



**Università Politecnica delle Marche**  
**Facoltà di Ingegneria**

**Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile e Ambientale**

Dipartimento di Ingegneria Civile Edile e Architettura

DICEA

**TESI**

**“Instabilità di travi snelle compresse in C.A.”**

**“Buckling of compressive R.C. slender beam”**

Relatore:

**Chiar.mo Prof. Ing. Roberto Capozucca**

Laureanda :

**Eleonora Rosati**

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

# INDICE

Introduzione .....	3
Leonhard Euler - vita e ricerche.....	5
CAP.1 – Concetto di equilibrio.....	7
1.1 Generalità .....	7
1.2 L’equilibrio elastico .....	10
1.3 Teorema di Kirchhoff.....	14
CAP.2 – La stabilità dell’equilibrio elastico nella tecnica.....	16
2.1 Generalità .....	16
CAP. 3 – Trave compressa con carico trasversale e forza normale .....	19
3.1 Generalità .....	19
3.2 Analisi della trave.....	21
3.3 Colonna ideale compressa .....	23
3.4 Colonne con imperfezioni .....	32
CAP. 4 – Instabilità elementi in C.A. ....	36
4.1 Generalità .....	36
4.2 Metodo d’instabilità elastico del c.a.....	37
4.3 Instabilità delle aste compresse e pressoinflesse – teoria elastica lineare.....	41
4.4 Problemi e modelli per l’instabilità .....	47
CAP. 5 – Travi in c.a. compresse SLU .....	51
5.1 Generalità .....	51
5.2 Il Metodo della Colonna Modello .....	52
5.3 Applicazione del metodo ai pilastri in c.a. ....	55
5.4 Metodo semplificato.....	59
CAP.6 – Instabilità di strutture complesse in c.a.: telai .....	70
6.1 Generalità .....	70
6.2 Metodo $\mathbf{P} - \Delta$ .....	71
Bibliografia .....	75
Ringraziamenti .....	76

# Introduzione

---

Il matematico che formulò per primo la teoria dell'elasticità fu Leonhard Eulero, uno dei massimi ricercatori nel corso degli ultimi secoli. Nella tesi che si presenta si introduce, quindi, il classico problema della colonna compressa con cui Eulero determinò i carichi critici e le forme di instabilità associate.

L'instabilità delle colonne reali è un processo graduale, in cui gli spostamenti aumentano e tendono a diventare praticamente senza limiti con riferimento ai carichi critici. La teoria elastica lineare è alla base anche del calcolo dell'analisi di stabilità di elementi compressi in cemento armato che rappresenta l'obiettivo di questo lavoro di tesi.

Analizziamo la teoria dell'instabilità in strutture in c.a. accennando al metodo  $\omega$  e poi formulando le teorie più avanzate.

Nel Cap. 1 si presenta il concetto di equilibrio nella quale un corpo, sotto l'azione di forze agenti su di esso, può rimanere in equilibrio stabile, instabile o indifferente, rimosso il corpo dalla sua posizione di equilibrio. Si presenta, inoltre, l'equilibrio elastico di un solido elastico soggetto a forze e quindi che verrà deformato e il teorema di Kirchhoff sull'unicità dell'equilibrio elastico.

Nel Cap. 2 si presenta l'importanza dello studio della stabilità dell'equilibrio elastico andando principalmente a trattare l'instabilità elastica. Si presenta, inoltre, lo studio dell'equilibrio elastico dal punto di vista tecnico che consiste nella determinazione dei carichi critici.

Nel Cap. 3 si presenta lo stato deformato di una trave con carico trasversale distribuito e forza normale, in cui si analizzerà nello specifico anche delle colonne con imperfezioni.

Nel Cap. 4 si presenta l'instabilità di elementi in c.a. che è diventato sempre più rilevante con la riduzione delle sezioni dei pilastri e con l'aumento delle snellezze. Per verificare la stabilità degli elementi compressi in c.a. si introduce il “metodo  $\omega$ ” formulato per gli elementi in acciaio.

Nel Cap. 5 si presenta l'effetto della deformazione dell'asta dovuta alla sollecitazione di flessione. Si utilizza il metodo della colonna modello per la verifica allo stato limite ultimo attraverso un'analisi non lineare. Inoltre si verifica anche il pilastro in modo pratico calcolando il massimo valore dello sforzo normale.

Nel Cap. 6 si presenta l'instabilità di strutture complesse in c.a. e nello specifico i telai utilizzando il metodo del  $P - \Delta$  il quale consiste nel sostituire ai momenti del secondo ordine provocati dai carichi verticali i momenti indotti da azioni equivalenti applicate ai piani. Si utilizza anche il "metodo  $\omega$ " per controllare alcune condizioni tipiche del campo elastico.

# Leonhard Euler - vita e ricerche

---

**Leonhard Euler** noto in Italia come Eulero, nato in Brasile il 15 aprile 1707, è considerato il più importante matematico del Settecento, e uno dei massimi della storia. È noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi. Eulero è stato senz'altro il più grande fornitore di "denominazioni matematiche", offrendo il suo nome a una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni. Ad esempio è molto noto per il metodo di Eulero che è stato ideato nel 1755, il quale prevede la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali per la trave elastica. La soluzione di queste equazioni fornisce la seguente espressione della tensione critica euleriana di pressoflessione:

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} = \left(\frac{\pi}{\lambda'}\right)^2$$

dove:

- $\sigma$  è la tensione meccanica nella trave elastica lineare in esame
- $E$  rappresenta il modulo di elasticità normale del materiale costituente la trave elastica lineare
- $\lambda'$  è la snellezza (rapporto tra lunghezza inflessa (NON della trave)) e raggio di inerzia.

Quindi in sostanza la tensione normale di instabilità euleriana dipende solo da forma (forma della sezione e snellezza) e materiale della trave. Complessivamente esistono 886 pubblicazioni di Eulero. Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Eulero, per esempio  $i$  per l'unità immaginaria,  $\Sigma$  come simbolo per la sommatoria,  $f(x)$  per indicare una funzione e la lettera  $\pi$  per indicare pi greco.

Eulero entrò all'Università di Basilea tredicenne e si laureò in filosofia. Il padre di Eulero lo voleva teologo e gli fece studiare il greco e l'ebraico, ma Bernoulli lo convinse che il destino del figlio era la matematica. Così, nel 1726 Eulero completò il dottorato sulla propagazione del suono e, nel 1727, partecipò al Grand Prix dell'Accademia francese delle scienze. Nel 1734, il matematico sposò Katharina Gsell. Visse a Berlino per i successivi 25 anni, e là ebbe anche occasione di conoscere Johann Sebastian Bach. In un quarto di secolo pubblicò ben 380 articoli, oltre che le sue due opere principali l'Introductio in analysin infinitorum, del 1748 e le Institutiones calculi differentialis (1755). La vista di Eulero peggiorò molto durante la sua carriera. Dopo aver sofferto di una febbre cerebrale, nel 1735 diventò quasi cieco all'occhio destro. Il 18 settembre 1783 fu colto improvvisamente da un'emorragia cerebrale e morì poche ore dopo. Aveva 76 anni.



INSTITVTIONVM  
CALCVLI INTEGRALIS

VOLVMEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRIN-  
CIPIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFE-  
RENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AUCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO  
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.



PETROPOLI

Impenſiſ Academiæ Imperialis Scientiarum

1768.

Figura 1 – Ritratto di Eulero e una delle sue opere principale

# CAP.1 – Concetto di equilibrio

---

## 1.1 Generalità

Nel linguaggio corrente al concetto di equilibrio corrisponde l'idea del permanere dello stato in cui si trova l'ente che si considera, ed il concetto viene meglio precisato valutando almeno approssimativamente, la stabilità dell'equilibrio stesso.

Un corpo si dice in equilibrio quando, sotto l'azione delle forze che agiscono su di esso, rimane nello stato di riposo, e l'equilibrio è stabile, instabile o indifferente a seconda che, rimosso il corpo dalla sua posizione di equilibrio con una causa estranea qualsiasi, tolta che sia questa, spontaneamente tende a ritornare nella posizione iniziale oppure ad allontanarsene ulteriormente, oppure rimane nella nuova posizione assunta.

E tipico il caso elementare della pallina posta nel fondo di una scodella (Figura 1.1, a); spostata di poco la pallina, essa sotto l'azione del proprio peso ritorna nel fondo della scodella; l'equilibrio è stabile.

Posta invece la pallina al sommo di una superficie convessa (Figura 1.1, b)

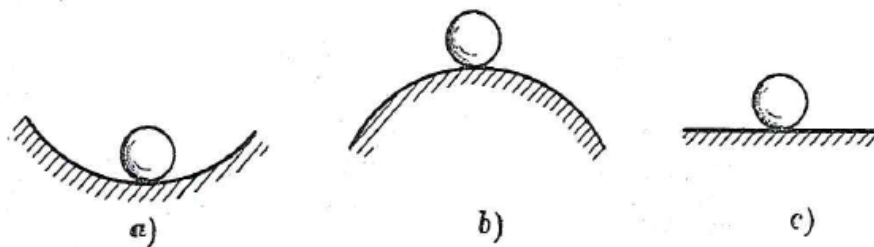


Figura 1.1 – Equilibrio stabile, instabile e indifferente della pallina

e spostata anche di pochissimo, sotto l'azione del proprio peso si allontana sempre più dalla posizione iniziale; l'equilibrio è instabile. Posta infine la pallina su di un piano orizzontale (Figura 1.1, c) e spostata, essa rimane nella nuova posizione assunta; l'equilibrio è indifferente.

È essenziale notare che l'essere l'equilibrio stabile, instabile o indifferente è relativo alla posizione iniziale - ossia ad una certa determinata posizione - del corpo. Nel caso della pallina, supposto l'equilibrio instabile, può darsi (Figura 1.2) che la pallina trovi in una nuova posizione uno stato di equilibrio stabile; può anche darsi che ne trovi più di uno, e che tra questi nuovi stati di equilibrio uno sia più stabile degli altri (Figura 1.3).

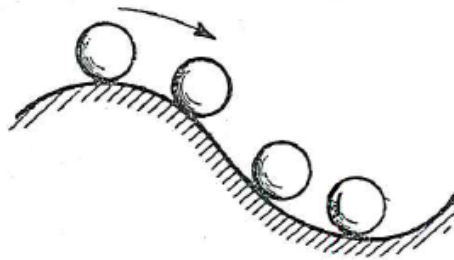


Figura 1.2 –Pallina in uno stato di equilibrio stabile.

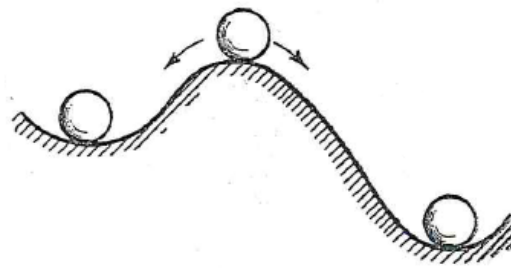


Figura 1.3 –Pallina in più stati di equilibrio.

Si noti anche che, per esempio nel caso delle Figure 1.2 e 1.3, solo per una posizione della pallina l'equilibrio è instabile, per le altre l'equilibrio è stabile (Figura 1.4), oppure che per una direzione può essere stabile e per un'altra



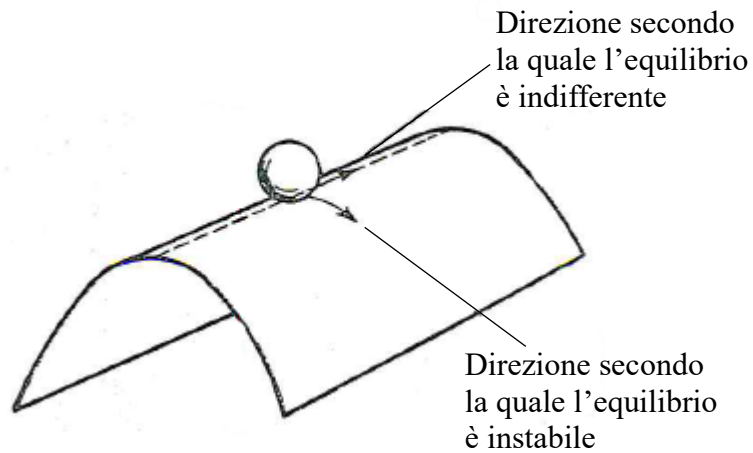


Figura 1.4 – Per una direzione del movimento l'equilibrio può essere indifferente e per un altro instabile.

instabile (Figura 1.5). Infine può avvenire (Figura 1.6) che per una certa direzione del movimento l'equilibrio sia più instabile che per un'altra.

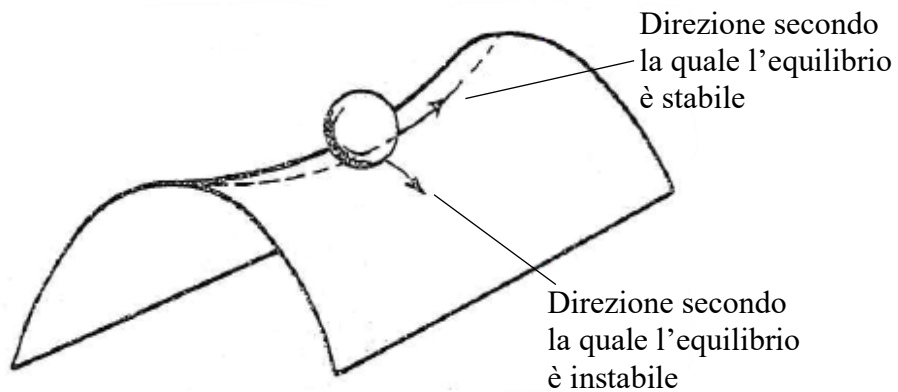


Figura 1.5 - Per una direzione il movimento può essere stabile e per un'altra instabile

Ciò dice che, per giudicare della stabilità dell'equilibrio, non basta esaminare una sola possibilità di movimento, ma occorre considerare tutte quelle che possono presentarsi.

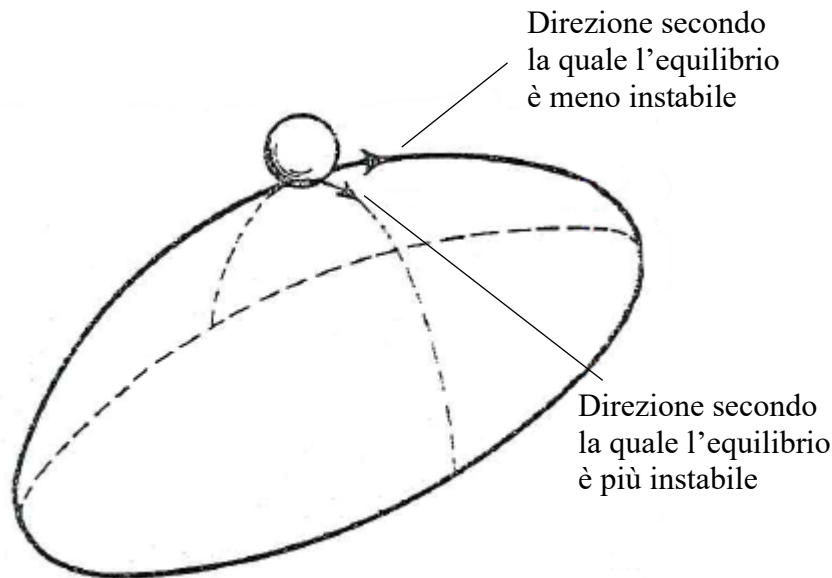


Figura 1.6 - Per una certa direzione del movimento l'equilibrio sia più instabile che per un'altra.

## 1.2 L'equilibrio elastico

### a) Equilibrio elastico stabile, instabile, indifferente.

Un solido elastico, soggetto a forze e quindi deformato, è in equilibrio elastico stabile se, modificando di pochissimo la sua forma, sia con l'applicare altre forze sia (ciò che è lo stesso) con l'imprimere altre deformazioni, riprendere la sua prima forma deformata appena siano tolte queste azioni aggiunte.

Se invece, tolte queste azioni aggiunte, il solido assume un'altra diversa configurazione deformata e poi, appena assunta questa, un'altra ancora e così di seguito, l'equilibrio elastico è instabile.

Se infine, sotto le azioni aggiunte, il solido rimane, come inerte, nella nuova configurazione deformata assunta, l'equilibrio elastico è indifferente.

Consideriamo come esempio (Figura 1.7) una trave rettilinea **AB**, vincolata a cerniera in **A** e con un appoggio scorrevole in **B**, e applichiamo ad essa in **B** una forza assiale **N** di compressione.

Se **N** non è molto grande, la trave si accorcerà semplicemente di una certa quantità, assumendo una configurazione deformata per cui **B** per esempio, passa in **B'**.

Ciò fatto, o applicando altre forze o imprimendo deformazioni, obblighiamo l'asse della trave ad incurvarsi e ad assumere la nuova configurazione  $\mathbf{AB''}$  (disegnata in grosso nella Figura 1.7) di pochissimo diversa da quella  $\mathbf{AB'}$ .

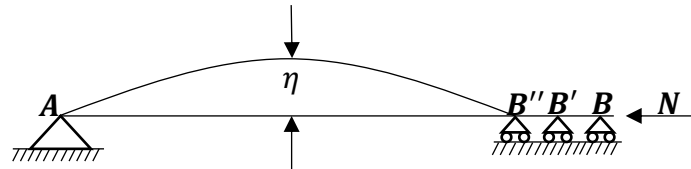


Figura 1.7 - Una trave rettilinea  $\mathbf{AB}$  con applicata in  $\mathbf{B}$  una forza assiale  $\mathbf{N}$  di compressione.

Per la presenza della  $\mathbf{N}$ , nascerà in ogni sezione un momento flettente (momento flettente esterno, ossia dovuto alla forza esterna  $\mathbf{N}$ ),

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{N}\eta \quad (1.1)$$

e nello stesso tempo per effetto della curvatura conseguente alla deformazione impressa un momento flettente interno (dovuto alle tensioni interne reagenti)

$$\mathbf{M}_i = \frac{\mathbf{E}\mathbf{J}}{\mathbf{r}} \quad (1.2)$$

Con  $\mathbf{E}$  modulo di Young,  $\mathbf{J}$  momento d'inerzia della sezione trasversale della trave rispetto all'asse di flessione,  $\mathbf{r}$  raggio di curvatura.

Ora, mentre  $\mathbf{M}_i$  dipende dalla rigidità  $\mathbf{E}\mathbf{J}$  della trave e dalla curvatura impressa  $1/\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{M}_e$  dipende e dalla deformazione impressa e dalla forza esterna  $\mathbf{N}$ . Se  $\mathbf{N}$  è molto piccola e dappertutto è  $\mathbf{M}_e < \mathbf{M}_i$ , certamente il momento delle tensioni interne reagenti non solo dappertutto contesterà il momento esterno  $\mathbf{M}_e$ , ma rimarrà di esso disponibile una parte  $\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_e$  che riporterà alla configurazione della prima deformata l'asse della trave; l'equilibrio è stabile. Se invece  $\mathbf{N}$  è molto grande e dappertutto è  $\mathbf{M}_e > \mathbf{M}_i$ , arriverà certamente l'opposto: cioè il momento delle tensioni interne non è abbastanza grande per contrastare

il momento  $\mathbf{M}_e$  della forza esterna  $\mathbf{N}$  che tende a deformare ulteriormente la trave e di fatto ulteriormente la deformata; l'equilibrio elastico è instabile. Esiste quindi certamente, per la continuità, uno stato intermedio con un certo valore di  $\mathbf{N}$  per cui l'equilibrio è indifferente. Questo valore di  $\mathbf{N}$  è il carico critico.

b) Instabilità elastica e configurazione deformata originaria; possibilità di altre diverse configurazioni di equilibrio stabile.

La instabilità elastica va intesa rispetto alla prima deformata, perché modificando la configurazione di questa deformata, possono nascere delle reazioni interne via via crescenti che ad un certo punto possono impedire ulteriori deformazioni ossia l'equilibrio diventa di nuovo stabile, precisamente come, nel caso della Figura 1.2, la pallina, abbandonata la posizione di equilibrio instabile, trova una diversa posizione di equilibrio stabile.

Nel caso della trave della Figura 1.7, quando  $\mathbf{N}$  sia molto grande, se a partire dalla prima configurazione deformata  $\mathbf{AB}'$  imprimiamo uno stato di deformazione definito dalla curva elastica  $\mathbf{AB}''$  per il quale dappertutto sia  $\mathbf{M}_e > \mathbf{M}_i$  e quindi l'equilibrio sia instabile, il punto  $\mathbf{B}$  dalla posizione  $\mathbf{B}''$  continuerà a spostarsi avvicinandosi ad  $\mathbf{A}$ ; e aumenterà dovunque  $\mathbf{M}_e$ , ma aumenterà anche la curvatura dell'asse e quindi  $\mathbf{M}_i$ ; e può accadere che ad un certo punto  $\mathbf{M}_i$  nell'insieme uguali e poi superi  $\mathbf{M}_e$ , con che equilibrio – nell'ipotesi che il materiale continui a comportarsi elasticamente – diventerà di nuovo stabile. Possiamo quindi avere diversi tipi di equilibrio con diversi valori di  $\mathbf{N}$ , uno instabile per un certo valore di  $\mathbf{N}$ , un altro stabile per un valore di  $\mathbf{N}$  più grande. Ossia anche nel caso dell'equilibrio elastico, la stabilità dell'equilibrio va intesa riferita ad una particolare configurazione deformata del solido.

### c) Forme di instabilità.

È chiaro che la possibilità di instabilità dell'equilibrio elastico può presentarsi nei solidi in cui una delle dimensioni è piccola rispetto alle altre due, oppure due sono piccole rispetto alla terza.

Nella pratica può aversi:

- Instabilità di tutta una struttura; casi tipici sono lo svergolamento o inflessione laterale di una trave assialmente compressa, lo sfiancamento dei tubi compressi radialmente dall'esterno, l'ingobbamento delle piastre, l'imbozzamento dei tubi compressi secondo le generatrici, lo sbandamento laterale di un'altra trave inflessa;
- Instabilità di un elemento di una struttura, per esempio di tutto il corrente compresso di un ponte a travatura reticolare aperto superiormente;
- Instabilità di un elemento di una struttura, per esempio di un'asta compressa in una travatura reticolare;
- Instabilità di una parte di un elemento di una struttura, per esempio di una delle lamiere componenti un'asta metallica.

### d) Configurazioni diverse di equilibrio instabile.

Come, nei casi delle Figure 1.4, 1.5 e 1.6, gli stati di equilibrio della pallina sono diversi a seconda della direzione del movimento che si considera, così in un solido elastico si possono avere diverse possibilità di equilibrio elastico – instabile, indifferente, stabile in maggiore o minore misura – a seconda delle diverse possibili variazioni di forma che si considerano; ma la variazione di configurazione che più interessa è quella per cui l'instabilità si presenta prima che per le altre configurazioni; ed è naturalmente quella configurazione che deve prendersi in esame. Per esempio in una lunga asta compressa assialmente l'inflessione laterale si può avere, a parità di vincoli, in tutte le direzioni, ma si verificherà prima nel piano di flessione nella quale è minimo il momento d'inerzia.

### e) Conseguenze dell'instabilità.

Sono però rari in pratica i casi in cui il fenomeno rimane nel campo puramente elastico. Quando l'equilibrio è instabile, il materiale, avviato rapidamente a sforzi e deformazioni molto grandi, esce dai limiti della legge di Hooke e passa nel campo delle deformazioni permanenti. Qualche volta le parti meno sollecitate della struttura, intervengono ad aiutare quelle più sollecitate, e la struttura trova una nuova forma di equilibrio, qualche altra volta queste riserve statiche mancano o non possono funzionare ed allora l'instabilità dell'equilibrio elastico porta in definitiva alla rovina della struttura, ossia a conseguenze non diverse da quelle di un'eccessiva sollecitazione del materiale, anche se i due fenomeni sono fondamentalmente diversi.

## 1.3 Teorema di Kirchhoff

### a) L'instabilità dell'equilibrio in rapporto alla teoria classica dell'elasticità.

Il primo punto che occorre considerare nello studio dell'equilibrio elastico è la apparente contraddizione fra la possibilità di un equilibrio elastico instabile ed il teorema di Kirchhoff sull'unicità dell'equilibrio elastico, il quale dice che a date forze esplicite applicate ad un solido elastico corrisponde un solo stato di equilibrio elastico, ossia un solo, determinato, stato di deformazione.

L'essere l'equilibrio elastico instabile, significa in sostanza che, sotto l'azione di certe forze, la configurazione attuale del sistema non si mantiene, e l'essere l'equilibrio elastico indifferente significa in sostanza che, sotto l'azione di certe forze, il sistema può assumere in generale infinite configurazioni, mentre il teorema di Kirchhoff asserisce il contrario. Ma la contraddizione subito scompare se si ricorda che nella teoria classica dell'elasticità si considera come nota la

distribuzione delle forze di massa e di superficie nel corpo già deformato per effetto delle forze stesse e si cerca lo spostamento subito da ogni punto in tale deformazione oppure, meno frequentemente, si fa il cammino inverso, ossia si assume come nota la distribuzione degli spostamenti e se ne deduce quella delle tensioni. Nell'uno e nell'altro caso quindi le forze di massa e di superficie si considerano applicate al corpo già deformato sotto l'azione delle forze stesse; e tali spostamenti, in quanto sono piccolissimi, non influiscono sulle sollecitazioni (momento flettente, ecc.).

Il problema dell'equilibrio elastico si presenta invece nella pratica in modo diverso in quanto le forze – o i vincoli – sono riferite alla condizione iniziale del corpo; e quindi può darsi che gli spostamenti conseguenti alle forze applicate siano tali da influire sulle sollecitazioni, come infatti avviene.

In altra forma meno rigorosa ma più intuitiva si può dire che il teorema di Kirchhoff, come tutta la teoria classica dell'elasticità vale per spostamenti infinitesimi, mentre l'instabilità dell'equilibrio elastico può portare a spostamenti non piccolissimi e quindi è un problema al di fuori di quel campo in cui vale il teorema di Kirchhoff.

# CAP.2 – La stabilità dell'equilibrio elastico nella tecnica.

---

## 2.1 Generalità

L'importanza pratica dello studio della stabilità dell'equilibrio elastico sta nel fatto che per instabilità elastica si può avere il collasso di strutture nelle quali le tensioni unitarie sono ancora molto basse e lontane dai limiti di solito ammissibili.

Un'idea di ciò si può avere prendendo con le mani e tirando un foglio di carta per gli estremi: la resistenza a trazione è notevole.

Se invece sempre tenendolo per gli estremi, si cerca di comprimere il foglio, la sua resistenza è addirittura nulla. Nelle costruzioni non si giunge ad un caso limite come questo, ma qualche volta fra i carichi che producono la rottura per trazione e quelli che producono il collasso per instabilità elastica vi è un rapporto uguale a 100, 200 e più.

La possibilità di fenomeni di instabilità elastica sono particolarmente frequenti nelle costruzioni metalliche dove il progredire della tecnica della progettazione e l'elevarsi dei carichi di sicurezza in dipendenza dell'uso di acciaio speciali hanno fatto diminuire le dimensioni delle sezioni resistenti; ma anche nel cemento armato, con il diffondersi delle volte sottili, essa non è più rarissima.

### a) Instabilità elastica e impossibilità elastica.

Il più frequente nella tecnica, è il caso della instabilità elastica propriamente detta.

Consideriamo, per fissare le idee, la trave della Figura 1.7 supponendo che essa si comporti sempre elasticamente quando la forza  $\mathbf{N}$  cresce gradualmente e lentamente dal valore zero. Sino a che  $\mathbf{N}$  è piccola, la trave si mantiene rettilinea perché ritorna subito spontaneamente alla configurazione  $\mathbf{AB}'$  se una causa qualunque la fa incurvare. Quando



invece  $N$  raggiunge e supera il valore critico, si presenta – oltre il preesistente accorgimento – una nuova deformazione – un incurvamento – a cui consegue una nuova sollecitazione – la flessione – che si aggiunge a quella preesistente di compressione. Con questa nuova deformazione la forza esterna compie un lavoro esterno più grande di quello che avrebbe fatto continuando con la prima deformazione; ossia, appena le reazioni elastiche interne non sono più sufficienti ad impedirlo, la forza esterna induce un nuovo stato di deformazione e sollecitazione con il quale riesce a compiere un maggior lavoro esterno, e, poiché il lavoro esterno è uguale al potenziale elastico, si può dire più in generale che il solido tende ad assumere il maggior potenziale elastico possibile adattandosi ad una nuova deformazione che sorge improvvisa quando le forze esterne raggiungono e superano il valore critico al di sotto del quale essa era impedita dalla rigidità del solido. La configurazione secondaria stabile è poi quella per cui è minima l'energia potenziale totale.

In altri casi invece le cose vanno diversamente. Per esempio un tubo circolare a parete sottile, soggetto ad un momento flettente crescente gradualmente dal valore zero, si ovalizza gradatamente.

Questi casi di impossibilità elastica sono essenzialmente diversi dai precedenti perché si preparano progressivamente col graduale diminuire della attitudine del solido ad opporsi alla deformazione e non si presentano improvvisamente come quelli. Inoltre mentre nei casi di instabilità elastica vi è la possibilità di ulteriori stati di equilibrio stabile per altre configurazioni, questa possibilità manca nei casi di impossibilità.

Studieremo qui il caso dell'instabilità elastica quale si presenta nei solidi elastici perfettamente omogenei, senza difetti di costruzione, con carichi esterni centrati, ecc. Nella pratica poi i difetti di costruzione, le eccentricità dei carichi esterni, ed il fatto che ad un certo punto il materiale cessa di comportarsi elasticamente, fanno sì che l'instabilità improvvisa tenda a divenire impossibilità.

## b) Il problema tecnico

È chiaro che l'ingegnere non deve semplicemente indagare se l'equilibrio elastico è stabile o no, ma deve valutare quantitativamente la stabilità dell'equilibrio elastico. Di solito si cerca così il sistema di forze esterne più piccole (carichi critici) per cui l'equilibrio elastico diventa instabile, e si sottopone la struttura a forze che siano una parte ( $1/5 \div 1/10$ ) di tali carichi critici.

Lo studio dell'equilibrio elastico dal punto di vista tecnico consiste quindi essenzialmente nella ricerca dell'equilibrio indifferente, ossia nella determinazione dei carichi critici, cioè delle forze esterne più piccole in valore assoluto che rendono instabile l'equilibrio.

# CAP. 3 – Trave compressa con carico trasversale e forza normale

---

## 3.1 Generalità

Nelle teorie della trave le forze interne potrebbero essere determinate con una buona approssimazione, senza tener conto dello stato deformato della trave. Se però in un'asta compressa, per uno spostamento trasversale cambia la posizione della sezione rispetto alla forza normale, si introduce un momento flettente. Questo processo può portare all'instabilità dell'asta, se la forza normale è sufficientemente grande. Il problema di base di un'asta con rigidità elastica a flessione caricata da una forza concentrata nella sezione d'estremità è stato trattato da **Eulero (1644)**, che ha sviluppato un'analisi molto ampia e generale di questo particolare problema.

Spesso la forza normale è un effetto o ad altri effetti come il carico trasversale o la flessione per momenti applicati. Gli elementi strutturali snelli, dove la forza normale appare insieme ad altri effetti, sono gli elementi che possono perdere la loro stabilità sotto particolari condizioni di intensità della forza normale e per la loro snellezza. Per un carico di compressione sufficientemente grande, quindi, si potrebbe realizzare un cosiddetto stato di riduzione di rigidezza flessionale che conduce l'asta compressa ad una deformazione non controllata tipica della instabilità.

Il classico problema della colonna compressa consiste nella determinazione dei carichi critici, per i quali si verifica l'instabilità, e nella determinazione delle forme di instabilità associate. In pratica le colonne non sono idealmente diritte e il carico non è solo assiale. L'instabilità delle colonne reali è quindi un processo graduale, in cui gli spostamenti aumentano e tendono a diventare praticamente senza limiti

ai carichi critici. L'entità degli spostamenti prima di raggiungere il carico critico è determinata dalle imperfezioni della geometria iniziale e dai carichi di flessione, che causano la curvatura iniziale. Il ruolo delle imperfezioni può essere quindi determinante per la valutazione della capacità di carico. La teoria presentata di seguito è essenzialmente lineare. Questa teoria è alla base del calcolo dell'analisi di stabilità di elementi compressi anche in cemento armato.

La base della teoria travi-colonne elastiche è costituita dalle equazioni di equilibrio, formulate per lo stato deformato della trave. La Figura 3.1 mostra lo stato deformato di una trave con carico trasversale distribuito  $p(x)$ . Gli spostamenti, ed in particolare le rotazioni dovute ai gradienti di spostamento, sono assunti come piccoli, e quindi non verrà fatta alcuna distinzione tra l'incremento di lunghezza  $ds$  lungo l'asse nello stato deformato e la sua proiezione  $dx$  sulla linea dell'asse iniziale. La figura mostra: un elemento di lunghezza  $ds \approx dx$ , le forze e i momenti che agiscono su di esso.

Si noti che nell'attuale formulazione della teoria trave-colonna linearizzata la forza normale  $N$  è presa come componente lungo la direzione dell'asse della trave originale, e la forza di taglio  $Q$  è in una direzione normale a questa.

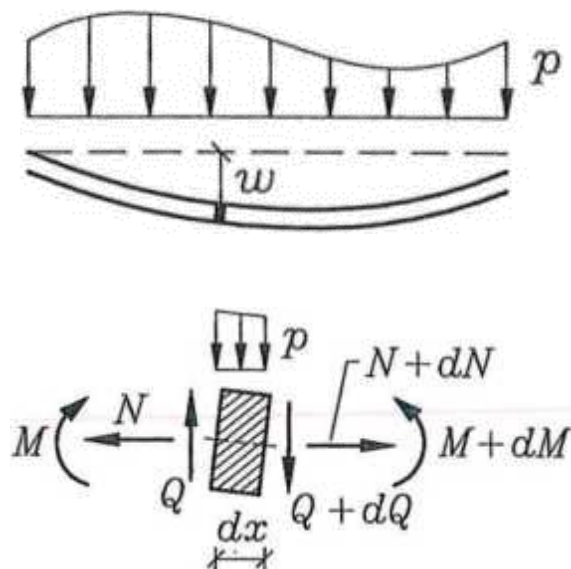


Figura 3.1: Equilibrio della trave deformata.

## 3.2 Analisi della trave

Con l'attuale definizione di forza di taglio e di forza normale solo la forza di taglio  $Q$  contribuisce all'equilibrio trasversale, dove la somma dei contributi interni ed esterni è:

$$(Q + dQ) - Q + p dx = 0 \quad (3.1)$$

I termini  $\pm Q$  si eliminano, e la divisione per  $dx$  porta alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dQ}{dx} = -p \quad (3.2)$$

Per l'equilibrio dell'elemento deformato, la forza di taglio  $Q$  contribuisce come coppia di forze con la distanza  $dx$ , e la forza normale  $N$  contribuisce come coppia di forze con la distanza  $dw$ . Da cui l'equazione dell'equilibrio:

$$(M + dM) - M + N dw - Q dx = 0 \quad (3.3)$$

Elimino  $\pm M$  e la divisione per  $dx$  porta all'equazione differenziale:

$$\frac{dM}{dx} + N \frac{dw}{dx} = Q \quad (3.4)$$

Le due equazioni differenziali di primo ordine (3.2) e (3.4) devono essere soddisfatte indipendentemente dalle proprietà del materiale della trave. La forza di taglio può essere eliminata, ottenendo la seguente equazione differenziale di secondo ordine:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( N \frac{dw}{dx} \right) + p = 0 \quad (3.5)$$

Questa equazione differenziale contiene il momento  $\mathbf{M}$ , la forza normale  $\mathbf{N}$  e la derivata dello spostamento  $\mathbf{dw}/\mathbf{dz}$ . È quindi necessario esprimere il momento  $\mathbf{M}$  in termini di deformazione della trave.

Nella teoria linearizzata della trave, la rotazione della sezione trasversale  $\theta$  e la curvatura dell'asse della trave  $\mathbf{k}$ , sono state introdotte come:

$$\theta = -\frac{dw}{dx} \quad , \quad \mathbf{k} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.6)$$

La relazione tra il momento  $\mathbf{M}$  e la curvatura  $\mathbf{k}$  non è modificata dalla presenza della forza normale, e quindi il momento è espresso in termini di rigidezza a flessione  $\mathbf{EI}$  e la curvatura

$$\mathbf{M} = \mathbf{EI} \mathbf{k} = -\mathbf{EI} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.7)$$

Quando questa espressione viene sostituita nella (3.5), si ottiene la seguente equazione di quarto ordine per la trave complessa elastica.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \mathbf{EI} \frac{d^2w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( \mathbf{N} \frac{dw}{dx} \right) - \mathbf{p} = 0 \quad (3.8)$$

Di seguito viene considerata la forza normale  $\mathbf{N}$  come parametro o funzione nota, e quindi l'equazione differenziale trave-colonna (3.8) è lineare. L'equazione trave-colonna (3.8) è lineare. Queste condizioni al contorno possono essere sia cinematiche, quando espresse in termini di spostamento  $\mathbf{w}$  e di rotazione della sezione trasversale  $\theta$ , sia statiche, quando espresse in termini di momento  $\mathbf{M}$  e di forza di taglio  $\mathbf{Q}$ .

Nel caso di condizioni al contorno statiche il momento e la forza di taglio sono espressi in termini di spostamento utilizzando le relazioni (3.7) e (3.4), rispettivamente:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{EI} \frac{d^2w}{dx^2} \quad , \quad \mathbf{Q} = -\frac{d}{dx} \left( \mathbf{EI} \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \mathbf{N} \frac{dw}{dx} \quad (3.9)$$

Per  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  e condizioni al contorno omogenee l'equazione trave-colonna può determinare valori critici  $\mathbf{N}_c$  corrispondenti all'instabilità. Questi valori critici corrispondono alla compressione, cioè  $\mathbf{N}_c < \mathbf{0}$ .

L'equazione (3.8) può essere utilizzata in due contesti: equazione della trave, in cui la presenza della forza normale modifica la soluzione dell'equazione ordinaria di flessione della trave; o nella soluzione di un problema della colonna omogenea senza flessione, in cui la forza normale viene trattata come un parametro sconosciuto che può raggiungere un valore critico d'instabilità:

$$\mathbf{P}_E = EI \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2 \quad (3.10)$$

Questo particolare carico è chiamato carico di Eulero, un riferimento al lavoro originale di Eulero sulle colonne. Nei problemi delle colonne è spesso conveniente considerare le forze assiali di compressione come positive. Questo viene gestito introducendo la notazione  $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$ , dove  $\mathbf{P}$  indica una forza assiale con valori positivi corrispondenti alla compressione.

### 3.3 Colonna ideale compressa

Il carico di Eulero, può essere identificato direttamente, senza applicare un carico trasversale. L'idea è di considerare una colonna idealmente diritta come mostrato in Figura 3.2. Si applica quindi un carico assiale di compressione  $\mathbf{P} = -\mathbf{N} > \mathbf{0}$ . In questo modo la colonna diventa leggermente più corta, ma nella maggior parte dei casi di interesse pratico, questo accorciamento non è importante. Il punto principale è che, poiché la colonna è idealmente diritta e non c'è un carico trasversale, rimarrà diritto sotto un carico assiale limitato.

Se il carico assiale viene aumentato, si raggiunge una grandezza  $\mathbf{P}_E$ , alla quale esistono due soluzioni: una configurazione rettilinea, e una

forma inflessa come mostrato in Figura 3.2. Questo problema ha la struttura di un problema di auto valori e il carico critico  $P_E$  associato si trova come auto valore.

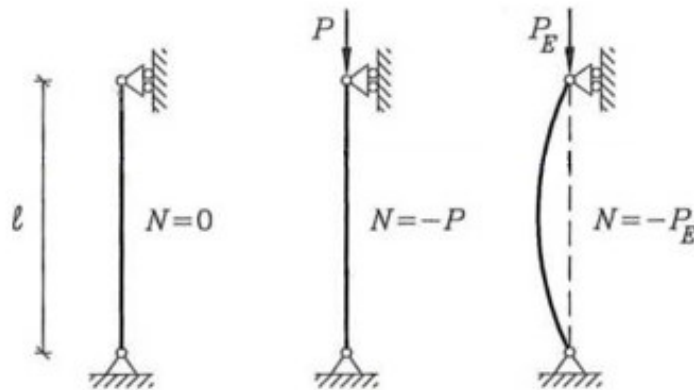


Figura 3.2: La colonna di Eulero.

Si consideri una colonna di lunghezza  $\ell$  e rigidità a flessione costante  $EI$ . Non c'è carico trasversale, e l'equazione differenziale (3.8) è convenientemente scritta nella forma normalizzata:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{k^2 d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.11)$$

Dove il parametro  $k$  viene introdotto tramite il quadrato:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (3.12)$$

La soluzione generale a questa equazione differenziale omogenea di quarto ordine è la seguente:

$$w(x) = C_1 + C_2 kx + C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx) \quad (3.13)$$

In questa forma la coordinata  $x$  appare solo nella combinazione non dimensionale  $kx$ . Il momento e la forza di taglio sono espressi nelle equazioni seguenti, come:



$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{d^2w}{dx^2} = C_3k^2 \cos(kx) + C_4k^2 \sin(kx) \quad (3.14)$$

e

$$\frac{Q(x)}{EI} = -\frac{d^3w}{dx^3} = k^2 \frac{dw}{dx} = -C_2k^3 \quad (3.15)$$

Le condizioni al contorno sono:

$$w(0) = w(\ell) = 0 \quad , \quad M(0) = M(\ell) = 0 \quad (3.16)$$

Si noti che l'equazione differenziale (3.11) e le condizioni al contorno (3.16) sono omogenee. Pertanto, la soluzione sarà  $w(x) \equiv 0$ , ad eccezione di particolari valori del parametro  $k$  che permettono una soluzione non banale. Questi valori  $k_n$  sono gli auto valori, e ad ogni auto valore corrisponde un'autofunzione  $w_n(x)$ . Le autofunzioni proprie descrivono la modalità di deformazione di instabilità. Le condizioni al contorno a  $x = 0$  danno le equazioni

$$w(0) = C_1 + C_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$w''(0) = K^2 C_3 = 0$$

da cui  $C_1 = C_3 = 0$ . Le condizioni al contorno a  $x = \ell$  portano a:

$$w(\ell) = k\ell C_2 + \sin(k\ell) C_4 = 0 \quad (3.18)$$

$$w''(\ell) = -k^2 \sin(k\ell) C_4 = 0$$

Queste equazioni implicano che:

$$k\ell C_2 = 0 \quad , \quad k^2 \sin(k\ell) C_4 = 0 \quad (3.19)$$

La rappresentazione della soluzione generale nella forma (3.13) si basa sull'ipotesi che  $P > 0$ , e quindi  $k\ell > 0$ . Ne consegue quindi dalla

(3.19a), che  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$ . Rimane l'equazione finale (3.19b). Naturalmente questa equazione può essere soddisfatta da  $\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$ , ma ciò ridurrebbe la soluzione a  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ . Una soluzione non banale con  $\mathbf{C}_4 \neq \mathbf{0}$  si trova se per il parametro  $\mathbf{k}$ :

$$\sin(\mathbf{k}\ell) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Questa equazione ha le radici positive per:

$$\mathbf{k}\ell = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad \text{o} \quad \mathbf{k}_n = n \frac{\pi}{\ell}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

A queste radici corrispondono ai carichi assiali:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{E}I\mathbf{k}_n^2 = n^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \mathbf{E}I, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Il più piccolo di questi carichi si chiama carico di Eulero,

$$\mathbf{P}_E = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \mathbf{E}I \quad (3.23)$$

Sotto questo carico, l'asta o la colonna può inflettersi e non rimanere rettilinea, con spostamento trasversale pari a:

$$\mathbf{w}_E(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \sin\left(\pi \frac{\mathbf{x}}{\ell}\right) \quad (3.24)$$

Si noti che lo spostamento trasversale di una trave-colonna con carico trasversale crescerà in modo infinito, se la forza di compressione assiale  $\mathbf{P}$  si avvicina al carico di Eulero  $\mathbf{P}_E$ . Quindi, è come se la colonna perdesse gradualmente la sua rigidità a flessione all'aumentare della forza di compressione.

In generale le modalità di instabilità della colonna di Eulero ed i corrispondenti carichi di instabilità sono dati da:

$$w_n(x) = C_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right), P_n = n^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

I primi tre modi di instabilità sono mostrati nella Figura 3.3. In pratica sarà difficile aumentare il carico oltre il più piccolo carico di instabilità  $P_E$ , se la colonna è sostenuta solo alle estremità.

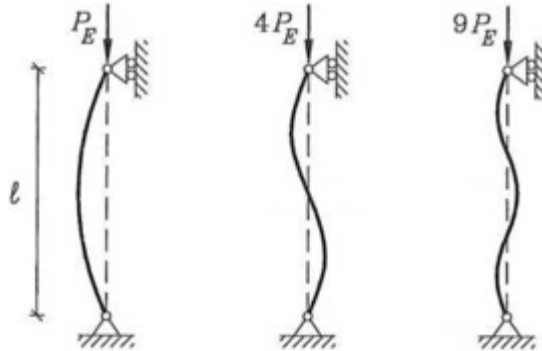


Figura 3.3: Primi tre modi di instabilità della colonna di Eulero.

La teoria della colonna espressa dall'equazione differenziale lineare (3.11) è solo approssimativa. Nella sua derivazione si è assunto che le rotazioni sono "piccole", e che la lunghezza lungo la trave deformata può essere rappresentata dalla sua proiezione,  $ds \approx dx$ . Queste approssimazioni riducono il problema alla forma di un problema di auto valore lineare, ma limitano anche la portata della soluzione all'insorgenza di instabilità, dove la deformazione è piccola. Quindi, la teoria è utile per stabilire un valore di riferimento, come il  $P_E$ , per l'insorgenza dell'instabilità, mentre la descrizione dello sviluppo del carico e degli spostamenti dopo l'insorgenza dell'instabilità richiede una teoria non lineare.

**Esempio 3.1** - Calcolo del carico critico per asta compressa con vincolo di incastro

La Figura 3.4 mostra una colonna di lunghezza  $l$  con un'estremità fissa, che supporta una forza di compressione assiale  $P$  all'estremità libera. La soluzione generale è data dalla (3.13), dove le costanti arbitrarie e il

parametro  $k$  devono essere determinati dalle condizioni al contorno come nel caso della colonna semplicemente supportata trattata sopra.

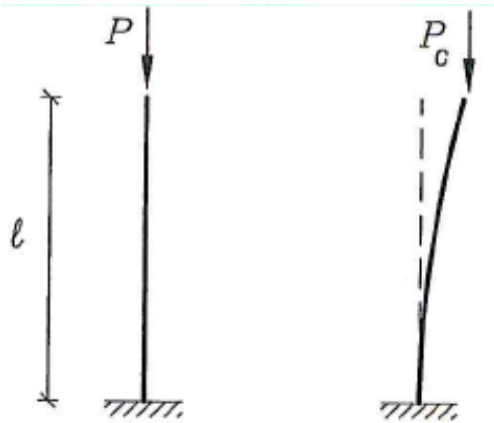


Figura 3.4: Colonna incastrata sotto carico di compressione.

Nel presente problema le condizioni al contorno all'estremità incastrata sono:

$$w(0) = C_1 + C_3 = 0 \quad (3.26)$$

$$w'(0) = kC_2 + kC_4 = 0$$

Queste equazioni consentono di determinare le costanti di integrazione:  $C_3 = -C_1$ ,  $C_4 = -C_2$ , e la soluzione si riduce alla seguente forma:

$$w(x) = C_1[1 - \cos(kx)] + C_2[kx - \sin(kx)] \quad (3.27)$$

Le condizioni al contorno in cima alla colonna sono:  $M(\ell) = 0$  e  $Q(\ell) = 0$ . Per la Eq. (3.15) le condizioni essendo  $Q(\ell) = 0$  si ottiene  $C_2 = 0$ ; e con la Eq. (3.14) per la condizione  $M(\ell) = 0$  si perviene alla seguente espressione:

$$w''(\ell) = k^2 \cos(k\ell) C_1 = 0 \quad (3.28)$$

Da questa equazione gli auto valori sono determinati come:

$$k\ell = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots \quad \text{or} \quad k_n = n \left( \frac{\pi}{2\ell} \right), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.29)$$

Con i seguenti carichi assiali:

$$P_n = EI k_n^2 = n^2 \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^2 EI, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.30)$$

Si può notar che queste modalità corrispondono alle modalità di instabilità simmetrica di una colonna semplicemente appoggiata di lunghezza  $2\ell$  ottenuta, quindi, estendendo la colonna reale simmetricamente al di sotto dell'incastro.

**Esempio 3.2** - Calcolo del carico critico per asta compressa con vincoli di incastro e appoggio.

Nella Figura 3.5 è stato aggiunto un semplice supporto alla colonna dell'esempio precedente. La soluzione generale è data dalla (3.13), e dopo aver imposto le condizioni all'estremità fissa come nell'esempio precedente, la funzione spostamento assume la forma seguente:

$$\mathbf{w}(x) = C_1 [1 - \cos(kx)] + C_2 [kx - \sin(kx)] \quad (3.31)$$

Le condizioni al contorno alla testa per  $x = \ell$  sono  $\mathbf{w}(\ell) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{M}(\ell) = \mathbf{0}$ , per cui:

$$\mathbf{w}(\ell) = [1 - \cos(k\ell)]C_1 + [k\ell - \sin(k\ell)]C_2 = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{w}''(\ell) = k^2 \cos(k\ell) C_1 + k^2 \sin(k\ell) C_2 = \mathbf{0}$$

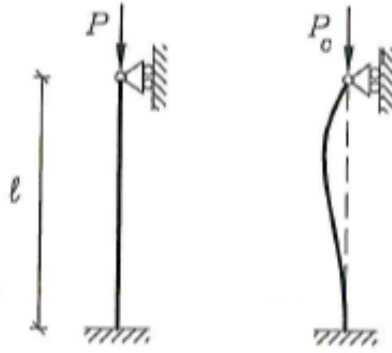


Figura 3.5: Colonna con estremità incastrata e semplicemente appoggiata.

Una soluzione non banale a questo sistema di equazioni lineari può essere ottenuta solo se il determinante del sistema è nullo, cioè se:

$$[1 - \cos(k\ell)] \sin(k\ell) - [k\ell - \sin(k\ell)] \cos(k\ell) = 0 \quad (3.33)$$

Questa equazione può essere riformulata come:

$$\tan(k\ell) = k\ell \quad (3.34)$$

che rappresenta un'equazione trascendentale. Le radici dell'equazione di stabilità trascendentale sono date dalle ascisse  $k_1\ell, k_2\ell, \dots$ . Esse si trovano per iterazione, a partire dai valori in cui  $\tan(k\ell)$  ha un asintoto verticale:

$$k_n^{(0)}\ell = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

Si noti che la radice  $k_0\ell = 0$ , corrispondente a  $k_0^0 = \frac{1}{2}\pi$  è banale e quindi non interessa.

La procedura di iterazione può essere formulata come segue:

$$k_n^{(i+1)}\ell = n\pi + \tan^{-1}(k_n^i\ell) \quad (3.36)$$

Carico di instabilità e lunghezza libera di inflessione di colonne semplici.

Riassumendo quanto introdotto, il carico critico di una colonna ideale semplicemente appoggiata, è dato dal carico di Eulero  $P_E$ :

$$P_E = EI \left( \frac{\pi}{\ell} \right)^2$$

Il carico critico  $P_c$  delle colonne ideali con diverse condizioni di vincolo, può essere espresso in un modo simile in termini di lunghezza libera di inflessione  $\ell_e$  definita in modo tale che:

$$P_E = EI \left( \frac{\pi}{\ell_e} \right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{P_c}{P_E} = \left( \frac{\ell}{\ell_e} \right)^2$$

La lunghezza  $\ell_e$  è la distanza tra i punti di flesso, cioè i punti di cambiamento di curvatura della deformata conseguente alla instabilità.

Nella Figura 3.6 si riassumono alcuni risultati di utile applicazione:

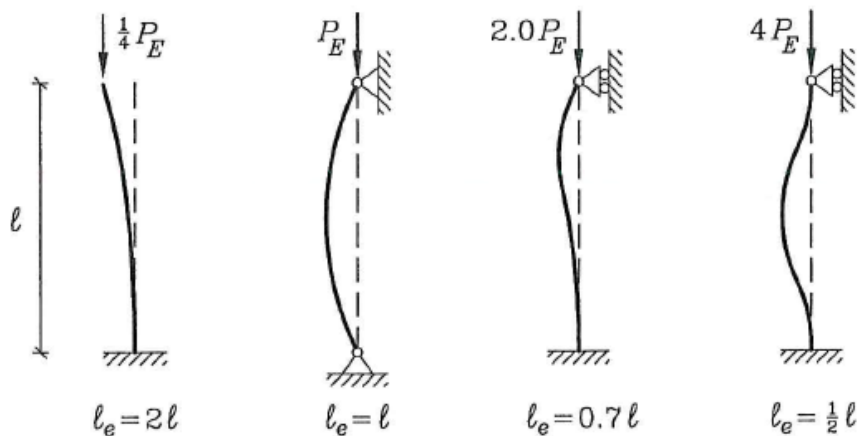


Figura 3.6 - Esempi di carichi di instabilità e lunghezze di libera inflessione

### 3.4 Colonne con imperfezioni

Nella vita reale le colonne non sono idealmente dritte. La Figura 3.7 mostra una colonna in cui la (piccola) deviazione di una linea retta scarica è descritta dalla funzione  $w_0(x)$ . La lunghezza della colonna è  $\ell$  e la rigidezza a flessione costante  $EI$ . Quando viene caricata da una forza di compressione assiale  $P$ , come mostrato in Figura 3.7, si verifica un ulteriore spostamento trasversale  $w(x)$ . Il momento è determinato da:

$$M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.37)$$

L'effetto della forza normale è espressa attraverso lo spostamento totale  $w(x) + w_0(x)$  e quindi l'equazione di equilibrio diventa:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( N \frac{dw + dw_0}{dx} \right) = 0 \quad (3.38)$$

Per la forza assiale costante e la rigidità a flessione questa equazione può essere scritta:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = -k^2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (3.39)$$

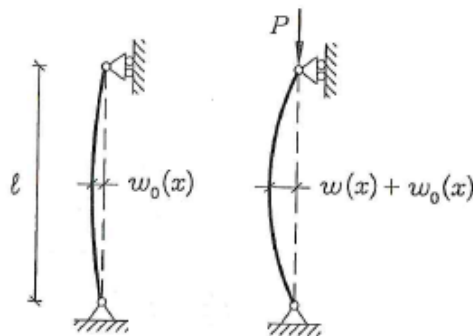


Figura 3.7: La colonna di Eulero con imperfezione iniziale  $w_0(x)$ .



dove il parametro  $\mathbf{k}^2 = \frac{P}{EI}$  è stato introdotto nella (3.12). Le condizioni al contorno sono  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}(\ell) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(\ell) = \mathbf{0}$ .

Si vede che l'imperfezione iniziale  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$  è un termine non omogeneo nell'equazione della colonna, e quindi il problema della colonna imperfetta non è un problema di auto valore. La soluzione completa dell'equazione differenziale non omogenea (3.39) si ottiene rappresentando  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  come espansione in serie in termini di autofunzioni dell'equazione omogenea corrispondente. La rappresentazione in serie dello spostamento  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  assume quindi la forma:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{w}_n \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{k}_n = n \frac{\pi}{\ell} \quad (3.40)$$

La sostituzione di questa equazione di equilibrio non omogenea nella (3.39) dà:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{k}_n^4 - \mathbf{k}^2 \mathbf{k}_n^2) \mathbf{w}_n \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{x}) = -\mathbf{k}^2 \frac{d^2 \mathbf{w}_0}{d\mathbf{x}^2} \quad (3.41)$$

I coefficienti di spostamento  $\mathbf{w}_n$  sono determinati rappresentando l'imperfezione iniziale  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$  come una serie simile alla (3.40) per la  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ .

$$\mathbf{w}_0(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{w}_n^0 \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{k}_n = n \frac{\pi}{\ell} \quad (3.42)$$

I coefficienti  $\mathbf{w}_n^0$  sono determinati utilizzando la relazione di ortogonalità per la funzione sinusoidale come:

$$\mathbf{w}_n^0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{k}_n \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{n} = 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Quando l'espansione della serie (3.42) per  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$  viene sostituita nella (3.41), i coefficienti di spostamento si trovano così:

$$\mathbf{w}_n = \frac{\mathbf{w}_n^0}{\frac{k_n^2}{k^2} - 1} = \frac{\mathbf{w}_n^0}{\frac{P_n}{P} - 1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.44)$$

Questo risultato mostra che per aumentare la tensione,  $P \rightarrow -\infty$ , la colonna diventa sempre più diritta,  $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{0}$ . Se una forza di compressione  $P > 0$  si avvicina ad uno dei qualsiasi carichi di instabilità  $P_n$ , il valore corrispondente dell'imperfezione iniziale viene amplificato. In linea di principio si ottiene un'amplificazione infinita, quando  $P = P_n$ .

La presente analisi è stata applicata al caso particolare di una colonna semplicemente supportata. Tuttavia, il metodo di espansione sia della funzione di spostamento sconosciuto  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  che della funzione di imperfezione iniziale  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$  in termini di modalità di instabilità del corrispondente problema omogeneo corrispondente ad una colonna diritta ideale, è valido anche per altre condizioni al contorno, e in ogni caso le modalità di instabilità soddisfano anche un'adeguata relazione di ortogonalità. Questo porta alla conclusione generale, che l'applicazione di un carico di compressione assiale  $P$  su una colonna imperfetta porterà all'amplificazione dei contributi dei diversi componenti della modalità di instabilità nella funzione iniziale di imperfezione  $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$ . In pratica, la componente dell'imperfezione corrispondente alla prima modalità di instabilità dominerà più spesso la deformazione. Questo porta ad una procedura di progettazione della colonna descritta nell'esempio seguente.

### **Esempio 3.3** – Considerazione di una particolare colonna imperfetta

Si consideri un caso particolare della colonna imperfetta semplicemente supportata della Figura 3.7 in cui l'imperfezione consiste in una singola mezza onda sinusoidale di ampiezza  $\mathbf{w}_1^0 = \mathbf{e}$ . Ne consegue dalla (3.44) che un carico assiale  $P$  dà lo spostamento trasversale:

$$w(x) = \frac{e}{\frac{P_E}{P} - 1} \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (3.45)$$

dove il carico di Eulero è stato introdotto nella (3.23) come  $P_E = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 EI$ . Il momento nella colonna segue dalla (3.37) come:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{e}{\frac{P_E}{P} - 1} \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \quad (3.46)$$

I primi elementi sono riconosciuti come il carico di Eulero  $P_E$ , per cui:

$$M(x) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_E}} P e \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) = \frac{M_0(x)}{1 - \frac{P}{P_E}} \quad (3.47)$$

Questo risultato mostra, che il momento effettivo di una colonna con un'imperfezione iniziale della forma della prima modalità di instabilità, si ottiene come momento  $M_0(x)$  del carico assiale e dell'imperfezione iniziale, moltiplicato per un fattore di amplificazione  $1/(1 - P/P_E)$ . Questo fattore di amplificazione è presente dell'Esempio 3.1.

La progettazione ingegneristica delle colonne si basa sull'idea che la colonna abbia un'imperfezione iniziale, e il momento generato dall'imperfezione amplificata viene poi incluso tra le forze di sezione incluse nel progetto. Un valore rappresentativo dell'imperfezione è ottenuto da esperimenti precedenti e solitamente specificato nel codice di progetto. Un valore tipico per le colonne in acciaio è  $e \simeq 0.003\ell$ .

# CAP. 4 – Instabilità elementi in C.A.

---

## 4.1 Generalità

Il problema della instabilità è diventato sempre più rilevante con la riduzione delle sezioni dei pilastri e con l'aumento contestuale delle snellezze.

Per questo motivo è necessario oggi approfondire il tema delle aste snelle anche nell'ambito delle costruzioni in cemento armato. Rispetto al caso delle costruzioni in acciaio la trattazione è più complessa perché alla non linearità geometrica che caratterizza la teoria del II ordine, si aggiungono due altre cause di non linearità, quella conseguente alla fessurazione del cls teso e quella conseguente allo scorrimento viscoso del cls sottoposto a carichi di lunga durata.

Il primo modo di verificare la stabilità degli elementi compressi in c.a. è stato quello di del “metodo  $\omega$ ” formulato per gli elementi in acciaio. La quasi totalità delle nuove normative nel c.a. ha completamente abbandonato la filosofia sulla quale si basava il metodo  $\omega$ , cioè il metodo d'instabilità elastico del c.a..

Le critiche principali che si possono formulare contro tale metodo sono legate al fatto che il metodo d'instabilità elastico del c.a. è basato sull'ipotesi di materiale elastico lineare: il parametro  $\lambda$  (snellezza) non è sufficientemente significativo poiché è calcolato con sezione totalmente reagente; non si tiene conto dell'effetto viscoso; non si tiene conto del comportamento non lineare del materiale.

Nel seguito si descrivono sia il classico metodo  $\omega$  che i modelli più affidabili per la verifica allo stato limite di instabilità.

## 4.2 Metodo d'instabilità elastico del c.a.

Quando il calcolo delle strutture in c.a. è svolto con il metodo delle tensioni ammissibili le norme tecniche suggeriscono il cosiddetto metodo  $\omega$  noto originariamente per le strutture metalliche.

### a) PRESSIONE CENTRATA

$$N_c = \omega N \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{N_c}{A_i} = \omega \frac{N}{A_i} \quad (4.1)$$

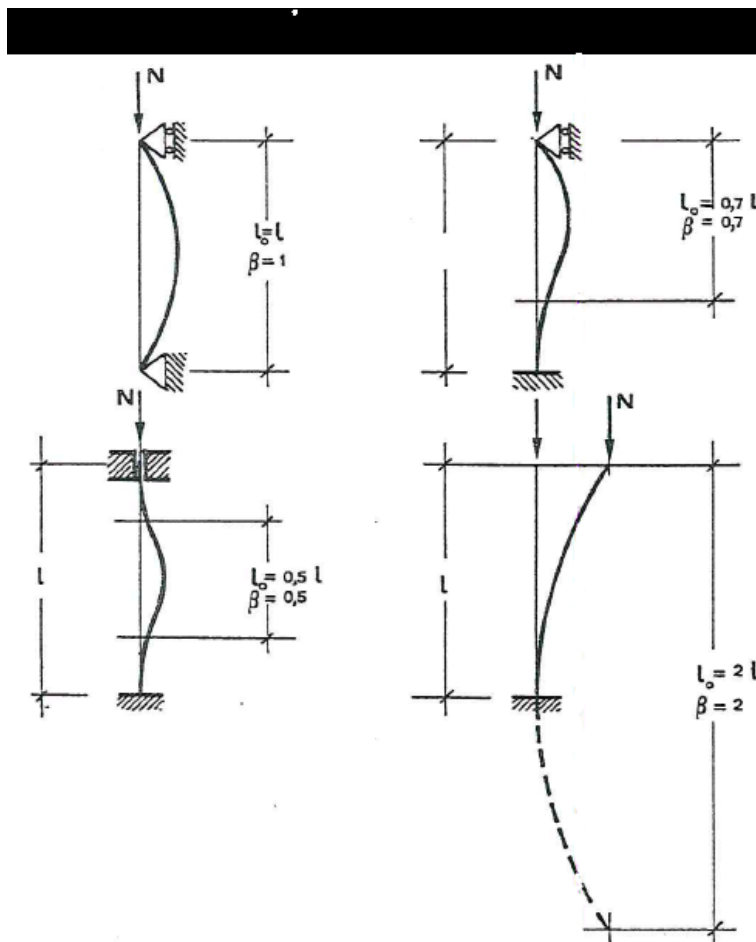


Figura 4.1 - Pressione centrata su pilastro

Il coefficiente  $\omega$  di amplificazione dei carichi, è funzione del coefficiente di snellezza:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} \quad (4.2)$$

In cui  $\ell_0$  = lunghezza libera di inflessione del pilastro è pari alla distanza tra due flessi consecutivi delle deformate.

Il valore di  $\ell_0$  dipende dai vincoli d'estremità del pilastro e quindi dal coefficiente  $\beta$  (vedi Figura 4.2).

$$\rho = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} \quad (4.3)$$

Sarà il raggio d'inerzia della sezione trasversale nel piano d'instabilità con  $I_i$  e  $A_i$  momento d'inerzia ed area omogeneizzata.

Le norme italiane danno per  $\omega$  i valori riportati nelle tabella:

TABELLA 4.1

$\lambda$	$\omega$
50	1,00
70	1,08
85	1,32
100	1,62
120	2,28
140	3,00

Dalla quale si vede come la verifica d'instabilità interessa per valori di  $\lambda > 50$ .

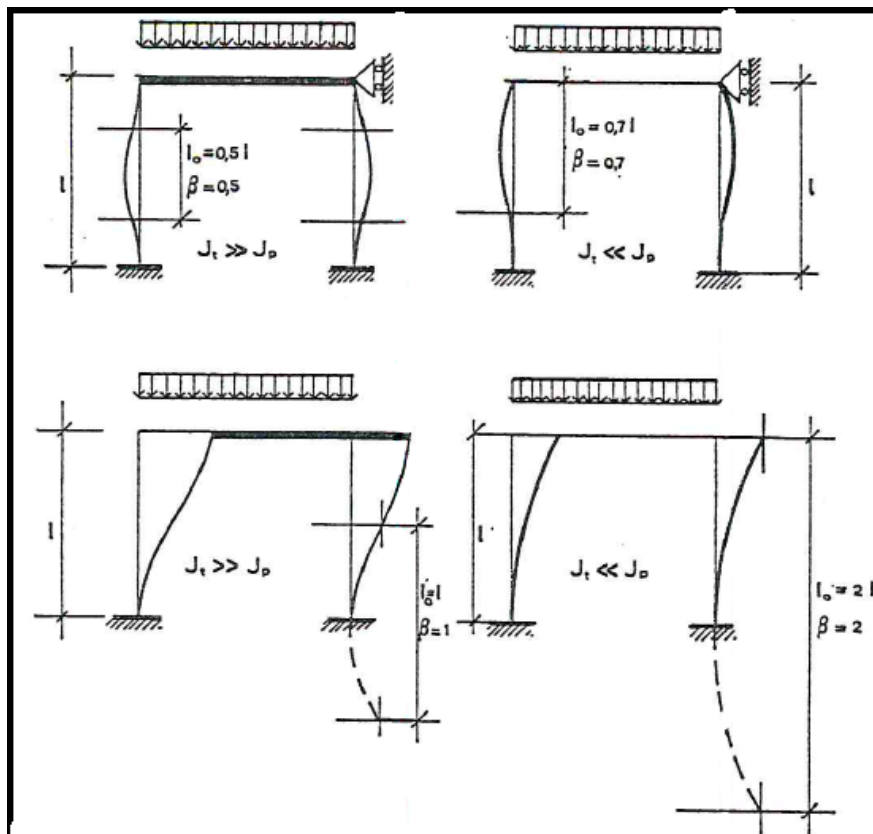


Figura 4.2 – Comportamento dei pilastri con carico applicato

**N.B.:** Negli edifici in c.a., il problema è la scelta del coefficiente  $\beta$  collegato alle condizioni di vincolo. Non risulta conveniente scendere al di sotto di 0,8. Se si prevedono degli spostamenti orizzontali,  $\beta$ , è compreso tra 1 e 2 con valori tanto più vicini ad 1 quanto più i vincoli di estremità sono rigidi.

## b) PRESSIONE ECCENTRICA

Se lo sforzo normale è eccentrico si verifica l'instabilità progressiva. Secondo le N.T.I. le formule di verifica prevedono lo sforzo normale e la flessione incrementata:

$$N_c = \omega N ; M_c = c M \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_E}} \quad (4.4)$$

(coefficiente di amplificazione)

Dove

$$N_E = \frac{\pi^2 E_c^* I}{\ell_0^2} \quad (4.5)$$

È il carico critico di Eulero per la snellezza relativa al piano di flessione nel quale si assume un modulo di elasticità del conglomerato ridotto:

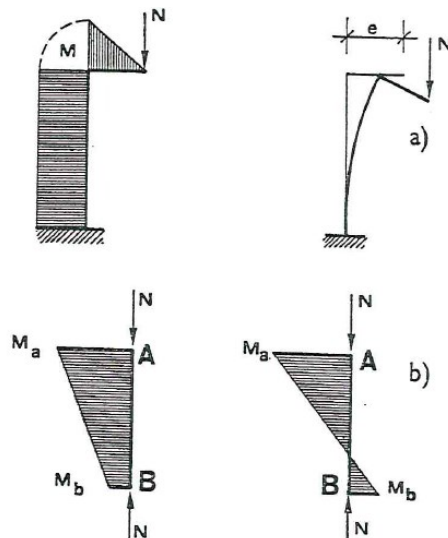
$$E_c^* = 0,4 E_c \quad \Rightarrow \quad N_E = 3,94 \frac{E_c I}{\ell_0^2} \quad (4.6)$$

Per pilastri vincolati solo alla base, ad esempio una pila da ponte incastrata al blocco di fondazione e libera in cima,  $\mathbf{M}$  è il momento massimo;

Per pilastri vincolati alle due estremità, se il momento varia linearmente tra i valori estremi  $\mathbf{M}_a$  e  $\mathbf{M}_b$ , come avviene nei pilastri di un telaio, il calcolo va fatto per il momento:

$$M = \sqrt{0,3(M_a^2 + M_b^2) + 0,4M_a M_b} \quad (4.7)$$

Nella verifica a pressoflessione, in luogo di  $\mathbf{N}_c$  va considerato  $\mathbf{N}$ , se più sfavorevole.





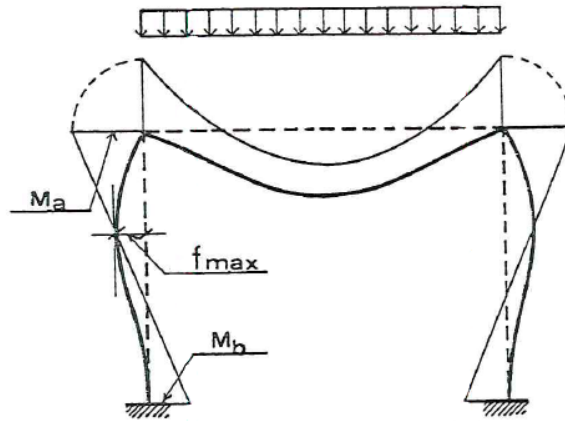


Figura 4.3 – Diagramma del momento nella verifica della pressoflessione

### 4.3 Instabilità delle aste compresse e pressoinflesse – teoria elastica lineare

Facendo riferimento ad un'asta compressa ideale di materiale perfettamente elastica sottoposta a compressione semplice (Figura 4.4) si studia la stabilità dell'equilibrio considerando una configurazione perturbata. Si ha quindi un'uguaglianza fra momento cosiddetto esterno ed interno:

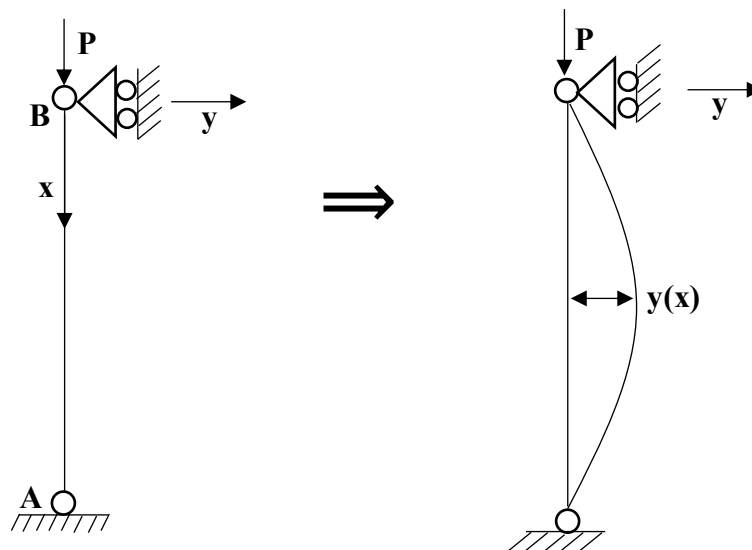


Figura 4.4 – Asta elastica sottoposta a compressione semplice

$$M_{\text{int}} = -EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (\text{eq. Lineare elastica}) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = \mathbf{P} \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Ottenendo un'equazione differenziale di 2° ordine:

$$\mathbf{EI} \frac{\mathbf{d}^2 \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\mathbf{d}\mathbf{x}^2} + \mathbf{P} \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

(\*) Questo paragrafo riguarda i richiami della teoria della stabilità di un'asta compressa secondo i concetti della teoria di Eulero.

Ponendo:

$$\alpha^2 = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{EI}} \quad ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{EI}}} \Rightarrow \frac{\mathbf{d}^2 \mathbf{y}}{\mathbf{d}\mathbf{x}^2} + \alpha^2 \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Soluzione di un'equazione differenziale alle derivate totali a coefficienti costanti, omogenee, è data dalla funzione:

$$\mathbf{y} = \ell_1 \mathbf{e}^{\lambda_1 \mathbf{x}} + \ell_2 \mathbf{e}^{\lambda_2 \mathbf{x}} + \dots + \ell_n \mathbf{e}^{\lambda_n \mathbf{x}} \quad (4.12)$$

Essendo  $\lambda_i$  le radici reali (o immaginarie) dell'equazione caratteristica ottenuta considerando al posto della derivata  $\mathbf{y}^{(i)}$  la costante  $\lambda^{(i)}$ .

Sono note le relazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{i\alpha \mathbf{x}} = \mathbf{cos}\alpha \mathbf{x} + i \mathbf{sin}\alpha \mathbf{x} \\ \mathbf{e}^{-i\alpha \mathbf{x}} = \mathbf{cos}\alpha \mathbf{x} - i \mathbf{sin}\alpha \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.13)$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{y}'' + \alpha^2 \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^2 + \alpha^2 = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha \sqrt{-1} = \pm i\alpha$$

Soluzione dell'equazione differenziale risulta:

$$\begin{aligned}
y &= \ell_1 e^{-\alpha i x} + \ell_2 e^{\alpha i x} = \\
&= \ell_1 (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) + \ell_2 (\cos \alpha x + i \sin \alpha x) = \\
&= \ell_1 \cos \alpha x - \ell_1 i \sin \alpha x + \ell_2 \cos \alpha x + \ell_2 i \sin \alpha x = \\
&= (\ell_1 + \ell_2) \cos \alpha x + (i \ell_2 - i \ell_1) \sin \alpha x = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:

Per:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \tag{4.16}$$

Per:

$$x = \ell, \quad y = A \cos \alpha \ell + B \sin \alpha \ell = 0 \tag{4.17}$$

Il sistema delle due equazioni che contiene le incognite **A, B** risulta omogeneo; quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha \ell & \sin \alpha \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

Ammette soluzione non banale per  $\text{Det.}(\text{Coeff})=0$

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sin \alpha \ell - 0 \cos \alpha \ell = 0 \\
& \sin \alpha \ell = 0 \\
& \alpha \ell = m\pi, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

Poiché:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{4.20}$$

Si ricava che:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m\pi}{\ell} \\ \alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \end{cases} \Rightarrow P_{CR,m} = EI \alpha_m^2 = EI \frac{m^2 \pi^2}{\ell^2} \quad (4.21)$$

Il più basso carico critico è pari a:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (\text{carico critico di Eulero}) \quad (4.22)$$

La forma non omogenea dell'equazione differenziale che regola il fenomeno della stabilità di cui asta pressoinflessa, chiarisce la natura completamente diversa dello schema rispetto all'asta compressa.

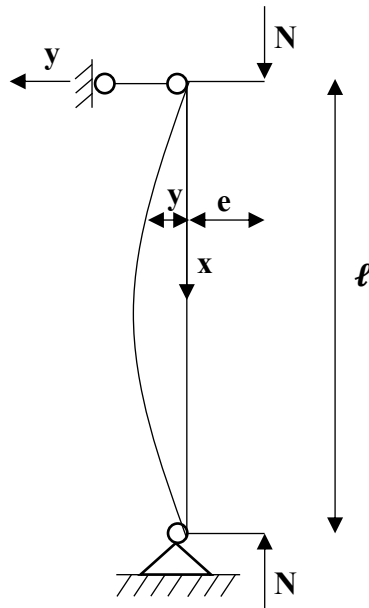


Figura 4.5 – Asta pressoinflessa

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = +N(e + y) ; \quad EI y'' = -Ne - Ny \quad (4.23)$$

Ponendo:

$$y'' = -\frac{N}{EI} e - \frac{N}{EI} y ; \quad \alpha^2 = \frac{N}{EI} \quad (4.24)$$

Si ha:

$$y'' = -\alpha^2 e - \alpha^2 y \Rightarrow y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e \quad (4.25)$$

- L'equazione differenziale dell'omogenea associata presenta una soluzione nota:

$$y_0 = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (4.26)$$

- L'integrale particolare risulta  $y_p = -e$ , infatti:

$$y_p'' = 0 ; \quad -\alpha^2 e = -\alpha^2 e \quad (4.27)$$

Pertanto l'integrale generale risulta:

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x - e \quad (4.28)$$

Determinazione delle costanti di integrazione **A** e **B**. Si pone per:

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow A = e \quad (4.29)$$

E per:

$$x = \ell, y = 0 \Rightarrow A \cos \alpha \ell + B \sin \alpha \ell - e = 0 \quad (4.30)$$

Il sistema che si ricava è il seguente:

$$\begin{cases} A = e \\ A \cos \alpha \ell + B \sin \alpha \ell = e \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha \ell & \sin \alpha \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

In definitiva si ricava che:

$$B = \frac{e(1 - \cos \alpha \ell)}{\sin \alpha \ell} ; A = e \quad (4.32)$$

Integrale generale:

$$\begin{aligned} y &= e \cos \alpha x + \frac{e(1 - \cos \alpha \ell)}{\sin \alpha \ell} \sin \alpha x - e \\ &= e \left[ \cos \alpha x + \frac{(1 - \cos \alpha \ell)}{\sin \alpha \ell} \sin \alpha x - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

La forma massima si ha per:

$$(y_{\max}) x = \frac{\ell}{2} \quad (4.34)$$

Quindi:

$$y_{\max} = e \left[ \cos \alpha \frac{\ell}{2} + \frac{(1 - \cos \alpha \frac{\ell}{2})}{\sin \alpha \ell} \sin \alpha \frac{\ell}{2} - 1 \right] \quad (4.35)$$

Il valore del momento massimo è quindi dato da:

$$\mathbf{M}_{\max} = \mathbf{N}(y_{\max} + e) = \mathbf{N}(e k_1 + e) = \mathbf{N}e(k_2) \quad (4.36)$$

**N.B.:** Il coefficiente di amplificazione può anche essere sostituito dall'espressione approssimata:

$$\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N}_E}} \quad (4.37)$$

Quindi, nell'ambito delle verifiche di stabilità delle aste pressoinflesse è necessario anche tener conto di un coefficiente di amplificazione del momento.

## 4.4 Problemi e modelli per l'instabilità

- a) Materiali a comportamento elastico-lineare e infinitamente resistente

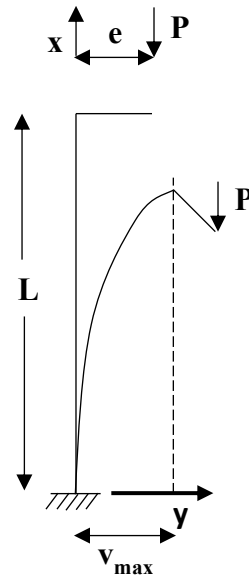


Figura 4.6 – Diagramma comportamento elastico-lineare

$$\begin{cases} \mathbf{M(x)} = \mathbf{P(e_0 + v_{max} - y(x))} \\ \mathbf{N = P} \end{cases} \quad (4.38)$$

Uguagliando il momento esterno e il momento interno:

$$\mathbf{P(e_0 + v_{max} - y(x)) = EI y''(x)} \quad (4.39)$$

Soluzione dell'equazione differenziale è:

$$\mathbf{y(x) = \frac{e_0}{\cos\alpha L} (1 - \cos\alpha x)} \quad ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{EI}}} \quad (4.40)$$

Per:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\max} \Rightarrow \mathbf{v}_{\max} = \frac{\mathbf{e}_0}{\cos \alpha L} = \frac{\mathbf{e}_0}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right)} \quad (4.41)$$

Quindi il legame tra momento e sforzo normale per la sezione di base è il seguente:

$$\left[ \mathbf{M} = \frac{\mathbf{N} \mathbf{e}_0}{\cos\left(\sqrt{\frac{\mathbf{N}}{EI}} L\right)} + \mathbf{N} \mathbf{e}_0 \right] \quad (4.42)$$

$\mathbf{v}_{\max}$  presenta un asintoto per:

$$\cos \alpha L = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{\mathbf{N}}{EI}} L = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{N}_E = \pi^2 \frac{EI}{4L^2} = \pi^2 \frac{EA}{N^2} \quad (4.43)$$

Considerando che la resistenza della sezione in c.a. sia limitata e le non linearità è possibile modificare e limitare le curve  $\mathbf{M}_I$  e  $\mathbf{M}_{II}$  nel diagramma  $\mathbf{M} - \mathbf{N}$ .

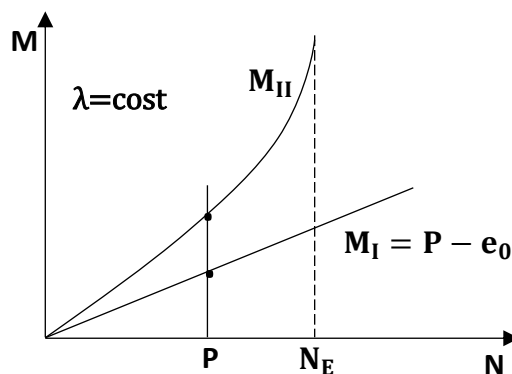


Figura 4.7 – Diagramma M-N

Ammettendo un comportamento elastico-lineare del materiale, cioè  $EI = \text{cost}$  ed indipendente dal momento flettente, si osserva che il carico critico  $\mathbf{N}_E$  non costituisce il limite superiore della capacità portante poiché già per  $\mathbf{P}_u^* < \mathbf{N}_E$  la sezione di base entra in crisi per tensioni normali (Figura 4.8)



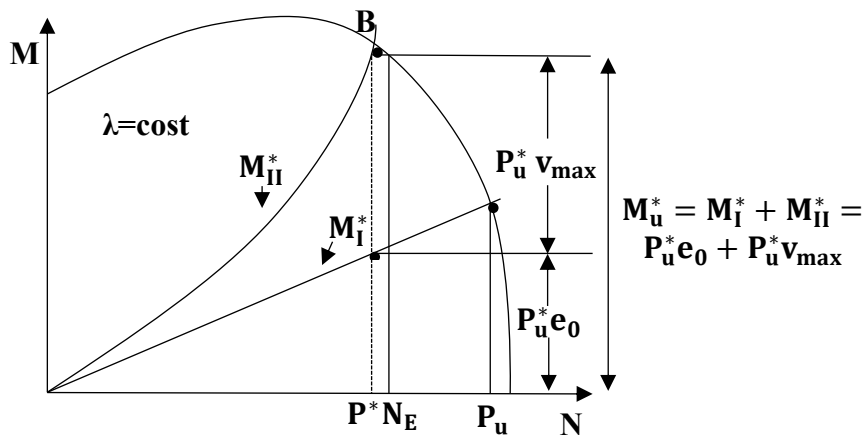


Figura 4.8 – Diagramma e dominio M-N

## b) Problemi di non linearità

Tenere conto del problema non lineare del materiale significa esprimere il momento interno come:

$$\mathbf{M}_{\text{int}} = \mathbf{K}_s \mathbf{y}''(\mathbf{x}) \quad (4.44)$$

Cioè ipotizzare che la rigidezza  $\mathbf{K}_s$  della sezione generica è funzione della curvatura  $\mathbf{y}''(\mathbf{x})$ . Si possono dedurre le curvature dai diagrammi momento-curvatura per le singole sezioni. L'equazione di equilibrio tra momento esterno e interno permette di scrivere:

$$\mathbf{P} \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_s \mathbf{y}''(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_{\text{max}}) \quad \text{con} \quad \mathbf{K}_s = \mathbf{K}_s(\mathbf{x}) \quad (4.45)$$

Questa è un'equazione non lineare scritta nello stato deformato e pertanto la sua soluzione richiede generalmente, l'utilizzo di un metodo numerico una volta noto il legame  $\mathbf{K}_s - \mathbf{y}''(\mathbf{x})$ .

La determinazione della capacità portante ultima di elementi snelli di c.a., noti i diagrammi  $\mathbf{M} - \mathbf{1}/\mathbf{r}$  delle sezioni, dovrebbe quindi avvenire attraverso l'integrazione dell'equazione differenziale non lineare

precedente. Questo procedimento è però complesso e di non pratica soluzione.

Di conseguenza, per consentire un calcolo più veloce e pratico, ma comunque più raffinato del metodo  $\omega$ , si possono utilizzare formulazioni semplificate che si basano sull'ipotesi di legge nota della deformazione in grado di descrivere la deformata dell'asta con sufficiente approssimazione. Tra i metodi adottati vi è il **Metodo della Colonna Modello**. La verifica, come sempre avviene nell'ambito del metodo agli stati limite, consiste nel controllare che le sollecitazioni prodotte dalle azioni esterne di calcolo, compresi gli effetti del secondo ordine tipici dei fenomeni dell'instabilità, siano inferiori alle resistenze ultime delle sezioni.

# CAP. 5 – Travi in c.a. compresse

## SLU

---

### 5.1 Generalità

Il modello di un'asta a comportamento ideale elastico-lineare è in generale, come ricordato, piuttosto lontano dai problemi pratici del cemento armato. Già pensare di perfetta linearità senza eccentricità iniziale del carico, è improbabile nella maggior parte dei casi applicativi. Con riferimento ad uno schema semplificato di asta semplicemente appoggiata (Figura 5.1) si può studiare il comportamento sotto carico  $\mathbf{P}$  del campione facendo riferimento ad un diagramma  $\mathbf{P}$ –spostamento,  $\mathbf{v}$ .

Per effetto di un sensibile effetto della deformazione dell'asta dovuta alla sollecitazione di flessione che si incrementa in conseguenza della deformazione dell'elemento compresso, si previene allo SLU di instabilità con rottura della sezione critica.

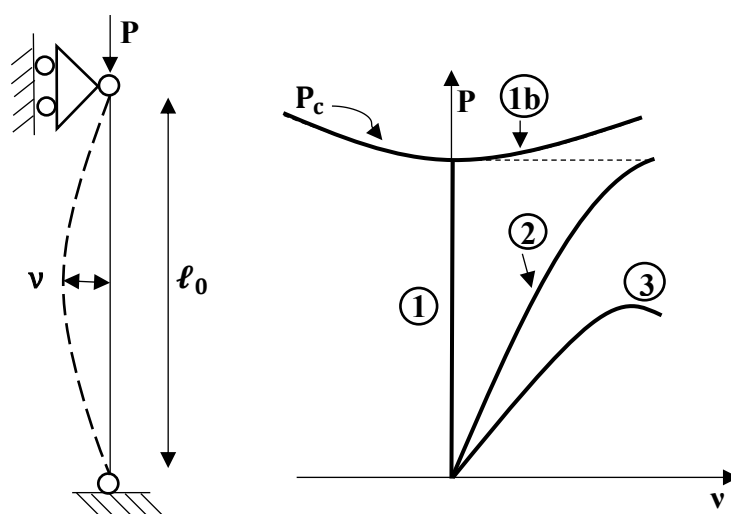


Figura 5.1: Schema semplificato di asta semplicemente appoggiata

Sia:

$\mathbf{P}_c$ : carico critico di biforcazione.

① : Sistema ideale di aste senza imperfezioni o eccentricità

③ : Sistema reale non elastico con imperfezioni

Mettendo genericamente a confronto i diagrammi  $\mathbf{P} - \mathbf{v}$  per un sistema perfetto senza eccentricità ① con un sistema reale ③ non elastico lineare con presenza di imperfezioni, cioè eccentricità iniziali del carico, si vede che per carico di compressione, allorché, si incrementa la deformazione si può prevenire alla condizione ultima prima del carico critico ideale. Pertanto, il modello più aderente alla realtà è quello di un'asta soggetta a pressoflessione, quindi con un'eccentricità comunque iniziale  $\mathbf{e}_0$ .

## 5.2 Il Metodo della Colonna Modello

Il metodo della colonna è utilizzato come approccio per la verifica allo stato limite ultimo attraverso un'analisi non lineare. Esso consente un calcolo sufficientemente applicativo basato sull'ipotesi di angolare a priori una funzione in grado di descrivere la deformata dell'asta compressa con sufficiente pressione. Si controlla che le sollecitazioni prodotte dalle sezioni di calcolo e tenendo conto degli effetti del 2° ordine, siano inferiori alla resistenza della sezione critica. Si fa riferimento ad un elemento incastrato alla base e libero di sommità (Figura 5.2) sottoposto a compressione  $\mathbf{P}$  ed, in generale, anche a momento flettente  $\mathbf{M}$ , e taglio  $\mathbf{V}$ , con deformazione dell'asse dell'asta assimilabile ad una sinusoidale. Questa approssimazione è accettabile. Si ha che l'espressione della deformazione è:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_{\max} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2\ell} \right) \right] \quad (5.1)$$

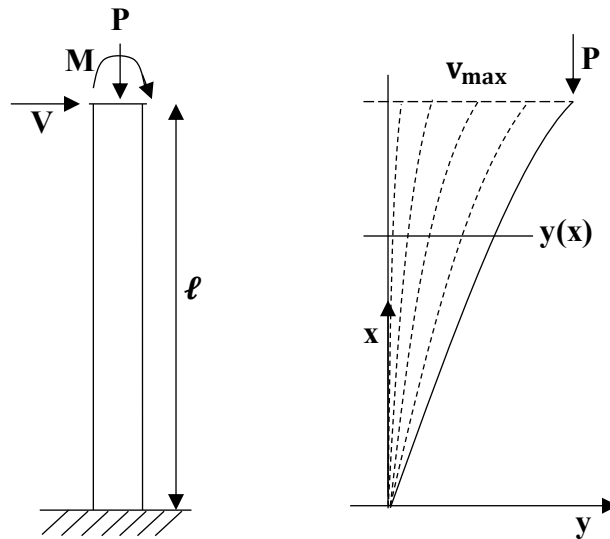


Figura 5.2 – Colonna deformata

Si può controllare che per  $x = 0$  e  $x = L$  le c.c. sono verificate.

Inoltre:

$$y' = v_{\max} \left( \frac{\pi}{2\ell} \right) \sin \frac{\pi x}{2\ell} \quad (5.2)$$

$$y'' = v_{\max} \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2\ell} \quad (5.3)$$

L'equazione (5.3) è anche l'espressione della curvatura:

$$\frac{1}{R} = v_{\max} \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2\ell} \quad (5.4)$$

Per la sezione più sollecitata ( $x = 0$ ) si ricava:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R} \right)_{x=0} &= v_{\max} \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^2 \Rightarrow \\ v_{\max} &= \left( \frac{1}{R} \right)_{x=0} \frac{4\ell^2}{\pi^2} \cong 0,4\ell^2 \left( \frac{1}{R} \right) \Rightarrow \\ v_{\max} &\cong \left( \frac{1}{R} \right)_{x=0} \frac{\ell_0^2}{10} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si deduce che per la sezione più sollecitata che è quella incentrata di base, il momento dovuto alla forza  $P$  di compressione con braccio  $v_{\max}$  è proprio il momento di secondo ordine dovuto alla deformata dell'asta:

$$M_{II} = P v_{\max} \cong P \left( \frac{1}{R} \right)_{x=0} \frac{\ell_0^2}{10} \quad (5.6)$$

Sul diagramma momento-curvatura, l'andamento del momento del secondo ordine è rappresentabile come una retta, quindi lineare essendo funzione della curvatura:

$$\left( \frac{1}{R} \right)_{x=0} = v_{\max} \left( \frac{\pi}{2\ell} \right)^2 \quad (5.7)$$

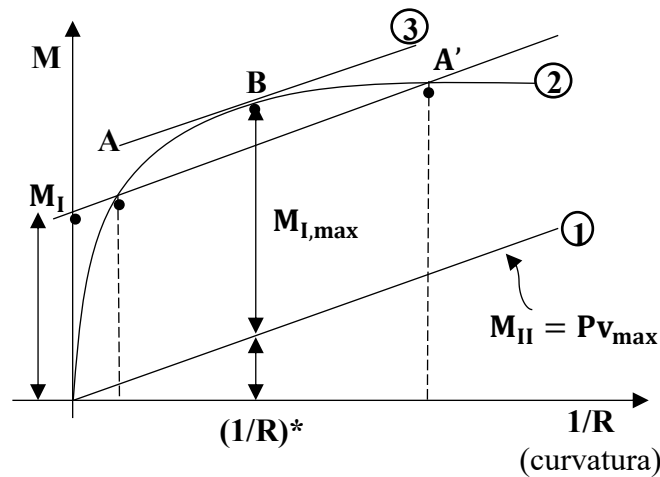


Figura 5.3 – Diagramma M-1/R della sezione critica di base.

② : Diagramma Momento-curvatura valutato per la sezione critica con carico di compressione  $P$ .

La condizione ultima si verifica quando il momento resistente, cioè il momento relativo alla curvatura della sezione:

$$\left( \frac{1}{R} \right)_{x=0}$$

è pari al momento totale sollecitante alla base ( $M_{sol} = M_I + M_{II}$ ) dovuto anche al termine di 2° ordine. Nella Figura (5.3) è riportato per

la retta ③ parallela alla ②, il punto **B** da cui si deduce il valore del momento massimo del primo ordine  $M_{I,max}$ . Si dovrà verificare che:

$$M_{soll,I} \leq M_{I,max} \quad (5.8)$$

Affinché la verifica sia soddisfatta.

Si noti che la condizione espressa dalla retta ③, tangente in **B** al diagramma momento-curvatura, è caratterizzata dalle condizioni di equilibrio cosiddetto indifferente. Gli altri punti individuati esprimono: (punto **A**) una condizione di equilibrio stabile, infatti incrementando le armature, il momento resistente cresce più del momento sollecitante; il punto **A'** caratterizza invece una condizione di equilibrio instabile.

### 5.3 Applicazione del metodo ai pilastri in c.a.

La verifica del pilastro si esegue in modo pratico, calcolando il massimo valore dello sforzo normale  $P_u$  per cui sia ancora possibile l'equilibrio nella sezione maggiormente sollecitata. Esso deve risultare minore dello sforzo normale applicato.

Sia:

$$M(\chi) = P(e + f) \quad (5.9)$$

$$M(\chi) = P_u \left( e + L^2 \frac{\chi_{max}}{10} \right) \quad \text{con} \quad P_u > P_d \quad (5.10)$$

Soluzione approssimata:

$$v(x) f \sin \left( \pi \frac{x}{L} \right) \Rightarrow \chi(x) = \left| \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right| = \frac{\pi^2}{L^2} f \sin \left( \pi \frac{x}{L} \right) \quad (5.11)$$

Curvatura massima:

$$\chi_{max} = \frac{\pi^2}{L^2} f \cong 10 \frac{f}{L^2} \quad (5.12)$$

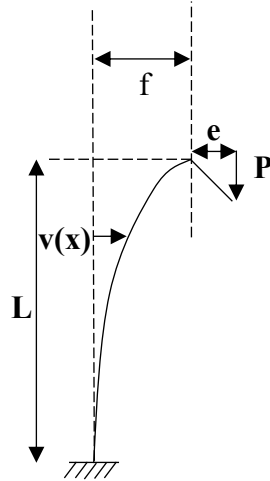


Figura 5.4 – Pilastro snello in c.a. sottoposto a compressione

Soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} M(\chi) = P_u e + \frac{P_u L^2}{10} \chi &\Rightarrow M_y = P_u e + \frac{P_u L^2}{10} \chi_y = M^I + M^{II} \Rightarrow \\ P_u &= \frac{M_y(P_u)}{e + \frac{L \chi_y(P_u)}{10}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lo sforzo normale ultimo  $P_u$  si valuta attraverso soluzione iterativa:

- 1) Si sceglie un  $P_u$  di primo tentativo.
- 2) Si valuta il diagramma  $M - \chi$ .
- 3) Si valuta il momento del II° ordine  $M^{II}$ .
- 4) Si valuta  $M^I$ .
- 5) Se  $P_u x e \cong M^I$  il procedimento iterativo termina, altrimenti si utilizza il valore  $P_u = M^I/e$  come ulteriore  $P_u$  di tentativo e si ripetono i punti dal 1 al 5 fino a che la condizione non risulti verificata.



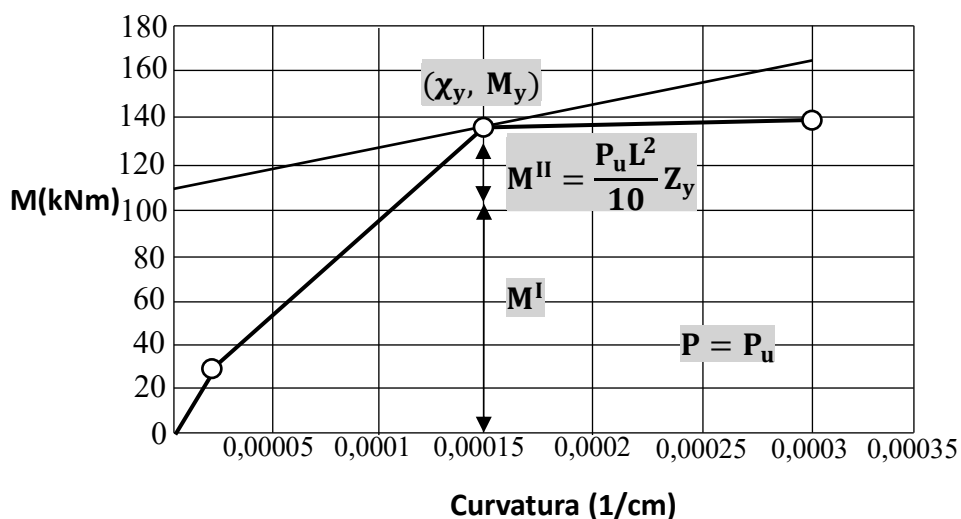


Diagramma 5.1 – Diagramma **M – χ**

**Esempio 5.1** : Raggiungimento della convergenza in un pilastro in c.a..

Nel caso dell'esempio considerato sono state necessarie 6 iterazioni per raggiungere la convergenza, ottenendo per lo sforzo normale ultimo il valore  **$P_u = 374,2 \text{ kN}$**  che corrisponde al momento  **$M^I = 112,26 \text{ kN}$** .

DATI: Cls Rck 30 Mpa

Acciaio FeB44K

Dimensioni Sezione B=30 cm, h=30 cm

Armatura 3Ø22 inferiore e superiore. Eccentricità e=30 cm

Altezza pilastro H=700cm

$N$ (kN)	$M_{Iy}$ (kN cm)	$\theta_y$ (cm <sup>-1</sup> )	$N_u$ (kN)
0	10258	$.1139 \times 10^{-3}$	288.3
288.3	13127	$.1390 \times 10^{-3}$	356.6
356.6	13763	$.1454 \times 10^{-3}$	370.7
370.7	13890	$.1467 \times 10^{-3}$	373.5
373.5	13920	$.1470 \times 10^{-3}$	374.1
374.1	13924	$.1471 \times 10^{-3}$	374.2

**N.B.** il valore di  **$P_u$**  in assenza di fenomeni del II° ordine vale 482 kN, valore maggiore del 22% rispetto al caso nel quale gli effetti del II° ordine siano messi in conto.

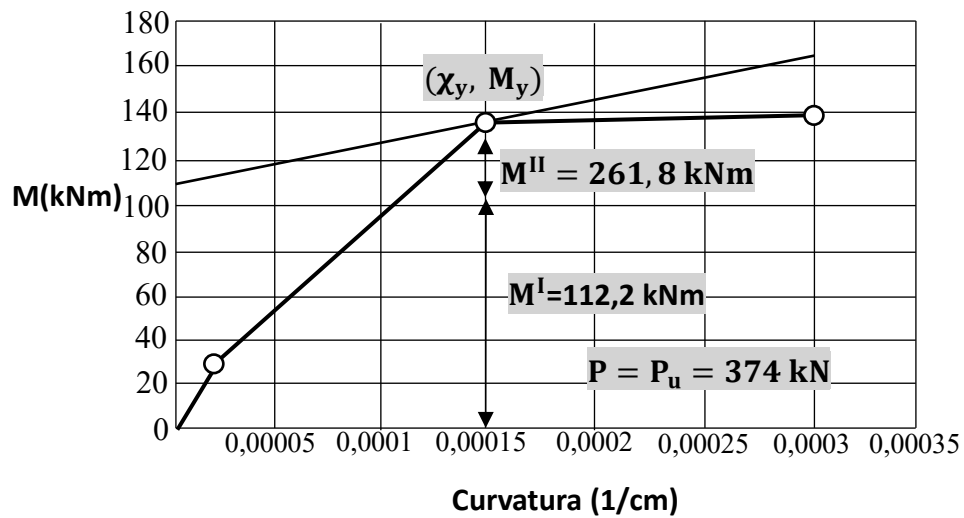


Diagramma 5.1 – Diagramma M –  $\chi$

### Pilastri snelli in c.a. – verifica allo SLU con metodo della Colonna Modello – Riferimenti normativi D.M. 2005

Le verifiche di stabilità degli elementi snelli devono essere condotte tenendo adeguatamente conto delle imperfezioni geometriche e delle eventuali deformazioni viscosse per carichi di lunga durata.

Si devono assumere legami fra azioni intere e deformazioni in grado di descrivere con adeguatezza gli effetti della fessurazione. A favore di sicurezza il contributo del calcestruzzo teso può essere trascurato.

È ammesso valutare gli effetti del secondo ordine quali si verificano in una colonna definita “colonna modello”: una colonna soggetta a sforzo normale costante, in condizioni per cui sia ben approssimata la valutazione dello spostamento laterale  $\delta$  attraverso la seguente espressione:

$$\delta = \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\ell_0^2}{10} \quad (5.14)$$

Con  $\left(\frac{1}{r}\right)$  curvatura effettiva della sezione critica. Detto  $M_{Rd}$  il momento resistente di calcolo della sezione critica, si individua  $M_{IRd}$  come momento resistente del primo ordine disponibile per

l'assorbimento della sollecitazione di calcolo, là dove la differenza fra l'ordinata della curva  $M_{Rd} - 1/r$ , tracciata per lo sforzo normale agente di calcolo  $N_d$  e quella della retta rappresentativa dell'effetto del secondo ordine:

$$N_d \cdot \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{l_0^2}{10} \quad (5.15)$$

Raggiunge il massimo valore.

## 5.4 Metodo semplificato

La derivazione dell'estremo libero della colonna è espressa in funzione della curvatura dell'estremo opposto incastrato e come nel metodo della colonna modello, si assume:

$$\delta = 0,4 \left(\frac{1}{r}\right) l^2 = \frac{1}{r} \frac{l^2}{10} \quad (5.16)$$

Il metodo semplificato dell'equilibrio opera con riferimento alla sezione di base e confronta il valore del carico esterno  $N$  (e relativa eccentricità) con la risultante delle tensioni interne (e corrispondente eccentricità).

Sia  $N$  il carico assiale di progetto.

L'eccentricità di 1° ordine riferita alla sezione di base A si valuta con la:

$$e_1 = e_0 + e_A + \frac{Hl}{N} \quad (5.17)$$

Dove:

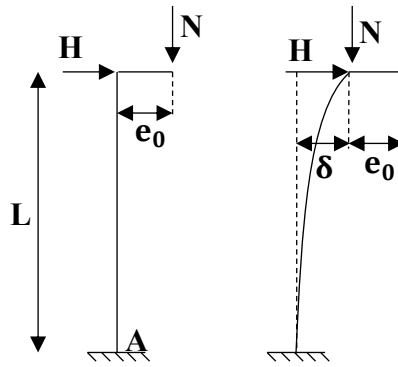


Figura 5.5 – Asta con base **A** con carico applicato

$e_0$  = eccentricità del carico assiale  $N$  in corrispondenza della sezione libera;

$e_A$  = eccentricità addizionale;

$H \cdot l/N$  = eccentricità del carico assiale dovuta al carico orizzontale.

Tenendo conto della deviazione della colonna, l'eccentricità totale della sezione è espressa da:

$$e = e_1 + \delta = e_1 + \frac{1}{r} \frac{l_c^2}{10} \quad (5.18)$$

Cioè  $e$  è una funzione lineare di  $1/r$  (Figura 5.6).

La relazione tra l'eccentricità  $e_i$  e la curvatura  $1/r$  per dato carico assiale  $N_i$ , è ottenuta dalle equazioni di equilibrio e di congruenza della deformazione.

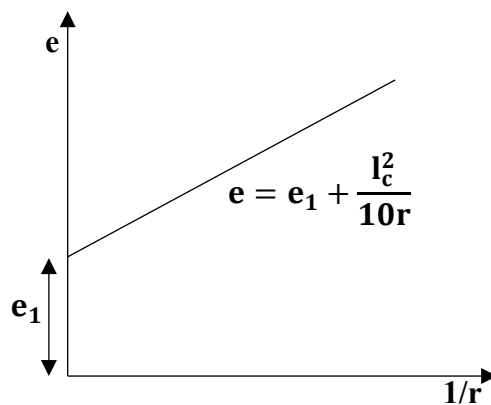


Figura 5.6 –  $e$  è una funzione lineare di  $1/r$

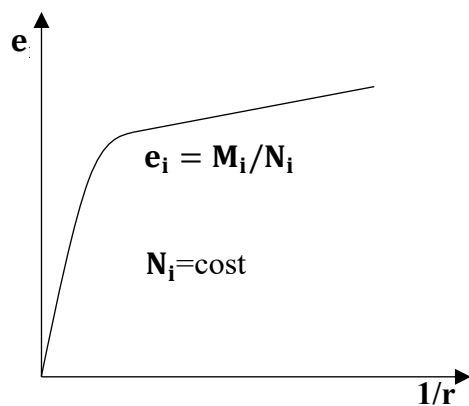


Figura 5.7 – Diagramma eccentricità-curvatura

La Figura 5.7 illustra qualitativamente il diagramma eccentricità – curvatura  $e_i = M_i/N_i$  per un dato valore di  $N_i$  e  $\omega = A_s \cdot f_{yd}/N_c$ .

Il diagramma è affine a quello momento-curvature potendosi dedurre da questo ultimo previa riduzione delle ordinate nel rapporto  $1/N$ .

Sovrapponendo i due diagrammi  $e - 1/r$  e  $e_i - 1/r$  (Figura 5.8) si nota che i loro punti di intersezione ( $E$  ed  $E^I$ ) individuano condizioni estreme di stabilità per la colonna sotto l'azione del carico.

Il punto  $E$  è di equilibrio instabile: se l'equilibrio è alterato da un aumento della deviazione e conseguentemente da un incremento della curvatura ( $1/r$ ), l'eccentricità esterna ( $e$ ) si incrementa più rapidamente dell'altra ( $e_i$ ).

A parità di  $M_i$  se il valore di  $N_i$  aumenta, il corrispondente diagramma delle curvature interne si sposta verso il basso: i punti  $E$  ed  $E^I$  si avvicinano ed al limite coincidono quando la curvatura è tangente alla retta dell'eccentricità esterna.

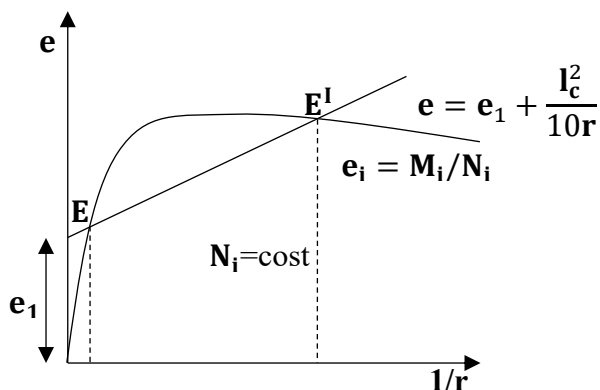


Figura 5.8 - Sovrapposizione dei due diagrammi  $e - 1/r$  e  $e_i - 1/r$

Il valore di  $N$  corrispondente a questa configurazione estrema fornisce il carico ultimo di instabilità.

Il procedimento esposto richiede la determinazione del diagramma delle curvature, anche se quest'ultimo non è indispensabile per la verifica di sicurezza della colonna.

Con riferimento alla sezione  $A$  di base della colonna si consideri un arbitrario diagramma delle deformazioni con valori delle deformazioni estreme ( $\epsilon_c$  ed  $\epsilon_s$ ) non maggiori di quelli limiti.

A queste deformazioni corrisponde:

- La curvatura:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_A = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d} \quad (5.19)$$

- La risultante delle tensioni interne:

$$N_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \quad (5.20)$$

$$N_1 = E_s \cdot \epsilon_1 \cdot f_{yd} \quad (5.21)$$

$$N_2 = E_s \cdot \epsilon_2 \cdot f_{yd} \quad (5.22)$$

$$N_i = N_c + N_1 - N_2 \quad (5.23)$$

$$M_i = N_c(x - \beta_x) + (N_1 + N_2) \left(\frac{h}{2} - c\right) \quad (5.24)$$

E di conseguenza l'eccentricità:

$$e_i = \frac{M_i}{N_i} \quad (5.25)$$

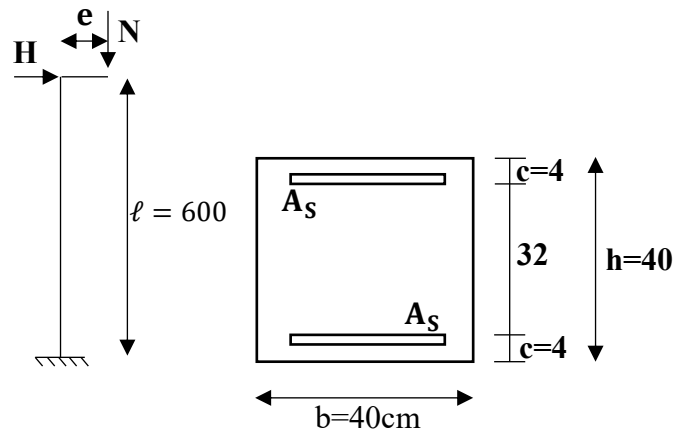


Figura 5.9 – Colonna in condizioni stabili

Se, indicato con  $N_d$  ed  $e_d$  rispettivamente il carico e l'eccentricità di progetto, risulta:

$$\begin{cases} N_i > N_a \\ e_i > e_d \end{cases} \quad (5.26)$$

La colonna è in condizioni stabili.

### Esempio 5.2 :

Con riferimento alla colonna della Figura 5.9 sia:

$$N = 37 \text{ t}$$

$$H = 1,5 \text{ t}$$

$$e = 6,7 \text{ cm}$$

$$f_{cd} = 120 \text{ kgcm}^{-2} = 0,12 \text{ tcm}^{-2}$$

$$f_{yd} = 4000 \text{ kgcm}^{-2}$$

$$l = 6 \text{ m}$$

$$E_s = 2 \cdot 10^3 \text{ tcm}^{-2}$$

$$A_s = 14,4 \text{ cm}^2$$

Di conseguenza:

$$l_c = 2l = 2 \cdot 6 = 12 \text{ m}$$

Ed assumendo:

$$\begin{aligned} e_a &= \frac{\lambda}{1000} h = \frac{\frac{l_c}{i}}{1000} h = \frac{l_c}{1000 \left( \frac{h}{\sqrt{12}} \right)} h \\ &= \frac{l_c \sqrt{12}}{1000} = \frac{1200 \sqrt{12}}{1000} = 4,1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Si ha:

$$e_1 = e + e_x + \frac{Hl}{N} = 6,7 + 4,1 + \frac{1,5 \cdot 600}{57} = 26,6 \text{ cm}$$

Si assume come primo tentativo il diagramma di deformazione della Figura 5.10.

La risultante delle tensioni interne è:

$$N_i = N_c = \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x$$

Per:

$$\varepsilon_c = 2,5\text{‰}; \quad \alpha_c = 0,733$$

Si ha:

$$N_i = 0,733 \cdot 0,120 \cdot (40\text{cm}) \cdot (20\text{cm}) \cong 70,4 \text{ t}$$



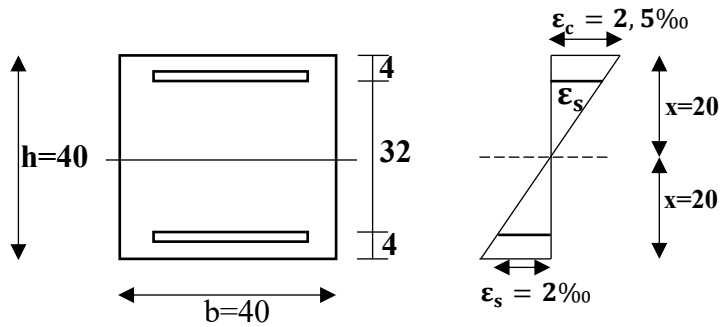


Figura 5.10 - Diagramma di deformazione

Poiché la risultante interna  $N_i$  è più grande di  $N = 57 \text{ t}$  conviene ridurre la deformazione al bordo compresso tenendo costante la deformazione a livello dell'armatura inferiore.

Portando, ad esempio la deformazione al lembo compresso dal  $2,50\text{‰}$  al  $2,25\text{‰}$  si ha, con riferimento al diagramma di Figura 5.11, la seguente relazione per l'asse neutro:

$$\frac{x}{36 - x} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_s}$$

Da cui componendo:

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} 36$$

Ovvero:

$$x = \frac{2,25}{2,25 + 2} 36 = 19,06 \text{ cm}$$

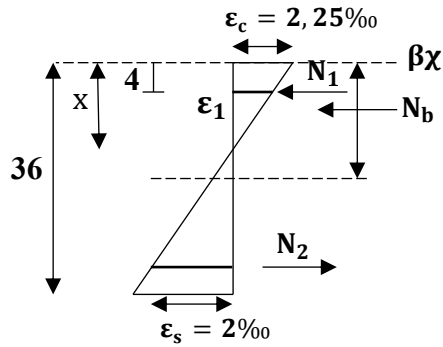


Figura 5.11 - Deformazione al lembo compresso dal 2,25‰ al 2‰

E di conseguenza (Figura 5.11):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_c \frac{x - c}{x} = \frac{2,25}{19,06} (19,06 - 4) = 1,778‰$$

Ne segue che per:

$$\varepsilon_c = 2,25‰$$

Risulta:

$$\alpha_c = 0,704$$

Da cui:

$$\begin{aligned} N_c &= \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x = \\ &0,704 \cdot 0,12 \cdot (40 \text{ cm}) \cdot (19,06 \text{ cm}) = 64,4 \text{ t} \\ N_1 &= E_s \cdot \varepsilon_1 \cdot A_s = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1,778}{1000} \cdot (14,4 \text{ cm}^2) = 51,2 \text{ t} \\ N_2 &= E_s \cdot \varepsilon_s \cdot A_s = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{1000} \cdot 14,4 = 57,6 \text{ t} \\ N_i &= N_c + N_1 - N_2 = 64,4 + 51,2 - 57,6 = 58 \text{ t} \end{aligned}$$

Essendo  $N_i$  un po' più grande di  $N_1$  di passa alla determinazione dell'eccentricità (Figura 5.12):

Per:

$$\varepsilon_c = 2,25\text{‰}$$

Risulta:

$$\beta = 0,384$$

$$\beta_x = 0,384 \cdot 19,06 = 7,32 \text{ cm}$$

$$M_i = N_c(20 - 7,32) + (N_1 + N_2)16$$

$$= (64,4 \cdot 12,68) + (51,2 + 57,6)16 = 2557,392 \text{ tcm}$$

$$e_i = \frac{M_i}{N_i} = \frac{2557,392}{58} \cong 44,1 \text{ cm}$$

Essendo:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{h} = \frac{2,25 + 2}{1000 \cdot 36}$$

L'eccentricità totale esterna risulta:

$$e = e_1 + \frac{l_c^2}{10} \cdot \frac{1}{r} = 26,6 + \frac{1200^2}{10} \cdot \frac{2,25 + 2}{1000 \cdot 36} = 43,6 \text{ cm}$$

Confrontando, si ha:

$$N_i = 58 \text{ t}$$

$$N = 57 \text{ t}$$

$$e_i = 44,1 \text{ cm}$$

$$e = 43,6 \text{ cm}$$

La colonna è prossima al limite di instabilità.

### Osservazione

Il metodo della COLONNA MODELLO può applicarsi anche nello studio di pilastri in c.a. di telai. In generale si deve far riferimento a “telai a nodi fissi” tenendo presente che la distinzione fra strutture a nodi fissi e a nodi mobili è legata alla rigidezza strutturale in relazione agli spostamenti orizzontali ed ovviamente alla snellezza degli elementi strutturali. Varie normative suggeriscono formule semplificate per valutare se il telaio è considerabile a nodi fissi.

Nell'applicare il metodo della COLONNA MODELLO potrà assumersi la lunghezza di libera inflessione pari all'altezza di interpiano. Quindi conducendo la Figura 5.4 seguente, la sezione critica della deformazione del momento del II ordine è anche la più sollecitata a flessione (sezione A) e quindi si può impiegare l'espressione seguente per la freccia massima:

$$v_{\max} = \left(\frac{1}{R}\right)_A \frac{h^2}{10} \quad (5.27)$$

Nel caso in cui si ha un diagramma lineare del momento del tipo di Figura 5.4 ci si può ricondurre al caso precedente, verificando ancora la sezione A con un momento di calcolo del primo ordine:

$$M_{I,\text{soll}} = N e_{ep} \quad (5.28)$$

Essendo  $e_{ep}$ =eccentricità equivalente come combinazione di  $e_1$  e  $e_2$ .

Il momento del secondo ordine risulterà pari a:

$$M_{II} = N v_{\max} = \left(\frac{1}{R}\right)_A \frac{h^2}{10} \quad (5.29)$$

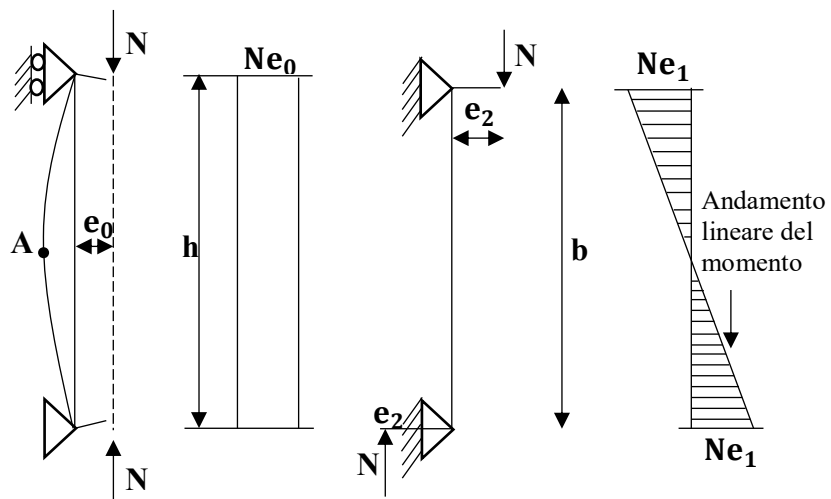


Figura 5.14 – Asta compresse con eccentricità della forza  $N$

# CAP.6 – Instabilità di strutture complesse in c.a.: telai

---

## 6.1 Generalità

Il problema della stabilità delle aste compresse in c.a. non appare così rilevante nelle strutture in cemento armato rispetto alle strutture in acciaio. Pur tuttavia, il continuo miglioramento della qualità e resistenza dei materiali e l'incremento delle lunghezze soprattutto nell'ambito della prefabbricazione hanno permesso di utilizzare elementi compressi (pilastri) più snelli e quindi più facilmente deputati a dover essere controllati nell'ambito della stabilità. La trattazione teorica non è semplificata dalle specifiche caratteristiche del cemento armato; infatti, alla non linearità geometrica che caratterizza la teoria del 2° ordine, si aggiungono la non linearità e anche la fessurazione del conglomerato teso, nonché i fenomeni di viscosità del conglomerato per carichi di lunga durata.

Il primo modo di verificare la stabilità dei pilastri in c.a. è stato quello noto come “metodo  $\omega$ ” già formulato per l'acciaio.

Le normative attuali sul c.a. hanno completamente abbandonato il “metodo  $\omega$ ” in quanto esso è basato: sull'ipotesi di materiale elastico lineare; sul parametro di snellezza  $\lambda$  calcolato a sezione totalmente reagente; se un comportamento lineare del materiale che non tiene conto di effetti viscosi.

Pertanto in questo percorso si presenta sia il classico “metodo  $\omega$ ” con brevi cenni e si presentano criteri principali ed i modelli di riferimento per il controllo della stabilità alla stato limite ultimo.

## 6.2 Metodo $\mathbf{P} - \Delta$

Si applica solo a telai con maglie rettangolari.

Il metodo consiste nel sostituire ai momenti del 2° ordine provocati dai carichi verticali i momenti indotti da azioni equivalenti applicate ai piani.

Della non linearità geometrica si tiene conto attraverso i momenti additivi del 1° ordine dovuti alle forze equivalenti; della non linearità dei materiali si tiene conto attraverso opportune rigidità (cosiddette rigidità secanti).

Il metodo si articola nelle seguenti fasi (Figura 6.1):

- a) Si risolve il telaio in campo elastico sotto le effettive azioni presenti assegnando alle aste la rigidità tangente  $(\mathbf{EJ})_t$  (Figura 6.2 e 6.3) e determinando gli spostamenti  $\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ ;
- b) Si calcolano le azioni orizzontali equivalenti  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \dots, \mathbf{H}_{ii}, \dots, \mathbf{H}_{nn}$  imponendo l'eguaglianza dei momenti da esse prodotti al piede delle colonne con quelli di 2° ordine conseguenti alle forze verticali per gli spostamenti così valutati.





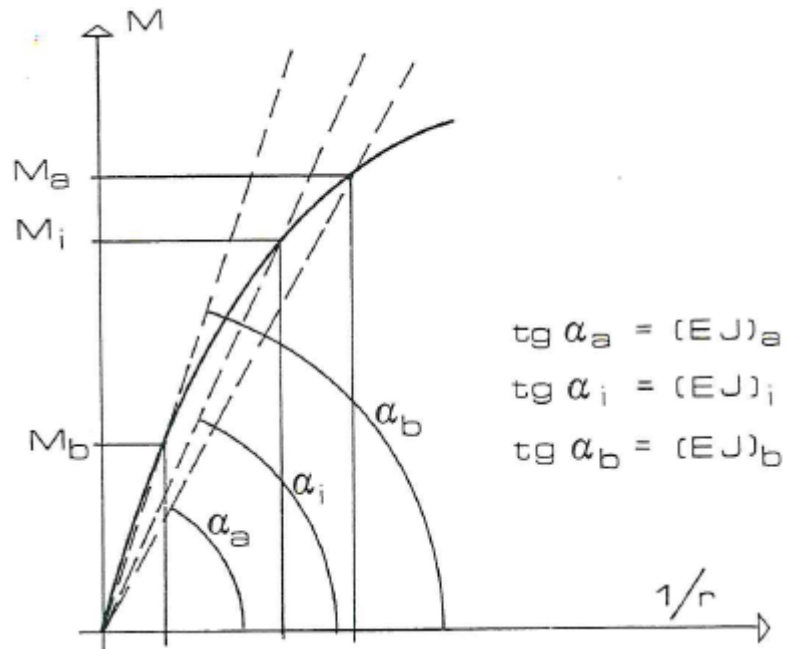


Figura 6.2 - Telaio in campo elastico sotto l'azioni del momento

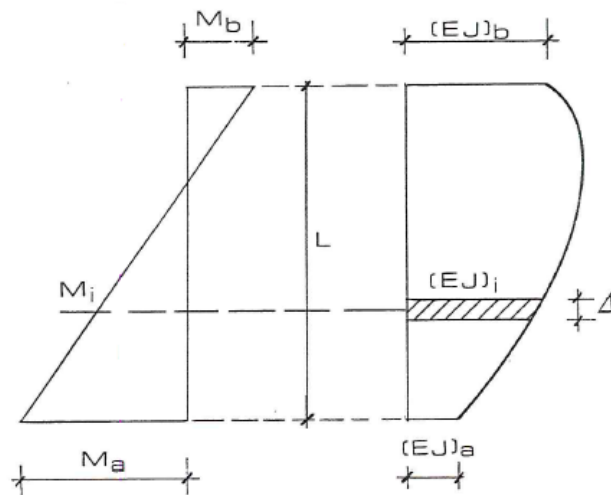


Figura 6.3 - Telaio in campo elastico sotto l'azioni presenti assegnando alle aste la rigidità tangente  $(EJ)_t$

- c) Si applicano alla struttura le azioni  $H_i$  insieme alle effettive azioni presenti e si determinano i nuovi spostamenti  $\Delta_i$  e quindi le nuove azioni  $H$ ;
- d) Si itera il procedimento sino a che siano irrilevanti gli spostamenti  $\Delta_i$ . Ovviamente, lo stato di sollecitazione finale si ottiene sommando ai momenti flettenti del 1° ordine dovuti alle effettive azioni applicate quelli, pure del 1° ordine, dovuti alle  $H_i$  equivalenti.

Esaurito il calcolo elastico, si tiene conto della linearità dei materiali confrontando le rigidità tangenti assunte con quelle determinabili dai diagrammi  $\mathbf{M} - \left(\frac{1}{r}\right) - \mathbf{N}$ .

Se queste sono molto diverse dalle prime, si determinano rigidità equivalenti, costanti per le intere aste, ponendo:

$$\frac{(\mathbf{EJ})_{\text{eq.}}}{L} = \sum \frac{(\mathbf{EJ})_i}{\Delta x} \quad (6.2)$$

Da cui:

$$(\mathbf{EJ})_{\text{eq.}} = \frac{L}{\sum \left[ \frac{(\mathbf{EJ})_i}{\Delta x} \right]} \quad (6.3)$$

Con l'impiego di queste nuove rigidità, si ripete il procedimento sopra descritto e lo si itera fino a quando le rigidità di calcolo non risultino più sensibilmente diverse.

Il metodo è di applicazione molto più facile rispetto a quello generale e, pur presentando due gradi di approssimazione (effetti del 2° ordine conglobati nelle azioni  $\mathbf{H}$ , equilibrio delle singole sezioni soddisfatto solo in "media"), ha in molti casi un grado di approssimazione più che soddisfacente.

# Bibliografia

---

Steen Krenk, *Mechanics and Analysis of Beams, Columns and Cables, A Modern Introduction to the Classic Theories*, Second Edition. Springer, Denmark, 2000.

Carlo Pace – Giovanni Menditto, *Metodologia Semiprobabilistica di Calcolo agli Stati Limite delle Strutture in Calcestruzzo Armato*, ITEC – La prefabbricazione, Milano, 1979.

Bažant, Z.P. and Cedolin, L., *Stability of Structures*. Oxford University Press, Oxford, 1991.

Galilei, Galileo, *Two New Sciences*, Elzevir, 1638. (English translation, Dover, New York, 1914).

Keer, A. D., Elastic and viscoelastic foundation models, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, pp. 491-499, 1964.

Krenk, S., A general format for curved and nonhomogeneous beam elements, *Computers and Structures*, Vol. 50, pp. 449-454, 1994.

Krenk, S., Vissing-Jørgensen, C. and Thesbjerg, L., Efficient collapse analysis of offshore structures, *Computers and Structures*, Vol. 72, pp. 481-496, 1999.

# Ringraziamenti

---

Giunta alla conclusione di questo lavoro, desidero ringraziare innanzitutto il relatore di questa tesi, il Prof. Roberto Capozucca, per la disponibilità, l'attenzione e la gentilezza dimostrate durante la stesura del lavoro. Tutto questo mi ha permesso di affrontare il periodo di tesi serenamente, di imparare moltissimo e in generale di trarre il meglio da questa esperienza.

Non posso fare a meno di ringraziare anche i miei genitori che, nonostante le inevitabili incomprensioni, mi hanno sempre sostenuta, non mi hanno mai fatto mancare nulla e mi hanno permesso di arrivare dove sono.

Grazie a mia sorella che mi ha aiutata a superare molti problemi e che ci è sempre stata per sostenermi in tutte le mie scelte.

Un ringraziamento speciale a Luca, il mio fidanzato e compagno di tanti momenti, che con estrema pazienza ha sopportato i miei sbalzi d'umore e le mie paranoie, incoraggiandomi e dicendomi che potevo farcela.

Il mio pensiero e ringraziamento particolare va al mio angelo Ida, mia nonna che non c'è più, per avermi fatto ritrovare la grinta e la determinazione ormai persa.

Ringrazio Ilaria la mia amica, coinquilina e motivatrice personale per essere stata sempre presente in questo difficile percorso e per aver reso tutto più semplice.

Ringrazio Teresa, mia compagna di sventure universitarie, per aver trascorso questo ultimo anno insieme affrontando ogni difficoltà.

Voglio ringraziare anche i miei amici Daniele, Mario, Giuseppe, Fabiola, Dottore, Luana, Caserta, Andrea, Daniela, Brunetti, Stefanie e Valentina per aver passato con loro momenti di serenità e di spensieratezza.

Inoltre, voglio ringraziare tutti i parenti che ho avuto vicino in questi anni, chi più chi meno, hanno tutti contribuito a rendermi la persona che sono in questo momento.

E infine, non per importanza, ringrazio la mia cagnolina Minnie per portare ogni giorno gioia nella mia vita.