

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE
MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica e
dell'Automazione



TESI DI LAUREA

Progettazione di strumenti didattici interattivi
per la programmazione lineare

Designing interactive teaching tools for linear
programming

Relatore
Prof. Fabrizio Marinelli

Studente
Luca Staffolani

ANNO ACCADEMICO 2025-2026

Indice

1	Introduzione	2
2	L'utilizzo di programmi informatici e interattivi a supporto della didattica	3
2.1	Perché progettare un supporto didattico all'insegnamento	3
2.2	Cos'è una simulazione in didattica e perché utilizzarla	4
2.3	L'uso di simulazioni nella Ricerca Operativa	5
2.4	GeoGebra come supporto didattico alla Ricerca Operativa . .	7
2.5	L'importanza dell'apprendimento attivo	8
2.6	Approccio utilizzato nella progettazione	9
3	La Ricerca Operativa: la teoria dietro il progetto	10
3.1	Introduzione	10
3.2	Introduzione alla Ricerca Operativa	10
3.3	Dalla realtà al modello	13
3.4	Caratteristiche della Programazione Lineare	14
3.5	Rappresentazione geometrica di un problema di PL	15
3.6	Forma Generale, Forma Standard e Problema Ridotto	17
3.7	L'algoritmo del Simplexso	20
4	Progettazione di uno strumento didattico per la RO in GeoGebra	22
4.1	Introduzione a GeoGebra	22
4.2	Panoramica e Strumenti principali	23
4.3	"Funzione Obiettivo e Vincoli", anteprima e obiettivi	26
4.4	Le scelte progettuali	28
4.5	Forma Standard e Forma Ridotta	31
4.6	Le scelte progettuali	33
5	Conclusioni	38

1 Introduzione

La Ricerca Operativa, spesso abbreviata dalla scrittura *RO* è una branca della matematica applicata che utilizza metodi quantitativi per la soluzione di problemi decisionali. In altre parole, fornisce strumenti al supporto dei processi di scelta, tramite modellizzazione e altre tecniche matematiche, e ha come fine l'ottimizzazione di una o più scelte del decisore, che anch'esso può essere unico o molteplice. Questa disciplina costituisce a oggi uno strumento fondamentale e centrale per la modellazione e la risoluzione di problemi decisionali in ambito economico, industriale, ingegneristico e non solo. Per fare degli esempi concreti, la ricerca operativa viene impiegata nell'ambito della produzione, al fine di minimizzare i costi e/o massimizzare la produzione dell'azienda, e può essere utilizzata per stilare la tabella oraria della rete di trasporto pubblico di una città, avendo come obiettivo la maggiore copertura urbana possibile, organizzando nel modo corretto gli orari di partenza e arrivo singole corse, e la mappa dei tragitti.

Data la fondamentale importanza che ricopre questa branca, nella grande vastità di casi d'uso a cui si può prestare, e visto il livello di astrazione che viene richiesto per comprenderne la teoria che le sta dietro e le tecniche algebriche e geometriche che vengono impiegate, si è deciso di lavorare su un progetto che ha come obiettivo quello di essere da supporto per gli studenti del corso di Ricerca Operativa per facilitarne la comprensione.

In particolare, il progetto prevede lo sviluppo di due strumenti didattici interattivi sulla piattaforma *GeoGebra Classic 6*, un software educativo che offre soluzioni per l'analisi, la visualizzazione e la manipolazione di oggetti geometrici, e che integra un linguaggio di programmazione proprietario abbastanza potente per gli obiettivi di questa tesi. Si è scelto di utilizzare questo programma sia perché è disponibile su tutte principali piattaforme informatiche in commercio, ma soprattutto per la possibilità di visualizzare i file progettati su browser web. Questo significa che non sarà necessario, per lo studente, avere *GeoGebra* installato sul proprio dispositivo, ma potrà consultare e interagire con lo strumento cliccando su di un link, a patto di

avere disponibilità di una connessione a internet nell'occasione.

Negli ultimi anni, numerosi studi nel campo della didattica hanno evidenziato come l'utilizzo di processi interattivi e del supporto grafico possano aiutare concretamente la comprensione di concetti teorici, stimolando un apprendimento attivo.

La seguente tesi si articola su tre capitoli principali. Si tratterà nel primo il tema dell'uso di strumenti didattici interattivi a supporto dell'insegnamento, e la loro validità nel velocizzare e migliorare la comprensione, stimolando in più modi l'apprendimento e integrandolo con l'attività di sperimentazione. Il secondo capitolo avrà l'obiettivo di tracciare una base teorica sui temi principali della Ricerca Operativa e necessaria alla stesura del terzo capitolo, ossia quello relativo alla descrizione e all'analisi dei file implementati in GeoGebra, con riferimenti agli obiettivi didattici e alla disamina delle scelte progettuali.

2 L'utilizzo di programmi informatici e interattivi a supporto della didattica

2.1 Perché progettare un supporto didattico all'insegnamento

La crescente distribuzione e disponibilità di computer e altri dispositivi informatici, come lavagne interattive, dispositivi mobili e tablet, hanno portato, tra le altre cose, all'integrazione di queste tecnologie nell'ambito della didattica.

Alcuni esempi di applicazioni dell'informatica nella didattica sono i libri di testo in versione digitale, programmi di scrittura e disegno su smartboard e tablet o simulazioni grafiche. Questa integrazione per alcuni ambiti è diventata uno strumento fondamentale nell'insegnamento e nello studio: basti pensare ai programmi di CAD per chi tratta il disegno tecnico o l'architettura, o applicativi di editing multimediale per chi si forma in materie grafiche. Tutto ciò solleva la questione su come questi strumenti possano essere utiliz-

zati al meglio per il loro scopo, ovvero migliorare il processo di apprendimento dello studente, e su quanto l'integrazione di questi sistemi sia effettivamente rilevante, per quanto riguarda l'efficacia nel rafforzamento e nella velocità di comprensione dei concetti.

In questo capitolo sarà trattato il tema dell'uso di strumenti informatici al supporto della didattica, con attenzione particolare sulle simulazioni al computer come aiuto all'apprendimento delle materie scientifiche.

2.2 Cos'è una simulazione in didattica e perché utilizzarla

Una simulazione virtuale, in sintesi, è "un programma che contiene un modello di un sistema, naturale o artificiale, o un processo" [10]. Tale strumento integrato nell'ambito dell'insegnamento offre possibilità in più rispetto alle classiche lezioni frontali, aggiungendo per esempio la possibilità di osservare un fenomeno da altri punti di vista, oppure estraendo solo le componenti o caratteristiche essenziali alla comprensione di un determinato concetto, eliminando dettagli superflui ed evidenziando più chiaramente gli aspetti principali dell'oggetto di studio, potendo anche consentire allo studente la manipolazione del modello in un ambiente libero e interattivo, e aprendo la possibilità di avere un apprendimento attivo, che da uno studio di Y.J. Dori e John Belcher [9] eseguito nel contesto di nozioni sull'elettromagnetismo con supporto di simulazioni grafiche, ha dimostrato ridurre il tasso di fallimento degli studenti ai test di verifica delle conoscenze, aumentato la collaborazione e ridotto il divario tra chi partiva da conoscenze già apprese sul dato tema, e chi non avesse mai studiato quei concetti. Secondo Brant, Hooper e Sugrue [4] le simulazioni al computer (intese come strumento didattico) stabiliscono un quadro o una struttura cognitiva per accogliere l'apprendimento successivo in un'area disciplinare correlata, e offrono l'opportunità di rinforzare, integrare ed estendere il materiale appreso in precedenza.

R.Mayer, con *Cognitive Theory of Multimedia Learning*[16], fornisce una base scientifica su un altro contributo positivo riguardo l'uso in parallelo di più canali di informazione per la spiegazione di concetti. Nell'articolo infatti è sostenuta la tesi che l'apprendimento sia più efficace quando una nozione viene veicolata sia attraverso il canale visivo che quello uditivo o testuale, secondo la teoria della codifica doppia [7]. Questo approccio didattico permette allo studente di alleggerire il carico cognitivo dovuto all'interpretazione di formule, immagini o modelli statici, aumentando invece il cosiddetto "carico pertinente", ovvero lo sforzo mentale dedicato alla vera e propria comprensione del concetto.

2.3 L'uso di simulazioni nella Ricerca Operativa

La Ricerca Operativa è una disciplina che beneficia particolarmente dall'uso di simulazioni al computer, in quanto la teoria che le sta dietro è per larga parte di natura analitica, algebrica e modellistica, ciò significa che spesso i temi che vengono presentati possono essere visualizzati graficamente, per lo meno se si resta nel limite delle tre dimensioni.

"La simulazione è uno strumento fondamentale in Ricerca Operativa" (Grasas, Juan e Ramalhinho)[17], e la motivazione è legata sia a quanto detto precedentemente sia, secondo lo studio, per aumentare il coinvolgimento degli studenti nei temi trattati e fare da ponte tra la materia di studio, con la sua teoria e obiettivi, e il mondo reale.

Questa disciplina, come abbiamo trattato precedentemente, ha molte applicazioni nella pratica, e una delle difficoltà principali nell'insegnamento di questa materia è proprio riuscire a mettere in comunicazione la teoria matematica con la realtà: la simulazione grafica, in questo, è uno strumento particolarmente valido.

Uno studio di T.De Jong [8] fornisce un ulteriore riscontro positivo in questo senso, analizzando come le simulazioni al computer permettano l'apprendimento per indagine, o *Inquiry-Based Learning*. Questo metodo di apprendimento è basato sul fatto che lo studente non legga una verità o un risultato,

ma che arrivi a quello stesso risultato attraverso un processo mentale più ampio, che si articola in formulazione di ipotesi, sperimentazione (tramite, ad esempio, la manipolazione di modelli di simulazione forniti), osservazione dei dati e revisione delle ipotesi di partenza. Le conclusioni di questo studio mostrano che questa modalità di apprendimento migliora la capacità di comprensione di elementi che sono particolarmente complessi o astratti, quali molte delle trattazioni teoriche della Ricerca Operativa, riduce il carico cognitivo richiesto, in quanto lo studente durante il processo di interazione con il modello ha la possibilità di concentrarsi sulle varie relazioni causali, con maggiore chiarezza espositiva, piuttosto che dover far riferimento unicamente al linguaggio matematico, che spesso risulta non di immediata fruizione.

Un altro punto importante di questo articolo è la specifica riguardo al fatto che una simulazione è di rilevante aiuto alla didattica quando non è totalmente libera o non guidata. Il processo di apprendimento per indagine è meno soggetto a complicazioni o interruzioni quando la simulazione è ben strutturata e guidata al fine di supportare tutte e quattro le sue fasi. Una simulazione senza alcun tracciato descrittivo e interpretativo lascia il fruitore senza solide basi a supporto di una interazione costruttiva con il modello.

Di particolare rilevanza è la questione su come l'insegnamento di determinati temi di Ricerca Operativa con affiancata la simulazione dinamica attivi il processo di apprendimento secondo doppia codifica citato al paragrafo 2.2, migliorando il carico pertinente dello studente, diminuendo il carico cognitivo non pertinente alla mera comprensione della teoria, (R.Mayer) [16] e agevolando il processo di apprendimento per indagine. Secondo Rossetti, M. D., Magagnotti, A., & Cassady, M. D. [19], la Ricerca Operativa è spesso percepita come "troppo matematica", e, partendo da una critica alla didattica tradizionale, hanno presentato un articolo che analizza la pratica del *learning by doing* ("imparare facendo") applicata a questa disciplina e all'uso di simulazioni grafiche.

Le conclusioni sottolineano la validità di utilizzare modelli grafici interattivi per spiegare concetti particolarmente complessi e astratti, senza dover

passare obbligatoriamente dal calcolo matematico, che rischia di far perdere il contatto con il *perché* di certe motivazioni teoriche, ma *visualizzando* in tempo reale l'effetto dei calcoli e degli algoritmi, permettendo anche allo studente di sperimentare, modificando alcuni degli oggetti teorici algebrici per visualizzarne le conseguenze a livello dei risultati. Risultati che, grazie all'uso della simulazione grafica, sono più facilmente interpretabili e riconducibili al mondo reale.

2.4 GeoGebra come supporto didattico alla Ricerca Operativa

In questo paragrafo saranno trattate le motivazioni dietro la scelta del programma *GeoGebra Classic 6* per la realizzazione di questo progetto, senza entrare troppo in questioni tecniche relative agli strumenti che offre il programma in sé e alla struttura dei file implementati, in quanto il tema verrà trattato nel capitolo seguente.

Questo software, nato proprio come strumento didattico nel 2001

(da www.geogebra.org/about e wikipedia.org/wiki/GeoGebra), offre strumenti per visualizzare, manipolare graficamente e algebricamente oggetti geometrici, in due o in tre dimensioni, caratteristiche fondamentali nell'ottica dell'insegnamento di concetti sulla Ricerca Operativa. Il software Geogebra permette di costruire un ambiente di manipolazione dinamica, stimolando il processo di apprendimento attivo[15]. L'articolo appena citato dà particolare importanza alla validità in campo didattico riguardo la possibilità di trascinare e manipolare oggetti geometrici, permettendo allo studente di passare da una visualizzazione statica dell'algebra e geometria, a una più dinamica, dove l'ambiente di interattività permette l'apprendimento per scoperta, tramite verifiche ed esperienze empiriche sul dato oggetto di studio.

Sempre secondo l'articolo, il feedback visivo immediato che riceve lo studente durante l'interazione con il software, permette un processo di autocorrezione costante, dove si può migliorare la consapevolezza sulle relazioni tra formule

algebriche e relative figure geometriche, in un processo che non sia esclusivamente mnemonico, ma dove l'interazione e l'*apprendimento attivo* agevolano una comprensione più profonda sul tema.

Bell e O'Keefe[3] introducono il concetto di *Visual Interactive Simulation* (VIS), descritta come la metodologia che permette all'utente di interagire e sperimentare con modelli informatici mentre la simulazione è in corso. Le analisi e conclusioni di questo articolo riportano che la VIS nello specifico aumenta la comprensione delle correlazioni tra numeri e sistema nel suo insieme, con le varie relazioni di causa ed effetto. Nella Ricerca Operativa, per come è strutturata, risulta un approccio particolarmente valido, e GeoGebra permette di implementare questo metodo di apprendimento. M. Carballo[17] descrive l'uso di questo software come valido nell'insegnamento della Ricerca Operativa, perché permette allo studente di indagare i modelli e raggiungere gli obiettivi di ottimizzazione ancora prima di affrontare la formalizzazione algebrica. Uno studio recente sull'integrazione di GeoGebra alla didattica mostra come promuova l'integrazione dell'apprendimento attivo[6], evidenziando come la manipolazione diretta di oggetti matematici migliori le capacità di problem solving e la solidità dei concetti appresi, aumentando il coinvolgimento dello studente e riducendo la distanza tra teoria e applicazione pratica, un obiettivo cardine nella trattazione della RO.

2.5 L'importanza dell'apprendimento attivo

L'apprendimento attivo è definito come "l'approccio in cui gli studenti partecipano al processo di apprendimento costruendo le loro conoscenze e la loro comprensione" (*www.cambridgeinternational.org*) [5]. Risultati di grande rilevanza sono stati portati dallo studio dall'approccio statistico di S.Freeman e altri[10]. Da questo articolo, un ampio resoconto che prende in esame altri 225 studi in quest'ambito, si arriva alla conclusione che l'integrazione dell'apprendimento attivo nell'insegnamento porta risultati rilevanti in positivo nell'ambito del rendimento, dei tassi di fallimento e nella versatilità dei casi d'uso. In particolare, è stato riscontrato che gli studenti impegnati in

attività di apprendimento attivo hanno ottenuto un incremento medio dei punteggi d'esame del 6%. Un dato forse ancora più valido è quello riguardo i tassi di bocciatura o ritiro in sede d'esame: gli studenti che hanno seguito lezioni puramente frontali hanno avuto un tasso di fallimento dell'55% più alto rispetto a chi si è servito anche di metodi attivi. Questi risultati sono stati riscontrati in modo costante se applicati in tutte le discipline STEM, ciò sottolinea l'universalità, nell'ambito delle materie scientifiche, dell'azione positiva dell'*Active Learning*. Da uno studio di M. Prince[18] si apprende come, all'interno di questa metodologia di apprendimento, la collaborazione tra studenti durante la manipolazione di modelli simulativi produce risultati migliori rispetto all'interazione individuale, specialmente per la ritenzione delle informazioni al lungo termine. Descrive, inoltre, la particolare importanza di questo metodo nell'atto di riconoscere e correggere i preconcetti errati degli studenti.

2.6 Approccio utilizzato nella progettazione

In questo paragrafo verrà descritta l'impostazione metodologica adottata nella fase di progettazione, con particolare attenzione alla definizione e al perseguimento degli obiettivi didattici. I risultati discussi in questo capitolo relativamente all'impiego di simulazioni nell'ambito dell'insegnamento, e alle modalità con cui ottimizzarne l'uso per massimizzare l'efficacia del supporto all'apprendimento in termini di rapidità, chiarezza e ritenzione delle informazioni nel tempo, hanno guidato l'individuazione di tali obiettivi.

Elemento centrale delle simulazioni è stato il garantire, per quanto possibile, un elevato grado di interattività tra lo studente e il modello e, laddove realizzabile, un'interazione sia di tipo grafico che di tipo algebrico. Ciò al fine di fornire allo studente strumenti adeguati per cogliere la relazione tra componente analitico-algebrica e componente geometrica.

È stata inoltre attribuita rilevanza all'essenzialità visiva: lo studente deve potersi confrontare con un modello chiaro, che presenti le sole informazioni

necessarie alla comprensione degli argomenti trattati, ricercando un equilibrio appropriato tra essenzialità grafica e ricchezza concettuale dei contenuti.

Lo studente viene guidato all'interazione con il modello da descrizioni testuali e illustrative limitando comunque invadenza e complessità visiva, al fine di fornire un supporto quanto più chiaro e solido possibile per permettere la ricerca personale, tramite l'interazione stessa con il modello di tutte le componenti analitiche, geometriche e algebriche in gioco, che dinamicamente reagiranno agli input dell'utente.

3 La Ricerca Operativa: la teoria dietro il progetto

3.1 Introduzione

In questo capitolo sarà trattato il tema della Ricerca Operativa, dalla sua nascita relativamente recente, fino alla teoria che sta dietro allo sviluppo del progetto presentato in questa tesi. L'obiettivo di questo capitolo sarà quello di fornire un contesto teorico e concettuale per la comprensione delle tematiche esposte dallo strumento didattico progettato. Sarà oggetto di prevalente analisi la teoria essenziale e sufficiente a questo fine, senza entrare nello specifico di quelle componenti teoriche che esulano da tale scopo.

La trattazione delle tematiche di questo capitolo si baserà prevalentemente da informazioni apprese dal testo *Ricerca Operativa* (F.Hillier, G.Lieberman) [12], salvo diversamente indicato.

3.2 Introduzione alla Ricerca Operativa

La nascita della Ricerca Operativa viene collocata storicamente a qualche anno prima dello scoppio della seconda guerra mondiale. Il contesto nel quale si è trovato il bisogno di sviluppare tale disciplina ha base nell'aumento,

in quegli anni, della produzione e della complessità dei sistemi di lavorazione e distribuzione. Durante la guerra è stata la necessità di gestire e collocare le risorse militari a spingere Gran Bretagna e Stati Uniti a riunire gruppi di scienziati con l'obiettivo di formulare un metodo scientifico che permettesse di ottimizzare tattiche e fruizione di risorse. L'esito di questa volontà è stata proprio la Ricerca Operativa, il cui nome deriva direttamente dalla "*ricerca delle operazioni (militari)*". Negli anni seguenti questa disciplina ha acquisito sempre maggiore importanza, avendo compreso che il suo caso d'uso non sarebbe stato limitato alle operazioni militari, ma che potesse essere applicata negli ambiti di produzione, gestione, distribuzione e non solo, in numerosi ambiti. A oggi è imprescindibile l'utilizzo della RO nelle grandi imprese, o in generale in tutti quei contesti in cui la mole di variabili da dover gestire è così alta che senza gli strumenti che questa disciplina fornisce sarebbe impensabile farlo.

L'approccio della Ricerca Operativa si basa sull'osservazione e formulazione di un problema, con conseguente raccolta di dati e costruzione di un modello matematico che ne descriva le caratteristiche principali. Si ipotizza che il modello così costruito sia sufficientemente dettagliato da rappresentare correttamente il comportamento reale, così da poter conseguentemente ipotizzare che i risultati e le conclusioni siano valide.

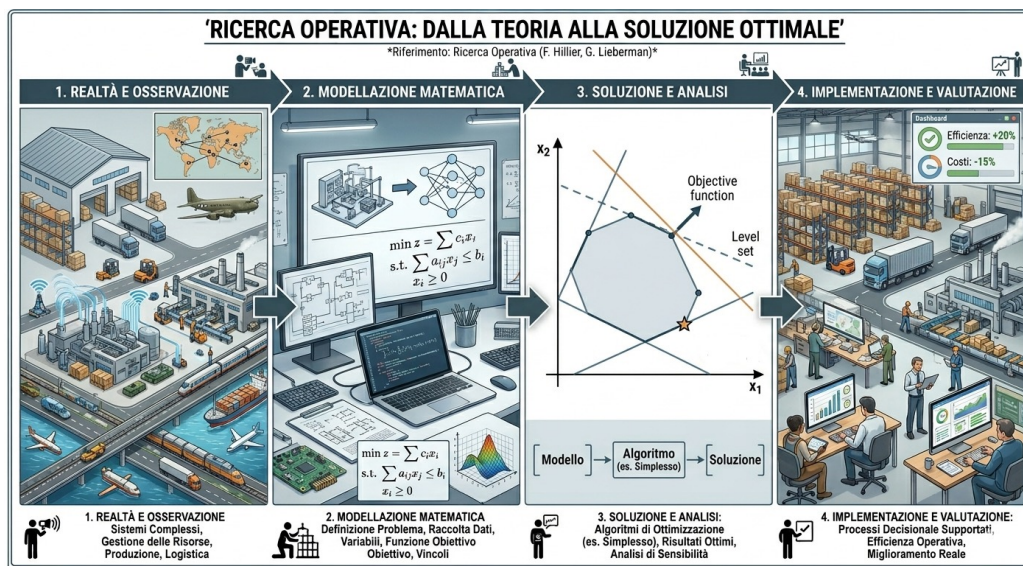


Figura 1: *Illustrazione semplificata dell'approccio nella RO*

Queste sono le principali fasi in cui si articola questo approccio:

1. Definizione di un problema e raccolta di dati
2. Formulazione di un modello matematico
3. Determinazione di una o più soluzioni
4. Fase di test e validazione
5. Predisposizione di un sistema al supporto dell'applicazione nella realtà del modello
6. Implementazione del modello

In sintesi, la Ricerca Operativa si configura come un approccio scientifico e interdisciplinare alla risoluzione di problemi complessi, finalizzato a supportare i processi decisionali attraverso l'uso di modelli matematici, algoritmi e analisi dei dati raccolti.

3.3 Dalla realtà al modello

Passaggio obbligato per poter utilizzare gli strumenti forniti dalla Ricerca Operativa è la modellizzazione matematica di un sistema reale. Con il termine modello si intende "Una rappresentazione astratta della realtà che include solo gli aspetti rilevanti allo scopo dello studio della stessa" (da istitutolevi.it) [14]. Ogni modello ha bisogno della sua parametrizzazione, per poter considerare le alternative di studio, e la sua valutazione o soluzione per ottenere le informazioni relative alle caratteristiche degli aspetti reali. Oltre all'obbligatorietà riguardo la trasposizione matematica dell'oggetto reale al fine di applicare le tecniche della RO, ci sono ulteriori vantaggi. Un modello matematico, a differenza di altri tipi di descrizione, è capace di sintetizzare la realtà in modo molto conciso, rendendo l'individuazione delle caratteristiche principali del sistema reale più chiare ed evidenti e facilitando la comprensione delle interrelazioni tra diversi aspetti del modello stesso. Il modello matematico costituisce pertanto un'entità formale che sintetizza e rappresenta le informazioni essenziali, rilevanti rispetto agli obiettivi prefissati, della sua controparte reale, consentendo l'applicazione degli strumenti analitici propri della Ricerca Operativa.

Il processo di costruzione del modello a partire da un sistema reale, inizia come già descritto, dall'osservazione. Una volta individuate n valutazioni quantitative di interesse, queste vengono rappresentate mediante n variabili decisionali $x_1, \dots, x_n$, i cui valori dovranno essere determinati.

L'obiettivo da raggiungere (per esempio il profitto attraverso la produzione di un certo prodotto, la collocazione migliore di m pacchi all'interno di un treno merci...) viene rappresentato mediante la *funzione obiettivo*, una funzione matematica che ha come incognite proprio le variabili decisionali. Un esempio di funzione obiettivo è $P = x_1 + 5x_2 + 3x_3$. Le (eventuali) limitazioni a cui il sistema reale è soggetto, come la disponibilità di denaro da poter investire, o lo spazio disponibile all'interno di un camion che deve trasportare della merce, vengono modellizzate attraverso la costruzione dei *vincoli*, cioè equazioni o disequazioni che anch'esse hanno come incognite le

variabili decisionali. Un esempio, $7x_1 + 3x_2 - x_5 \leq 9$. Le costanti, cioè i coefficienti e i termini noti che figurano nei vincoli e nella funzione obiettivo sono i *parametri* del modello.

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n \geq b_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}x_{m,1} + \dots + \alpha_{m,n}x_n \geq b_m \end{cases}$$

Figura 2: *Struttura di un modello di programmazione lineare*

I problemi reali non hanno, di norma, un unico modello corretto. Un passaggio importante nella costruzione di quest'ultimi è la scelta accurata delle variabili decisionali, che rappresentano in termini matematici gli aspetti reali su cui il decisore potrà e dovrà intervenire (assegnando loro un valore) al fine di raggiungere l'obiettivo prefissato.

Il modello di *programmazione lineare* (spesso abbreviata in *PL*) è il modello di principale interesse della presente trattazione, la cui caratteristica è la linearità delle funzioni presenti. Le assunzioni adottate nell'analisi della *PL*, tra cui l'importante ipotesi sulla *linearità*, verranno descritte in modo più rigoroso e dettagliato nel paragrafo seguente.

3.4 Caratteristiche della Programazione Lineare

Un modello di Ricerca Operativa viene definito di Programmazione Lineare quando soddisfa quattro assunzioni fondamentali, oltre alla linearità delle equazioni e disequazioni coinvolte. Per linearità si intende la proprietà per cui, data una funzione f , si ha che:

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Questa espressione racchiude i principi di **additività** ($f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$) e di **omogeneità** ($f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$), garantendo che il contributo di ogni variabile sia proporzionale al suo valore e indipendente dalle altre.

Le caratteristiche, del modello di PL sono, dunque:

1. Proporzionalità: Il contributo di ogni variabile decisionale alla funzione obiettivo e ai vincoli del problema devono essere direttamente proporzionali alla variabile stessa. In termini pratici, ciò esclude la presenza di economie di scala o costi fissi iniziali.
2. Additività: Il contributo delle variabili di decisione alla funzione obiettivo e ai vincoli è dato dalla somma dei contributi di ogni singola variabile.
3. Continuità: ogni variabile decisionale può assumere tutti i valori reali nell'intervallo di ammissibilità, le variabili possono assumere valori frazionari.
4. Determinatezza: Il modello di PL non tiene conto di componenti stocastiche o incertezze nei dati.

(<http://www.diag.uniroma1.it/roma/didattica/RO/capitolo2.pdf>) [22]

3.5 Rappresentazione geometrica di un problema di PL

Un tema rilevante nella programmazione lineare è la capacità di poter visualizzare geometricamente il modello, che risulta possibile nel caso si debba lavorare con al massimo tre variabili, cioè tre dimensioni spaziali, come sarà chiarito in seguito. Nonostante questa possibilità non sia applicabile nei casi di modelli dalla maggiore complessità, è di considerevole importanza a livello didattico in quanto è permessa la comprensione dei metodi risolutivi e della teoria della RO in chiave grafica, agevolandone la fruizione. Questi stessi meccanismi teorici verificabili in due o tre dimensioni restano validi in

qualunque altra configurazione.

Al fine di semplificare la trattazione verrà descritto il caso a due dimensioni, dato anche che il progetto della presente tesi è basato su questa configurazione spaziale.

Per chiarezza di esposizione si introducono in primo luogo i concetti di *semispazio chiuso* e di *iperpiano*. L'iperpiano è definito come l'insieme $H = (x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b)$, con a vettore di $\mathbb{R}^n$ e b un numero reale. Al di fuori del formalismo matematico, in due dimensioni un iperpiano è rappresentato da una retta.

Gli insiemi

$$P = (x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b)$$

$$Q = (x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b)$$

sono detti invece *semispazi chiusi definiti dalle disequazioni* $a^T x \leq b$ e $a^T x \geq b$. Nel caso del dominio $\mathbb{R}^2$, un semispazio è definibile come il luogo dei punti che giacciono da una stessa parte rispetto alla retta. [23]

Date le premesse, si presentano ora le controparti grafiche degli oggetti relativi al modello di programmazione lineare. In due dimensioni, l'insieme dei vincoli rappresenta la *regione ammissibile*, ovvero il poliedro che descrive il luogo dei punti in cui si trovano le soluzioni del problema, punti che sono la rappresentazione dei valori associati alle variabili decisionali.

La controparte grafica della funzione obiettivo può essere visualizzata invece come un fascio di rette parallele, dove ogni retta, che si trova a una diversa quota, corrisponde a un valore diverso di Z nell'equazione $Z = ax_1 + bx_2$, con a e b numeri reali.

Il *Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare* stabilisce che, se dovesse esistere una soluzione ottima per il problema, allora esiste almeno un

punto estremo (o vertice) del poliedro che risulta essere l'ottimo. In termini grafici, prendendo in esempio il caso in cui ci sia una e una sola soluzione ottima, questa sarà individuabile come il punto di intersezione tra la retta del fascio descritto dalla funzione obiettivo relativa al massimo valore di Z e il vertice del poliedro. [21]

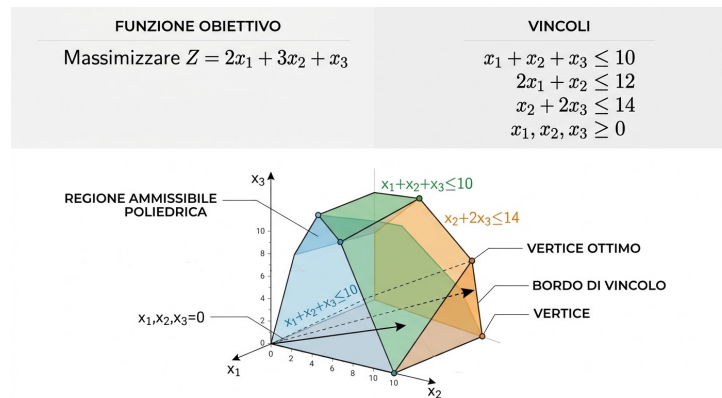


Figura 3: Esempio di modello di PL in tre dimensioni

3.6 Forma Generale, Forma Standard e Problema Ridotto

Si introducono ora in modo essenziale i concetti di *Forma Generale*, *Forma Standard* e *Problema Ridotto* di un modello di programmazione lineare, necessari alla comprensione della teoria dietro al secondo dei progetti implementati e trattati in questa tesi nel capitolo seguente.

Per "forma" si intende la configurazione matematica del modello, la struttura con cui viene descritto. La forma generale di un modello di PL si configura come la presentazione in chiave intuitiva del modello stesso.

A livello formale, se si considera $\mathbf{A}$ la matrice costituita dai coefficienti dei vincoli, $\mathbf{b}$ il vettore dei parametri (e quindi dei termini noti), $\mathbf{c}^T$ il vettore che ha come coordinate i coefficienti della funzione obiettivo, si ha che un

problema di programmazione lineare posto in forma generale è del tipo:

$$\begin{aligned} z &= \max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ z &= \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned} \quad (1)$$

Mentre un problema posto in forma standard è scritto nella seguente forma:

$$z = \max / \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (2)$$

In questo ultimo caso, come si nota dalla formulazione compatta, i vincoli sono scritti esclusivamente come equazioni, con le variabili decisionali (le incognite condensate nella variabile $\mathbf{x}$) vincolate in segno non negativo. Essendo queste due forme equivalenti, ovvero dove dalla soluzione ottima di una delle forme si può ricavare, in modo diretto o indiretto, la soluzione ottima dell'altra, [21], nel passaggio dalla forma generale a quella standard sarà necessaria l'aggiunta di termini chiamati di *slack* (per i vincoli di $\leq$) o di *surplus* (per i vincoli di $\geq$), che si configurano dunque come ulteriori variabili. Ad esempio, se si ha un vincolo $2x_1 + 3x_2 \leq 5$, questo si traspone in $2x_1 + 3x_2 + s_1 = 5$, con $s_1 \geq 0$.

Il passaggio alla forma standard è di particolare utilità a livello computazionale, in quanto pur essendo una descrizione matematica meno intuitiva all'occhio umano, uniformare il problema alle equazioni e garantire la non negatività può agevolare il lavoro dei calcolatori informatici e di passaggi algoritmici. Obiettivo che raggiunge un livello ancora superiore con l'introduzione del problema ridotto: questa configurazione, anch'essa equivalente alle altre due appena descritte, è organizzata in modo tale da mettere in evidenza alcune delle informazioni di rilevanza nella ricerca di una soluzione ottima, come la direzione di massimo miglioramento della funzione obiettivo, e il valore che assume la stessa in corrispondenza di un dato vertice del poliedro. È, inoltre, la configurazione a partire dalla quale si applica l'*Algoritmo del Simplex*, tema cardine e metodo di ricerca dell'ottimo di fondamentale

importanza nello studio della RO. [2]

Per descrivere algebricamente la forma ridotta è necessario introdurre il concetto di **base**. Data la matrice dei vincoli $\mathbf{A}$ di dimensione $m \times n$ (con $m < n$), una base è una sottomatrice quadrata $\mathbf{B}$ di dimensione $m \times m$ costituita da colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}$, avente dunque determinante non nullo[20]

La forma ridotta è dunque una particolare rappresentazione della forma standard in cui la matrice $\mathbf{A}$ è stata riorganizzata separando la sottomatrice di base $\mathbf{B}$ dalla restante parte $\mathbf{N}$, associata alle variabili fuori base.

Formalmente:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3)$$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b} \quad (5)$$

$$\mathbf{Ix}_B + (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (6)$$

Nella forma ridotta, ponendo le variabili fuori base $\mathbf{x}_N$ uguali a zero, le variabili in base $\mathbf{x}_B$ assumono direttamente il valore dei termini noti trasformati $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Questa soluzione algebrica corrisponde esattamente a uno dei vertici del poliedro che rappresenta la regione ammissibile.

Questa struttura esplicita un concetto cardine della materia: cambiando le variabili che entrano ed escono dalla base (operazione di pivot), ci si sposta da un vertice all'altro del poliedro. Questo parallelismo perfetto tra la componente algebrica e la controparte geometrico-visiva è essenziale per comprendere le tecniche di risoluzione dei problemi decisionali, tra le quali spicca l'algoritmo del Simplexso che verrà approfondito nel prossimo paragrafo.

3.7 L'algoritmo del Simplexso

La forma ridotta di un problema di programmazione lineare si mostra come una sorta di "nucleo operativo" per l'applicazione dell'algoritmo del Simplexso. Quest'ultimo rappresenta il metodo numerico più celebre e utilizzato per la risoluzione dei problemi di PL.

Questo algoritmo affronta il problema di trovare la soluzione migliore negli infiniti punti appartenenti alla regione ammissibile sfruttando il teorema fondamentale della programmazione lineare precedentemente presentato, che, in

sostanza, descrive il fatto che la soluzione ottima, se presente, si trova in corrispondenza di uno dei vertici del poliedro. In particolare, la logica iterativa e sequenziale è mostrata di seguito in modo non formale:

1. L'algoritmo viene inizializzato in corrispondenza di uno dei vertici del poliedro.
2. Da quel vertice, l'algoritmo esamina i vertici immediatamente adiacenti valutando se e di quanto la funzione obiettivo migliori (se il problema è di massimizzazione) in quella determinata direzione.
3. Se viene individuato un vertice in cui la soluzione attuale sia migliore, l'algoritmo vi sposta l'analisi seguendo lo spigolo del poliedro.
4. Si ripete l'operazione fino a quando non si trova in un vertice da cui non sia più possibile incrementare il valore della funzione obiettivo. In quel caso, si troverà in corrispondenza della soluzione ottima del problema.

Un algoritmo che presenta una serie di iterazioni di questo tipo si chiama *algoritmo iterativo di ascesa* (o *di discesa*).

In questo meccanismo appare evidente l'importanza della struttura del problema ridotto nella modellazione per l'applicazione di questo algoritmo. Infatti questa forma si presenta in modo tale da esplicitare algebricamente la "fotografia" dello stato del problema in corrispondenza di un dato vertice del poliedro, agevolando il processo dell'algoritmo. Ogni sua interazione infatti è attuata in modo relativamente semplice con delle operazioni di pivot, che modificando con tale procedimento la forma del problema ridotto, esplorano l'insieme dei vertici del poliedro.

I concetti trattati in questo capitolo sostengono la struttura teorica dei due programmi implementati su *GeoGebra Classic 6* e oggetto di trattazione della presente tesi.

4 Progettazione di uno strumento didattico per la RO in GeoGebra

4.1 Introduzione a GeoGebra

Come già descritto, è stato *GeoGebra Classic 6* il software su cui è ricaduta la scelta come ambiente di sviluppo per i due progetti oggetto di trattazione per questo capitolo.

Questa decisione si è basata su diversi fattori che rendono questo software tra i favoriti per progetti didattici nell'ambito di corsi STEM, come per esempio il fatto che GeoGebra sia un software Open-Source gratuito, disponibile nella quasi totalità delle maggiori piattaforme digitali, sia mobili che fisse, e che garantisce accesso ai file anche via browser, tramite *GeoGebra Online*. Si tratta di un *software di matematica dinamica* (DMS), pensato e progettato proprio con un fine didattico e di insegnamento. Unisce in un unico ambiente virtuale le caratteristiche e i vantaggi dei software di geometria dinamica (DGS) e dei sistemi di calcolo algebrico (CAS) [13].

Per chiarezza d'esposizione, per DMS si intende un ambiente strutturato con possibilità per l'utente di interazione dinamica in tempo reale di oggetti matematici, quali grafici di funzioni, mentre un sistema di calcolo algebrico è un ambiente dove si ha la possibilità di avere manipolazione simbolica di espressioni matematiche.

GeoGebra si mostra dunque come un software strutturato per essere adatto a lavorare in progetti dove sia necessario fare da ponte tra l'algebra e la geometria, e questa caratteristica è stata ritenuta di fondamentale importanza nell'ambito di casi d'uso didattici riguardanti la Ricerca Operativa.

Questa impostazione del software rende naturale per l'utente l'approccio con apprendimento attivo[5], per sperimentare ed esplorare gli oggetti algebrici e geometrici di interesse.

4.2 Panoramica e Strumenti principali

All'apertura, GeoGebra Classic 6 si mostra con un piano cartesiano e una barra laterale sulla sinistra (seguendo le impostazioni di default, versione PC: la disposizione di queste e altre componenti risulta modificabile). Questi oggetti sono chiamati **Viste**. In particolare, la **Vista Algebra** è la sezione laterale ed è il luogo di definizione di espressioni matematiche, simboliche o numeriche, scrittura di **comandi** e di dichiarazione delle variabili, mentre la **Vista Grafici** si presenta come l'ambiente in cui si possono visualizzare gli oggetti matematici che sono stati definiti nella Vista Algebra. Nelle impostazioni (Menù in alto a sinistra Visualizza) è possibile attivare e disporre ulteriori ambienti, come il **Foglio di Calcolo**, l'ambiente CAS e altro.

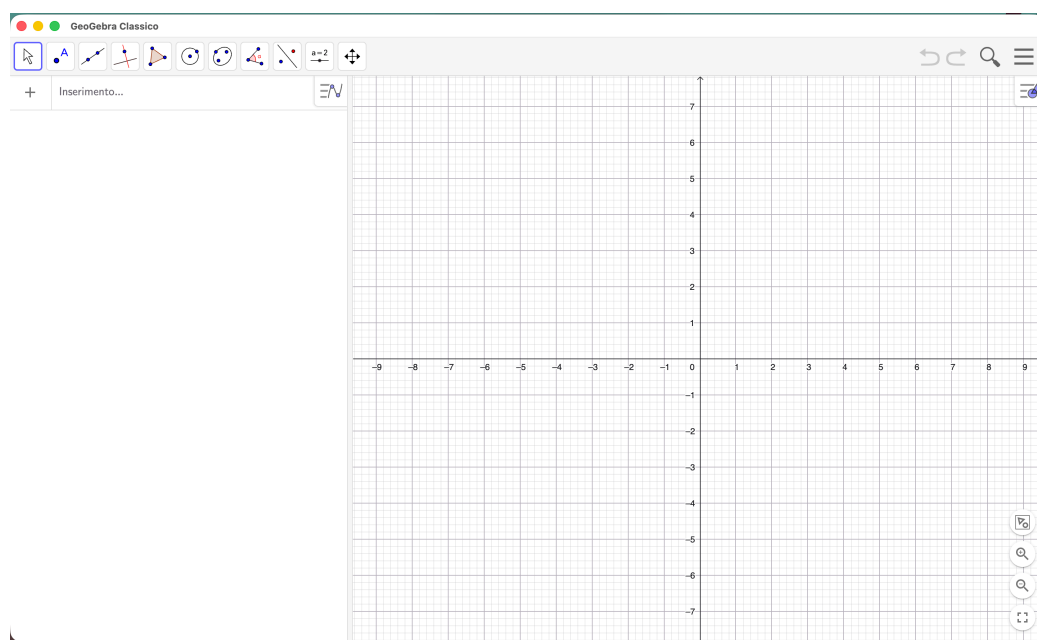


Figura 4: Pagina di apertura di default di GeoGebra Classic 6

Nella sezione superiore della pagina sono mostrate delle icone che rappresentano gli strumenti principali a disposizione dell'utente per creare oggetti. Non sono gli unici; passando infatti con il cursore sopra una delle caselle, si espanderà mostrando altri oggetti correlati. Per esempio, posandosi sopra l'icona di creazione Punto (la prima nella Figura 4), si avrà la possibilità di generare un semplice punto svincolato a schermo, oppure un punto vincolato all'interno di un altro oggetto matematico come un poliedro, creare automaticamente un punto medio, e non solo.

Per citare alcuni degli oggetti più utilizzati per i progetti presentati più avanti, ci sono gli oggetti geometrici quali punti, rette, poliedri, ma è stato fatto ampio uso di oggetti Testo, Pulsanti, Slider e Campi d'Inserimento, per le questioni, fondamentali, relative all'interazione con l'utente.

Durante la creazione di alcuni degli oggetti, il software si occuperà di dichiarare e mostrare alcuni elementi sulla Vista Algebra, per aiutare a semplificare e organizzare l'ambiente. Nella seguente illustrazione, è mostrata la creazione dell'oggetto Poliedro, in questo caso di un triangolo rettangolo.

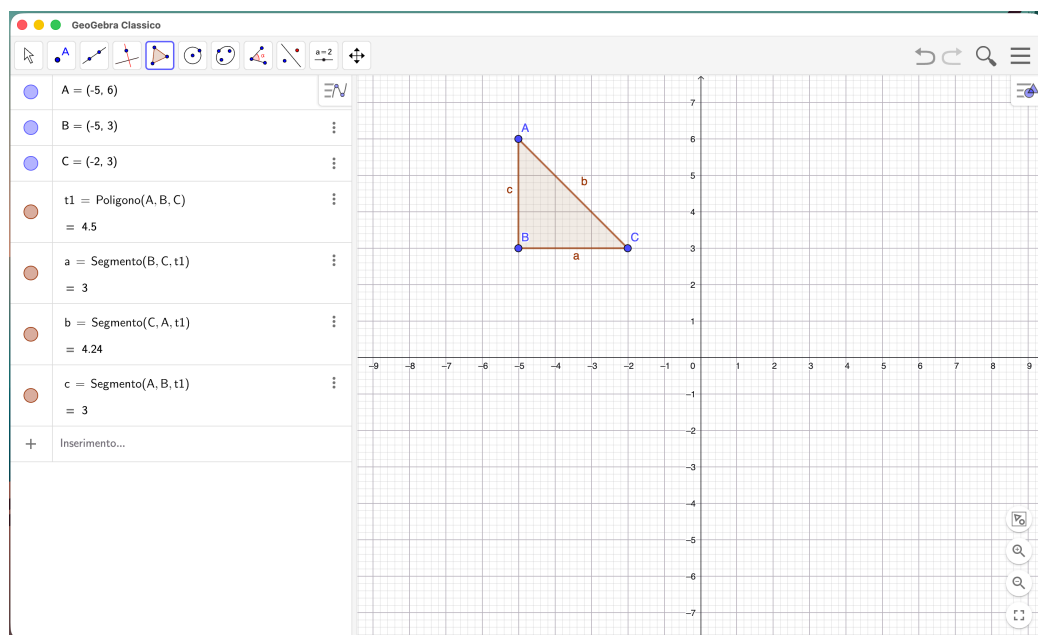


Figura 5: Generazione di un triangolo rettangolo

Come si può vedere, l'utente ha generato il poliedro nella Vista Grafici e il software ha automaticamente dichiarato tutti i suoi vertici e lati. È possibile per l'utente che non volesse seguire questo approccio, dichiarare le variabili nella Vista Algebra, e vederli conseguentemente apparire nella Vista Grafici. Altro strumento fondamentale che offre GeoGebra, e di cui è stato fatto vasto uso per questa serie di progetti didattici, è l'ampia lista di Comandi. Un comando è una generica funzione che riceve in input dei dati e restituisce un risultato, che può essere testuale, numerico o booleano. Un esempio di comando si può trovare nella Figura 5, dove alla creazione da parte dell'utente di un triangolo, il sistema ha costruito i comandi `Poligono()` e `Segmento()`. Il primo genera l'oggetto triangolo a partire dai suoi vertici, mentre il secondo restituisce la lunghezza di un segmento, dichiarando tra parentesi i punti estremi e il poligono a cui appartiene.

Durante la scrittura di un comando sulla Vista Algebra, il software suggerirà all'utente la sintassi della funzione e una breve descrizione della stessa. La

lunga lista di comandi è consultabile sul sito [GeoGebra Manual](#).

A ogni oggetto, infine, si può applicare uno *Scripting*, ovvero una serie di regole personalizzate, con supporto a *GeoGebra Script* (il linguaggio proprietario del software) oppure *JavaScript*. Un esempio di script può essere il condizionamento con cui l'oggetto sarà visibile a schermo, oppure si può modificare il colore dell'area interna di un poligono in base a specifiche condizioni.

Date queste premesse tecniche generali, che verranno ampliate ove necessario, e data la base teorica descritta nel capitolo 3, si procede con l'analisi dei due progetti oggetto di questa tesi. La trattazione non sarà indirizzata meramente sul comparto tecnico di scrittura di script e comandi, ma orientata anche e soprattutto sulle scelte progettuali, e le motivazioni dietro tali scelte, in un'ottica dove gli obiettivi primari posti in fase di progettazione sono stati la facilità di comprensione e interazione, e il valore didattico.

4.3 "Funzione Obiettivo e Vincoli", anteprima e obiettivi

Questo progetto ha come obiettivi la presentazione, manipolazione e la comprensione da parte dello studente dei concetti di regione ammissibile, vincoli, funzione obiettivo e soluzione ottima in un problema di programmazione lineare scritto in forma generale.

All'apertura del file infatti sarà visualizzata unicamente la Vista Grafici, in quanto l'interazione dell'utente con il programma avviene in tale spazio tramite l'utilizzo di caselle di inserimento, checkbox, slider e pulsanti.

Introducendoli, le caselle di inserimento sono oggetti che permettono un'interazione testuale con l'utente: in questo progetto è stato fatto uso di queste caselle per la scrittura delle equazioni che descrivono la funzione obiettivo e i vincoli.

Una checkbox è invece un oggetto che, tramite click del mouse, permette di interagire con una data variabile booleana, facendola variare tra **true** e

false.

Uno slider è un oggetto visibile a schermo che, se collegato a una variabile (il collegamento a una variabile viene richiesto in fase di creazione), permette la modifica di quel valore trascinando un cursore da un punto di valore minimo a uno di valore massimo, mentre il pulsante è un oggetto particolarmente versatile che può essere progettato con degli script con molti casi d'uso. Di seguito, come appare il file all'apertura:

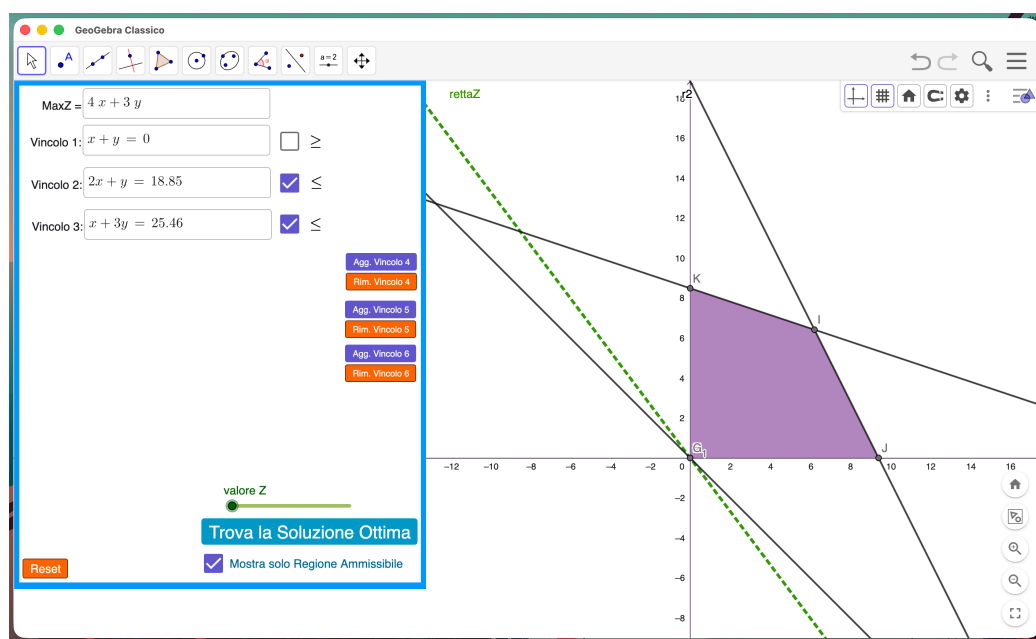


Figura 6: Pagina di apertura del primo file

Partendo da una breve panoramica del file, segue la disamina delle scelte progettuali. Il menù delimitato dalla cornice azzurra è luogo di interazione con l'utente. Nella porzione superiore si trova un problema di default posto in forma generale, con una funzione obiettivo da massimizzare e tre vincoli, uno di $\geq$, due di $\leq$. Nella porzione centrale si trova una serie di pulsanti che servono per aggiungere o rimuovere fino a un massimo di ulteriori tre vincoli, potendo descrivere, al massimo, un problema con sei vincoli totali. nella sezione inferiore, alcuni strumenti di utilità e per la manipolazione della

funzione obiettivo, come ad esempio una checkbox che permette di isolare la regione ammissibile e colorare unicamente l'intersezione tra i semispazi dei vincoli.

Sul lato destro della pagina è presente il grafico della regione ammissibile del problema di PL con le rette che ne delimitano i vincoli e la funzione obiettivo, colorata in verde ed etichettata a schermo con la definizione rettaZ.

Lo studente tramite questo programma può interagire, visualizzare e manipolare un problema di programmazione lineare, potendo sperimentare e osservare in tempo reale come gli effetti di queste manipolazioni sulle componenti geometriche si riflettono sulle loro controparti algebriche e viceversa, in un ambiente di interazione che ricerca una certa semplicità ed essenzialità visiva e di interfaccia, pur mantenendo tutti gli aspetti fondamentali sulle funzionalità.

4.4 Le scelte progettuali

Prendendo in esame inizialmente il menù di interazione delimitato dalla cornice azzurra, si mostra come sia stato scelto di permettere la scrittura delle espressioni di vincoli e funzione obiettivo tramite casella di inserimento, un oggetto che consente l'interazione con l'utente tramite input testuale. Questa scelta, per via di questioni tecniche legate al bisogno per GeoGebra di dichiarare equazioni per alcuni dei comandi necessari al funzionamento corretto del programma, obbliga l'utente a scrivere delle equazioni, nonostante i vincoli visualizzati nella Vista Grafici siano tutti in forma di disequazione. A causa di ciò, si è aggiunta una checkbox a fianco di ogni vincolo, che se cliccata cambia il verso della effettiva disequazione visualizzabile sul grafico. I simboli $\leq$ e $\geq$, posti a destra delle caselle di controllo si alterneranno per un'indicazione immediata del verso scelto.

Si è scelta questa impostazione per ricercare un compromesso che non intaccasse le funzionalità del programma, cosa che non sarebbe successa nel caso in cui l'utente avesse potuto inserire direttamente disequazioni dentro la casella di inserimento. In alternativa, le caselle di inserimento potevano essere

impostate come testo dinamico non interagibile, che avrebbe consentito di visualizzare le espressioni come effettive disequazioni, ma togliendo la possibilità all'utente di scegliere con precisione i coefficienti e i termini noti dei vincoli, dovendosi affidare unicamente allo spostamento manuale degli stessi dalla vista grafici e limitando in modo non accettabile le funzionalità. L'ampio spazio bianco nella parte centrale del menù si può riempire per un massimo di ulteriori tre vincoli, che si aggiungono cliccando il pulsante "Agg. Vincolo" e possono essere rimossi con il pulsante "Rim. Vincolo". Per questioni di chiarezza espositiva, si è imposto uno script per ogni vincolo che limitasse la visualizzazione dello stesso solo se il vincolo è attivo (Impostazioni casella di inserimento Avanzate Condizione per mostrare l'oggetto).

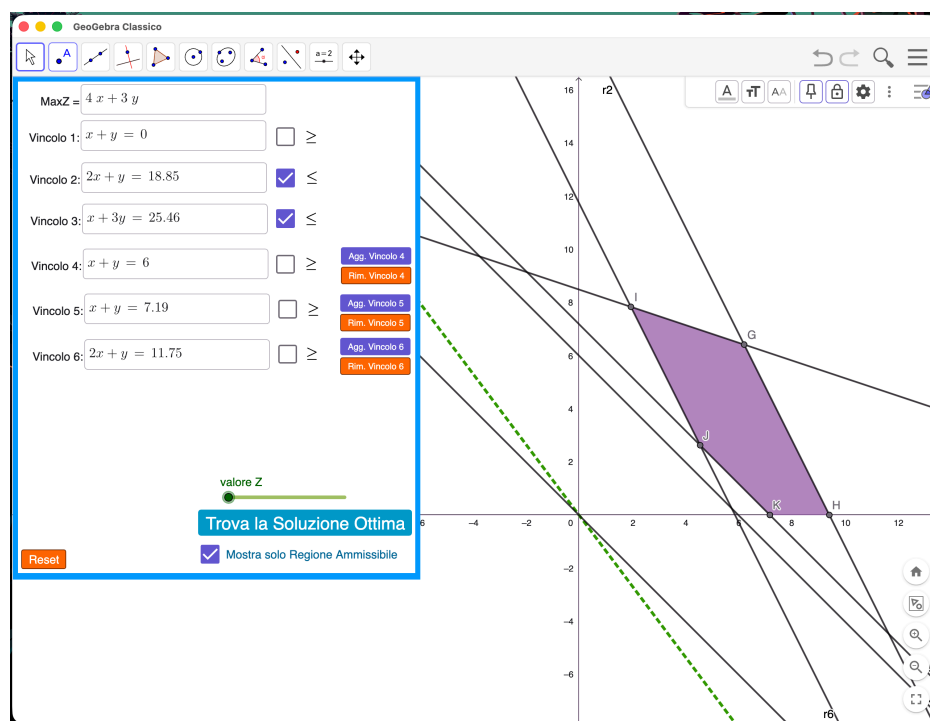


Figura 7: Visualizzazione del modello con sei vincoli

Nella porzione inferiore dell'interfaccia di interazione si trovano due og-

getti che implementano funzionalità legate alla funzione obiettivo, e due strumenti di utilità grafica e funzionale.

Partendo dai primi, uno slider di colore verde modifica la quota della funzione obiettivo: il valore di estremo superiore dell'oggetto non è fisso, bensì si aggiorna in tempo reale ogniquale volta viene modellato un vincolo, calcolando la soluzione ottima in background e ponendola come valore massimo allo slider. Questo passaggio fa sì che la funzione obiettivo non uscirà superiormente dalla regione ammissibile, ma si fermerà invece in corrispondenza della soluzione ottima. È stata questa una scelta per il suo valore didattico, in quanto si è considerato più efficace far sperimentare l'utente all'interno della regione ammissibile, piuttosto che avere una retta che può traslare liberamente da quota zero a un'altra, fissa, a discapito di uno degli obiettivi cardine della Ricerca Operativa, ovvero la ricerca di una o più soluzioni ottime: comunica al fruitore la frase "è questa la fine del processo di ricerca".

Il pulsante posto appena sotto etichettato con "Trova la Soluzione Ottima" avvia un'**Animazione**. Se cliccato, farà traslare verso l'alto la funzione obiettivo automaticamente con una velocità costante. L'animazione si ferma in corrispondenza della soluzione ottima. Un tasto reset in rosso, posto nell'angolo in basso a sinistra riporta la funzione obiettivo a quota zero. Questi pulsanti hanno una funzione didattica simile allo slider, ma con interazione diversa per l'utente, una sperimentazione alternativa per lo stesso obiettivo. L'ultimo elemento nel menù serve per una chiarezza visiva migliore, di seguito un esempio di come si presenta il grafico nel caso l'opzione "Mostra solo Regione Ammissibile" sia disattivata.

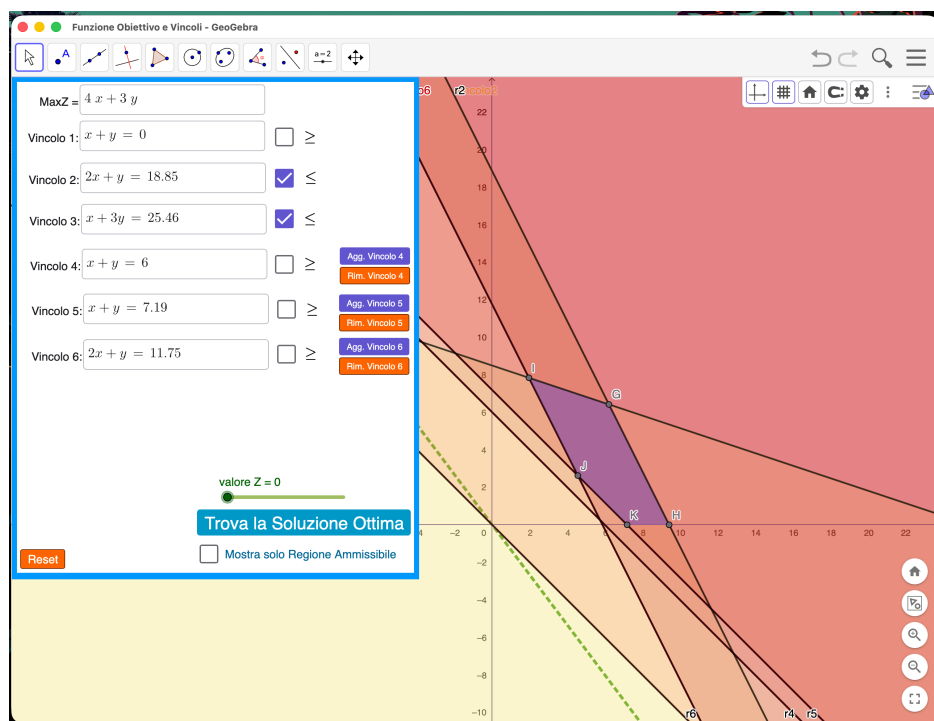


Figura 8: Grafico con evidenziato ogni vincolo

Per quanto riguarda la Vista Grafici, si è scelto di rendere i vincoli trascinabili con trascinamento mouse per favorire una maggiore interattività: al trascinamento, le equazioni descrittive dei vincoli presenti nel menù a sinistra si aggiornano di conseguenza, permettendo una integrazione tra componente algebrica e geometrica, e una comprensione più profonda delle loro interazioni.

4.5 Forma Standard e Forma Ridotta

Il secondo file si concentra nella presentazione e comprensione dei concetti di forma standard e forma ridotta, ulteriori modi di modellare un problema di programmazione lineare, fornendo anche una base concettuale per preparare lo studente alla teoria dell'algoritmo del simplesso, che basa il proprio funzionamento proprio a partire dalla forma ridotta. Anche questo file, coe-

rentemente con il precedente, si apre con un problema di PL di default in forma generale a due vincoli, con un ampio menù sulla sinistra delimitato da una cornice azzurra, e due ambienti di Vista Grafici

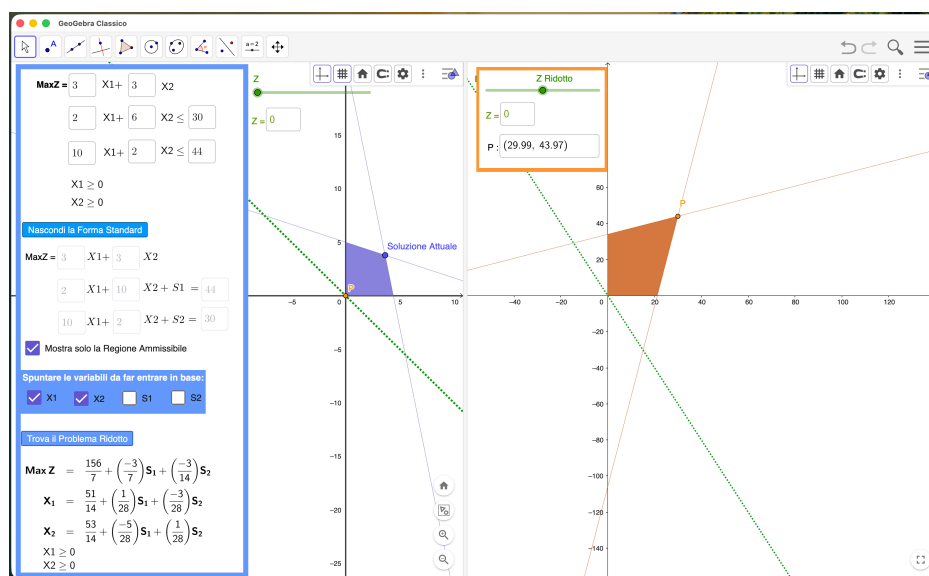


Figura 9: All'apertura del file "Forma Standard e Forma Ridotta"

Il menù, più ricco di elementi rispetto al precedente, mostra un problema di PL di default, con la specifica delle variabili X_1 e X_2 vincolate in segno positivo. Sotto, lo stesso problema in forma standard, con l'aggiunta dunque delle variabili ausiliarie e con i vincoli posti in forma di equazione. Si è scelto di dare la possibilità di nascondere la forma standard, qualora sia oggetto di analisi le sole forme generale e ridotta, per una maggiore essenzialità visuale. Anche qui è disponibile la checkbox per isolare l'evidenza della sola regione ammissibile, abilitata di default.

Per quanto riguarda l'ultima porzione del menù, si trova una finestra colorata in azzurro dove l'utente potrà scegliere le due variabili da porre di base nella costruzione della forma ridotta del problema scelto: una volta cliccato il pulsante "Trova il Problema Ridotto", questo apparirà nella parte inferiore dell'interfaccia di interazione, e nella Vista Grafici 2 (l'ambiente Vista Grafici

a destra).

La parte geometrica, anch'essa presente perché fondamentale per gli scopi didattici del progetto, è divisa in due: il grafico a sinistra mostra la controparte grafica del problema in forma generale, a destra si trova il grafico della costruzione del problema ridotto. Nel caso l'utente abbia indicato due variabili da avere in base che non costruiranno una SBA, allora questo grafico non sarà più visibile, e resterà solo l'ambiente "Grafico 2", senza elementi geometrici.

Per entrambi gli ambienti di Vista Grafici, sono presenti due slider per modificare la quota delle funzioni obiettivo e due caselle che mostrano i valori della quota; in più, sul grafico di destra si mostra un generico punto P all'interno della regione ammissibile con la possibilità di spostarlo, trascinandolo col mouse oppure impostandone i valori di X_1 e X_2 con input da tastiera, osservandone il correlato spostamento all'interno della regione ammissibile del "Grafico 1".

Nel prossimo paragrafo, una analisi più specifica per le scelte tecniche e progettuali.

4.6 Le scelte progettuali

In fase di progettazione di questo programma il principale scoglio è stato la ricerca del modo più corretto per gestire la mole di informazioni che sarebbe stata in ogni caso presente su schermo e il bisogno di trovare una certa facilità di comprensione e interazione con l'utente finale, con in mente la volontà di mantenere una certa organicità e coerenza tra questo e il file precedente, per agevolare il processo di approccio e la dimestichezza con l'interfaccia, da parte dello studente.

Si è scelto dunque di organizzare le informazioni in modo analogo al primo programma, con un menù di interazione testuale sulla sinistra, dallo stesso stile grafico, e la componente grafico-geometrica sulla destra, che in questo caso comprende due viste grafici e non più una.

Geogebra permette di modificare la porzione di schermo occupata da una

interfaccia grafica a discapito dell'altra trascinando la sezione frapposta alle due a sinistra o a destra, permettendo all'utente di scegliere la dimensione più corretta del grafico in esame.

Concentrandosi primariamente sul menù, anche in questo caso si dà la possibilità di scegliere coefficienti e termini noti di vincoli e funzione obiettivo per il problema in forma generale di partenza, utilizzando una casella di inserimento per ogni coefficiente. Questo perché non è stato ritenuto necessario per gli obiettivi di questo file implementare il trascinamento dei vincoli con il mouse direttamente dalla vista grafici (che avrebbe richiesto lo stesso approccio del file precedente, con equazioni da scrivere a tastiera e checkbox per il verso della correlata disequazione) potendo così semplificare la gestione e modifica delle espressioni matematiche del modello. Inoltre, in questo modo è stato possibile usare degli oggetti Testo per indicare le variabili con $X1$ e $X2$ (invece che x e y), coerentemente con la notazione più classica nella teoria della RO.

La forma standard del modello scritto in forma generale è stato progettato nello stesso modo, ma in questo caso le caselle di inserimento non sono interagibili, questo per evitare di aggiungere modalità di interazione superflue e possibilmente frutto di confusione per lo studente. Il pulsante "Nascondi la Forma Standard" fa cambiare valore a una variabile chiamata *VediFStandard*, impostandola a **false**. Questa variabile, se impostata in questo modo, nasconde la visibilità a schermo del modello in forma standard e del pulsante stesso. Questo perché se *VediFStandard* ha valore **false**, un pulsante "Mostra la Forma Standard" si mostra a schermo al posto del precedente, implementando in questo modo un pulsante dinamico, che ha una interagibilità decisamente migliore rispetto a due pulsanti sempre visibili a schermo, dove in ogni stato delle cose uno dei due non servirebbe a nulla.

Per la progettazione della porzione di menù relativa alla forma ridotta, si evidenzia con uno sfondo colorato, per marcare l'importanza di tale spazio, il luogo dove l'utente può spuntare delle checkbox: a ognuna di esse è collegata una delle quattro variabili del problema in forma standard, ovvero $X1$, $X2$,

S1, S2 (dove S1 e S2 sono le variabili di slack o surplus) e dove una casella, se spuntata, prepara il calcolo del problema ridotto con tale variabile posta in base.

Se l'utente dovesse spuntare più di due variabili il problema ridotto, qualora fosse visibile, sarà nascosto e apparirà un messaggio di errore *Devono esserci necessariamente 2 variabili in base*. Questo per fornire una guida all'utente: il problema che viene nascosto indica che qualcosa non va, e il messaggio di errore ne spiega il motivo.

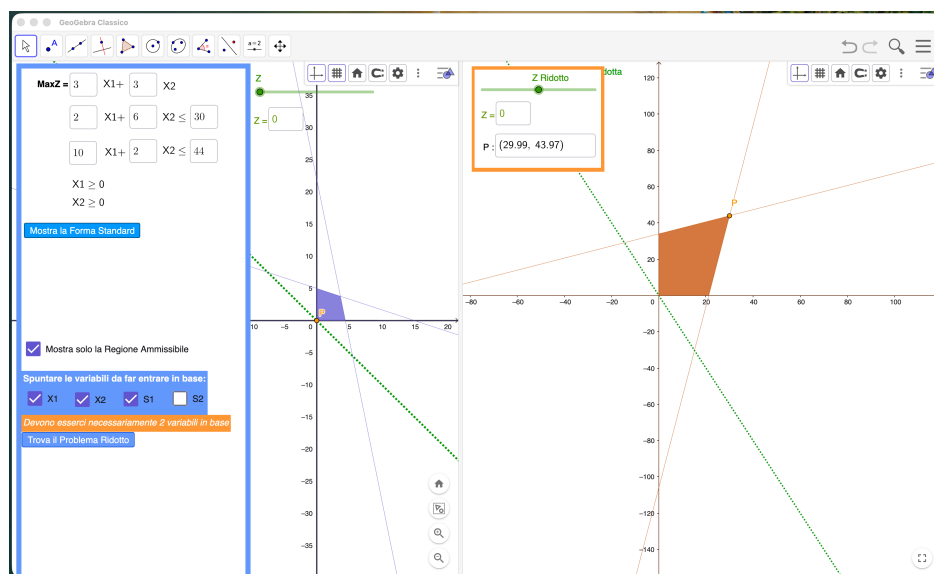


Figura 10: Situazione in cui si provano a inserire tre variabili in base

Nel caso in cui il pulsante "Trova il Problema Ridotto" venga cliccato con le variabili da far entrare in base che non costruirebbero, se calcolato, una SBA, l'utente verrà notificato con un messaggio di errore, e con il grafico relativo al problema ridotto che non sarà più visibile a schermo. Questo per segnalare allo studente che la costruzione di un problema ridotto ha valore pratico (per l'applicazione dell'algoritmo del simplesso, per esempio) solo nel caso in cui si stia lavorando con una SBA.

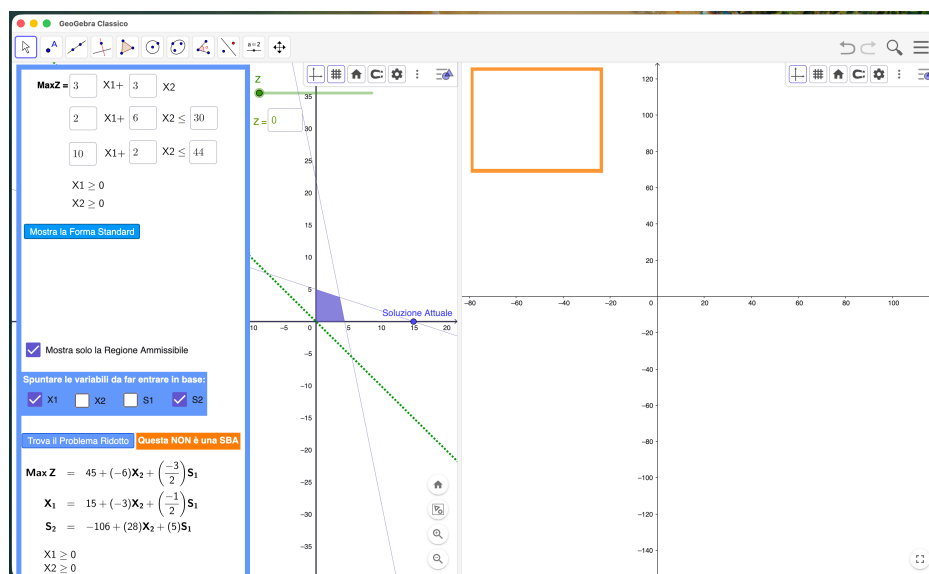


Figura 11: Caso in cui non calcolerei una SBA

Se invece si spunteranno le caselle corrette, e si clicca sul pulsante che calcola il problema ridotto, questo apparirà nella parte inferiore del menù. Il calcolo avviene in background con una serie di formule utilizzando un approccio non matriciale, in quanto la presenza di sole due variabili lo consente. Un testo scritto in LaTeX descriverà il problema ridotto, utilizzando sia variabili calcolare che testo fissato. Ultimo elemento che è stato però posto al di fuori del menù di interazione è lo slider per traslare la funzione obiettivo, con valore di Z indicato. Questa volta lo slider ha valori minimo e massimo fissati, non essendo stato ritenuto necessario anche qui il calcolo della soluzione ottima in background per gestire l'estremo superiore del valore di Z . Per quanto riguarda le componenti grafiche, l'impostazione è sostanzialmente analoga a quella del primo file. In questo caso però si mostra a schermo il punto P che ha un importante valore didattico, in quanto P se traslato dal Grafico 2, mostrerà all'utente il corrispondente spostamento del punto nel Grafico 1, e il punto *Soluzione Attuale*, che mostra il vertice "puntato" dal problema ridotto a seconda di una data organizzazione di variabili in

base e fuori.

Il punto P può essere anche impostato a mano grazie a una casella di inserimento scrivendo i valori di X1 e X2 separati da una virgola, per permettere una diversa interazione, più analitica, e che può dar spazio a ulteriori riflessioni o calcoli, per comprendere la correlazione stretta che c'è tra la forma generale e quella ridotta.

5 Conclusioni

In conclusione, l'obiettivo principale di questo lavoro è stato quello di progettare e analizzare le potenzialità di uno strumento didattico interattivo, basato su GeoGebra, nell'ambito dell'insegnamento della Ricerca Operativa. È stata anche approfondita la possibilità che l'impiego di tale supporto favorisca una comprensione più profonda dei concetti legati alla programmazione lineare, offrendo un supporto metodologico volto a integrare la didattica tradizionale con strumenti di visualizzazione dinamica.

Dall'analisi delle funzionalità dei tool progettati, emerge come l'uso di GeoGebra sia potenzialmente in grado di stimolare un maggiore coinvolgimento, facilitando la comprensione di concetti astratti attraverso la manipolazione diretta degli oggetti geometrici. La struttura del lavoro ha permesso di delineare un percorso in cui la visualizzazione della regione ammissibile e l'individuazione delle soluzioni ottime non siano solo passaggi algebrici, ma processi grafici intuitivi.

La proposta didattica delineata in questa tesi suggerisce che un approccio orientato all'apprendimento attivo, supportato da tecnologie digitali consapevoli, possa rappresentare una strategia efficace per potenziare le competenze di problem solving. In definitiva, la progettazione di questo supporto interattivo si conferma una risorsa dal grande valore potenziale per arricchire l'esperienza di apprendimento, proponendo un ambiente di fruizione che aspiri a essere più dinamico, inclusivo e stimolante per lo studente.

Riferimenti bibliografici

- [1] J. P. Akpan. Issues associated with inserting computer simulations into biology instruction: A review of the literature. *Electronic Journal of Science Education*, 2001.
- [2] Andrea Minini. Algoritmo del simplesso. https://www.andreaminini.com/ricerca-operativa/programmazione-lineare/algoritmo-del-simplesso#google_vignette. Accesso online.
- [3] Peter C. Bell and Robert M. O’Keefe. Visual interactive simulation: History, recent developments, and major issues. *Simulation*, 1987.
- [4] G. Brant, E. Hooper, and B. Sugrue. Which comes first the simulation or the lecture? *Journal of Educational Computing Research*, 1991.
- [5] Cambridge Assessment International Education. Active learning. <http://www.cambridgeinternational.org>, 2026. Accesso online.
- [6] Alberto Cattaneo. The role of personal and contextual factors when investigating technology integration in general and vocational education. *Computers in Human Behavior*, 2024.
- [7] J. M. Clark and A. Paivio. Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, 1986.
- [8] Ton De Jong. Computer simulations in science education: Modern approaches. *Science*, 312(5773):532–533, 2006.
- [9] Y. J. Dori and J. Belcher. How does technology-enabled active learning affect undergraduate students understanding of electromagnetism concepts? *The Journal of the Learning Sciences*, 2005.
- [10] Scott Freeman, Sarah L. Eddy, Miles McDonough, Michelle K. Smith, Nnadozie Okoroafor, Hannah Jordt, and Mary Pat Wenderoth. Active learning increases student performance in science, engineering,

- and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8410–8415, 2014.
- [11] A. Grasas and H. Ramalhinho. Operations research and simulation in masters degrees: A case study regarding different universities in Spain. *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference*, 2013.
 - [12] Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman. *Ricerca operativa*. McGraw-Hill Education, Milano, 9 edition, 2010.
 - [13] Judith Hohenwarter. *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra*. PhD thesis, University, 04 2008.
 - [14] Istituto Levi. La modellizzazione matematica della realtà. <https://www.istitutolevi.edu.it/files/file/Formazione%20ambito11/La%20modellizzazione%20matematica%20-%20I.pdf>. Accesso online.
 - [15] Flavio Manganello, Erica Grassi, and Diana Rizzo. Geogebra e genialità nell'apprendimento attivo della matematica: analisi evolutiva delle competenze geometriche e di problem solving. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, pages 9–35, 2025.
 - [16] Richard E. Mayer. The cognitive theory of multimedia learning. In *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*, pages 43–71. Cambridge University Press, 2nd edition, 2014.
 - [17] Armando Morales Carballo. A teaching-learning about optimization problems: a close up through the use of geogebra software. *International Journal of Research in Education Methodology*, 2019.
 - [18] Michael Prince. Does active learning work? a review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3):223–231, 2004.

- [19] M. D. Rossetti and F. Seldanari. Using active and collaborative learning in industrial engineering education. *American Society of Engineering Education Conference and Exposition*, 2000.
- [20] unibo. Registro lezione del 19 ottobre 2016. https://www.dm.unibo.it/~regonati/mat1617/mat1617_17-a1.pdf. Accesso online.
- [21] UniRoma. Il teorema fondamentale della programmazione lineare. <http://www.diag.uniroma1.it/~roma/didattica/R017-18/cap6B.pdf>. Accesso online.
- [22] UniRoma. Modelli di programmazione lineare. <http://www.diag.uniroma1.it/~roma/didattica/R0/capitolo2.pdf>. Accesso online.
- [23] UniRoma. Teoria della programmazione lineare. <http://www.diag.uniroma1.it/~roma/didattica/R014-15/cap6.pdf>. Accesso online.

Ringraziamenti

Ringrazio i miei genitori per tutto il supporto che a proprio modo e con ogni mezzo mi danno; mio fratello, per il suo infinito affetto.

Grazie a Ilaria, per tutto il supporto e la vicinanza, sempre, e ai miei amici più stretti.

Ringrazio il mio relatore, prof. Fabrizio Marinelli per la disponibilità mostrata negli incontri e durante il lavoro di tesi.