



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea triennale in

Economia e Commercio

**ANALISI DELLE SLOT MACHINES: IL RUOLO DEI
GENERATORI DI NUMERI PSEUDO-CASUALI**

**ANALYSIS OF SLOT MACHINES: THE ROLE OF
PSEUDO-RANDOM NUMBER GENERATORS**

Relatore:

Prof. Lucchetti Riccardo

Rapporto Finale di:

Ventura Nicola

Anno Accademico 2023/2024

*La gente ha paura di ammettere
quanto conti la fortuna nella vita,
terrorizza pensare che sia così
fuori controllo
(Citazione dal film Match Point)*

Indice

INTRODUZIONE	1
CAPITOLO 1: LE SLOT MACHINES	2
1.1 Funzionamento generale	2
1.1.1 Paylines	4
1.1.2 Simboli	5
1.1.3 Bonus	7
1.2 PAR Sheet	9
1.2.1 Principali parametri e indicatori	16
CAPITOLO 2: GENERATORI DI NUMERI PSEUDO-CASUALI	21
2.1 Panoramica sui generatori di numeri casuali	21
2.1.1 Linear Congruential generators	24
2.1.2 Test sui PRNG	28
2.2 Il ruolo del PRNG nelle slot	30
2.3 Gaming Laboratories International (GLI), standard internazionali	32
CONCLUSIONI	38
RIFERIMENTI E SITOGRAFIA	39

INTRODUZIONE

Questa tesi si propone di studiare le principali caratteristiche di uno dei più influenti sistemi di gioco d'azzardo dei giorni nostri: le slot machines. Pur avendo una storia molto recente, le slot hanno visto nel tempo un susseguirsi di evoluzioni dovute al progresso tecnologico, che ha portato oggi ad una loro completa digitalizzazione. La comparsa dei software ha permesso di superare tutti quei vincoli insiti nei primi modelli meccanici, grazie alla possibilità di avere un qualsiasi numero di simboli con diverse disposizioni su ogni rullo virtuale e un maggior numero di combinazioni vincenti di detti simboli; le cui implicazioni si riflettono su ciò che conta più di tutto per un giocatore: la potenziale vincita. Verranno poi indagati i processi tecnici che garantiscono la casualità degli esiti nelle slot, condizione essenziale come in ogni altro gioco d'azzardo, affinché sia assicurata l'equità tra i giocatori e tra la “casa” e i giocatori.

Capitolo 1

LE SLOT MACHINES

1.1 Funzionamento generale

Sebbene le configurazioni delle slot machines siano diventate sempre più complesse e variegate, si possono delineare una serie di regole di carattere generale che spieghino il funzionamento di questo gioco. Una slot consiste fondamentalmente in un numero di rulli che girano in maniera indipendente, sui quali sono posizionati svariati simboli in disposizioni e quantità decise dal produttore¹. Ogni rullo ha un certo numero di posizioni in cui può fermarsi, dette *stops*. Possono essere considerati come l'unità di misura della lunghezza del rullo, e ad ognuno di essi è associato un simbolo. Gli stops che determinano il risultato della partita sono quelli osservabili dal display nella *play window*, che può essere di forma quadrata, rettangolare o anche irregolare. Il display inoltre deve mostrare le informazioni riguardo: le regole del gioco, bonus compresi, la somma puntata dal giocatore anche detta *bet*, le *paylines* associate al bet, la tabella delle vincite e il saldo attuale del credito.

¹ Barboianu, C. (2013). *The mathematics of slots: configurations, combinations, probabilities*, INFAROM, Craiova, Romania, pag. 10



Figura 1.1.1 Display informativo slot Ulisse

Dopo aver inserito la moneta, sia essa fisica o elettronica, il giocatore sceglie il bet, preme il tasto start/play e dà inizio al gioco facendo così “ruotare i rulli”. I simboli che saranno mostrati sono determinati dal generatore di numeri pseudo-casuali (PRNG), il quale seleziona continuamente serie di numeri che corrispondono a differenti stops/simboli sui vari rulli. Il risultato sarà vincente se si verificano una o più combinazioni predefinite di simboli su *spots*² prestabiliti, collegati da linee immaginarie (virtuali) di varie forme, chiamate *paylines*. Ogni combinazione vincente realizzata è associata ad uno determinato payout, dato dalla moltiplicazione del *bet per line* per lo specifico payout rate associato a quella combinazione, e qualora si verificano vincite su più linee, il payout totale è dato dalla loro somma.

² Con il termine spots ci si riferisce agli stops che sono visibili nella play window quando i rulli hanno “smesso di girare”: Rappresentano i punti fissi che sono attraversati dalle paylines. In avanti questo termine sarà usato in maniera intercambiabile con stop quando evidente dal discorso.

Definendo il *jackpot* come il premio più grande ottenibile su una specifica slot machine, esso può configurarsi principalmente come: jackpot fisso se ha un valore monetario prestabilito, indipendente dal numero di scommesse effettuate, o jackpot progressivo se ad ogni giocata una piccola parte va ad incrementare il montepremi complessivo. La vincita massima si riferisce invece alla quantità massima che un giocatore può vincere in una singola giocata su quella slot. Ciò può includere vincite da combinazioni regolari durante il gioco base, vincite da giochi bonus e giri gratuiti, nonché eventuali jackpot o premi aggiuntivi. La vincita massima può variare quindi a seconda della slot stessa, delle linee di pagamento, delle puntate massime e di altri fattori. Alcuni elementi appena accennati meritano di essere approfonditi, dato l'impatto che hanno avuto nell'evoluzione sia del gioco in senso stretto sia dell'esperienza per il giocatore.

1.1.1 paylines

È facile comprendere che: se le slot sono dotate di una sola payline, come nei primi modelli, i giocatori hanno una sola possibilità di vincita per ogni partita. D'altra parte, con le paylines multiple, si possono realizzare combinazioni vincenti lungo diverse linee di pagamento contemporaneamente ad ogni spin; senza contare che il massimo pagamento è più elevato rispetto alle slot con una singola payline.

L'accesso ad un numero maggiore di paylines, dati questi vantaggi, deve essere quindi controbilanciato dalla richiesta di un bet più alto. Ciò comporta per il giocatore, qualora si trovi davanti ad una slot a paylines variabili, un trade-off in cui si deve scegliere se attivare o disabilitare linee di pagamento a fronte di un diverso bet. Non esiste un layout standard per le paylines, ma tendenzialmente si presentano come linee dritte, orizzontali o oblique, oppure spezzate come: linee triangolari, linee trapezoidali, linee zig-zag etc.

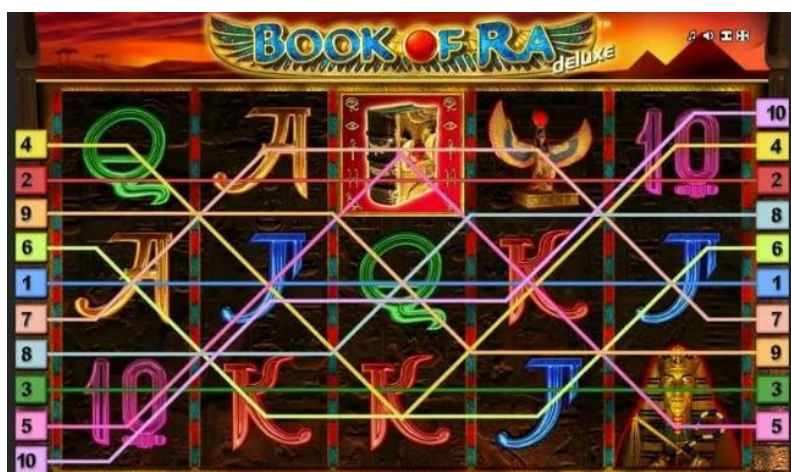


Figura 1.1.1.1 Paylines slot Book of Ra

1.1.2 simboli

Per quanto riguarda i simboli, possiamo distinguere principalmente tra: base, Wild e Scatter. I simboli “base” sono quelli che di norma formano le combinazioni vincenti, solitamente intese come la comparsa dello stesso simbolo sugli spots attraversati da una determinata playline.

È importante precisare che non è necessaria la presenza dello stesso simbolo su ogni stop della linea di pagamento, poiché, anche un parziale completamento della stessa può dar origine ad una vincita; purché i simboli uguali si trovino sui primi n stops che compongono la linea, dove spesso $n = 3$. Naturalmente, più grande sarà la combinazione, maggiore sarà la somma vinta. Oltre al numero, anche la tipologia di simboli nella combinazione influisce sul payout, dato che a simboli diversi possono essere associati payout rate differenti. Tutte queste informazioni si possono trovare nella schermata tabella delle vincite/ dei pagamenti.

TABELLA VINCITE CON BET 50		TABELLA VINCITE CON BET 100-200-300	
3 5000 4 500 5 200	3 2500 4 500 5 200	3 10000 4 1000 5 400	3 5000 4 1000 5 400
3 2500 4 500 5 150	3 1500 4 500 5 150	3 5000 4 1000 5 300	3 3000 4 1000 5 300
3 1500 4 500 5 150	3 1500 4 500 5 150	3 3000 4 1000 5 300	3 3000 4 1000 5 300
3 1500 4 500 5 150	3 1000 4 250 5 100	3 3000 4 1000 5 300	3 2000 4 500 5 200
3 1000 4 250 5 100	3 1000 4 250 5 100	3 2000 4 500 5 200	3 2000 4 500 5 200

Figura 1.1.2 1 Paytable slot Ulisse

Con *Wild symbols* si indicano quei simboli che hanno la proprietà di sostituire tutti gli altri, tranne gli Scatter, per formare combinazioni vincenti. Non è inusuale trovare la distinzione tra Joker e Wild, dove, il primo va a sostituire solo nello specifico spot in cui compare. Il secondo invece ha una portata più ampia, poiché espande la sua funzione a tutti gli stops del determinato rullo in cui si manifesta.

Gli Wilds rappresentano un vantaggio maggiore per il giocatore solo se la loro presenza è in grado di completare una potenziale combinazione vincente. In poche parole, la loro attivazione rimane comunque vincolata dalla struttura delle paylines. Questo discorso non vale per gli Scatter: simboli speciali che per innescare la loro funzione necessitano semplicemente di essere visibili nella play window, nel numero indicato dal regolamento del gioco. La peculiarità degli Scatter non è quella di creare o facilitare una combinazione vincente, bensì di far accedere il giocatore a dei bonus potenzialmente remunerativi.

1.1.3 bonus

Il *bonus round* può essere definito in generale come un gioco aggiuntivo o una funzione speciale che offre l'opportunità di una vincita extra. Anche per i bonus non esiste uno standard univoco; spesso si configurano come un premio erogato sotto forma di *free spin*, ovvero giri gratuiti che per il giocatore non comportano alcun costo, ma che non coincidono quindi per forza di cose con una vincita monetaria sicura.

Un'altra popolare alternativa è quella dell'accesso a schermate differenti in cui sono presenti dei minigiochi del tipo:

- *Pick-and-Win*, in cui viene presentata una schermata con una serie di oggetti da scegliere. Il giocatore seleziona un certo numero di oggetti che rivelano premi nascosti sotto di essi; possono includere: moltiplicatori di vincita, premi in denaro o altre ricompense.
- *Skill-Based*, questi bonus richiedono al giocatore di utilizzare abilità o strategie per ottenere premi più grandi. Il grado di successo nel completare la sfida determina la dimensione del premio vinto.
- *Fortune Wheel*, ovvero la ruota della fortuna con premio in denaro, free spin, moltiplicatori di vincita o l'accesso a ulteriori giochi bonus
- *Gamble future*, detta anche funzione del rischio o in alcuni casi *double up*, poiché dà la possibilità ai giocatori di raddoppiare o perdere le loro vincite. Un classico esempio è il dover indovinare il colore di una carta estratta.

Naturalmente devono essere fornite al giocatore tutte le informazioni per poter comprendere il funzionamento dei bonus e soprattutto non può essere attivata automaticamente, in questi casi, nessuna forma di *autoplay* che vada ad incidere sulle scelte.

1.2 PAR Sheet

I parametri che determinano la configurazione interna della slot, e alcuni risultati statistici, sono annotati nel così detto PAR (*Probability Account Report*) Sheet del gioco. Il numero di stops dei rulli e le distribuzioni dei simboli sono i dati necessari per qualsiasi calcolo statistico e di probabilità relativo a un particolare gioco di slot, comprese le probabilità di ottenere una combinazione specifica che origina un pagamento, i valori attesi, l'indice di volatilità, il return to player (RTP) e il margine della casa (house edge). I PAR Sheets sono tenuti segreti dai produttori e l'unico modo per recuperarli è con un intervento legale o con metodi statistici che richiedono un lungo periodo di tracciamento e registrazione³. Quelli che hanno rifiutato le richieste hanno invocato l'esenzione prevista per le informazioni scientifiche e tecniche, con il fatto che i PAR Sheets contengono informazioni tendenzialmente considerate segreti commerciali nell'industria dei giochi, che consistono in formule matematiche ed equazioni sviluppate dai loro ingegneri. Sostengono inoltre che le informazioni fornite sulle schede PAR potrebbero compromettere in modo significativo la loro posizione competitiva e interferire in modo significativo con gli obblighi contrattuali della società⁴ (IPC, 2009, 2010).

³ <https://chipy.com/academy/slots/slots-odds#house-edge-and-rtp>

⁴ Information and Privacy Commissioner, Ontario, Canada. (2009). Decisions and resolutions: PO-2744.
Information and Privacy Commissioner, Ontario, Canada. (2010). Order PO-2903.

Per capire come leggere e interpretare un PAR Sheet di una slot relativamente semplice verrà presentato quello del gioco “Juliet's Birthday”, creato dalla Game Developer Diana Gruber⁵. Il focus è indirizzato maggiormente per quanto riguarda l’aspetto del solo gioco base e tutti i calcoli sono svolti tenendo in considerazione una sola payline, come solitamente sono scritti i PAR Sheets.

Symbol Set and Pay Table					
Symbol	Description	Type	Pay 5	Pay 4	Pay 3
W1	Suitor 1	Wild			
W2	Suitor 2	Wild			
W3	Suitor 3	Wild			
W4	Suitor 4	Wild			
S1	Juliet	Line	5000	500	50
S2	Jewelry	Line	1000	250	40
S3	Dress 1	Line	800	200	30
S4	Dress 2	Line	500	150	25
S5	Shoes	Line	400	100	20
S6	Balcony	Line	300	90	15
S7	Sword	Line	200	70	10
S8	Knife	Line	125	60	10
S9	Poison	Line	100	50	5
BO	Bonus	Scatter			
FS	Free Spin	Scatter			1
--					

Figura 1.2 1 Symbol set and Paytable

Questa è la pagina che contiene il set di simboli utilizzati dal gioco e la relativa scheda dei pagamenti riguardo le combinazioni di simboli uguali, per linee di pagamento di diversa lunghezza. Nella prima colonna ci sono i vari simboli, identificati da due soli caratteri per rendere più agevole ai programmatori lavorare sul codice sorgente. I simboli base sono disposti in ordine gerarchico dal S1 al S9 secondo il criterio della grandezza dei pagamenti che originano. La seconda colonna contiene la descrizione estesa del nome dei simboli, mentre la terza li classifica in base al tipo.

⁵ Immagini e materiale sono ripresi dalla presentazione realizzata da Diana Gruber e Guy Hasson, reperibile al sito <https://www.vegasmath.com/portfolio.html>

Questo gioco ha quattro simboli Wild che sostituiscono i simboli S1-S9 nelle paylines, come descritto nei precedenti paragrafi. Le vincite che si verificano sulle linee di pagamento vengono moltiplicate per il *bet per line*, mentre quelle ottenute da una combinazione di Scatters sono moltiplicate per il bet totale. Il bonus dei free spin è attivato da una combinazione di simboli Scatter e fornisce subito un premio in denaro, in modo da garantire così al giocatore una vincita sicura a prescindere dal risultato dei giri gratuiti. I premi sono elencati per combinazioni di 3, 4 o 5 simboli uguali, da sinistra a destra su una linea di pagamento.

Virtual Reels					
Symbol	R1	R2	R3	R4	R5
W1		2			
W2			2		
W3				2	
W4					2
S1	3	1	2	2	1
S2	3	2	3	2	4
S3	2	2	6	3	8
S4	3	4	3	5	5
S5	6	2	3	4	4
S6	3	7	3	6	2
S7	7	3	3	6	4
S8	4	9	4	2	4
S9	6	5	7	4	2
BO	3		2		4
FS		3	2	4	
	40	40	40	40	40
Cycle	102,400,000				

Figura 1.2 2 Virtual Reels

In questa tavola è presente la distribuzione dei vari simboli sui cinque rulli. Ognuno di essi presenta una diversa distribuzione ma tutti contano un totale di 40 simboli/stops.

Non esiste una regola precisa o particolari vincoli imposti nel gestire questa fase; sebbene i rulli possano essere di qualsiasi lunghezza, ricercare un range ideale come quello di questo esempio, permette di ottimizzare tutte le operazioni che riguardano il controllo: delle funzionalità, del profitto e delle simulazioni. Il *ciclo* è il risultato della moltiplicazione delle lunghezze dei rulli, che in questo caso è $40^5 = 102400000$. Esso esprime il numero di tutte le singole combinazioni possibili di stops, che reggono simboli, ed è estremamente importante, poiché rappresenta la base sulla quale si vanno a calcolare tutte le frequenze; in quanto solo una parte di tutte quelle combinazioni sono considerate vincenti.

Index	R1	Weight	R2	Weight	R3	Weight	R4	Weight	R5	Weight
0	S6	1	S4	1	S3	1	S7	1	S6	1
1	S9	1	S7	1	S9	1	S4	1	S3	1
2	S3	1	S2	1	S1	1	S5	1	BO	1
3	S8	1	S8	1	S8	1	FS	1	S8	1
4	S2	1	FS	1	FS	1	S1	1	S3	1
5	S9	1	S6	1	S3	1	S6	1	S9	1
6	S5	1	S9	1	S9	1	S2	1	S2	1
7	S7	1	S4	1	S2	1	S7	1	S4	1
8	S8	1	S7	1	S6	1	S5	1	S7	1
9	S1	1	W1	1	S8	1	S4	1	BO	1
10	S9	1	S8	1	S1	1	FS	1	S3	1
11	BO	1	S6	1	S9	1	S6	1	S2	1
12	S6	1	S5	1	W2	1	S3	1	S8	1
13	S7	1	S8	1	S3	1	S9	1	S5	1
14	S5	1	S9	1	S8	1	S7	1	S6	1
15	S8	1	S6	1	S4	1	S8	1	S9	1
16	S4	1	S4	1	S7	1	W3	1	S3	1

17	S9	1	FS	1	S9	1	S5	1	S4	1
18	S3	1	S6	1	BO	1	S6	1	S2	1
19	S7	1	S8	1	S5	1	S4	1	S5	1
20	S2	1	S3	1	S6	1	FS	1	W4	1
21	S5	1	S6	1	S3	1	S2	1	S3	1
22	BO	1	S8	1	FS	1	S7	1	S1	1
23	S7	1	S2	1	S2	1	S3	1	BO	1
24	S1	1	W1	1	S9	1	S9	1	S4	1
25	S9	1	S9	1	S7	1	S6	1	S8	1
26	S4	1	S8	1	S3	1	S4	1	S3	1
27	S6	1	S6	1	W2	1	FS	1	S7	1
28	S5	1	S7	1	S4	1	S7	1	S2	1
29	S8	1	S8	1	S9	1	S9	1	S5	1
30	S7	1	S4	1	S5	1	S5	1	S4	1
31	S2	1	S9	1	S7	1	W3	1	S8	1
32	BO	1	S8	1	S6	1	S1	1	S7	1
33	S9	1	S6	1	BO	1	S6	1	S3	1
34	S5	1	S5	1	S3	1	S8	1	W4	1
35	S7	1	S8	1	S8	1	S7	1	S4	1
36	S1	1	FS	1	S2	1	S9	1	S3	1
37	S4	1	S1	1	S9	1	S4	1	BO	1
38	S5	1	S9	1	S5	1	S3	1	S5	1
39	S7	1	S3	1	S4	1	S6	1	S7	1
		40		40		40		40		40

Figura 1.2.3 Reel strips

Questi sono i *reel strips*. Seppur in forma digitale, rappresentano ciò che per le prime generazioni di slot machines erano i rulli fisici veri e propri; sono quindi ciò che viene osservato dal punto di vista del giocatore durante le partite. Se nei rulli virtuali gioca un ruolo fondamentale la distribuzione dei simboli, il cui aggiustamento si riflette maggiormente sull' RTP; nei reel strips è centrale il concetto di disposizione dei simboli, la cui modifica andrà a cambiare la volatilità.

Symbol	Hits			Total
	5	4	3	
S1	432	5,328	51,840	57,600
S2	1,440	8,160	86,400	96,000
S3	3,200	9,600	89,600	102,400
S4	4,410	20,790	118,800	144,000
S5	4,320	24,480	163,200	192,000
S6	4,320	38,880	172,800	216,000
S7	8,400	47,600	224,000	280,000
S8	6,336	35,904	380,160	422,400
S9	9,072	81,648	514,080	604,800
BO			1,036,800	1,036,800
FS			1,036,800	1,036,800
Total	41,930	272,390	3,874,480	4,188,800

Figura 1.2 4 Tabella degli Hits

I primi calcoli, per poter giungere agli indicatori finali più importanti, sono il conteggio degli *hits*. Essi possono essere definiti come il numero di combinazioni di stops che contengono una data combinazione vincente di simboli. Prendendo ad esempio il caso di quattro simboli S3 (Dress 1) in una payline che va da sinistra a destra, il conteggio diviene:

$$hits = 2 \cdot (2 + 2) \cdot (6 + 2) \cdot (3 + 2) \cdot (40 - 8 - 2) = 9600$$

Questo perché nel rullo R1, il simbolo S3 compare due volte, nei rulli R2, R3, R4 oltre agli stops assegnati ad S3, bisogna tenere in considerazione anche i simboli Wild. Per quanto riguarda R5 invece, andremo ad escludere quegli stessi stops che, se riscontrati nella payline, andrebbero a formare una combinazione di non più quattro simboli S3, ma cinque. Estendendo questo procedimento è possibile pervenire al numero di hits per simbolo e lunghezza della payline, per un totale di 4188800 hits.

Si può notare che:

- Gli hits delle combinazioni dei simboli base sono calcolati per una singola payline.
- Dalla tabella precedente può sembrare che gli hits degli Scatter abbiano una quota maggiore, ma ciò accade proprio in ragion del fatto che la loro attivazione prescinde dalle linee di pagamento. Questo numero rimarrà costante; aumentando il numero delle paylines attive invece la quota percentuale degli Scatter andrà a ridursi. Essendo caratterizzato il gioco preso in esame da una play window del tipo 5x3, il calcolo degli Scatter's hits è:

$$\text{Scatter's hits} = 40 \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot 40 = 1036800$$

Symbol	Percent of Hits			Total
	5	4	3	
S1	0.01%	0.13%	1.24%	1.38%
S2	0.03%	0.19%	2.06%	2.29%
S3	0.08%	0.23%	2.14%	2.44%
S4	0.11%	0.50%	2.84%	3.44%
S5	0.10%	0.58%	3.90%	4.58%
S6	0.10%	0.93%	4.13%	5.16%
S7	0.20%	1.14%	5.35%	6.68%
S8	0.15%	0.86%	9.08%	10.08%
S9	0.22%	1.95%	12.27%	14.44%
BO			24.75%	24.75%
FS			24.75%	24.75%
Total	1.00%	6.50%	92.50%	100.00%

Figura 1.2 5 Tabella degli Hits in quote percentuali

Rapportando ogni voce con quella degli hits totali si ottengono i dati in percentuale per ogni categoria. Rielaborarli in questo modo permette confrontare ciascun simbolo con gli altri e avere una visione più chiara, soprattutto nella fase di costruzione del gioco.

1.2.1 principali parametri e indicatori

Gli hits possono essere anche visti in termini di probabilità, di una data combinazione, come il numeratore della frazione nella formula, riscritta come:

$$P = \frac{hits}{ciclo}$$

$$P \text{ (quattro simboli S3)} = \frac{9600}{102400000} = 0,000094$$

Facendo l'inverso si ottiene l'*hit rate*, che ci informa su quante partite dobbiamo giocare in media per ottenere una particolare combinazione, e si calcola:

$$Hit \text{ rate} = \frac{1}{P} = \frac{ciclo}{hits}$$

$$Hit \text{ rate (quattro simboli S3)} = \frac{102400000}{9600} = 10667$$

Con l'*hit frequency* abbiamo invece con quale percentuale media di partite otteniamo quella combinazione:

$$Hit \text{ frequency} = \frac{100\%}{hit \text{ rate}}$$

$$\frac{100\%}{10667} = 0,009374\%$$

Per quanto riguarda le vincite, bisogna moltiplicare gli hits per il pay-out associato a quella combinazione.

$$Out = hits \times payout\ rate$$

$$9600 \cdot 200 = 1920000$$

Out				
Symbol	5	4	3	Total
S1	2,160,000	2,664,000	2,592,000	7,416,000
S2	1,440,000	2,040,000	3,456,000	6,936,000
S3	2,560,000	1,920,000	2,688,000	7,168,000
S4	2,205,000	3,118,500	2,970,000	8,293,500
S5	1,728,000	2,448,000	3,264,000	7,440,000
S6	1,296,000	3,499,200	2,592,000	7,387,200
S7	1,680,000	3,332,000	2,240,000	7,252,000
S8	792,000	2,154,240	3,801,600	6,747,840
S9	907,200	4,082,400	2,570,400	7,560,000
BO			0	0
FS			1,036,800	1,036,800
Total	14,768,200	25,258,340	27,210,800	67,237,340

Figura 1.2.1.1 Tabella Out

Vale anche qui lo stesso discorso fatto in precedenza per avere i dati in percentuale. La seguente tavola, in particolare, risulta estremamente cruciale per l'ottimizzazione del gioco poiché, come si può notare, ogni linea di simboli base contribuisce in maniera piuttosto omogenea all'ammontare totale del pay-out del gioco base. Se piccole variazioni possono risultare accettabili, grandi scostamenti sono alquanto indesiderabili.

Percent of Out				
Symbol	5	4	3	Total
S1	3.21%	3.96%	3.86%	11.03%
S2	2.14%	3.03%	5.14%	10.32%
S3	3.81%	2.86%	4.00%	10.66%
S4	3.28%	4.64%	4.42%	12.33%
S5	2.57%	3.64%	4.85%	11.07%
S6	1.93%	5.20%	3.86%	10.99%
S7	2.50%	4.96%	3.33%	10.79%
S8	1.18%	3.20%	5.65%	10.04%
S9	1.35%	6.07%	3.82%	11.24%
BO			0.00%	0.00%
FS			1.54%	1.54%
Total	21.96%	37.57%	40.47%	100.00%

Figura 1.2.1 2 Tabella Out in quote percentuali

Il valore atteso di ogni premio della schermata dei pagamenti si ottiene moltiplicando ogni combinazione della scheda “Out” per la propria probabilità.

$$EV \text{ win} = P \times Out$$

Sommando all’out del gioco base, quello dei free spins e degli Scatter, si ottiene il *total out*, che può essere considerato come la somma totale restituita al giocatore nel lungo periodo.

Total Out	
Base game	67,237,340
Free spins	16,557,491
Bonus	12,498,624
Total out	96,293,455

Figura 1.2.1 3 Total Out

Si arriva dunque a definire il *return to playler* o *RTP* come quella percentuale teorica, basata su calcoli matematici o simulazioni, che indica quanto della puntata totale viene restituita ai giocatori nel tempo. In linea generale si può esprimere come il rapporto tra quanto vinto e quanto scommesso dal giocatore in media:

$$RTP = \frac{hits \times out}{ciclo \times bet} \times 100\%$$

In quanto soggetto a requisiti minimi legali, questo parametro deve essere sottoposto a test e verifiche da parte di laboratori esterni affinché sia in linea con quanto dichiarato dai produttori.

Ciò che si ottiene per differenza dall'RTP è il margine della casa, detto *house edge*. Esso è il vantaggio matematico che il casinò ha sul giocatore, ovvero la percentuale di denaro che il casinò può aspettarsi di guadagnare dal gioco nel tempo, in base all'RTP e alle regole del gioco.

$$House\ Edge = 100 - RTP$$

Per finire, sempre legato all'RTP, abbiamo il *volatility index*, che ci dà un'indicazione generale del rischio, della frequenza e della consistenza delle potenziali vincite. In questo campo può essere associato alla nozione statistica di varianza come misura di quanto spesso in media il gioco ripaga, nonché di come vengono distribuiti i premi. Come ogni altro indicatore dipende direttamente dalla configurazione del gioco e spesso, se pubblicamente esposta, viene categorizzata come: bassa, media o alta.

Le slot con bassa volatilità sono quelle che pagano frequentemente piccole somme, sono meno rischiose e generalmente hanno un RTP ed un hit frequency più elevati. Giochi caratterizzati da un elevato indice di volatilità invece sono quelli che offrono il potenziale per grandi vincite, pagano meno frequentemente e sono più rischiosi. Ciò che fa protendere un giocatore a scegliere una slot in base alla volatilità sono essenzialmente preferenze personali che riguardano le variabili:

- Propensione al rischio
- Budget
- Tempo a disposizione per giocare
- Win frequency
- Massima vincita ottenibile

Capitolo 2

GENERATORI DI NUMERI

PSEUDO-CASUALI

2.1 Panoramica sui generatori di numeri casuali

Il processo di generazione di numeri casuali è al centro di una vasta gamma di applicazioni di diversa natura: simulazioni, crittografia, algoritmi probabilistici, tecniche di campionamento statistico, programmazione, computer grafica, meteorologia, come in qualsiasi altro campo delle scienze computazionali, ma anche e soprattutto, nel mondo del gioco d'azzardo, dove la casualità è un prerequisito per la sua esistenza stessa e funzionamento. Un'opinione condivisa è proprio quella di porre in quest'ultimo ambito le radici della questione sul come poter disporre di una serie di risultati numerici imprevedibili, indipendenti, non condizionati dalla volontà dell'uomo: casuali. Sfortunatamente queste caratteristiche, seppur richieste, non esauriscono quella che è la definizione del concetto di "casuale", tanto complessa da migrare addirittura dal piano matematico a quello filosofico.

Nel gioco d'azzardo, la casualità garantisce l'equità tra: i giocatori, nessuno dovrebbe avere alcun vantaggio sugli altri per quanto riguarda la possibilità di determinare o prevedere i risultati della partita (*fairness between users*); e tra la casa e i giocatori, i risultati che sono teoricamente possibili nella stessa misura dovrebbero rimanere ugualmente possibili nella pratica (*fairness of the house*)⁶. Un *generatore di numeri casuali (RNG)* è un dispositivo fisico, elettronico o un software mediante il quale è possibile generare in modo casuale una sequenza di numeri, in un determinato intervallo o insieme, le cui proprietà soddisfano il più possibile i requisiti di indipendenza e uniformità. Il generatore più usato che può essere considerato veramente casuale, *True random number generator (TRNG)*, secondo le interpretazioni generalmente accettate di questo concetto, è una sostanza in fase di decadimento atomico. Le particelle subatomiche che compongono la sostanza in decomposizione si trasmutano in altre particelle in momenti casuali nel tempo⁷. Ogni campione viene generato in risposta alla richiesta dell'utente, quindi i campioni sono univoci. Sebbene così sia soddisfatto il requisito della casualità, vi è ancora il problema della conoscenza distribuzione delle realizzazioni di quel processo esterno. Affinché i numeri casuali siano utili nelle applicazioni generali: la loro distribuzione deve essere nota, costante durante tutto il processo di generazione e le realizzazioni devono essere indipendenti (iid).

⁶ *Crunching The Numbers: A Mathematical Guide To RNG In Gambling* (chipy.com)

⁷ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 2

Quando però sono necessari milioni di dati in un brevissimo lasso di tempo, un tale processo fisico come fonte di numeri casuali è generalmente ingombrante. Invece di numeri casuali, la maggior parte delle applicazioni, in domini in cui la velocità di generazione e la riproducibilità dei risultati sono essenziali, utilizza numeri *pseudo-casuali*, che sono frutto di algoritmi deterministici ma "sembrano" essere stati generati casualmente. Suddetto generatore, chiamato *pseudo-random number generator (PRNG)*, produce numeri ricorsivamente, in una sequenza fissa, dove i k numeri precedenti, o solo il singolo numero precedente, determinano il successivo:

$$x_i = f(x_{i-1}, \dots, x_{i-k})$$

I sistemi standard di generazione di numeri pseudo-casuali utilizzano la riduzione in modulo nelle relazioni congruenziali. Le due principali tecniche di base di uso comune sono: *congruential methods* e *feedback shift register methods*⁸.

⁸ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 3-7

2.1.1 Linear Congruential generators

D. H. Lehmer nel 1948 propose un semplice generatore lineare congruenziale come fonte di numeri pseudocasuali. In questo generatore, ogni singolo numero determina il suo successore per mezzo di una semplice funzione lineare seguita da una riduzione modulare. Nonostante questo generatore sia limitato nella sua capacità di produrre flussi molto lunghi di numeri che sembrano essere realizzazioni indipendenti di un processo uniforme, è un elemento di base in altri generatori più adeguati⁹. È stato il generatore più influente e studiato ed è ancora utilizzato in vari settori, tra cui il gioco d'azzardo. Sebbene al giorno d'oggi i PRNG siano molto più avanzati, quello congruenziale lineare è un ottimo esempio di base per iniziare a capirne le caratteristiche. La formula del generatore lineare congruenziale è:

$$x_i \equiv (ax_{i-1} + c) \pmod{m}$$

Dove i parametri che compaiono nella formula, tutti interi maggiori di zero, sono:

- “ a ” è il moltiplicatore
- “ c ” è l’incremento
- “ m ” è il modulo del generatore

Posto $c = 0$, il generatore è chiamato “*multiplicative congruential generator*”.

⁹ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 11

La qualità della serie di numeri pseudo-casuali generati è molto sensibile alla scelta degli specifici valori dei coefficienti. Per alcuni distinti generatori, o anche intere classi, sono stati fatti numerosi studi empirici per determinare la combinazione ottimale dei parametri. Lewis, Goodman, e Miller (1969) hanno proposto per il LCG come modulo il numero primo di Mersenne $2^{31} - 1$, associato comunemente al moltiplicatore 7^5 ; valori che per le loro proprietà numeriche sono stati poi adottati come standard minimo per il buon funzionamento del generatore.

Il primo valore fornito come input all'algoritmo che dà il via alla sequenza è detto *seed*. Lo stesso seed applicato alla stessa configurazione del generatore darà sempre il medesimo output; la riproducibilità dei risultati, infatti, è uno dei vantaggi che spinge all'utilizzo di un PRNG, piuttosto che un TRNG, in svariate situazioni. La lunghezza della sequenza, prima che questa cominci a ripetersi, è chiamata *periodo*. Esso non può essere maggiore di m ed è pieno se e solo se:

- c e m sono coprimi
- $a - 1$ è divisibile per tutti i fattori primi di m
- $a - 1$ è un multiplo di 4 se m è un multiplo di 4

Se per ottenere il successivo numero della sequenza, piuttosto che il singolo valore, come nel *simple linear congruential generator* di Lehmer, si utilizzano i precedenti k valori, abbiamo il così detto “*multiple recursive multiplicative congruential generator*”:

$$x_i \equiv (a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_kx_{i-k}) \pmod{m}$$

I k numeri impiegati definiscono quello che è l’*ordine* del generatore. Naturalmente è richiesto in questo caso anche un set di k valori come seed. Usare un generatore di ordine superiore a 1 fornisce il vantaggio di avere un periodo più lungo del semplice multiplicative congruential generator: se m è un numero primo, infatti, Knuth (1998) ha dimostrato che il massimo periodo è $m^k - 1$.

Anziché utilizzare termini successivi per creare una sequenza, un’altra variante del multiple recursive generator, che prende il nome di “*lagged Fibonacci congruential generator*”, combina termini che sono ad una distanza maggiore:

$$x_i \equiv (x_{i-j} + x_{i-k}) \pmod{m}$$

Se j , k e m sono scelti in maniera adeguata, con $k > j$ e m un numero primo, anche in questo caso il periodo può raggiungere $m^k - 1$. Quando il modulo è una potenza di 2 invece, diciamo 2^p , il massimo periodo possibile del lagged Fibonacci generator diventa¹⁰ $(2^k - 1)2^{p-1}$.

¹⁰ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 32-33

Sia il periodo, che la apparente casualità, possono essere migliorati combinando uno o più generatori insieme. Una dimostrazione di questo procedimento è il metodo proposto da Collings (1987), che richiede un pool di generatori, ognuno dei quali produce la propria sequenza. Ogni numero della sequenza principale viene determinato da un generatore aggiuntivo, che seleziona quale generatore di quelli del pool deve essere utilizzato per produrre il numero¹¹. In generale, esistono più modi per combinare gli output di due o più generatori con lo scopo di migliorarne le proprietà; il simple linear congruential generator, per esempio, presenta dei limiti che impongono il suo utilizzo solo se usato in combinazione con altri generatori.

Da tutto ciò che è stato detto, risulta chiaro che un periodo lungo sia una caratteristica ricercata, poiché molte applicazioni pratiche richiedono una grande quantità di dati casuali; tuttavia, la lunghezza del periodo è solo uno dei fattori da tenere in considerazione. Una volta isolate le possibili scelte di parametri che garantiscono il periodo richiesto, bisogna fare i conti con le proprietà statistiche delle sequenze generate¹².

¹¹ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 46

¹² Dall'articolo di N. Gigante (2016), *Introduzione ai Generatori di numeri pseudo-casuali*, Università degli Studi di Udine, pag. 9

2.1.2 test sui PRNG

La qualità di un generatore dipende da quanto le proprietà del suo output corrispondano alle proprietà di un processo di generazione veramente casuale. Per valutare ciò è necessario disporre di misure quantitative che evidenzino le differenze tra la sequenza ottenuta e una sequenza ideale che è uniformemente distribuita, indipendente e imprevedibile. La prassi consiste nel sottoporre il generatore ad una serie di test statistici al fine di evidenziare possibili debolezze che possono indurre a scartare quel PRNG. Test diversi sono sensibili a diversi tipi di “non casualità”, quindi, nel contesto di un insieme di test, è necessario capire fino a che punto essi affrontino le stesse proprietà, ovvero capire quanto siano indipendenti i test uno dall’altro. Una batteria di test per la verifica di sequenze pseudo-casuali, chiamata “DIEHARD”, è stata proposta negli anni '90 da Marsaglia. I diciassette test presenti sono:

- Birthdays spacings test
- Overlapping 5 Permutations test
- binary rank test for 32×32 matrices
- binary rank test for 6×8 matrices
- Bitstream test
- Overlapping Pairs Sparse Occupance (OPSO) test
- Overlapping Quadruples Sparse Occupance (OQSO) test

- DNA test
- Count the 1s test on a stream of bytes
- Count the 1s test for specific bytes
- Parking Lot test
- Minimum Distance test
- 3D Spheres test
- Squeeze test
- Overlapping Sums test
- Runs test
- Craps test

Le principali alternative al DIEHARD sono: lo Statistical Test Suite (STS), sviluppato dal National Institute for Standards and Technology (NIST), il quale comprende sedici test eseguiti per la maggior parte su sequenze binarie, che si ipotizzano essere realizzazioni indipendenti di un processo di Bernoulli, e il TestU01. Quest'ultimo include test presenti nel DIEHARD e NIST, più altri che servono a mettere in luce alcuni possibili problemi di generatori che riescono a superare le precedenti batterie. Il TestU01 comprende tre batterie: "Small Crush", "Crush", e "Big Crush"¹³. La logica adottata è quella di utilizzare i gruppi di test in sequenza partendo da Small Crush, e se il generatore riesce a superarlo procedere con i successivi, altrimenti scartarlo.

¹³ Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 83-85

2.2 Il ruolo del PRNG nelle slot

Nelle prime generazioni di slot machines l'esito era determinato meccanicamente, come risultato dell'attivazione del meccanismo che fa girare i rulli, il quale forniva un accettabile grado di casualità: alta velocità di rotazione per ogni rullo, i rulli girano indipendentemente l'uno dall'altro e in maniera sfasata. Nelle videoslot invece il PRNG è sempre in movimento, l'algoritmo genera costantemente numeri ogni millisecondo. Non appena si preme il pulsante start, il programma software viene comandato per far visualizzare il risultato più recente sotto forma di simboli sulla play window. L'esito di ogni giro dipende quindi esclusivamente dalla sequenza selezionata dal generatore e non è il risultato di alcun comando fisico.

Ogni stop sul rullo virtuale ha un numero associato; il PRNG funziona separatamente per ogni rullo e genera numeri da 1 al numero di stops su quel rullo, garantendo l'ipotesi che qualsiasi combinazione di arresti dei rulli abbia la stessa probabilità di accadimento come risultato. Prendendo ad esempio un classico gioco 5x3, ad ogni partita il PRNG seleziona cinque numeri, uno per ogni rullo. Se per il primo rullo viene scelto il numero 13, verranno mostrati gli stops n 13,14 e 15, e così via anche per gli altri quattro rulli. Il generatore, oltre che per il funzionamento del gioco base, viene coinvolto anche in tutti gli altri aspetti della partita, compresa la fase bonus e i jackpot.

La velocità e la riproducibilità del software, che utilizza un algoritmo PRNG, giustificano la qualità della casualità prodotta. Lavorando continuamente per generare output nell'ordine di centinaia o addirittura migliaia di dati al secondo, quando viene premuto il pulsante start, il PRNG emette solo un numero, per ogni rullo, di quelle migliaia o decine di migliaia generate tra due pressioni. Quindi i risultati consecutivi delle partite di un gioco non corrispondono ai risultati consecutivi del PRNG e ciò dovrebbe far rinunciare a qualsiasi preoccupazione riguarda l'indipendenza¹⁴.

Tutti i giochi slot devono comunque essere testati e certificati da laboratori indipendenti per assicurare il comportamento del PRNG e la conformità dei parametri dichiarati. Le agenzie più note che rilasciano questi servizi sono:

- BMM Testlabs
- iTech Labs
- Gaming Laboratories International (GLI)
- eCogra (eCommerce Online Gaming Regulation and Assurance)
- SQS (Simple Queue Service)

¹⁴ *Crunching The Numbers: A Mathematical Guide To RNG In Gambling* (chipy.com).

2.3 Gaming Laboratories International (GLI), standard internazionali

La Gaming Laboratories International, LLC è un'azienda fondata nel 1989, leader nella fornitura di servizi indipendenti di test, certificazioni e valutazione per quanto riguarda l'industria del gioco d'azzardo. Nel corso degli anni ha sviluppato numerosi standard tecnici, utilizzati oggi come punti di riferimento globali da produttori, regolatori e operatori. Ogni giurisdizione ha l'autorità di stabilire i propri standard, tuttavia molte utilizzano questi come base di partenza per sviluppare le loro normative. La tendenza degli ultimi anni è di adottare direttamente gli standard prodotti e revisionati regolarmente dalla GLI; poiché le nuove tecnologie, che evolvono ad un ritmo estremamente veloce, non riescono ad essere incorporate abbastanza rapidamente a causa del lungo processo di regolamentazione amministrativa. La scelta di creare degli standard che non specifichino alcun metodo o algoritmo particolare risiede proprio nell'intento di consentire l'utilizzo di un'ampia gamma di procedure per conformarsi, incoraggiando allo stesso tempo lo sviluppo di nuovi metodi. Non viene posta quindi nessuna limitazione alla tecnologia presente, anche se non direttamente menzionata, e futura.

Per quanto riguarda le slot machines, ed in particolare le caratteristiche del PRNG, si possono trarre varie indicazioni dai documenti GLI-19 (Standars for interactive gaming systems) e GLI-23 (Video Lottery Terminals¹⁵), i quali forniscono una serie di requisiti imprescindibili, che il generatore di numeri pseudo-casuali deve possedere, affinché sia garantita la tutela di tutte le parti coinvolte. Lo scopo di questo paragrafo è elencarne i principali¹⁶.

Effetti ambientali sull'integrità del gioco: il laboratorio eseguirà alcuni test per determinare se influenze esterne impattano o meno sull'equità del gioco o creano opportunità di cheating. Il PRNG e il processo di selezione casuale devono essere impermeabili alle influenze provenienti dall'esterno del terminale, come, ma non solo: interferenze elettromagnetiche, elettrostatiche e a radiofrequenza.

L'uso di un PRNG comporta la selezione dei simboli, o la produzione dei risultati di gioco, che dovrà:

- essere statisticamente indipendente
- Conformarsi alla distribuzione casuale desiderata
- Superare vari test statistici riconosciuti
- Essere imprevedibile

¹⁵ Le VLT sono un sistema centralizzato per scommettere sul gioco delle slot, in questo elaborato le differenze tra le varie tipologie (AWP) non vengono trattate a favore del maggior risalto dato alle caratteristiche principali del gioco in sé.

¹⁶ Il materiale presente in questo paragrafo è ripreso direttamente dai documenti GLI-19 e GLI-23, reperibili dal sito <https://gaminglabs.com/gli-standards/>

Sempre per quanto riguarda il processo di selezione; la determinazione di eventi casuali che si traducono in un premio in denaro non deve essere influenzata, manipolata o controllata da nient'altro che dai valori selezionati da un PRNG approvato, in conformità con le seguenti prerogative:

- Tutte le combinazioni e i risultati devono essere disponibili. Ogni possibile permutazione o combinazione di elementi di gioco che produca esiti vincenti o perdenti deve essere disponibile per una selezione casuale all'inizio di ogni giocata, a meno che non sia diversamente indicato dal gioco.
- Ogni possibile selezione del PRNG deve avere la stessa probabilità di essere scelta. Se la progettazione del gioco specifica una distribuzione non uniforme, il risultato finale deve essere conforme alla distribuzione prevista.
- La conoscenza dei numeri scelti in un'estrazione non deve fornire informazioni sui numeri che potrebbero essere scelti in un'estrazione futura. Se il PRNG seleziona più valori nel contesto di una singola estrazione, la conoscenza di uno o più di essi non deve fornire informazioni sugli altri valori all'interno dell'estrazione.

- Nessun Near Miss. Dopo aver selezionato l'esito del gioco, il software non deve prendere una decisione secondaria variabile, che influisca sul risultato mostrato al giocatore. Ad esempio: il PRNG sceglie un risultato per cui la giocata è perdente, il gioco non deve sostituire un particolare tipo di risultato perdente da mostrare al giocatore rispetto a quello originariamente selezionato. Ciò eliminerebbe la possibilità di simulare uno scenario di "Near Miss", in cui le probabilità che il simbolo del premio più alto appaia sulla linea di pagamento sono limitate, ma spesso esso appare proprio al di sopra o al di sotto della payline.
- Ad eccezione di quando previsto dalle stesse regole, gli eventi casuali devono essere indipendenti e non correlati ad altri eventi all'interno dello stesso gioco, o eventi all'interno di giochi precedenti. Un gioco non deve regolare la probabilità che si verifichi un bonus, in base alla cronologia dei premi ottenuti nelle partite precedenti; come del resto non deve riadattare l'RTP teorico in base ai pagamenti passati.

Test applicati: il laboratorio di test indipendente deve impiegare test statistici per valutare i risultati prodotti dal PRNG, in seguito allo scaling, rimescolamento (shuffling) o altre mappature. Deve scegliere i test appropriati caso per caso, a seconda del PRNG in esame e del suo utilizzo nel gioco.

I test devono essere selezionati in modo da garantire: la conformità alla distribuzione prevista dei valori, l'indipendenza statistica tra le estrazioni e, se applicabile, l'indipendenza statistica tra più valori all'interno della singola estrazione. I test devono essere valutati, collettivamente, con un livello di confidenza del 99%. La quantità dei dati testati deve essere tale da consentire di rilevare con elevata frequenza deviazioni significative dai criteri dei test applicabili. I test statistici possono includere, ma non sono limitati a, quelli presentati in precedenza.

Requisito di attività del PRNG in background: esso deve essere azionato continuamente in background tra una partita e l'altra e durante il gioco, a una velocità che non può essere cronometrata dal giocatore.

Seed del PRNG: Il primo seed deve essere determinato in modo casuale da un evento non controllato. Dopo ogni partita ci sarà un cambiamento casuale nel processo del PRNG (nuovo seme, timer casuale, ritardo, ecc.); questo verificherà che la serie di numeri generata non ricominci ogni volta dallo stesso valore. In alternativa, è consentito non utilizzare un seme casuale, tuttavia, il produttore deve assicurarsi che i giochi non vengano sincronizzati.

Probabilità del simbolo: per i tipi di giochi con rulli che girano, come le videoslots, se non diversamente indicato nelle regole del gioco; la probabilità matematica di un simbolo di apparire in una qualsiasi sua posizione consentita, per ogni risultato della partita, deve essere costante.

Algoritmi di scaling: se un numero casuale con un intervallo più breve di quello fornito dal PRNG è richiesto per qualche scopo, il metodo di riscalatura, cioè la conversione del numero in uno di un intervallo inferiore, deve essere progettato in modo tale che tutti i numeri all'interno dell'intervallo inferiore siano ugualmente probabili.

Conclusioni

Questa tesi ha cercato di esplorare il mondo delle slot machines, evidenziando come l'evoluzione tecnologica abbia trasformato un gioco nato in forma meccanica in un sistema digitale complesso, dove gli aspetti matematico-statistici e l'implementazione di generatori di numeri pseudo-casuali rivestono un ruolo centrale. Attraverso questa analisi è stato possibile non solo approfondire la componente tecnica richiesta nella progettazione del gioco, ma anche comprendere le ragioni per cui esso sia diventato uno degli elementi principali del settore. Nella seconda parte invece è stato sottolineato come la casualità garantisca i due fattori chiave per l'esistenza stessa del gioco d'azzardo: l'imprevedibilità e l'equità. Abbiamo anche capito come sia di fatto impossibile, per sua natura, replicare questo concetto ideale a partire da un processo deterministico come un algoritmo software. Ciononostante, se ben implementato, un generatore di numeri pseudo-casuali risulta essere persino più utile, rispetto ad un TRNG, in tutte quelle dinamiche in cui viene richiesta la riproducibilità dei risultati, una grande velocità e mole di creazione di dati. Per quanto riguarda il mondo del gioco d'azzardo attuale e futuro, i PRNG avranno sempre più spazio, purché ne sia garantito il corretto funzionamento attraverso l'imposizione di standard aggiornati e test specifici, che garantiscano la tutela di tutte le parti coinvolte.

Riferimenti e sitografia

Barboianu, C. (2013). *The mathematics of slots: configurations, combinations, probabilities*, INFAROM, Craiova, Romania, pag. 10-11

Gentle, J. E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*, Springer Science & Business Media, New York, USA, pag. 2-3, 7-11, 20-21, 32-33, 46, 64, 79-85

Barboianu, C. Mihalache V. *The Maths Behind Slots Odds: A Mathematician's Perspective*, (chipy.com)

Barboianu, C. Mihalache V *Crunching The Numbers: A Mathematical Guide To RNG In Gambling*, (chipy.com)

N. Gigante (2016). *Introduzione ai Generatori di numeri pseudo-casuali*, Università degli Studi di Udine pag 5-9

<https://www.vegasmath.com/portfolio.html>

<https://slotsbandits.com/guides/>

<https://gaminglabs.com/gli-standards/>

<https://slotdesigner.com/>

C. Barboianu (2014), *Is the secrecy of the parametric configuration of slot machines rationally justified? The exposure of the mathematical facts of games of chance as an ethical obligation*, Infarom, Division of Applied Mathematics, Craiova, Dolj, Romania

