una volta scritti i comandi, scelte le condizioni iniziali e impostati i valori delle costanti, si può far partire il programma attraverso il tasto RUN, ottenendo così tutti i valori di angoli e velocità angolari desiderati. Tali risultati possono essere graficati attraverso il comando `plot`, con cui si possono ottenere dei grafici di θ_1 , θ'_1 , θ_2 e θ'_2 al variare di t nell'intervallo di tempo preimpostato come visibili in Figura 2.11.

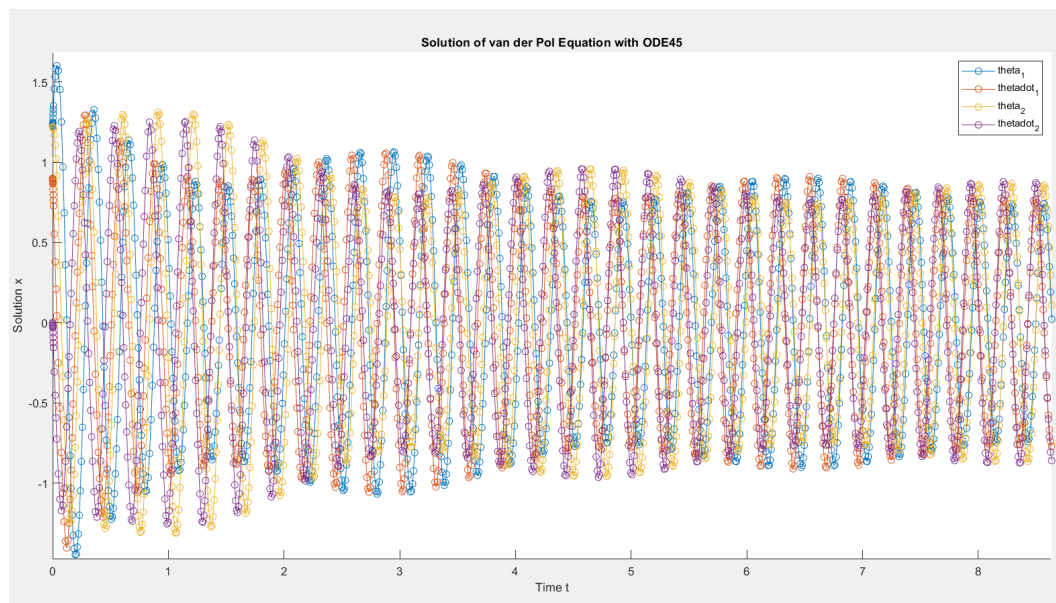


Figura 2.11: Grafico con le quattro soluzioni plottate

2.3 Confronto tra grafico del modello reale e matematico

Ottenuti i grafici del modello delle equazioni e di quello delle registrazioni dell'esperimento, per metterli a confronto bisogna fare in modo che le grandezze riportate sugli assi di entrambi i grafici siano le stesse; dato che sono entrambi dipendenti dal tempo, è necessario solamente far combaciare le unità di misura sull'asse delle y .

Nel grafico del modello reale, l'ordinata ha unità di misura adimensionale (essendo $\text{deltat}/\text{tbeat}$).

Di conseguenza, è necessario adimensionalizzare l'ordinata del grafico del modello matematico.

Per questa evenienza, nel programma del modello matematico descritto in 2.2.4 a costruire un grafico in cui sono rappresentati gli andamenti di θ_1 e θ_2 adimensionalizzati di un angolo costante. Per adimensionalizzare θ_1 e θ_2 , essi sono stati divisi di un angolo di 45° , che rappresenta la massima inclinazione dell'asta dei metronomi durante le oscillazioni. In questo modo si è ottenuta una funzione adimensionale come quella illustrata in Figura 2.12.

Tale funzione ha come valore 1 quando l'angolo di inclinazione della bacchetta assume il valore di 45° , in corrispondenza del quale si avrebbe un tic da parte del metronomo.

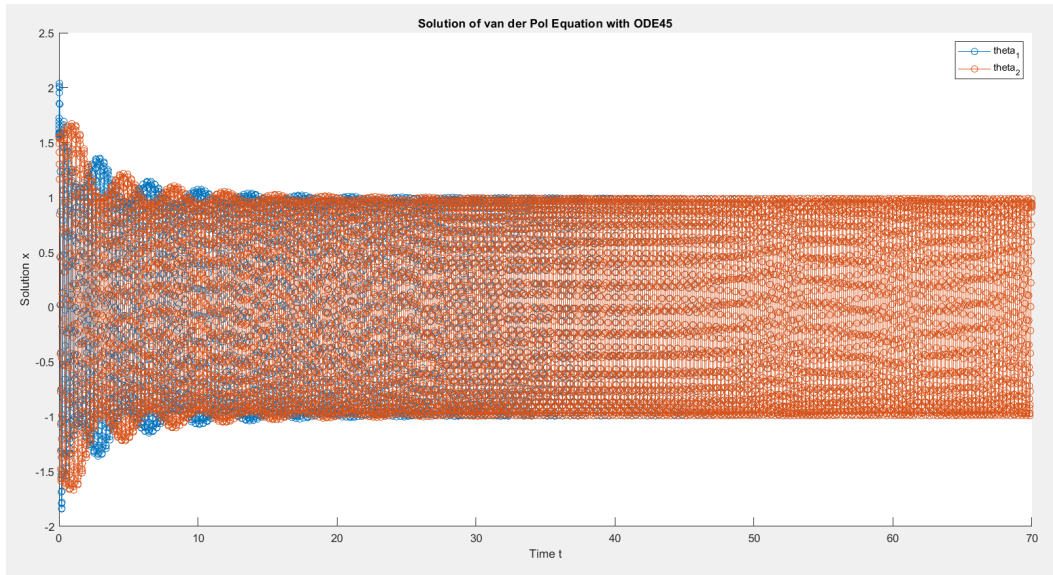


Figura 2.12: Grafico con le variabili θ_1 e θ_2

Il profilo descritto da questo grafico, tuttavia, non permette di identificare in maniera esatta gli intervalli di tempo in cui i metronomi simulati si sincronizzano, per cui è stato creato un ulteriore grafico dove è riportata la differenza tra gli angoli nel tempo (Figura 2.13). Con tale grafico è possibile individuare quando si ha sincronizzazione, ovvero quando banalmente la differenza tra gli angoli è zero.

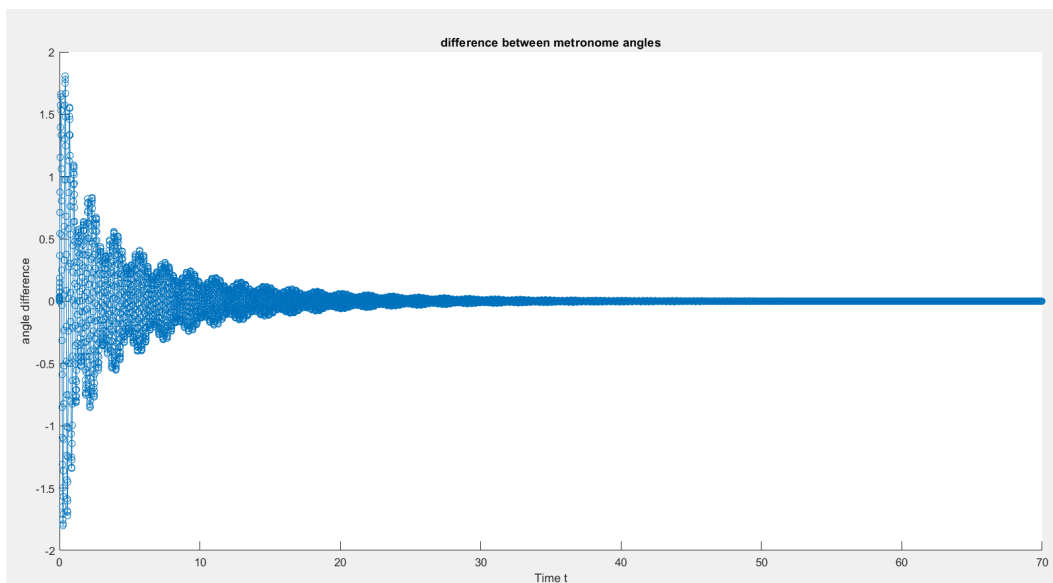


Figura 2.13: Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo

2.3 Confronto tra grafico del modello reale e matematico

In questo modo è più semplice fare un confronto tra i grafici, poichè nel grafico dell'esperimento si ha sincronizzazione quando la differenza di tempo tra un tic e l'altro è nulla.

2.3.1 Confronto tra i due modelli in fase

Per far partire il modello matematico con gli angoli in fase, le condizioni iniziali sono le seguenti

- $\theta_1(0) = 1.22rad$
- $\theta_2(0) = 1.22rad$
- $\theta'_1(0) = 0.9rad/s$
- $\theta'_2(0) = 0rad/s$

Si può vedere come anche questo modello matematico presenti una tendenza alla sincronizzazione a lungo andare nel tempo, il che conferma che la simulazione del fenomeno è stata eseguita correttamente.

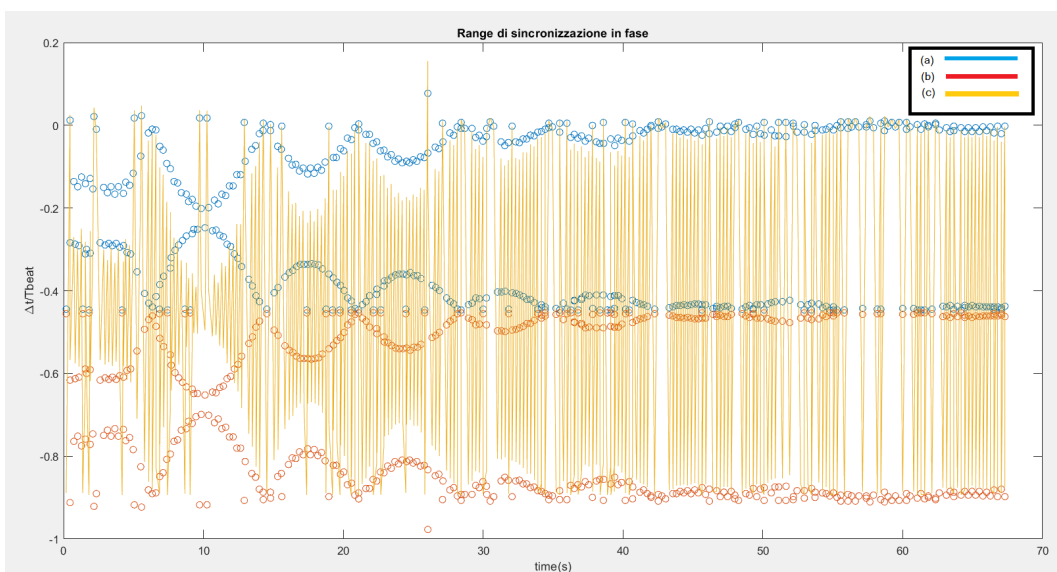


Figura 2.14: Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo

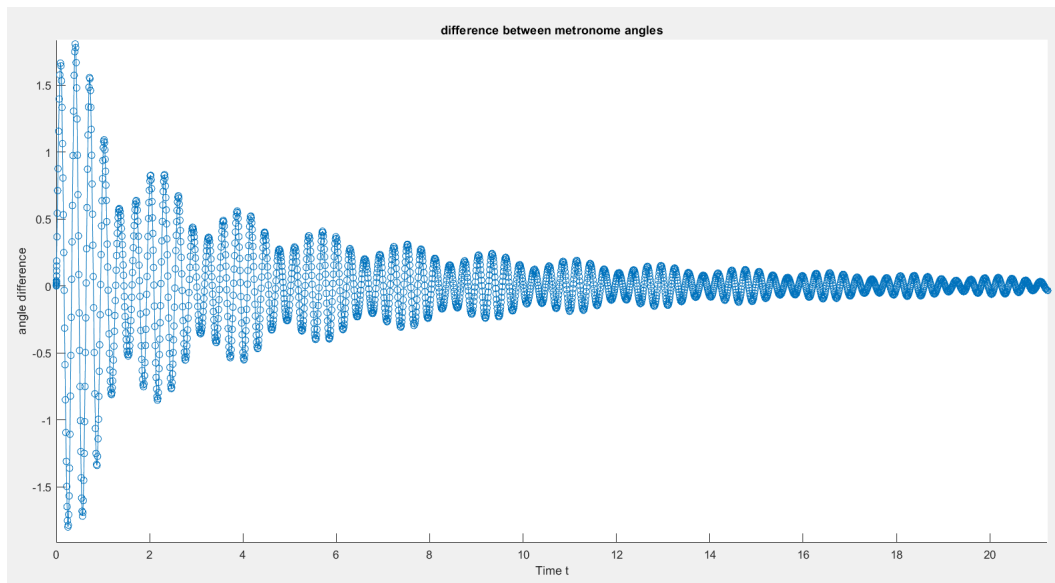


Figura 2.15: Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo

2.3.2 Confronto tra i due modelli in controfase

Per far partire il modello matematico con gli angoli in controfase, le condizioni iniziali sono le seguenti:

- $\theta_1(0) = 1.22rad$
- $\theta_2(0) = -1.22rad$
- $\theta'_1(0) = 0.9rad/s$
- $\theta'_2(0) = 0rad/s$

Si può vedere come anche il modello matematico presenti una tendenza alla sincronizzazione a lungo andare nel tempo, il che conferma che la simulazione del fenomeno è stata eseguita correttamente.

2.3 Confronto tra grafico del modello reale e matematico

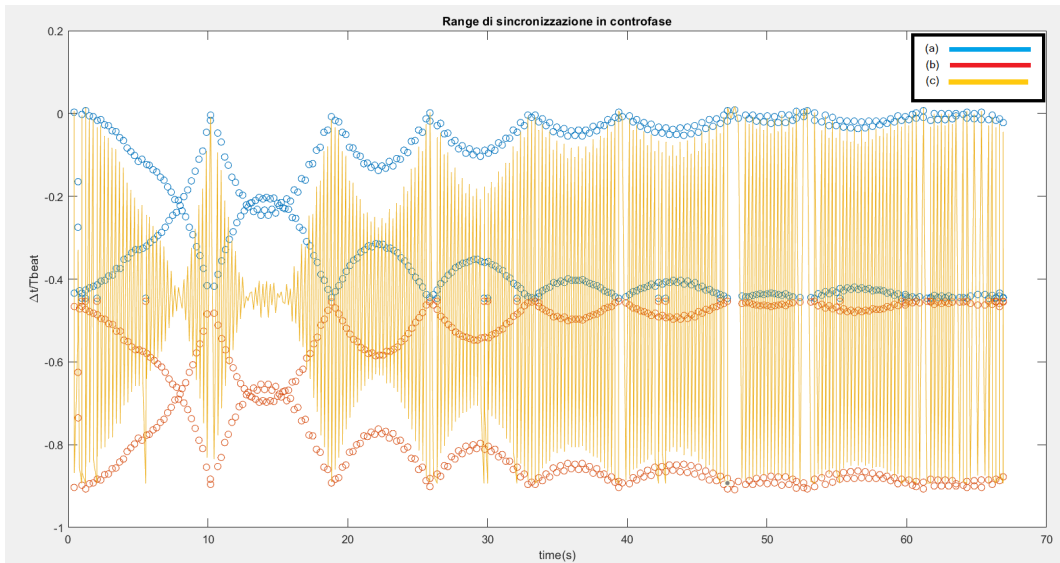


Figura 2.16: Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo

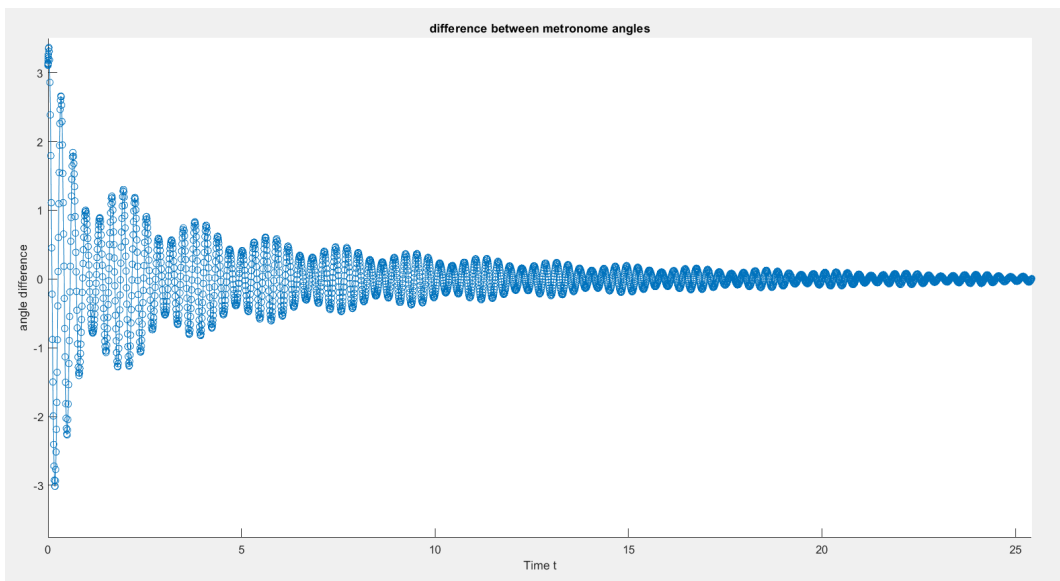


Figura 2.17: Grafico della differenza tra θ_1 e θ_2 nel tempo

Capitolo 3

La sincronizzazione delle lucciole

3.1 Introduzione al fenomeno

Come descritto nel Capitolo 1, la sincronizzazione delle lucciole è un fenomeno la cui veridicità è stata ampiamente discussa ai tempi delle prime testimonianze a riguardo.

Il primo a fornirne una descrizione è stato l'olandese Engelbert Kaempfer [18], studioso di botanica, biologia e scienze naturali, durante un viaggio in Asia avvenuto negli ultimi anni del '600.

Tali osservazioni sono riportate all'interno dell'opera *Synchronous rhythmic flashing of fireflies* di John Bonner Buck [6], in un'epoca ancora povera di leggi e spiegazioni scientifiche in grado di spiegare il funzionamento alla base di tale spettacolo luminoso.

3.1.1 Primi studi sul fenomeno

Per comprendere il comportamento con cui le lucciole interagiscono tra loro all'interno dello sciame, si mette a confronto tale fenomeno con quello dei due metronomi trattato nel Capitolo 2.

La differenza sostanziale risiede nella difficoltà di analisi dei due modelli: si ha da una parte un modello creato dall'uomo che presenta solo due elementi oscillanti, dall'altra un sistema naturale con le proprie regole di organizzazione e che presenta un numero esorbitante di elementi "oscillanti" che emanano continui impulsi luminosi, per di più viventi.

La complessità di questo sistema è stata sviscerata dopo decenni di osservazioni da parte di altri studiosi venuti a contatto con tale fenomeno, e solo a partire dagli inizi del secolo scorso fu attestata la veridicità di questa tendenza alla sincronizzazione da parte degli sciami.

I meccanismi alla base dell'emissione di luce da parte delle lucciole sono utili per spiegare alcuni comportamenti appartenenti a quella specie, ad esempio il modo in cui la sincronizzazione dei segnali luminosi ha come scopo il corteggiamento delle femmine da parte degli esemplari maschi.

A seguito di ulteriori osservazioni effettuate su più tipologie di sciami, è stato scoperto che questi segnali di comunicazione seguivano uno specifico codice che va-

riava da specie a specie; in alcuni casi, alla sincronizzazione degli esemplari maschi seguiva la risposta da parte della femmina.

A seguito della stesura di un catalogo in cui furono raccolti tutti i codici di comunicazione degli esemplari appartenenti alla specie *Photinus* [19], grazie a uno studio portato avanti da Lloyd [20], atto ad analizzare il linguaggio in codice utilizzato da quella categoria di lucciole, è stato possibile distinguere le varie specie di lucciole in base alla sequenza di segnali luminosi emanati durante il corteggiamento.

Questa scoperta è stata molto importante per delineare gli aspetti comportamentali di vari esemplari, i quali differivano per le sequenze di segnali luminosi ben specifiche, a cui erano associate le varie risposte da parte della femmina.

3.1.2 Costruzione dei primi modelli

In seguito alle molteplici scoperte in merito ai diversi temi e dinamiche caratterizzanti la sincronizzazione delle lucciole, sono stati fatti alcuni tentativi per dare un'interpretazione del fenomeno dal punto di vista matematico.

Grazie ad Arthur Winfree, [21] biologo matematico, è stato sviluppato un modello costituito da un gran numero di oscillatori elettronici in modo da spiegare il comportamento collettivo di sistemi articolati quali reti neurali, cellule, o gruppi di specie animali, tra i quali proprio le lucciole.

Un modello più specifico riguardante i segnali luminosi delle lucciole è stato costruito nel 1990 [22] da Mirollo e Strogatz: ispirati da un modello atto a spiegare gli impulsi generati da cellule cardiache, sono riusciti a produrre un modello composto da oscillatori che emettevano impulsi accoppiati in maniera molto simile a quanto visto negli sciami di lucciole.

Ogni oscillatore tendeva a caricarsi fino ad un certo valore limite impostato, per poi emettere un segnale luminoso (simile all'emissione di un flash). Questa tipologia di oscillatori è chiamata Integrate and Fire Oscillators (IFO).

Altri modelli sono stati sviluppati prendendo come base questa tipologia di oscillatori: il primo modello qualitativo in grado di descrivere la sincronizzazione delle lucciole era stato sviluppato grazie a uno studio basato sullo stimolare o inibire gli impulsi luminosi generati da un esemplare appartenente alla specie *Pteroptyx cribellata* [6]. Tale studio ha permesso la creazione di un modello pacemaker resettabile per spiegare il mutare della frequenza di emissione del segnale per garantire la sincronizzazione.

Questo modello ha reso più facile la creazione di modelli atti a sfruttare il meccanismo di accensione e reset del segnale entro un certo valore di soglia (threshold).

In seguito sono stati generati altri modelli per simulare il comportamento di determinate specie di lucciole (come le *Pteroptyx malaccae* [23]), stavolta utilizzando come oscillatori dei dispositivi chiamati LCO (Light Controlled Oscillators), in grado di emettere impulsi luminosi e capaci di sincronizzarsi tra loro.

3.2 Come comunicano le lucciole: la trasmissione dei dati

I modelli costituiti da IFO e LCO, nonostante siano simili a livello strutturale, portano a dei risultati completamente differenti: infatti, i modelli basati sugli LCO non si limitano solo a spiegare la sincronizzazione tra i segnali luminosi, ma anche la risposta che segue a tale avvenimento, variante da specie a specie.

3.1.3 Applicazioni della sincronizzazione delle lucciole

Studiare il comportamento che porta le varie specie di lucciole a sincronizzarsi è in grado di portare grandi vantaggi in molteplici campi della tecnologia [7]: intensificare la stabilità delle reti di comunicazione wireless, migliorare nelle tecniche di estrazione della luce per i LED, comprendere l'utilizzo di sciame di robot per eseguire determinate azioni.

3.2 Come comunicano le lucciole: la trasmissione dei dati

Il concetto della trasmissione di informazioni tra più elementi è alla base per comprendere comportamenti oscillatori presenti negli esseri viventi: uno tra questi è il cosiddetto "ciclo circadiano" [24], il quale permette di adattarsi ai cambiamenti che si verificano all'esterno, ad esempio il passaggio dal giorno alla notte, attraverso la propagazione di informazioni che avviene tramite le oscillazioni generate nelle reti neurali. Questo meccanismo è legato alla generazione spontanea di impulsi delle cellule cardiache, i quali permettono al cuore di funzionare correttamente.

Le lucciole costituiscono un ottimo esempio per comprendere appieno in che modo tali comportamenti oscillatori vengono regolati all'interno degli esseri viventi.

La comunicazione che avviene tra i membri dello sciame, il cui obiettivo è sincronizzare il ritmo con cui sono emanati i singoli impulsi luminosi, è molto simile a quanto si osserva nei sistemi nervosi e nelle reti neurali.

Per cui analizzare tale fenomeno attraverso dei modelli specifici risulta di grande utilità per comprendere il funzionamento di vari sistemi cellulari presenti nel corpo umano.

3.2.1 Modello pacemaker resettabile

Sulla base della similitudine tra il passaggio di informazioni attraverso impulsi luminosi e il funzionamento delle cellule cardiache, è stato creato un modello in grado di mostrare gli aspetti più rilevanti riguardo al modo in cui tali segnali vengono emessi.

Prima di andare a descriverne il funzionamento, è necessario far notare due importanti aspetti in grado di influenzare la riuscita della sincronizzazione delle lucciole: la prima è la correlazione tra i vari elementi oscillanti che stabilisce il ritmo con cui emettere segnali, la seconda è la presenza o meno di fonti luminose esterne in grado di alterare la frequenza di emissione. Il modello presentato in Figura 3.1 va a giocare sulla possibilità di controllare la variazione della frequenza di emissione da parte

degli oscillatori. In Figura 3.1 (a) si ha il modo in cui l'oscillatore emette il flash a seguito di un processo di carica e poi scarica istantanea. L'oscillatore accumula energia fino a un valore prestabilito (threshold) per poi scaricarsi fino al valore che resetta il tutto; appena giunto al valore di reset, l'energia accumulata viene rilasciata istantaneamente tramite un flash.

Il segnale viene quindi emesso periodicamente, e il periodo che intercorre tra un flash e l'altro è costituito dal tempo di carica e scarica dell'oscillatore.

La particolarità di questo modello è la possibilità di regolare il ritmo di emissione facendo ritardare o anticipare l'impulso: com'è possibile vedere in Figura 3.1 (b), il prolungamento del tempo di ricarica è dovuto a un improvviso ritorno al livello di reset; d'altro canto con un reset anticipato del segnale visibile in Figura 3.1 (c) l'intervallo tra un flash e l'altro si riduce, rendendo il segnale più frequente.

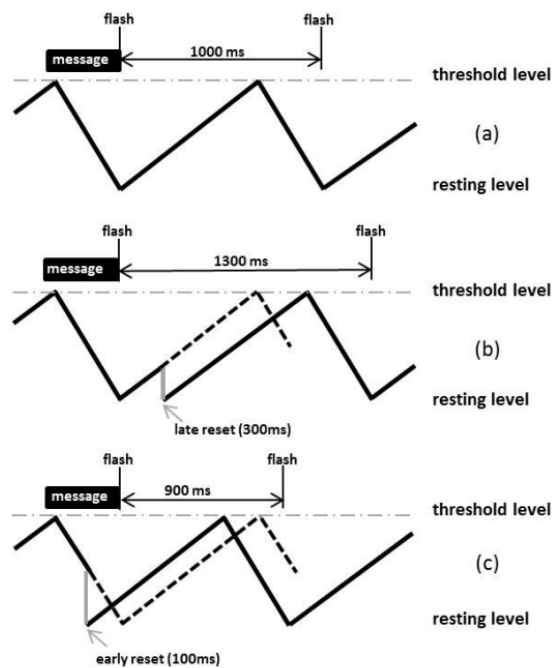


Figura 3.1: Modello pacemaker resettabile da [6]

Tale modello, introdotto da Buck, è stato applicato a due specie di lucciole in particolare, ovvero *Pteroptyx cribellata* e *Photinus pyralis*, e da queste osservazioni è stato possibile formulare i primi modelli in grado di spiegare in che modo le lucciole si sincronizzano, sebbene questi siano molto semplici e tendano a trascurare effetti dovuti a temperatura, condizioni chimiche e altre influenze provenienti dall'esterno.

3.3 Primi modelli basati sulla sincronizzazione

Uno dei primi a spiegare il comportamento alla base della sincronizzazione di oscillatori biologici fu Winfree [21], fino poi ad arrivare alla creazione di modelli interamente dedicati allo studio delle lucciole, in particolare degli esemplari appartenenti alla specie *Pteroptyx malaccae* creato da Ermentrout [23].

3.3.1 La curva di risposta di fase (PCR)

Un elemento fondamentale per l'analisi dei modelli che verranno trattati è la reazione degli oscillatori a interferenze che possono incorrere nella trasmissione del segnale. Per questo motivo è stata introdotta la PCR (Phase Response Curve), o curva di risposta di fase.

Essa costituisce la rappresentazione grafica del ritardo che si genera nel momento in cui, tramite una perturbazione, viene fatto sfasare il periodo di oscillazione di un sistema periodico.

Si consideri ad esempio un sistema che oscilla secondo un periodo costante pari a T_0 , e i cui tempi di emissione (flash) corrispondano agli istanti

$$t = t_{F0}, 2t_{F0}, 3t_{F0}, \dots, \quad (3.1)$$

ognuno distanziato dall'altro di T_0 . Si imponga adesso una perturbazione del segnale al tempo $t=t_0$ appartenente all'intervallo $[0, T_0)$: si potrebbe quindi pensare che, essendo un segnale periodico, da questo momento in poi avrà un nuovo periodo di oscillazione pari a $T(t_0)$, a cui corrisponderanno gli istanti successivi

$$t = T(t_0) + T_0, T(t_0) + 2T_0, \dots \quad (3.2)$$

determinando uno sfasamento rispetto al segnale originale. Tuttavia, per quanto si possa pensare a un segnale permanentemente sfasato, l'effetto della perturbazione non dura per sempre, ma svanisce dopo appena un ciclo, e questo ritardo di fase è quantificato dalla formula

$$\Delta(\phi) = \frac{T_0 - T(T_0\phi)}{T_0}, \quad (3.3)$$

dove $\phi = t_0/T_0 \in [0, 1)$ è la fase per la quale avviene la perturbazione.

$\Delta(\phi)$ rappresenta l'entità dello sfasamento dovuto alla perturbazione in base al segno:

- $\Delta(\phi) > 0$ se perturbazione avvenuta per anticipare il flash
- $\Delta(\phi) < 0$ se perturbazione avvenuta per ritardare il flash.

La conoscenza di questa funzione permetterà di descrivere in maniera più efficace i modelli basati sugli IFO e LCO (introdotti nel paragrafo 3.2.1).

3.3.2 Integrate and Fire Oscillators (IFO)

Il primo modello per descrivere il comportamento delle lucciole comprende l'utilizzo di oscillatori denominati IFO, i quali vengono utilizzati ampiamente nei sistemi neurali. Sono caratterizzati da un potenziale variabile V_i , la cui variazione nel tempo è descritta dall'espressione:

$$\frac{dV_i}{dt} = I - \eta V_i, 0 \leq V_i \leq 1, i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

dove I corrisponde all'input del segnale, $\eta \geq 0$ corrisponde alla perdita, mentre N è il numero degli oscillatori. Il funzionamento segue lo stesso schema visto nel paragrafo 3.2.1: l'oscillatore si carica facendo aumentare il suo potenziale fino al valore di threshold, che in questo caso corrisponde a $V_i=1$; in seguito viene emesso il segnale luminoso e il valore di V_i scende istantaneamente a zero. Non appena un oscillatore si illumina, si ha un'interazione con gli altri oscillatori: se a un istante t si ha $V_i=1$, gli altri oscillatori V_j aumentano il loro valore di soglia di una quantità pari a β/N secondo quanto scritto in seguito.

Se $V_i(t) = 1 \implies V_j(t^+) = \min(1, V_j(t) + \beta/N)$, per ogni $j \neq i$

Come detto in precedenza, è importante calcolare l'espressione della curva di risposta di fase (PCR) relativa a questo modello di oscillatori IFO.

Per farlo si andranno a ricavare i termini dell'equazione 3.3 per poter determinare $\Delta(\phi)$. Per ricavare T_0 si effettua l'integrazione dell'equazione 3.4 per poi ottenere

$$T_0 = \frac{1}{\eta} \ln \frac{I}{I - \eta}. \quad (3.5)$$

Successivamente si passa all'espressione del periodo dovuto alla perturbazione $t=t_0$, ovvero quando la variabile V aumenta di un quantitativo pari a β .

Se t_0 è molto vicino a $t=T_0$, ed essendo l'illuminazione istantanea, si può approssimare e dire che $T(t_0)=t_0$. Nel caso generale, ovvero con il periodo perturbato diverso da quello iniziale, si ha

$$T = t_0 + \int_{V+\beta}^1 \frac{1}{I - \eta V} dV \quad (3.6)$$

che integrando porta

$$T = \frac{1}{\eta} \ln \frac{I - \eta \beta e^{\eta t_0}}{I - \eta} \quad (3.7)$$

Di conseguenza, sostituendo questi valori nella formula della PCR (3.3) si ottiene

$$\Delta \left(\frac{t_0}{T_0} \right) = 1 - \frac{\ln \left(\frac{I - \eta \beta e^{\eta t_0}}{I - \eta} \right)}{\left(\ln \frac{I}{I - \eta} \right)}. \quad (3.8)$$

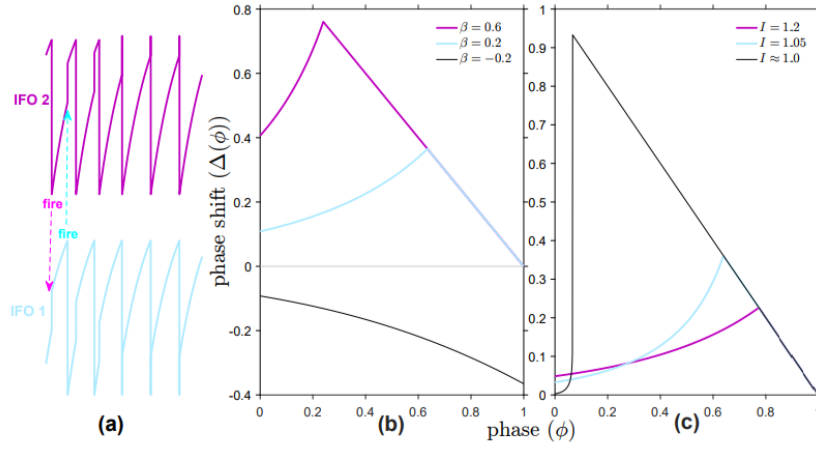


Figura 3.2: Immagine presa da [7] raffigurante: (a) Andamento della sincronizzazione per due IFO accoppiati; (b) Sfasamento per differenti β con $I = 1.25$; (c) Differenti valori di I quando si ha $\beta = 0.1$. (b) e (c) raffigurano delle PRC con $\eta = 1$

La seguente descrizione è stata modificata in base alle caratteristiche peculiari della *Pteroptyx cribellata*, le quali comprendono periodi di oscillazione compresi tra 800 e 1600ms.

Questa trattazione prende due valori di potenziale massimo e minimo V^{upper} e V^{lower} non necessariamente pari ad 1 e 0.

Appena l' i -esimo oscillatore raggiunge il valore di threshold ($V_i=1$), viene generato il flash e immediatamente il valore di V_i si resetta.

Si osservi il caso in cui si ha una interazione tra due IFO: quando un oscillatore IFO_j raggiunge il suo valore di soglia si illumina, causando un aumento del V_i degli altri oscillatori di un valore β'_{ij} rimanendo sotto V^{upper} , indicato nell'espressione

$$V_i(t^+) = \min(V^{upper}, V_i(t) + \beta_{ij}). \quad (3.9)$$

Si ricorda che quando un oscillatore raggiunge il valore di soglia V^{upper} , esso scende istantaneamente al valore V^{lower} .

Si consideri ora un modello con N elementi dove $N_f < N$ oscillatori IFO hanno raggiunto la soglia massima in contemporanea: questo vuol dire che ogni suo potenziale V_i sarà dato dall'espressione

$$Se\{V_j(t) = V^{upper}\} \implies V_i(t^+) = \min\left(V^{upper}, V_i(t) + \sum_{j=1}^{N_f} \beta'_{ij}\right) \wedge \{V_j(t) = V^{lower}\}, \quad (3.10)$$

con $j=1, \dots, N_f$.

Il termine β'_{ij} rappresenta l'influenza del j -esimo IFO sugli i -esimi omonimi appartenenti allo stesso sistema.

Infine è possibile incorporare il periodo T_{0i} nell'espressione della variazione di V_i già vista in precedenza

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{1}{T_{0i}} [V_{Mi} - V_i(t)], \quad V^{lower} \leq V_i(t) \leq V^{upper}. \quad (3.11)$$

3.3.3 Light Controlled Oscillators (LCO)

Originariamente gli LCO erano progettati per imitare al meglio la sincronia delle lucciole attraverso dei semplici dispositivi elettronici.

Un LCO è in grado di emettere impulsi luminosi e di riceverne dagli altri oscillatori presenti.

Prima di essere impiegati all'interno di questi argomenti, sono stati studiati precedentemente in altri contesti, sempre riguardanti la stabilità o la sincronizzazione.

Il modello è costituito da resistori, capacitori e un potenziale di partenza V_M . Un elemento importante di questo modello è il chip LM555, il quale è responsabile del comportamento oscillatorio dell'LCO.

Come visto per gli IFO, l'alternanza tra emissione del segnale e spegnimento è posta tra due valori di soglia, entrambi dipendenti dal potenziale iniziale: quello più basso ha come valore $V^{lower} = V_M/3$, mentre quello più alto $V^{upper} = 2V_M/3$.

Questi valori di threshold sono legati alla variabile $\epsilon(t)$, il cui valore può essere 1 (fase di massima carica), o 0 (scarica).

Riferendosi ad un sistema composto da N oscillatori, l'equazione che ne descrive la dinamica è la seguente

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{\ln 2}{T_{c0i}} (V_{Mi} - V_i(t)) \epsilon_i(t) - \frac{\ln 2}{T_{d0i}} V_i(t) [1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad (3.12)$$

dove T_{c0} è il tempo di carica, mentre T_{d0} è il tempo di scarica coincidente con l'emissione del flash.

Facendo interagire vari LCO, è possibile far variare la durata di questi intervalli di tempo, rendendoli più lunghi o più corti.

Il termine δ_{ij} compare solo se due oscillatori i e j interagiscono tra loro, con almeno uno dei due in fase di scarico ($\epsilon_j \neq 1$). In questo modello sono stati considerati accoppiamenti simmetrici, ovvero $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Anche qui, come fatto per il sistema di IFO, si va ad imporre una perturbazione nella periodicità dell'emissione del segnale.

Per determinare la PCR si definisce un valore di potenziale per cui la fase sia zero, e per convenienza si va a scegliere un voltaggio pari a $V_M/2$, ovvero a metà della soglia di threshold.

La determinazione degli altri parametri è raffigurata in Figura 3.3.

3.3 Primi modelli basati sulla sincronizzazione

Il grafico in questione indica gli istanti di tempo in cui vengono raggiunti i valori di soglia superiore e inferiore: il segnale non perturbato è rappresentato da una linea continua, mentre quello perturbato è marcato da linee tratteggiate.

I tempi di accensione e spegnimento sono indicati dai termini t_{F0} (firing time) e t_{E0} (extinction time), mentre t_0 e t_f rappresentano il tempo di inizio e fine della perturbazione.

Il segnale perturbato ha origine all'istante t_F e termina al tempo t_E .

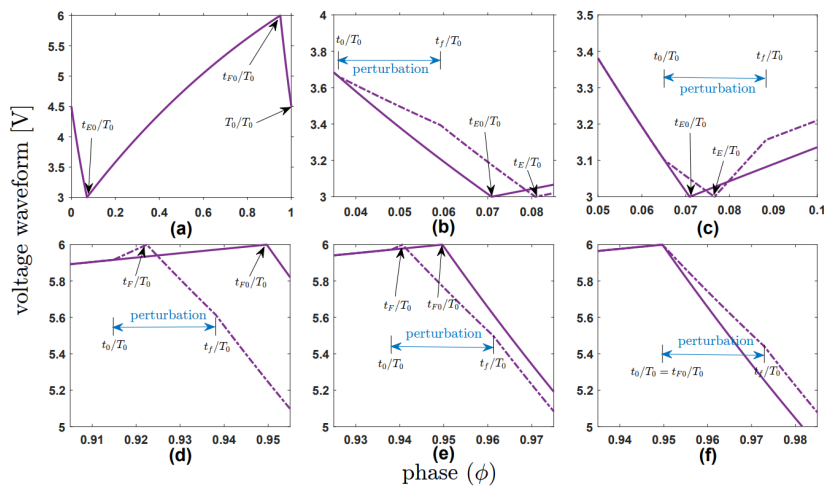


Figura 3.3: Andamento dei parametri necessari a determinare la PCR dei vari LCO, da [7]

Le perturbazioni avvengono su istanti di tempo ricavabili grazie al fattore di sfasamento $\tau=1,0\text{ms}$.

Nel grafico (a) è raffigurato l'andamento oscillatorio del segnale senza che vi siano perturbazioni; nel grafico (b) si ha una perturbazione effettuata al tempo $t_0=t_{E0}-1,5\tau$, la quale genera un ritardo nel raggiungimento del threshold inferiore; nel grafico (c) si ha una perturbazione effettuata al tempo $t_0=t_{E0}-0,25\tau$; nel grafico (d) si ha una perturbazione effettuata al tempo $t_0=t_{E0}-1,5\tau$; nel grafico (e) si ha una perturbazione effettuata al tempo $t_0=t_{E0}-0,5\tau$; nel grafico (f) si ha una perturbazione effettuata al tempo $t_0=t_{F0}$.

Applicando questi valori, a seconda del caso preso in esame, all'interno della formula, si ricava il valore di $\Delta(\phi)$, il cui andamento è suddiviso in più segmenti come visibile in Figura 3.4

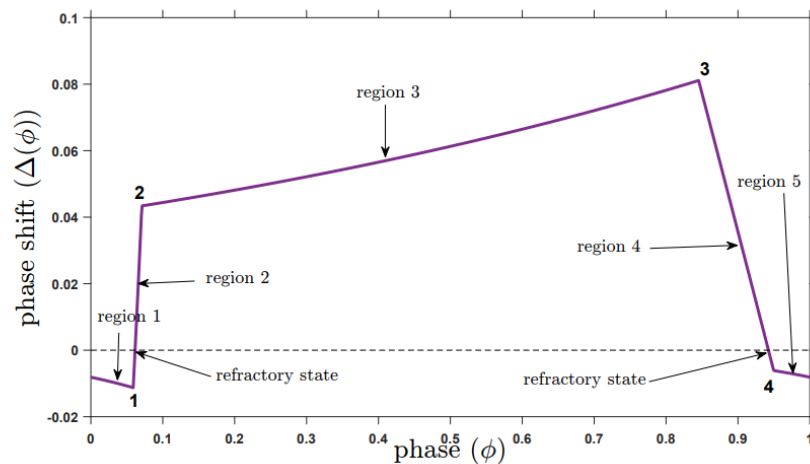


Figura 3.4: PRC ottenuta risolvendo le equazioni differenziali degli LCO, da [7]

Ogni segmento rappresenta uno dei grafici già visti in precedenza:

- regione 1 identificata dalla perturbazione in **(b)**
- regione 2 identificata dalla perturbazione in **(c)**
- regione 3 identificata dalla perturbazione in **(d)**
- regione 4 identificata dalla perturbazione in **(e)**
- regione 5 identificata dalla perturbazione in **(f)**

Per caratterizzare il comportamento di due LCO accoppiati, le cui caratteristiche oscillatorie si rifanno alla *Pteroptyx cribellata*, si ricorre allo schema raffigurato in figura 3.5

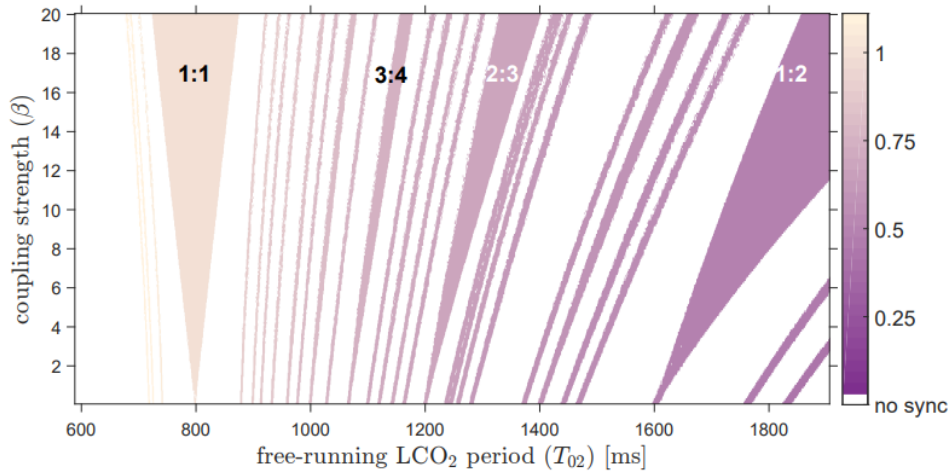


Figura 3.5: Lingue di Arnold per LCO basato su *Pteroptyx cribellata*, da [7]. A ogni barra colorata è associato un valore di ρ . Sono indicati alcuni dei rapporti possibili (1:1, 2:3, 3:4, 1:2)

In questo grafico sono rappresentate le lingue di Arnold [25], ovvero delle regioni a cui è associato un valore $\rho = T_1/T_2$, dove T_1 e T_2 sono i periodi di oscillazione dei due LCO.

A seconda del valore di ρ si possono individuare le zone dove si ha sincronizzazione oppure no: per un rapporto 1:1 si ha sincronizzazione, in quanto T_1 e T_2 sono uguali, mentre più si scende con il valore di ρ più i due oscillatori sono fuori sincrono (in quanto i valori di T_1 e T_2 tendono a divergere).

Con le lingue di Arnold si è in grado di individuare varie zone di interesse andando a giocare con i parametri presenti sugli assi, ovvero T_{20} (periodo libero di T_2) e il parametro di coppia β ; ciò permette di avere una comprensione più profonda del fenomeno preso in esame.

3.3.4 Altri modelli per la sincronizzazione delle lucciole

Altri modelli possono generare ulteriori studi sul fenomeno che caratterizza la sincronizzazione delle lucciole. Un esempio sono i Multi-Agent-Systems (MAS), i quali si possono ritrovare all'interno di NET-LOGO [8], tra cui vari modelli in grado di simulare diverse specie di lucciole (*Pteroptyx cribellata*, *Luciola pupilla*, *Pteroptyx malaccaae*).

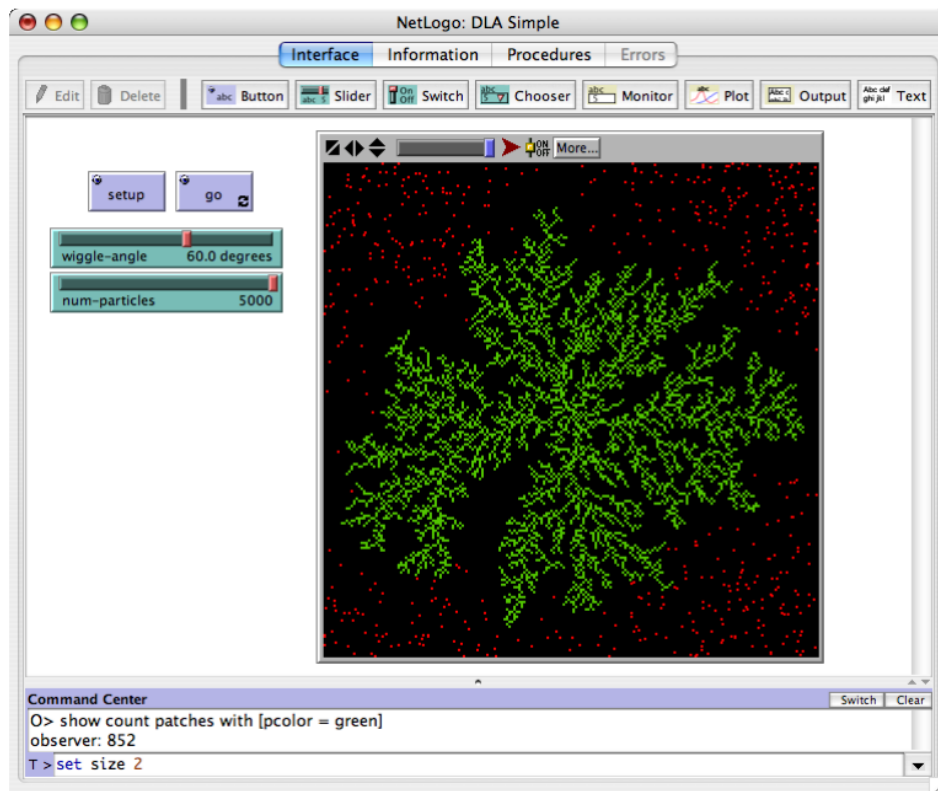


Figura 3.6: Interfaccia utente all'interno di NetLogo, da [8]

3.4 Comparazione tra IFO e LCO

Nonostante siano molto simili in termini di set-up e attrezzature, IFO e LCO presentano alcune sostanziali divergenze.

Una prima importante differenza è dovuta al funzionamento dell'IFO di tipo ideale, dove il flash e il reset avvengono istantaneamente, mentre nella realtà esiste un intervallo di tempo che separa una fase dall'altra (tale intervallo varia da specie a specie di lucciole).

Per mettere in evidenza ulteriori divergenze, si considerino oscillatori che posseggano stessa forma e caratteristiche.

In termini di equazioni, per gli IFO si utilizzino le espressioni 3.10 e 3.11 già trattate, per gli LCO la 3.12.

Per caratterizzare la tendenza alla sincronizzazione di entrambe le tipologie di oscillatori, si introduca il concetto di probabilità di sincronizzazione totale (PTS), ovvero il rapporto tra il numero di tentativi in cui tutti gli oscillatori di una certa tipologia si sincronizzano e il numero dei tentativi totali.

Si distinguano inoltre due casi di accoppiamento diversi: nel primo ogni oscillatore è accoppiato con gli altri attraverso un valore $\beta_{ij}=\beta/N$ costante; nel secondo caso

l'entità del singolo accoppiamento non è uguale per tutti ma è dipendente dalla distanza, ovvero $\beta_{ij} \propto 1/r_{ij}^\alpha$, con $\alpha = 2, 11$.

Infine, bisogna considerare la presenza di oscillatori fuori fase tra loro, e ciò si ottiene facendo variare il periodo i -esimo di ogni oscillatore di un certo ΔT_i , quest'ultimo legato ad un valore di σ_{rel} in modo da avere $T_i = T_{ref} + \Delta T_i$, con T_{ref} associato alla specie di lucciole che si vuole considerare.

Un'altro importante aspetto per differenziare maggiormente i due tipi di oscillatori è il transitorio attraverso il quale si sincronizzano.

I risultati di quest'analisi sono descritti nei grafici in Figura 3.7 (caso con β costante) e 3.8 (caso con β variabile).

Ogni grafico è descritto nel seguente modo:

- La prima riga di grafici è riferita agli LCO, mentre la seconda agli IFO
- Sulle ascisse è riportato il numero di oscillatori che vengono fatti interagire, sulle ordinate si ha il tempo di sincronizzazione
- La dimensione dei cerchietti è proporzionale al valore percentuale di PTS (come indicato nel grafico 3.7(a))

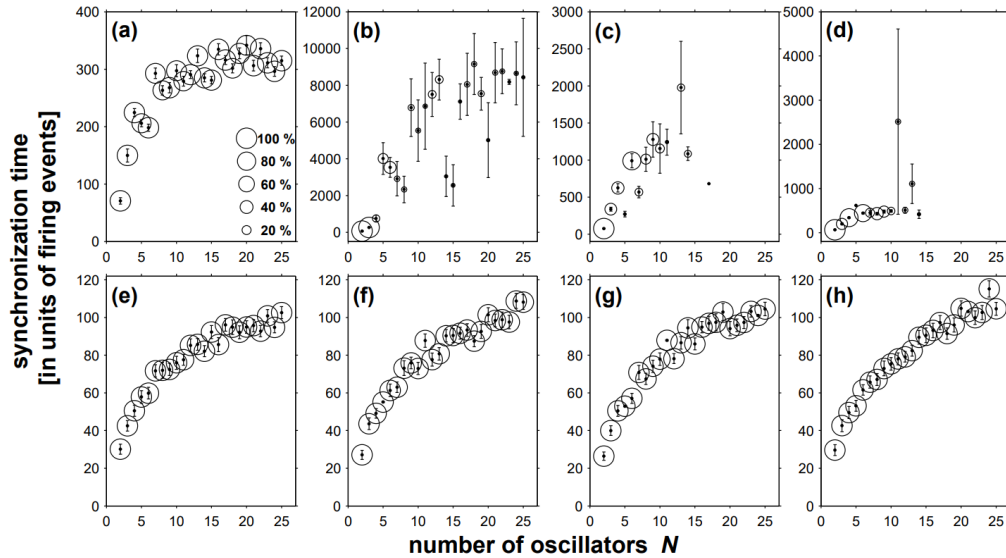


Figura 3.7: Andamento dell'istante di sincronizzazione in funzione di N LCO (in alto) e N IFO (in basso) con i seguenti valori di σ_{rel} : (a) ed (e) pari a 0, (b) ed (f) 0.10×10^{-4} , (c) ed (g) 2.24×10^{-4} e (d) ed (h) 7.07×10^{-4} . Le dimensioni del cerchio sono proporzionali al valore di PTS e la linea verticale rappresenta la deviazione standard. Figura proveniente da [7]

Si prende in esame la sezione di grafici per β =costante. Nel grafico (a) ed (e) il valore di σ_{rel} è nullo, per cui non si ha ritardo di fase; la maggior parte degli oscillatori

in questo caso tende a sincronizzarsi quasi sempre, dato che il PTS assume valori molto alti.

Si ha una situazione diversa nel momento in cui si tende a considerare $\sigma_{rel} \neq 0$: per gli LCO il transitorio aumenta con il valore di N , con il PTS che tende a valori molto bassi (poca probabilità di sincronizzazione); per quanto riguarda gli IFO, non si hanno rilevanti differenze da caso del grafico 3.7(a).

Si analizza adesso la situazione per β non costante (le coordinate e la legenda sono gli stessi presenti in Figura 3.7

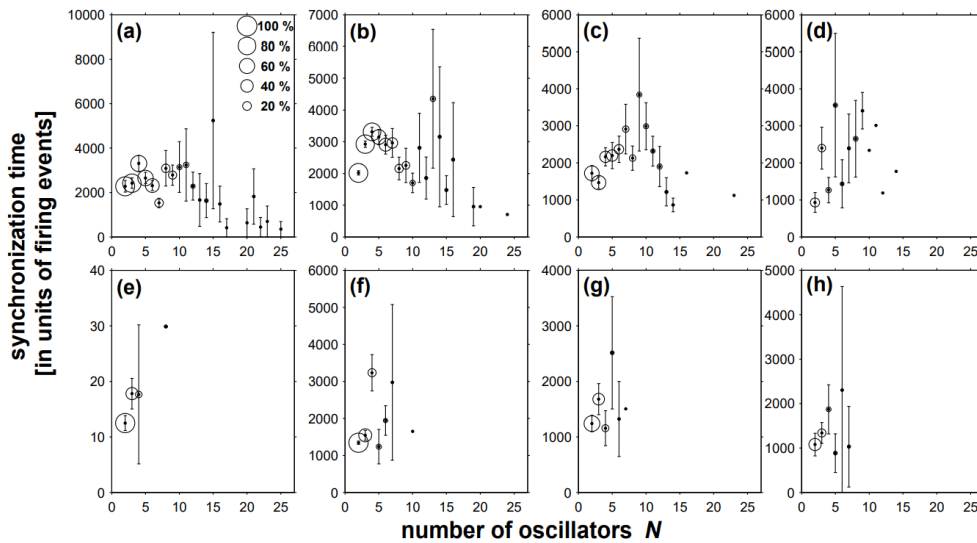


Figura 3.8: Variazione del grafico in 3.7 ma con β variabile

Nei grafici dove si ha assenza di fase i valori di PTS tendono a zero per $N > 8$, e la situazione è ancora più drastica andando a vedere i grafici rappresentanti gli IFO, in cui è poco probabile una sincronizzazione completa.

Nella tabella in Figura 3.9 sono rappresentati i risultati dei confronti tra le varie configurazioni

configurations comparison	$\langle PTS \rangle$	sync. time
LCOs mean-field vs. LCOs distance-dependent	✓	✓
LCOs mean-field vs. IFOs mean-field	✓	✓
LCOs mean-field vs. IFOs distance-dependent	✓	✓
LCOs distance-dependent vs. IFOs mean-field	✓	✓
LCOs distance-dependent vs. IFOs distance-dependent		✓
IFOs mean-field vs. IFOs distance-dependent	✓	✓

Figura 3.9: Confronto tra le configurazioni di IFO e LCO, da [9]

Come affermato in precedenza, il comportamento dinamico tra IFO e LCO è

molto differente, e dalle analisi appena svolte si può dedurre come gli LCO siano più realistici in quanto sperimentalmente convalidati; essi costituiscono il modello più accurato e appropriato per descrivere non solo il comportamento armonioso delle lucciole maschio, ma anche ciò che ne consegue, ovvero la risposta della femmina.

3.5 Caratterizzazione della risposta alla sincronizzazione

3.5.1 Introduzione

Come ben noto dai primi studi sull'argomento, la causa principale per cui le lucciole tendono a sincronizzarsi è il corteggiamento, comportamento che è stato ampiamente osservato e descritto da scienziati come Lewis, Lloyd e Cratsley [19]. Nella maggior parte delle specie appartenenti al genere *Photinus*, il corteggiamento è caratterizzato da uno scambio di segnali luminosi nel quale all'impulso sincronizzato dei maschi segue la risposta della femmina.

3.5.2 Primo modello

Un primo tentativo per spiegare la natura di tale risposta è stato compiuto utilizzando un modello fatto da LCO modificati in modo da differenziare in termini di caratteristiche oscillatorie i segnali prodotti dai maschi da quelli generati dalle femmine.

Inoltre, una volta comprese le dinamiche alla base del corteggiamento, è possibile studiare e comprendere comportamenti più articolati appartenenti ad altre specie di esemplari *Photinus*.

Come detto in precedenza, per simulare la risposta alla sincronizzazione è necessario distinguere in maniera chiara i segnali prodotti dagli oscillatori "maschi" e quelli "femmine". In particolare, le differenze si possono evincere dal grafico in Figura 3.10, dove il grafico a sinistra (**a**) riporta il segnale maschile, mentre quello a destra (**b**) il segnale femminile.

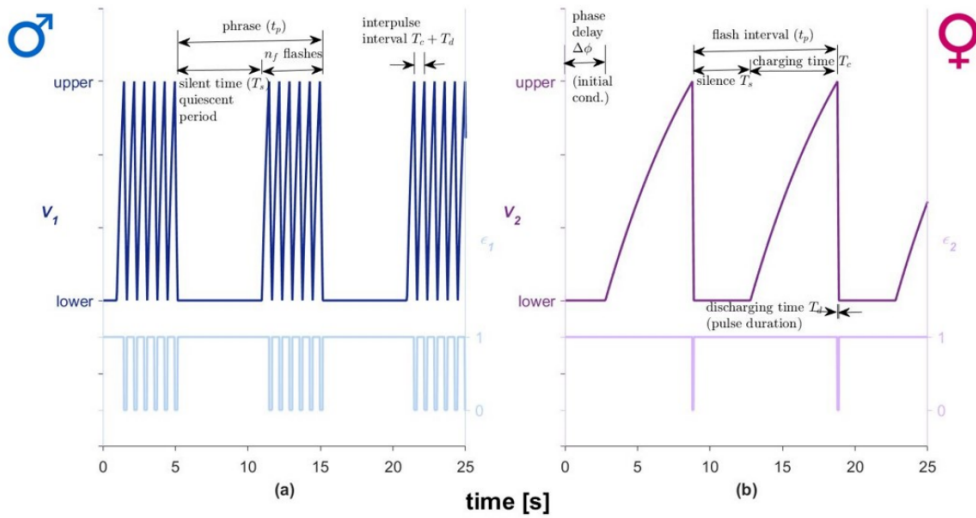


Figura 3.10: Andamento dei segnali associati al maschio (a) e alla femmina (b) di *Photinus carolinus*, da [10]

Prendendo in esame il grafico dei maschi, il segnale è dato da n_f impulsi consecutivi (costituiti da un tempo di carica T_c e di scarica T_d), seguiti da un intervallo di tempo T_s (silent time) in cui non si ha nulla.

Osservando il modo in cui il segnale si ripete, il periodo T_p è ricavabile dalla relazione

$$T_p = T_s + n_f(T_c + T_d) \quad (3.13)$$

da un tempo di carica T_c e di scarica T_d .

Il segnale della femmina invece presenta un solo flash, il quale coincide con il tempo di reset del segnale da parte dell'oscillatore; si ha poi, in comune con il segnale del maschio, un intervallo di vuoto T_s al termine del quale l'oscillatore inizia a caricarsi per un periodo pari a T_c (charging time) per poi emettere un nuovo segnale luminoso.

Altre informazioni riguardanti la Figura 3.10 come i valori dei parametri e le condizioni iniziali sono riportati nella seguente tabella

TABELLA CONDIZIONI INIZIALI		
Parametri	MASCHIO	FEMMINA
T_p	10.000s	10.000s
n_f	6	1
T_c	0.500s	6.000s
T_d	0.200s	0.100s
T_s	5.800s	3.900s
$\Delta\phi$	0.603rad	1.750rad

3.5 Caratterizzazione della risposta alla sincronizzazione

Variando l'entità dei parametri, è possibile adattare questo modello ad altre specie diverse di lucciole.

In maniera analoga al funzionamento degli LCO già analizzati in precedenza, la generazione degli impulsi avviene con il raggiungimento di un valore di soglia che è dato dal potenziale $V^{upper} = 2V_M/3 = 6$, mentre il valore più basso che determina il raggiungimento del reset è $V^{lower} = V_M/3 = 3$.

Di conseguenza, il valore del potenziale del singolo LCO è determinato dalle equazioni

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{\ln 2}{T_{ci}}(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \frac{\ln 2}{T_{di}}V_i(t)(1 - \epsilon_i(t)), \quad (3.14)$$

$$V_i(t) = (V_i(t) - V_i^{lower})\epsilon_i(t) + V_i^{lower}, \quad (3.15)$$

dove V_M è un valore costante che determina i due estremi del range del potenziale, mentre $\epsilon_i(t)$ è la variabile che può assumere due valori specifici:

- $\epsilon_i(t)=1$ quando l'oscillatore si carica (intervallo T_c+T_s)
- $\epsilon_i(t)=0$ quando l'oscillatore si scarica (T_d)

A seconda del valore di ϵ è possibile distinguere le varie fasi del processo:

Se $V_i(t) = V_i^{lower}$ e $\epsilon_i(t) = 0$ allora $\epsilon_i(t_+) = 1$;

Se $V_i(t) = V_i^{upper}$ e $\epsilon_i(t) = 1$ allora $\epsilon_i(t_+) = 0$;

Se $V_i(t) = V_i^{lower}$ e $\epsilon_i(t) = 1$ allora $\epsilon_i(t_+) = 1$;

dove t_+ se preso in esame il caso numero tre

$$t = [t_+ (k - 1)(T_p + n_f(T_c + T_d)) + \Delta\phi] \quad (3.16)$$

per ogni k -esimo intervallo di flash. La presenza di più di un oscillatore è in grado di influenzare il modo in cui gli LCO oscillano: considerando N elementi, l'equazione da utilizzare è la seguente

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{\ln 2}{T_{ci}}(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \frac{\ln 2}{T_{di}}V_i(t)(1 - \epsilon_i(t)) + \theta_i \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij}(1 - \epsilon_j(t)), \quad (3.17)$$

I termini T_{c0i} e T_{d0i} rappresentano il tempo di carica e scarica quando l'oscillatore i -esimo non subisce alcuna influenza dagli altri LCO, mentre β_{ij} è il parametro di coppia che compare quando due oscillatori interagiscono.

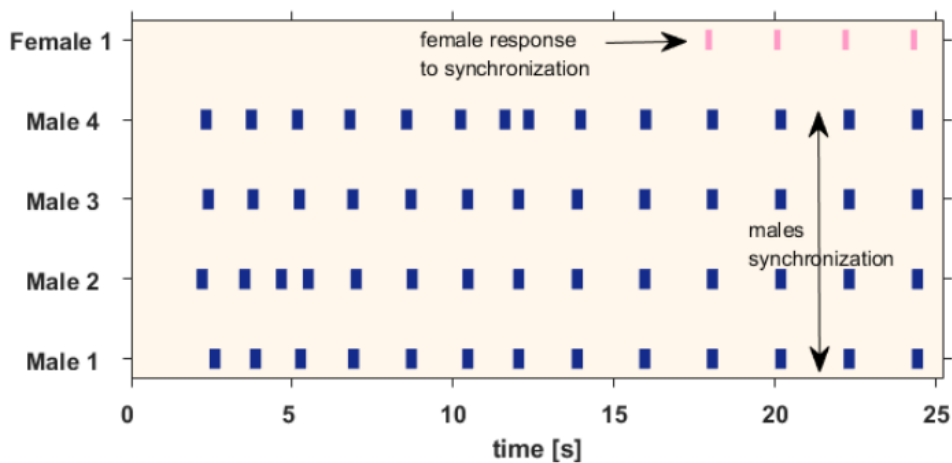
Analizzando l'equazione 3.17, si deduce come le fasi di carica e scarica possano essere modificate grazie agli effetti prodotti dall'interazione tra più oscillatori.

I tempi di carica e scarica di un LCO possono essere accorciati o allungati nel momento in cui vengono generati degli impulsi da altri oscillatori dello stesso sistema.

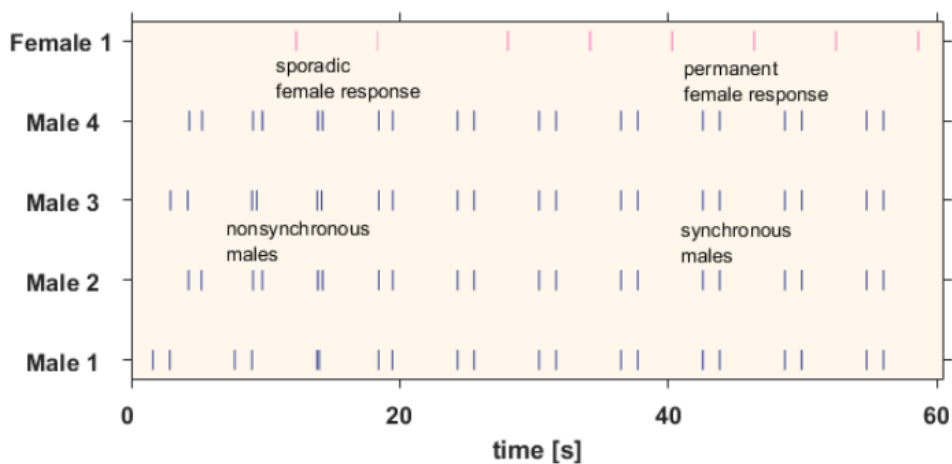
In particolare, l'impulso è determinato dal valore di θ , il quale vale 1 per i maschi e -1 per le femmine. Questo fattore è importante in quanto descrive in che modo l'oscillatore reagisce agli stimoli esterni.

3.5.3 Interazione tra maschi e femmine a livello grafico

Nel seguente grafico si vuole rappresentare come comunicano un gruppo di quattro lucciole maschio e una femmina appartenenti rispettivamente alla specie *Photinus collustrans* (Figura 3.11 a) e *Photinus greeni* (Figura 3.11 b).



(a)



(b)

Figura 3.11: Sequenze di segnali emessi dai maschi (blu) e dalle femmine (rosa) di due differenti specie appartenenti al genere *Photinus*, da [7]: (a) *collustrans* ($n_{fmaschio} = n_{ffemmina} = 1$), e (b) *greeni* ($n_{fmaschio} = 2, n_{ffemmina} = 1$).

Nel caso dei *Photinus collustrans*, la risposta della femmina giunge solo se la condizione di sincronizzazione è soddisfatta (in questo caso il segnale arriva dopo circa 18 secondi).

3.6 Esempio di simulazione delle lucciole tramite algoritmo di Strogatz

Considerando invece la figura associata ai *Photinus greeni*, la femmina inizia a mandare segnali, seppur in maniera sporadica, ancor prima che i maschi sincronizzino i loro impulsi; la risposta diventa più frequente una volta che i maschi si sono sincronizzati (osservando il grafico si può dedurre che questo avvenga dopo circa 28 secondi).

Le caratteristiche di entrambe le specie esaminate sono reperibili dalla seguente tabella in Figura 3.12:

Species	Gender	Flashes	Flashing [s]	Interflash [s]	Quiescence [s]
<i>P. collustrans</i>	♂	1	0.343	2.200	1.843
	♀	1	0.443		
<i>P. ignitus</i>	♂	1	0.243	4.986	4.743
	♀	1	0.314		
<i>P. marginellus</i>	♂	1	0.385	2.871	2.486
	♀	1	0.114		
<i>P. pyralis</i>	♂	1	0.729	5.657	4.928
	♀	1	0.214		
<i>P. sabulosus</i>	♂	1	0.129	3.786	3.657
	♀	1	0.057		
<i>P. umbratus</i>	♂	1	0.557	6.786	6.229
	♀	1	0.343		
<i>P. consanguineus</i>	♂	2	0.171	0.500	4.643
	♀	1	0.243		
<i>P. greeni</i>	♂	2	0.100	1.271	3.571
	♀	1	0.157		
<i>P. consimilis</i>	♂	8	0.086	0.271	>4.914
	♀	2	0.129	0.286	

Figura 3.12: Caratteristiche oscillatorie di diverse speci *Photinus*, da [7]

3.6 Esempio di simulazione delle lucciole tramite algoritmo di Strogatz

Per chiudere la trattazione del tema discusso all'interno di questo capitolo, in questa sezione verrà introdotto un semplice algoritmo proposto da Strogatz in [26] con lo scopo di spiegare l'interazione tra varie lucciole attraverso i loro impulsi luminosi.

3.6.1 Illustrazione del funzionamento

Questo schema, come se fosse un vero e proprio "gioco", presenta delle regole che sono le seguenti:

- 1) Il gioco si svolge su un poligono con n lati, ognuno contenente r caselle, ottenendo un tabellone composto da $N = n \times r$ caselle su cui si muovono i giocatori (che sarebbero le nostre lucciole). Per questo esempio si consideri un tabellone quadrato con 20 caselle.

Capitolo 3 *La sincronizzazione delle lucciole*

- 2) La prima casella, quella in alto a sinistra del quadrato, rappresenta la casella dove si verifica il flash. Quando un giocatore va ad occupare quella casella, esso genera un impulso luminoso.
- 3) Il gioco inizia con i giocatori disposti a caso lungo il perimetro della griglia. Essi possono partire da qualsiasi casella, eccetto quella associata al flash
- 4) Ogni "lucciola" avanza in senso orario di una casella per turno.
- 5) Nel turno in cui una lucciola si illumina, essa rimane ferma per un turno nella casella di flash, mentre le altre avanzano secondo la regola 4. Ogni volta che una lucciola compie un giro completo della griglia, nel giro successivo avanzerà di una casella in più rispetto al giro precedente (completato il primo giro ci si muoverà di 2 caselle e non più una, e così via).
- 6) Il gioco termina quando tutti i giocatori finiscono nello stesso turno sulla casella di flash (ovvero quando tutte le lucciole sono sincronizzate) nel minor numero di turni possibile.

Tali regole hanno lo stesso ruolo delle condizioni iniziali nei modelli precedentemente analizzati, per cui il numero di turni necessari per terminare il gioco può variare in base a quali sono le caselle di partenza e a seconda delle regole imposte. In particolare, è la regola 5 ad avere maggiore influenza sul fluire del gioco.

Si propongono quindi quattro variazioni della regola 5, ognuna in grado di facilitare o meno l'arrivo simultaneo dei giocatori sulla casella di flash:

- (a) Quando una lucciola è su una casella posizionata sul lato opposto della griglia, c'è la possibilità che questa passi oltre la casella di flash senza fermarsi, impedendo di illuminarsi. Questa variazione rende più difficile il raggiungimento della sincronizzazione completa di tutte le lucciole in gioco.
- (b) Quando una lucciola comincia un nuovo giro, è obbligatorio che questa arrivi alla casella di flash. Tale variazione impone che ogni lucciola si illumini sempre ad ogni giro, facilitando il raggiungimento della fine del gioco.
- (c) Quando due o più lucciole sono vicine alla casella di flash, devono aspettare che tutte le altre le raggiungano sulla stessa casella, dopodiché esse avanzano tutte di una posizione.
- (d) Si considera la situazione riportata nella variante (c) con la seguente modifica: quando delle lucciole sono costrette a rimanere nella casella di flash, le altre avanzano sulla griglia secondo la regola 4 (non di una posizione sola come nel caso precedente).

Di seguito è rappresentato un esempio di come il gioco evolve con il passare dei turni, prendendo in considerazione anche le quattro varianti che sono state introdotte.

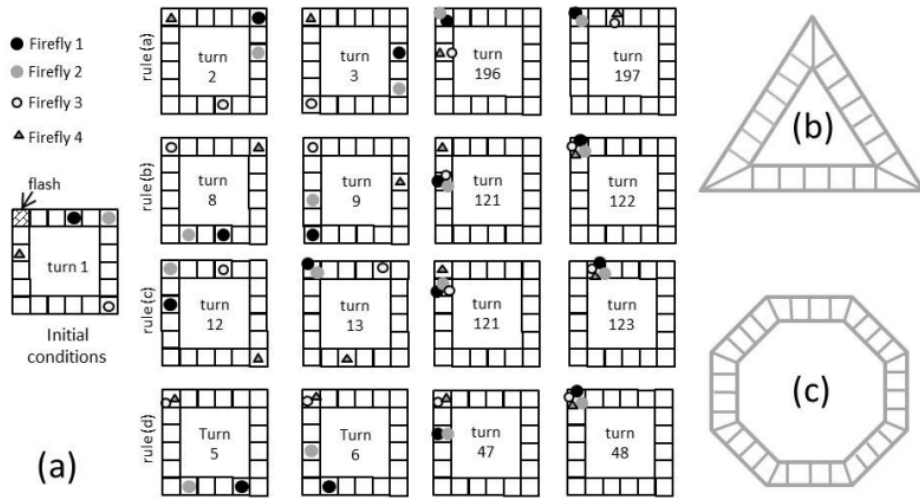


Figura 3.13: (a) Svolgimento del gioco a quattro giocatori considerando le quattro variazioni della regola 5 già introdotti. La griglia di gioco può anche essere di forma triangolare (b) o ottagonale (c). Figura proveniente da [7]

3.6.2 Analisi dell'andamento del gioco

Una visione più chiara dell'evoluzione dei quattro segnali nel tempo è ravvisabile nella parte superiore della Figura 3.14, dove sono rappresentati gli andamenti delle quattro lucciole, con condizioni di partenza $(n_{01}, n_{02}, n_{03}, n_{04}) = (4, 6, 11, 9)$, in ognuna delle varianti analizzate in precedenza.

Il passare dei turni è riportato lungo l'asse delle ascisse, e lungo le ordinate si hanno le 20 caselle lungo le quali le lucciole si spostano compiendo dei giri continui (in questo caso interpretabili come oscillazioni).

Si può immediatamente notare come in 3.14(a) non venga raggiunta la sincronizzazione, nonostante le lucciole mantengano costante la loro differenza di fase a partire dal turno numero 102; inoltre, non avendo certezza che le lucciole passino per il flash ad ogni turno, le caselle percorse ad ogni giro sono meno del totale, riducendo l'ampiezza delle oscillazioni.

Osservando i grafici raffiguranti lo svolgimento del gioco con le rimanenti tre varianti si nota come, dopo un determinato passare di turni, le linee si sovrappongono fra loro diventando un unico segnale, evidenziando che la sincronizzazione è avvenuta.

In 3.14(b) si raggiunge la simultaneità in 122 turni, in 3.14(c) ne occorrono 142 e in 3.14(d) dopo 48.

Da ciò si può affermare che le regole che facilitano la sincronizzazione sono, in ordine (d), (b), (c) e (a).

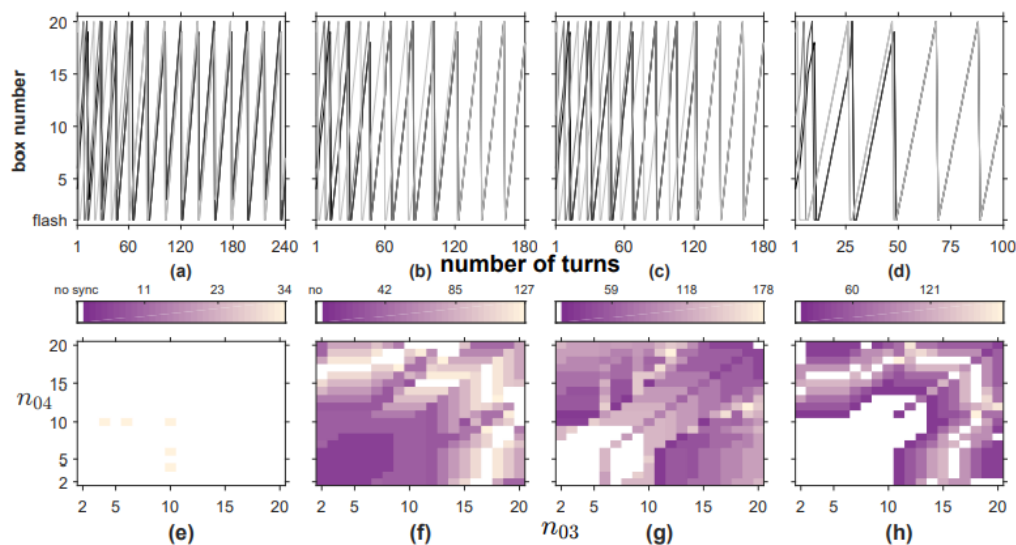


Figura 3.14: Prima riga: evoluzione del segnale delle quattro lucciole [7]. Seconda riga: diagrammi per osservare se avviene la sincronizzazione in più casi diversi

Per concludere, nella parte inferiore della Figura 3.14 sono raffigurati in 3.14 (e), (f), (g) e (h) dei diagrammi (ognuno associato ad uno dei quattro casi corrispondenti) in cui le condizioni iniziali delle prime due lucciole sono sempre $(n_{01}, n_{02}) = (4, 6)$, mentre n_{03} e n_{04} variano da gioco a gioco.

Variando le ultime due condizioni iniziali ci si sposta lungo il grafico, nel quale ogni partita è rappresentata da un quadratino (individuato dalla rispettiva ascissa e ordinata). I quadratini bianchi rappresentano casi in cui non si riesce a raggiungere la sincronizzazione, mentre le altre gradazioni di colore indicano dopo quanti turni tale configurazione è stata raggiunta. Tale lettura è utile in quanto cambiare le condizioni iniziali permette di esaminare come si evolve il fenomeno in tante configurazioni diverse anziché una sola fissa.

Capitolo 4

Possibili migliorie dei modelli proposti

All'interno dei Capitoli 2 e 3 sono stati trattati due casi specifici in cui la sincronizzazione tende a manifestarsi.

I modelli utilizzati e i risultati ottenuti costituiscono una valida base per comprendere le caratteristiche principali del fenomeno, ad esempio le condizioni necessarie per il manifestarsi della sincronizzazione in un sistema.

Queste trattazioni, a causa delle approssimazioni compiute e dell'utilizzo di modelli per lo più semplificati, non forniscono una completa visione di ciò che avviene veramente nella realtà, la quale può essere raggiunta attraverso modifiche ai modelli già trattati al fine di migliorarli, oppure con l'introduzione di nuove modalità di analisi.

4.1 Miglioramento modello basato sui metronomi

4.1.1 Modifiche al modello

Di seguito alcune aggiunte che possono essere di aiuto per un'analisi più approfondita del sistema trattato nel Capitolo 2: innanzitutto, si possono considerare casi con dei valori di μ , Δ e β diversi facendo variare la frequenza angolare media ω e la massa della base mobile (utilizzare una base più rigida darà dei risultati diversi rispetto all'utilizzo di una piattaforma più leggera e sottile).

Il modello delle equazioni trattato nel paragrafo 2.2 può essere ampliato implementando le equazioni del moto delle due lattine. Queste ultime subiscono l'influenza del moto oscillatorio dei metronomi che si trasmette alla base poggiate sui due corpi volventi, esse si muovono da destra verso sinistra rimanendo in un certo range di movimento.

Esso costituisce quindi un moto oscillatorio che avviene in un certo range di angoli di rotazione specifici.

Con questa considerazione, anche le due lattine possono essere interpretate come dei metronomi, quindi si aggiungerà un ulteriore sistema di equazioni del moto da cui ottenere, in maniera simile a quanto fatto nel Capitolo 2, l'andamento dei valori di angoli e velocità associati.

Ovviamente la natura di tali equazioni può variare in base alle eventuali approssimazioni o effetti esterni considerati, ad esempio la presenza o no di attrito sul piano

in cui sono poste le lattine, oppure il voler studiare il fenomeno a lattine riempite anziché vuote al loro interno.

Un altro modo per studiare in maniera più approfondita le leggi fisiche che governano il fenomeno [3] è l'aggiunta di ulteriori metronomi sulla base: la presenza di più elementi oscillatori va ad incrementare ulteriormente il numero delle equazioni e dei parametri in gioco, rendendo più complesso e meno basilare il sistema da analizzare.

4.1.2 Migliorie nella registrazione

Come per il modello delle equazioni, anche la modalità di acquisizione del segnale può essere migliorata in modo da avere una risposta più dettagliata all'interno di Matlab.

Registrare i suoni prodotti dalle oscillazioni dei metronomi tramite un cellulare consente comunque di individuare nel grafico i momenti in cui i battiti sono sincronizzati; tuttavia, riprendere con un tale dispositivo ha delle limitazioni, tra cui l'impossibilità di distinguere all'interno del grafico in Matlab quali battiti appartengono al primo metronomo e quali al secondo.

Per ottenere questo risultato è necessario l'impiego di microfoni direzionali [27], i quali sono in grado di acquisire solamente il suono desiderato e ignorare i rumori di sottofondo.

Nella Figura 4.1 è rappresentata la figura polare di un normale microfono (**a**), e quella di un microfono direzionale (**b**).

La figura polare di un microfono è la rappresentazione grafica su di un piano della sensibilità di quest'ultimo in funzione della direzione di provenienza di un segnale che lo colpisce. Questo tipo di diagramma si presenta come una linea curva chiusa (o insieme di più linee di questo tipo) e simmetrica rispetto all'asse del microfono, al cui interno si trova contenuto il polo che rappresenta la "punta" del microfono stesso: la linea rappresenta la curva di livello relativa ad un generico valore di intensità di risposta del microfono stesso, e come tale fornisce una rapida indicazione visiva di come l'intensità di risposta sia geometricamente distribuita intorno al microfono stesso.

4.1 Miglioramento modello basato sui metronomi

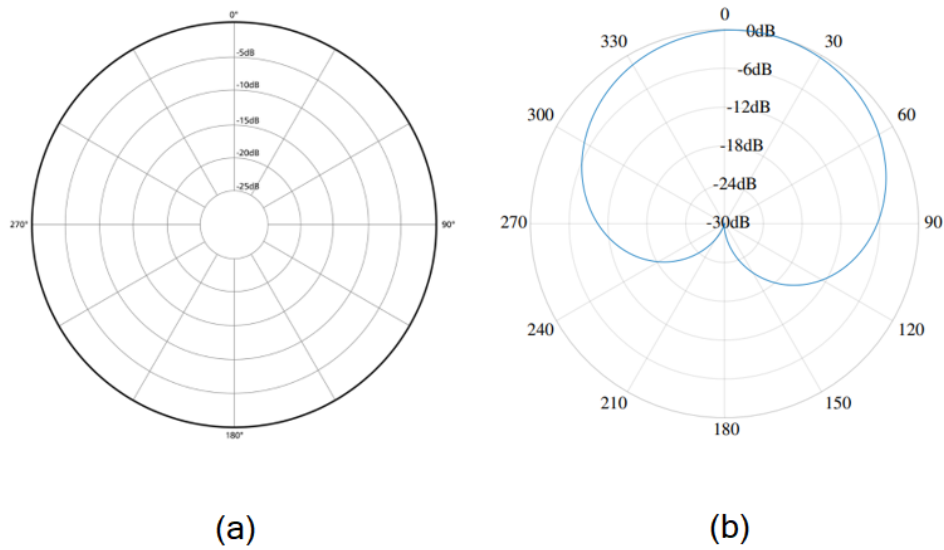


Figura 4.1: Area di percezione del suono per microfono classico (a) e microfono direzionale (b)

Osservando la figura polare omnidirezionale (a), la risposta è pressoché uniforme per qualsiasi angolo di incidenza; dall'altra parte, la figura (b) è di tipo unidirezionale, in cui la risposta è massima se la fonte sonora è posta di fronte al microfono e diminuisce progressivamente se la fonte ruota intorno ad esso (perpendicolarmente al suo asse).

Nello specifico, la figura interessata prende il nome di cardioide, in quanto il suo profilo ricorda un cuore rovesciato. In questo modo, avvicinando un microfono ad un metronomo specifico, esso riceverà come input solamente i suoni provenienti dal metronomo interessato, mentre i battiti del metronomo più distante non saranno presi in considerazione. Ulteriori approfondimenti nell'articolo [28].

Utilizzando quindi un microfono per metronomo, si otterranno i segnali "puri" associati ai suoni prodotti dai singoli metronomi, isolati dal resto.

Questa modalità di acquisizione permette di avere dei grafici più puliti e una distinzione più chiara degli andamenti dei segnali nel tempo, inclusa l'alternanza tra fase e controfase del sistema.

4.2 Limiti e miglioramenti nello studio sulla sincronia delle lucciole

Come già visto nel Capitolo 3, la sincronizzazione delle lucciole è stata presa in esame non solo per la bellezza intrinseca del fenomeno ma anche perché le risposte ricercate all'interno di tale fenomeno possono essere applicate per risolvere problemi in altri contesti diversi da quello di partenza.

La capacità di comprendere ed imitare il modo con cui le lucciole comunicano tra di loro è stata raggiunta grazie a semplici modelli matematici i quali, nonostante l'omissione delle condizioni ambientali e l'utilizzo di semplici oscillatori per imitare lo sciame, sono stati di grande aiuto per carpire la maggior parte dei comportamenti di questi insetti.

Nonostante i molteplici progressi fatti, vi sono ancora molti punti oscuri riguardo tale fenomeno [7], complice l'essere stato oggetto di studi scientifici solamente a partire dal secolo scorso.

Per prima cosa, è necessario studiare il comportamento di più specie di sciami di lucciole per capire in quali condizioni si ha sincronizzazione oppure no. Lo studio di più specie diverse può portare all'ottenimento di più informazioni sui vari aspetti che entrano in gioco nel momento in cui due esemplari emettono impulsi luminosi simultaneamente.

Questi risultati possono portare a miglioramenti dei modelli di simulazione del fenomeno e nuove applicazioni di questi ultimi.

Un altro aspetto che merita di essere approfondito con degli studi più specifici è il modo in cui ha origine la risposta alla sincronizzazione da parte dell'esemplare femminile.

Per caratterizzare in maniera precisa la varietà di pattern dei segnali emessi dalla femmina, è necessario la costruzione di modelli più articolati di quelli forniti dagli esempi riportati nel Capitolo 3.

In ultimo, l'idea di lavorare con sciami dove sono presenti sia maschi che femmine e gruppi composti da lucciole naturali e artificiali costituisce un'ulteriore sfida poiché riguardante l'interazione tra insetti e robot [29], il cui studio potrebbe portare ulteriori risposte riguardo l'armonia che si viene a creare all'interno di interazioni tra sistemi naturali ed artificiali.

Bibliografía

- [1] Wikipedia contributors. Shoaling and schooling — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Shoaling_and_schooling&oldid=1136338191, 2023. [Online; accessed 2-February-2023].
- [2] Wikipedia contributors. Swarm behaviour — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Swarm_behaviour&oldid=1121434221, 2022. [Online; accessed 2-February-2023].
- [3] J. Pantaleone. Synchronization of metronomes. *American Journal of Physics*, 70(10):992–1000, 2002.
- [4] Wikipedia contributors. Millennium bridge — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Millennium_Bridge&oldid=1044246756, 2021. [Online; accessed 2-February-2023].
- [5] Wikipedia contributors. Horologium oscillatorium — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Horologium_Oscillatorium&oldid=1136316955, 2023. [Online; accessed 2-February-2023].
- [6] J. Buck and E. Buck. Synchronous fireflies. *Sci Am*, 234(5):74–9, 82–5, May 1976.
- [7] G. M. Ramírez-Ávila, J. Kurths, S. Depickere, and J.-L. Deneubourg. Modeling fireflies synchronization. *A mathematical modeling approach from nonlinear dynamics to complex systems*, pages 131–156, 2019.
- [8] S. Tisue and U. Wilensky. Netlogo: Design and implementation of a multi-agent modeling environment. In *Proceedings of agent*, volume 2004, pages 7–9. Springer Cham, Switzerland, 2004.
- [9] G. Ramírez-Ávila, J. Kurths, and J.-L. Deneubourg. Fireflies: A paradigm in synchronization. *Chaotic, Fractional, and Complex Dynamics: New Insights and Perspectives*, pages 35–64, 2018.
- [10] G. M. Ramírez-Ávila and J. Kurths. Unraveling the primary mechanisms leading to synchronization response in dissimilar oscillators. *The European Physical Journal Special Topics*, 225:2487–2506, 2016.
- [11] D. Attenborough. Bbc trials of life: Talking to strangers. 1990.

Bibliografia

- [12] K. P. O’Keeffe, H. Hong, and S. H. Strogatz. Oscillators that sync and swarm. *Nature communications*, 8(1):1504, 2017.
- [13] Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A.-L. Barabási. The sound of many hands clapping. *Nature*, 403(6772):849–850, 2000.
- [14] N. Blackbeard, S. Wicczorek, H. Erzgräber, and P. S. Dutta. From synchronisation to persistent optical turbulence in laser arrays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 286:43–58, 2014.
- [15] B. Eckhardt, E. Ott, S. H. Strogatz, D. M. Abrams, and A. McRobie. Modeling walker synchronization on the millennium bridge. *Physical Review E*, 75(2):021110, 2007.
- [16] C. Hugenii. Horoloquim oscillatorium. *Paris: Muguet. Reprinted in English as: The pendulum clock. Ames, IA: Iowa State UP*, 1986.
- [17] B. Van Der Pol. Vii. forced oscillations in a circuit with non-linear resistance.(reception with reactive triode). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 3(13):65–80, 1927.
- [18] M. M. Dawood and F. H. Saikim. Studies on congregating fireflies (coleoptera; lampyridae; pteroptyx sp.) in sabah, malaysia: a review. *Journal of Tropical Biology & Conservation (JTBC)*, 13, 2016.
- [19] S. M. Lewis and C. K. Cratsley. Flash signal evolution, mate choice, and predation in fireflies. *Annu. Rev. Entomol.*, 53:293–321, 2008.
- [20] J. E. Lloyd. Two cryptic new firefly species in the genus photinus (coleoptera: Lampyridae). *The Coleopterists’ Bulletin*, pages 43–46, 1966.
- [21] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of theoretical biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [22] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(6):1645–1662, 1990.
- [23] G. B. Ermentrout and C. C. Chow. Modeling neural oscillations. *Physiology & behavior*, 77(4-5):629–633, 2002.
- [24] F. W. Turek. Circadian neural rhythms in mammals. *Annual review of physiology*, 47(1):49–64, 1985.
- [25] N. Rubido14, C. Cabeza, S. Kahan, G. R. Ávila, and A. Marti. Transients and arnold tongues for synchronized electronic fireflies. 2010.
- [26] I. Stewart and S. Strogatz. Synchronisation, rythmes et allures. *Pour la science (dossier hors-série)*, 44:90–93, 2004.

- [27] R. A. Bentler. Effectiveness of directional microphones and noise reduction schemes in hearing aids: A systematic review of the evidence. *Journal of the American Academy of Audiology*, 16(07):473–484, 2005.
- [28] J. D. Ziegler, H. Paukert, and B. Runow. Interactive display of microphone polarity patterns with non-fixed frequency point. In *Audio Engineering Society Convention 142*. Audio Engineering Society, 2017.
- [29] A. L. Christensen, R. OGrady, and M. Dorigo. From fireflies to fault-tolerant swarms of robots. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(4):754–766, 2009.