



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

**Studio analitico e simulazioni numeriche
dell'effetto Dzhanibekov**

**Analytical study and numerical simulations
of the Dzhanibekov effect**

Relatore:
Prof. Marco Coco

Tesi di Laurea di:
Matteo Merlino

Anno Accademico 2023/2024

Introduzione

In questa tesi viene esaminato un particolare fenomeno che si presenta sotto determinate condizioni durante il moto di un corpo rigido: l'effetto Dzhanibekov. Quest'ultimo, conosciuto anche come teorema della racchetta da tennis - in presenza di gravità - o teorema dell'asse intermedio, è un risultato della meccanica classica che descrive il movimento di un corpo rigido caratterizzato da tre momenti principali d'inerzia diversi. La base teorica è rappresentata dalle equazioni di Eulero, specializzate al moto alla Poinsot di un corpo rigido, ovvero al moto di un corpo rigido isolato, cioè libero e non sottoposto ad alcuna forza attiva. In questo fenomeno, rotazioni attorno all'asse con momento d'inerzia principale maggiore danno come risultato rotazioni stabili. Lo stesso si ha se le rotazioni avvengono attorno all'asse con momento d'inerzia principale minore. Diversamente, rotazioni sull'asse con momento d'inerzia principale intermedio producono rotazioni instabili, distintivi del fenomeno preso in esame.

La tesi, dopo una panoramica sull'effetto Dzhanibekov, si articola in due parti principali: una parte di studio analitico in cui viene spiegato analiticamente e geometricamente il fenomeno, e una parte di simulazioni numeriche in cui si procede a una soluzione numerica e si considerano tre casi, tra cui l'applicazione del fenomeno sul dispiegamento dei pannelli solari di un satellite.

Competenze e abilità sviluppate e attività originali.

Di seguito si riportano le principali competenze e abilità sviluppate durante il periodo di tirocinio-tesi e le attività originali di tesi:

- Ricerca bibliografica.
 - Lettura, comprensione e utilizzo di articoli scientifici.
 - Ottenimento dei risultati analitici non esplicitati negli articoli.
 - Adattamento dei risultati al problema specifico della tesi.
 - Scrittura in ambiente \LaTeX .
 - Utilizzo del software di calcolo MATLAB.
 - Scelta del metodo numerico per il problema specifico della tesi.
 - Simulazioni numeriche.
-
- Da pagina 3 a pagina 16 è stato fatto un rifacimento dell'articolo A Theoretical and Numerical Study of the Dzhanibekov and Tennis Racket Phenomena di Murakami H., Rios O., Impelluso T.J.
 - Da pagina 16 a pagina 18 sono state prese le soluzioni analitiche delle equazioni di Eulero dal libro Dynamics of Multibody Systems di Wittenburg J. e sono state rielaborate: il testo prevede la risoluzione rispetto alle componenti del vettore della velocità angolare, nella tesi queste sono state adattate per presentare le soluzioni rispetto alle componenti del vettore momento angolare.
 - Da pagina 18 a pagina 19 è stato fatto un rifacimento dell'articolo A Theoretical and Numerical Study of the Dzhanibekov and Tennis Racket Phenomena di Murakami H., Rios O., Impelluso T.J.

- Da pagina 20 a pagina 23 è stata fatta una parte originale che consiste nella risoluzione numerica delle equazioni di Eulero utilizzando come momenti d'inerzia principali del dado a farfalla e come condizioni iniziali dei momenti angolari quelli riportati nell'articolo A Theoretical and Numerical Study of the Dzhanibekov and Tennis Racket Phenomena di Murakami H., Rios O., Impelluso T.J.
- Da pagina 23 a pagina 25 si sono sviluppati i calcoli delle soluzioni tratte dal libro Dynamics of Multibody Systems di Wittenburg J. per il caso di corpo rigido asimmetrico ed è stata fatta una parte originale che consiste nella risoluzione numerica delle equazioni di Eulero nel caso di corpo asimmetrico.
- Da pagina 26 a pagina 29 è stata fatta una parte originale che consiste nella risoluzione numerica delle equazioni di Eulero nel caso applicativo del dispiegamento dei pannelli solari di un satellite, sulla base dell'esempio citato nell'articolo A Theoretical and Numerical Study of the Dzhanibekov and Tennis Racket Phenomena di Murakami H., Rios O., Impelluso T.J.
- Da pagina 31 a pagina 34 è stato fatto un riassunto dei libri Dynamics of Multibody Systems di Wittenburg J. e Meccanica Razionale di Biscari P., Ruggeri T., Saccomandi G., Vianello M.
- Da pagina 35 a pagina 36 è stato fatto un riassunto del libro Matematica Numerica di Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.
- Da pagina 36 a pagina 39 ed è stata fatta una parte originale che consiste nella risoluzione numerica dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico.
- Da pagina 40 a pagina 41 è stato fatto un riassunto del libro Matematica Numerica di Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | i |
| 1 Panoramica: l'effetto Dzhanibekov | 1 |
| 2 Studio analitico | 3 |
| 2.1 Equazioni di Eulero | 3 |
| 2.2 Soluzione analitica delle equazioni di Eulero | 6 |
| 2.3 Interpretazione geometrica delle equazioni di Eulero | 7 |
| 2.4 Soluzione geometrica delle equazioni di Eulero | 9 |
| 2.5 Adimensionalizzazione delle equazioni di Eulero | 9 |
| 2.6 Soluzione geometrica delle equazioni di Eulero adimensionalizzate . . | 10 |
| 2.7 Soluzione analitica delle equazioni di Eulero adimensionalizzate . . . | 16 |
| 2.8 Ricostruzione della matrice di rotazione | 18 |
| 3 Simulazioni numeriche | 20 |
| 3.1 Soluzione numerica delle equazioni di Eulero | 20 |
| 3.2 L'esperimento di Dzhanibekov | 21 |
| 3.3 Casi asimmetrici | 23 |
| 3.4 Dispiegamento dei pannelli solari di un satellite | 26 |
| Conclusioni | 30 |
| A Dinamica del corpo rigido | 31 |
| A.1 Angoli di Eulero e velocità angolare | 31 |
| A.2 Moto alla Poincaré e suoi integrali primi | 33 |
| A.3 Rotazioni permanenti e loro stabilità | 34 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| B | Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie | 35 |
| B.1 | Eulero esplicito e Runge-Kutta | 35 |
| B.2 | Esempio: oscillatore armonico | 36 |
| B.3 | Rappresentazione dei numeri sul calcolatore | 40 |
| | Bibliografia | 42 |

Capitolo 1

Panoramica: l'effetto Dzhanibekov

Nel 1985, durante la missione Soyuz T-13, nella stazione spaziale sovietica Saljut 7, il cosmonauta russo Vladimir Dzhanibekov svita un dado a farfalla da una vite. Poco dopo il distacco nota come, a intervalli regolari e senza l'intervento di forze esterne aggiuntive, il dado gira inizialmente su se stesso, poi si ribalta di 180 gradi, torna a ruotare su se stesso, si ribalta ancora di 180 gradi e continua a ripetere questo moto. Successivamente, sempre nella stazione spaziale, Dzhanibekov fa un esperimento: avvolge della plastilina al dado, simulando un modellino della Terra, e ripete la prova, nelle stesse condizioni. Si perviene allo stesso risultato: anche il modellino terrestre si ribalta.

Iniziano allora speculazioni da parte degli scienziati russi sulla possibilità che anche la Terra potesse, nella sua rotazione, invertire di 180 gradi il suo senso di rotazione subendo un'inversione dei poli magnetici, come nell'effetto testato da Dzhanibekov. Lo stesso cosmonauta descrive quanto accaduto in un suo rapporto che viene catalogato come riservato, cioè ad accesso strettamente autorizzato, e tenuto segreto per i successivi 10 anni.

Nel 1991, nonostante i documenti russi siano ancora tenuti nascosti, sul *Journal of Dynamics and Differential Equations* viene divulgata la pubblicazione *The Twisting Tennis Racket*, dove di fatto viene spiegato l'effetto Dzhanibekov applicato ad una racchetta, visualizzato in Fig. 1.1 [1]. Apparentemente, la dimostrazione sembra nuova e mai vista in nessun testo di meccanica classica precedente.

In realtà, alcuni aspetti vengono ripresi da concetti già noti nel 1834, presenti nel testo *Théorie nouvelle de la rotation des corps* del matematico e fisico francese Louis Poinsot [2].

Indagando ancora nel passato, si scopre come la comprensione del problema attribuito a Dzhanibekov - dato che è stato colui che ha riscoperto e ha messo in evidenza il fenomeno - risieda nelle equazioni di Eulero, elaborate dal matematico e fisico svizzero Leonhard Euler, che ne presenta la soluzione analitica in *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable* nel 1758 [3].

Più tardi, nel 1977, l'ingegnere e professore tedesco Jens Wittenburg espone le soluzioni delle equazioni di Eulero nella sua monografia *Dynamics of Multibody Systems* [4].

Tornando ora alla possibile allarmante natura dell'effetto Dzhanibekov, in riferimento a ciò che verrà proposto in questa tesi e sulla base delle opere citate, si potrà comprendere come non ci sia motivo di preoccuparsi per un'eventuale catastrofe: il nostro pianeta ruota sul terzo asse, quello con momento d'inerzia maggiore e a cui è associato il minimo dispendio di energia cinetica, la cui rotazione è stabile.

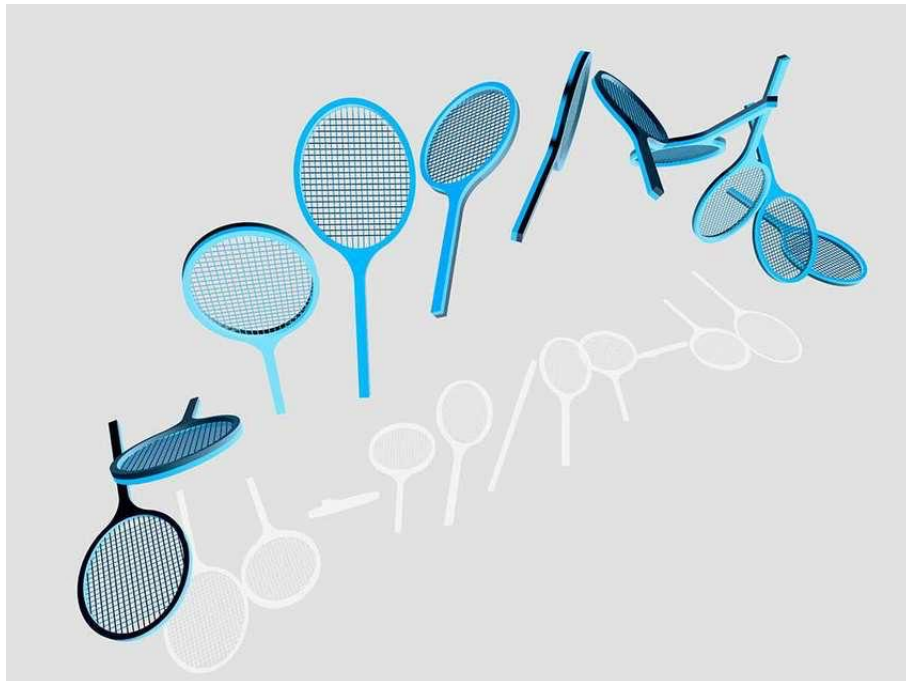


Figura 1.1: Effetto racchetta: una racchetta da tennis viene lanciata in aria e si capovolge di 180 gradi quando il manico compie una rotazione di 360 gradi [5]

Capitolo 2

Studio analitico

2.1 Equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero sono equazioni differenziali ordinarie che descrivono il moto di un corpo rigido. Tali equazioni vengono qui riottenute utilizzando il metodo della terna mobile e l'integrale primo del momento angolare del moto alla Poinot [6].

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , vengono introdotti rispettivamente un sistema di coordinate fisso $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}$ con base ortonormale $\mathbf{e}^I \equiv (\mathbf{e}_1^I \ \mathbf{e}_2^I \ \mathbf{e}_3^I)$ e con origine in un punto O e un sistema principale di coordinate solidale ad un corpo rigido isolato $\{s_1 \ s_2 \ s_3\}$ con base ortonormale $\mathbf{e}(t) \equiv (\mathbf{e}_1(t) \ \mathbf{e}_2(t) \ \mathbf{e}_3(t))$ e con origine nel suo centro di massa C , come mostrato in Fig. 2.1. Quest'ultima terna di coordinate viene definita in modo da soddisfare la disuguaglianza $J_{1C} > J_{2C} > J_{3C} > 0$, dove J_{iC} è il momento di inerzia del corpo rigido in C rispetto all'asse s_i .

Per semplicità analitica si fanno coincidere i due sistemi di coordinate al tempo $t = 0$: $\mathbf{e}^I = \mathbf{e}(0)$.

Si adotta la notazione compatta di Frankel, per cui il vettore della base - che sia $\mathbf{e}^I \equiv (\mathbf{e}_1^I \ \mathbf{e}_2^I \ \mathbf{e}_3^I)$ oppure $\mathbf{e}(t) \equiv (\mathbf{e}_1(t) \ \mathbf{e}_2(t) \ \mathbf{e}_3(t))$ - viene espresso da una matrice 1×3 , mentre il vettore delle componenti di una grandezza rispetto a tale base viene espresso da una matrice 1×3 [7].

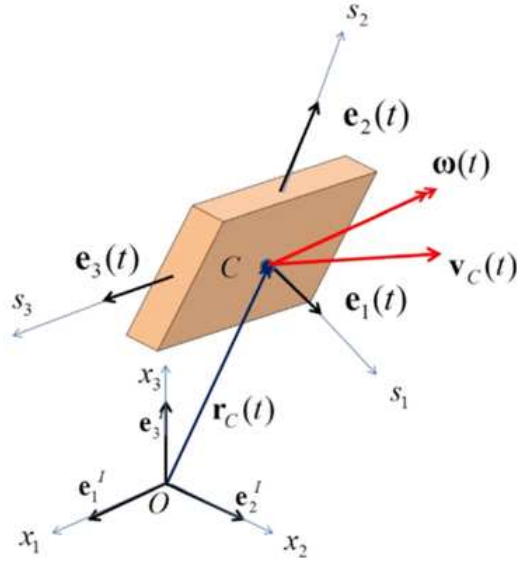


Figura 2.1: Sistema di coordinate fisso $\{x_1 \ x_2 \ x_3\}$ e sistema di coordinate solidale ad un corpo rigido $\{s_1 \ s_2 \ s_3\}$ [6]

La base $\mathbf{e}(t)$ si può ottenere dalla base $\mathbf{e}^I = \mathbf{e}(0)$ mediante l'utilizzo della matrice di rotazione $R(t)$, di determinante unitario

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}^I R(t) \quad (2.1)$$

Essendo matrice di rotazione, $R(t)$ appartiene al gruppo di Lie $SO(3)$, per cui l'inversa coincide con la trasposta. Vale allora che

$$\mathbf{e}^I = \mathbf{e}(t)(R(t))^T \quad (2.2)$$

Facendo la derivata temporale dell'Eq. (2.1) e utilizzando l'Eq. (2.2) si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}^I \dot{R}(t) = \mathbf{e}(t)(R(t))^T \dot{R}(t) \quad (2.3)$$

Si può dimostrare che [A]

$$(R(t))^T \dot{R}(t) \equiv \Omega(t) \quad (2.4)$$

dove $\Omega(t)$ rappresenta la matrice antisimmetrica della velocità angolare

$$\Omega(t) \equiv (R(t))^T \dot{R}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Il corrispettivo vettore della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ in \mathbb{R}^3 diventa

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(t) & \mathbf{e}_2(t) & \mathbf{e}_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Le Eq. (2.5)-(2.6) esprimono una corrispondenza tra la matrice antisimmetrica nel gruppo di Lie $SO(3)$, denotato con $so(3)$, e i vettori in \mathbb{R}^3 .

Riprendendo l'Eq. (2.3) si ha allora

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}(t)\Omega(t) \quad (2.7)$$

Si denota con $\mathbf{H}_C(t)$ il vettore del momento angolare del corpo rigido in C

$$\mathbf{H}_C(t) = \mathbf{e}(t)H_C(t) \equiv \mathbf{e}(t) \begin{pmatrix} H_{1C}(t) \\ H_{2C}(t) \\ H_{3C}(t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le sue componenti, $H_C(t)$, sono espresse dal prodotto tra la matrice principale di inerzia J_C e le componenti del vettore della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$H_C(t) = J_C\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} J_{1C} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2C} & 0 \\ 0 & 0 & J_{3C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Le equazioni di Eulero sono espresse da

$$\dot{\mathbf{H}}_C(t) = 0 \quad (2.10)$$

Si calcola la derivata temporale dell'Eq. (2.8) e si sfrutta l'Eq. (2.7), da cui

$$\dot{\mathbf{H}}_C(t) = \mathbf{e}(t)\dot{H}_C(t) + \dot{\mathbf{e}}(t)H_C(t) = \mathbf{e}(t)\{\dot{H}_C(t) + \Omega(t)H_C(t)\} \quad (2.11)$$

Pertanto l'Eq. (2.10) diventa

$$\mathbf{e}(t)\{\dot{H}_C(t) + \Omega(t)H_C(t)\} = 0 \quad (2.12)$$

Osservando che $\mathbf{e}(t)\Omega(t)H_C(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{H}_C(t)$, sviluppando l'Eq. (2.12) lungo le componenti si ha

$$\dot{H}_{1C}(t) - \omega_3(t)H_{2C}(t) + \omega_2(t)H_{3C}(t) = 0 \quad (2.13)$$

$$\dot{H}_{2C}(t) + \omega_3(t)H_{1C}(t) - \omega_1(t)H_{3C}(t) = 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{H}_{3C}(t) - \omega_2(t)H_{1C}(t) + \omega_1(t)H_{2C}(t) = 0 \quad (2.15)$$

Sostituendo l'Eq. (2.9) per $H_C(t)$, le Eq. (2.13)-(2.15) risultano in

$$J_{1C}\dot{\omega}_1(t) - (J_{2C} - J_{3C})\omega_2(t)\omega_3(t) = 0 \quad (2.16)$$

$$J_{2C}\dot{\omega}_2(t) - (J_{3C} - J_{1C})\omega_3(t)\omega_1(t) = 0 \quad (2.17)$$

$$J_{3C}\dot{\omega}_3(t) - (J_{1C} - J_{2C})\omega_1(t)\omega_2(t) = 0 \quad (2.18)$$

Sostituendo l'Eq. (2.9) per $\omega(t)$, le Eq. (2.13)-(2.15) risultano in

$$\dot{H}_{1C}(t) + \left(\frac{1}{J_{2C}} - \frac{1}{J_{3C}}\right)H_{2C}(t)H_{3C}(t) = 0 \quad (2.19)$$

$$\dot{H}_{2C}(t) + \left(\frac{1}{J_{3C}} - \frac{1}{J_{1C}}\right)H_{3C}(t)H_{1C}(t) = 0 \quad (2.20)$$

$$\dot{H}_{3C}(t) + \left(\frac{1}{J_{1C}} - \frac{1}{J_{2C}}\right)H_{1C}(t)H_{2C}(t) = 0 \quad (2.21)$$

Le Eq. (2.16)-(2.18), o indistintamente le Eq. (2.19)-(2.21), sono le equazioni di Eulero e governano il moto di rotazione libera di un corpo rigido.

2.2 Soluzione analitica delle equazioni di Eulero

Eulero formulò e dimostrò che, in un sistema di riferimento inerziale fisso, si conservano quattro quantità relative al moto di un corpo: l'energia cinetica e le tre componenti del momento angolare [6]. Le sue osservazioni portarono alla formulazione delle leggi di conservazione dell'energia cinetica rotazionale e del modulo del momento angolare

$$J_{1C}(\omega_1(t))^2 + J_{2C}(\omega_2(t))^2 + J_{3C}(\omega_3(t))^2 = 2K_{\text{rot}}(0) \quad (2.22)$$

$$(J_{1C}\omega_1(t))^2 + (J_{2C}\omega_2(t))^2 + (J_{3C}\omega_3(t))^2 = \|\mathbf{H}_C(0)\|^2 \quad (2.23)$$

$K_{\text{rot}}(0)$ rappresenta l'energia cinetica rotazione iniziale, calcolata dalle condizioni iniziali

$$K_{\text{rot}}(0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(0) \cdot \mathbf{H}_C(0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}(0))^T(J_C\boldsymbol{\omega}(0)) \equiv K_0 \quad (2.24)$$

mentre $\|\mathbf{H}_C(0)\|$ è la norma del vettore momento angolare iniziale, che rimane costante per tutto il moto

$$\|\mathbf{H}_C(0)\| = \sqrt{(H_{1C}(0))^2 + (H_{2C}(0))^2 + (H_{3C}(0))^2} \quad (2.25)$$

Quantitativamente, le soluzioni delle equazioni di Eulero furono ottenute da Eulero stesso risolvendo le Eq. (2.16)-(2.18) per $\omega(t)$, in seguito le stesse furono esposte da Wittenburg per mezzo delle funzioni ellittiche di Jacobi [4] e poi da Ashbaugh e altri risolvendo per $H_C(t)$ [1]. Qualitativamente, le soluzioni delle equazioni di Eulero si poggiano sull'intersezione tra l'ellissoide di energia, rappresentato dall'Eq. (2.22) e l'ellissoide del momento angolare, rappresentato dall'Eq. (2.23), rispetto agli assi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, sulla base dell'interpretazione geometrica presentata da Poinsot [2].

2.3 Interpretazione geometrica delle equazioni di Eulero

Poinsot aggiunse un'interpretazione geometrica alla soluzione analitica delle equazioni di Eulero [6]. Egli postulò che il vettore della velocità angolare si deve poggiare sia sull'ellissoide di energia (Eq. (2.22)) che sull'ellissoide del momento angolare (Eq. (2.23)), in riferimento agli assi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Di conseguenza, ogni intersezione, riportata all'ellissoide di energia, rappresenta la traiettoria del vettore della velocità angolare.

Per una data energia cinetica iniziale, $K_{\text{rot}}(0)$, si ottengono varie intersezioni andando a variare il modulo del vettore momento angolare iniziale, $\|\mathbf{H}_C(0)\|$. Queste intersezioni sono dette, nel loro insieme, polodi di Poinsot, cioè delle curve chiuse eccetto che ai punti finali degli assi principali dell'ellissoide di energia, come viene mostrato in Fig. 2.2.

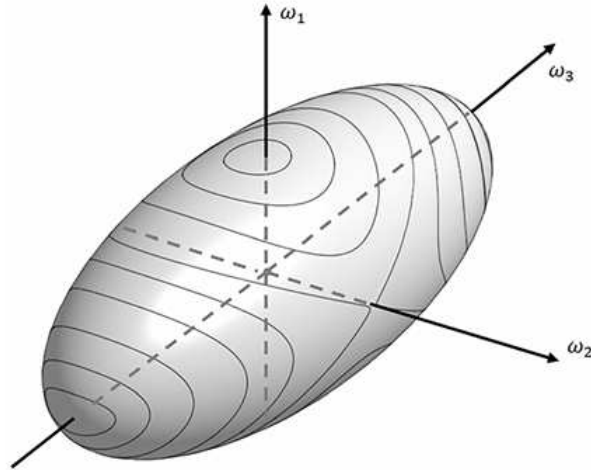


Figura 2.2: Polodi di Poincaré sull'ellissoide di energia [6]

I punti finali dell'asse minore dell'ellissoide rappresentano la rotazione permanente attorno all'asse s_1 , corrispondente al momento d'inerzia principale maggiore J_{1C} . I punti finali dell'asse maggiore dell'ellissoide rappresentano la rotazione permanente attorno all'asse s_3 , corrispondente al momento d'inerzia principale minore J_{3C} . Entrambi questi punti sono dei centri, attorno ai quali si svolgono delle traiettorie ellittiche. Il fatto che queste siano chiuse indica che, per piccole perturbazioni rispetto alle condizioni iniziali, la rotazione non lascia lo stato di rotazione permanente, perciò la rotazione è stabile. Per rotazione permanente si intende un moto alla Poincaré che si svolge a velocità angolare costante, e ciò accade se e solo se la velocità angolare iniziale è parallela all'asse d'inerzia in C [A].

Al contrario, i punti finali dell'asse intermedio, corrispondente alla rotazione permanente rispetto l'asse s_2 con il momento d'inerzia principale intermedio J_{2C} , sono punti di sella o punti fissi iperbolici. In prossimità di tali punti, le traiettorie sono delle iperboli, indicando che rotazioni perturbate diventano instabili, discostandosi significativamente dallo stato di rotazione permanente.

2.4 Soluzione geometrica delle equazioni di Eulero

L'esatta soluzione analitica si evince geometricamente a partire dai due integrali delle equazioni di Eulero: la conservazione dell'energia e la conservazione della norma del vettore momento angolare [6].

Utilizzando l'Eq. (2.22), si ricostruisce l'ellissoide di energia rispetto agli assi H_{1C} , H_{2C} , H_{3C}

$$\left(\frac{H_{1C}(t)}{\sqrt{2K_0J_{1C}}}\right)^2 + \left(\frac{H_{2C}(t)}{\sqrt{2K_0J_{2C}}}\right)^2 + \left(\frac{H_{3C}(t)}{\sqrt{2K_0J_{3C}}}\right)^2 = 1 \quad (2.26)$$

in cui

$$2K_0 = \frac{(H_{1C}(0))^2}{J_{1C}} + \frac{(H_{2C}(0))^2}{J_{2C}} + \frac{(H_{3C}(0))^2}{J_{3C}} \quad (2.27)$$

Utilizzando l'Eq. (2.23), si ricostruisce la sfera del momento angolare

$$(H_{1C}(t))^2 + (H_{2C}(t))^2 + (H_{3C}(t))^2 = 2K_0D \quad (2.28)$$

introducendo il parametro D , che ha le dimensioni di un momento di inerzia J_{iC}

$$D \equiv \frac{\|\mathbf{H}_C(0)\|^2}{2K_0} \equiv \frac{(H_{1C}(0))^2 + (H_{2C}(0))^2 + (H_{3C}(0))^2}{2K_0} \quad (2.29)$$

Facendo variare il raggio $\sqrt{2K_0D}$ della sfera del momento angolare tramite D , si trovano le traiettorie esatte del vettore momento angolare, ovvero le intersezioni tra l'ellissoide di inerzia (Eq. 2.26) e la sfera del momento angolare (Eq. 2.28) di raggio variabile, rispetto al sistema di riferimento solidale al corpo rigido. La sfera, per intersecarsi con l'ellissoide, deve avere raggio $\sqrt{2K_0D}$ minore o uguale al semiasse maggiore dell'ellissoide di inerzia e maggiore o uguale al semiasse minore dello stesso. Questa richiesta impone che

$$J_{3C} \leq D \leq J_{1C} \quad (2.30)$$

2.5 Adimensionalizzazione delle equazioni di Eulero

Le equazioni di Eulero vengono adimensionalizzate al fine di avere una migliore interpretazione e visualizzazione dei polodi [6]. Le espressioni delle componenti

adimensionalizzate del momento angolare e del tempo sono rispettivamente

$$\bar{H}_{iC} = \frac{H_{iC}}{\sqrt{2K_0 J_{2C}}} \quad (2.31)$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2K_0}{J_{2C}}} t \quad (2.32)$$

da cui le equazioni di Eulero (Eq. (2.19)-(2.21)) adimensionalizzate

$$\dot{\bar{H}}_{1C}(\bar{t}) + \left(1 - \frac{J_{2C}}{J_{3C}}\right) \bar{H}_{2C}(\bar{t}) \bar{H}_{3C}(\bar{t}) = 0 \quad (2.33)$$

$$\dot{\bar{H}}_{2C}(\bar{t}) + \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}} - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right) \bar{H}_{3C}(\bar{t}) \bar{H}_{1C}(\bar{t}) = 0 \quad (2.34)$$

$$\dot{\bar{H}}_{3C}(\bar{t}) + \left(\frac{J_{2C}}{J_{1C}} - 1\right) \bar{H}_{1C}(\bar{t}) \bar{H}_{2C}(\bar{t}) = 0 \quad (2.35)$$

L'ellissoide di energia (Eq. (2.26)) e la sfera del momento angolare (Eq. (2.28)) adimensionalizzati diventano rispettivamente

$$\left(\frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right) (\bar{H}_{1C})^2 + (\bar{H}_{2C})^2 + \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}}\right) (\bar{H}_{3C})^2 = 1 \quad (2.36)$$

$$(\bar{H}_{1C})^2 + (\bar{H}_{2C})^2 + (\bar{H}_{3C})^2 = \bar{d} \quad (2.37)$$

dove il raggio $\sqrt{\bar{d}}$ della sfera soddisfa la diseuguaglianza adimensionalizzata imposta dall'Eq. (2.30)

$$\frac{J_{3C}}{J_{2C}} \leq \bar{d} \leq \frac{J_{1C}}{J_{2C}} \quad (2.38)$$

essendo

$$\bar{d} = \frac{D}{J_{2C}} \quad (2.39)$$

2.6 Soluzione geometrica delle equazioni di Eulero adimensionalizzate

L'intersezione tra l'ellissoide d'energia adimensionalizzata (Eq. (2.36)) e la sfera del momento angolare adimensionalizzata (Eq. (2.37)) è mostrata in Fig 2.3, dove è stato assunto $\bar{d} = 1$ [6].

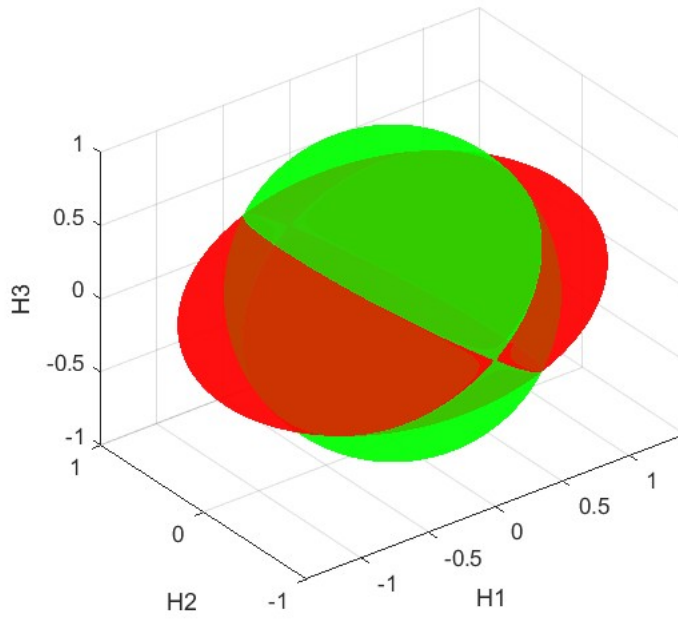


Figura 2.3: Intersezione tra l'ellissoide di energia e la sfera del momento angolare adimensionalizzate per $\bar{d} = 1$

Per trovare le soluzioni geometriche si fa variare \bar{d} e si riportano le intersezioni delle due superfici sui piani $(\bar{H}_{2C}, \bar{H}_{3C})$, $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{2C})$ e $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{3C})$. L'effetto della variazione di \bar{d} è mostrato nelle Fig. 2.4 e 2.5: quando $\bar{d} < 1$, il raggio della sfera è minore rispetto al caso presentato in Fig. 2.3, mentre per $\bar{d} > 1$ è maggiore, pur rispettando la condizione imposta dall'Eq. (2.38).

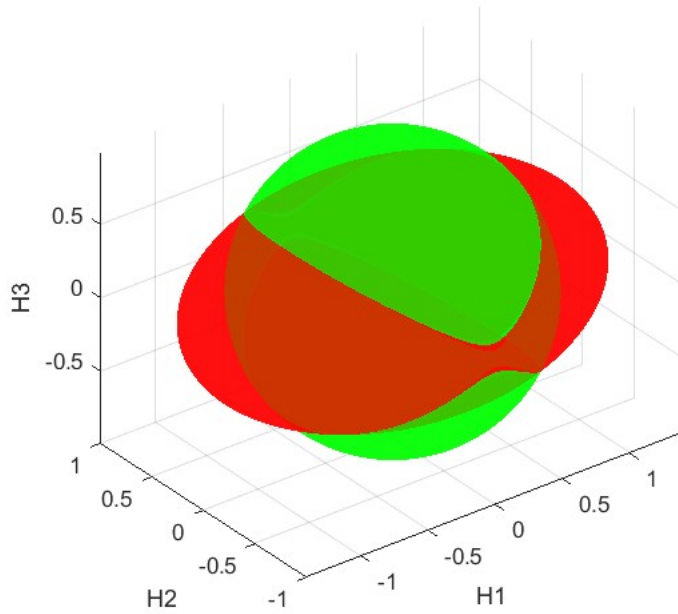


Figura 2.4: Intersezione tra l'ellissoide di energia e la sfera del momento angolare adimensionalizzate per $\bar{d} < 1$

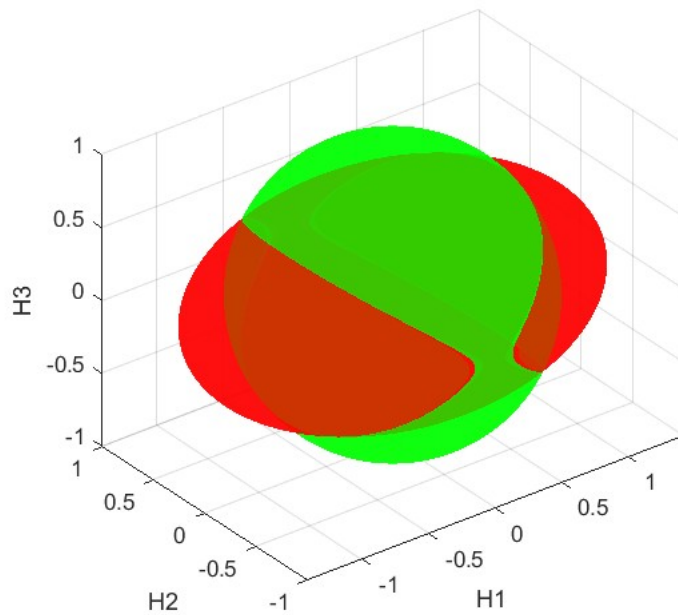


Figura 2.5: Intersezione tra l'ellissoide di energia e la sfera del momento angolare adimensionalizzate per $\bar{d} > 1$

Si considera la proiezione sul piano $(\bar{H}_{2C}, \bar{H}_{3C})$, mostrata in Fig. 2.6. L'equazione della traiettoria è ottenuta eliminando \bar{H}_{1C} dalle Eq. (2.36) e (2.37)

$$\left(1 - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right)(\bar{H}_{2C})^2 + \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}} - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right)(\bar{H}_{3C})^2 = \left(1 - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\bar{d}\right) \geq 0 \quad (2.40)$$

La disequaglianza è stata ottenuta utilizzando l'Eq. (2.38). I termini a sinistra dell'uguale sono tutti positivi, mentre il termine a destra dell'uguale deve essere positivo per l'Eq. (2.40) essere rappresentativa di un'ellissoide, altrimenti mostra uno stato di rotazione permanente: $\bar{H}_{1C} = \sqrt{\bar{d}}$; $\bar{H}_{2C} = \bar{H}_{3C} = 0$.

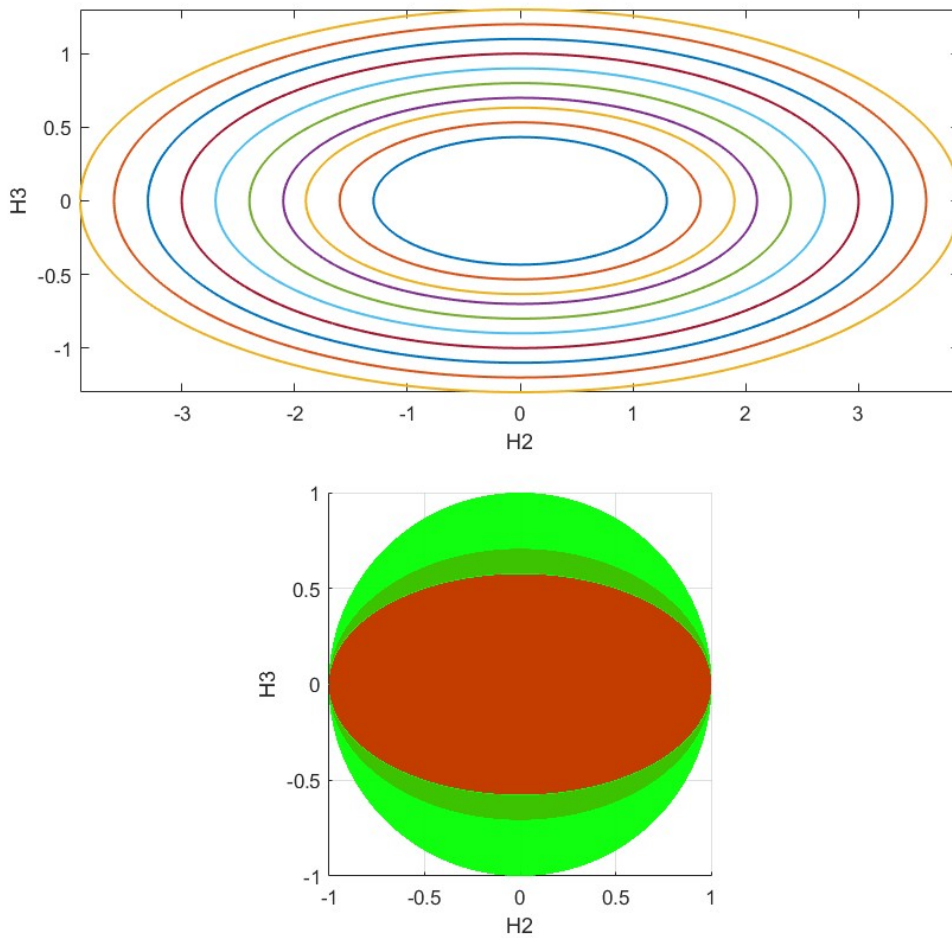


Figura 2.6: Proiezione delle traiettorie sul piano $(\bar{H}_{2C}, \bar{H}_{3C})$ al variare di \bar{d}

Si considera la proiezione sul piano $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{2C})$, mostrata in Fig. 2.7. L'equazione della traiettoria è ottenuta eliminando \bar{H}_{3C} dalle Eq. (2.36) e (2.37)

$$\left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}} - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right)(\bar{H}_{1C})^2 + \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}} - 1\right)(\bar{H}_{2C})^2 = \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}}\bar{d} - 1\right) \geq 0 \quad (2.41)$$

La diseuguaglianza è stata ottenuta utilizzando l'Eq. (2.38). I termini a sinistra dell'uguale sono tutti positivi, mentre il termine a destra dell'uguale non deve essere nullo, $\bar{d} > J_{3C}/J_{2C}$, ad esempio $D > J_{3C}$, per l'Eq. (2.41) essere rappresentativa di un'ellissoide, altrimenti mostra uno stato di rotazione permanente: $\bar{H}_{1C} = \bar{H}_{2C} = 0$; $\bar{H}_{3C} = \sqrt{\bar{d}}$.

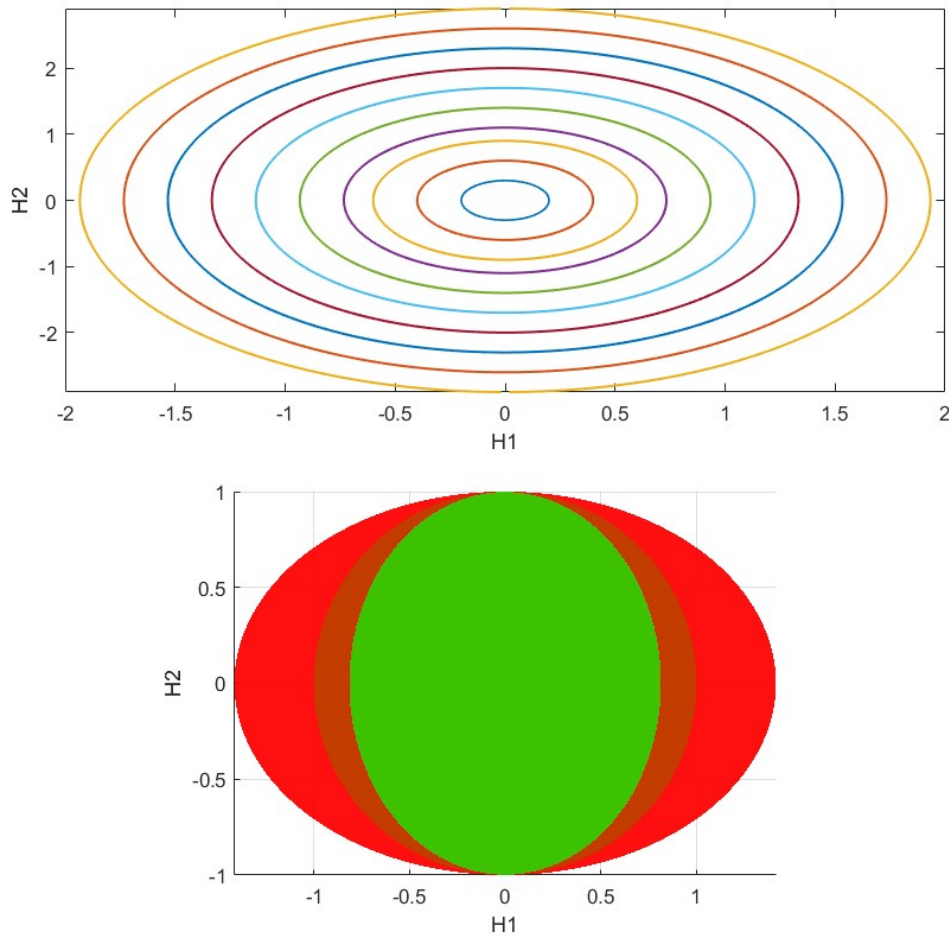


Figura 2.7: Proiezione delle traiettorie sul piano $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{2C})$ al variare di \bar{d}

Si considera la proiezione sul piano $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{3C})$, mostrata in Fig. 2.8. L'equazione della traiettoria è ottenuta eliminando \bar{H}_{2C} dalle Eq. (2.36) e (2.37)

$$-\left(1 - \frac{J_{2C}}{J_{1C}}\right)(\bar{H}_{1C})^2 + \left(\frac{J_{2C}}{J_{3C}} - 1\right)(\bar{H}_{3C})^2 = 1 - \bar{d} \quad (2.42)$$

I termini a sinistra dell'uguale sono tutti positivi. Allora l'Eq. (2.42) mostra un'iperbole. Le equazioni dei suoi asintoti sono

$$\bar{H}_{3C} = \pm \sqrt{\frac{J_{3C}(J_{1C} - J_{2C})}{J_{1C}(J_{2C} - J_{3C})}} \bar{H}_{2C} \quad (2.43)$$

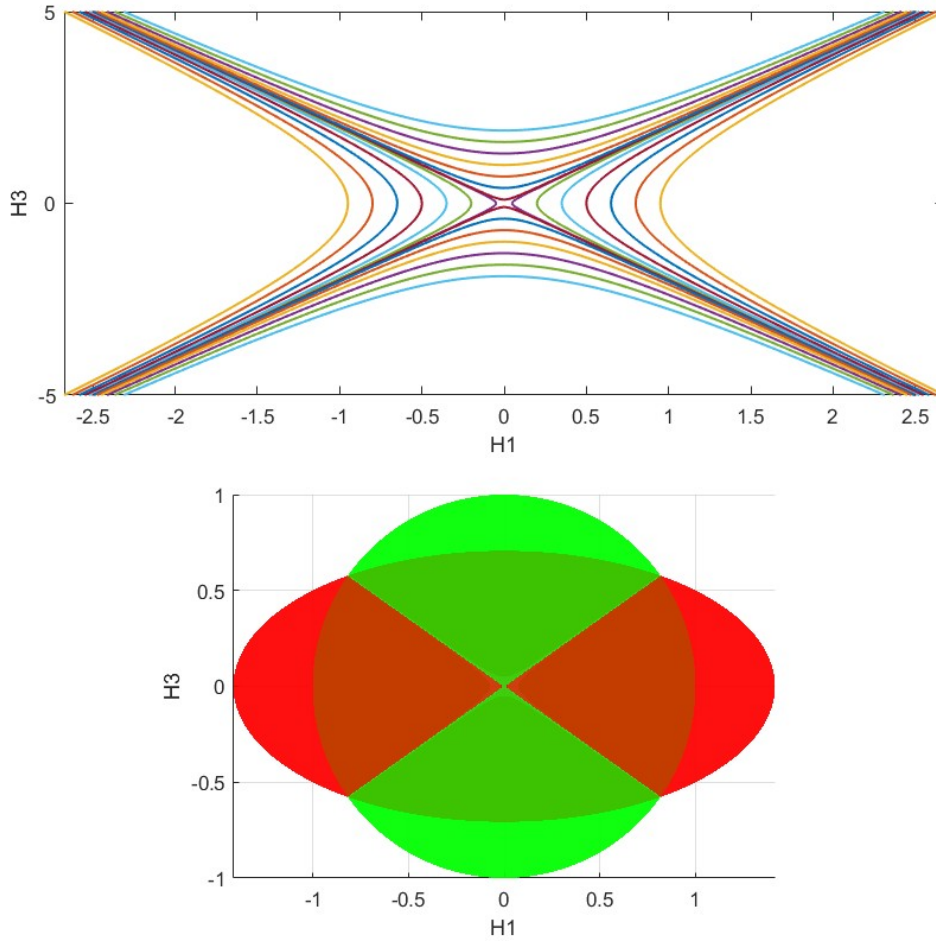


Figura 2.8: Proiezione delle traiettorie sul piano $(\bar{H}_{1C}, \bar{H}_{3C})$ al variare di \bar{d}

Se $\bar{d} < 1$, i vertici e i punti focali dell'iperbole sono sull'asse \bar{H}_{3C} nel piano proiettato. Pertanto, sull'ellissoide di energia, la traiettoria è chiusa e circonda l'asse \bar{H}_{3C} .

Se $\bar{d} > 1$, i vertici e i punti focali dell'iperbole sono sull'asse \bar{H}_{1C} nel piano proiettato. Pertanto, sull'ellissoide di energia, la traiettoria è chiusa e circonda l'asse \bar{H}_{1C} .

Quando $\bar{d} = 1$, la traiettoria dell'Eq. (2.42) coincide con l'Eq. (2.43). Pertanto, gli asintoti dell'Eq. (2.43) diventano bisettrici. Inoltre, $\bar{H}_{1C} = \bar{H}_{3C} = 0$ rappresenta lo stato di rotazione permanente: $\bar{H}_{2C} = 1$.

2.7 Soluzione analitica delle equazioni di Eulero adimensionalizzate

Dalle Eq. (2.40)-(2.41), \bar{H}_{1C} e \bar{H}_{3C} possono essere risolte per \bar{H}_{2C} , rispettivamente [4]

$$(\bar{H}_{1C})^2 = \frac{J_{1C}(J_{2C} - J_{3C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}(\bar{a}^2 - (\bar{H}_{2C})^2) \quad (2.44)$$

$$(\bar{H}_{3C})^2 = \frac{J_{3C}(J_{1C} - J_{2C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}(\bar{b}^2 - (\bar{H}_{2C})^2) \quad (2.45)$$

dove sono state introdotte le costanti

$$\bar{a}^2 \equiv \frac{J_{2C}\bar{d} - J_{3C}}{J_{2C} - J_{3C}} \equiv \frac{D - J_{3C}}{J_{2C} - J_{3C}} \quad (2.46)$$

$$\bar{b}^2 \equiv \frac{J_{1C} - J_{2C}\bar{d}}{J_{1C} - J_{2C}} \equiv \frac{J_{1C} - D}{J_{1C} - J_{2C}} \quad (2.47)$$

che soddisfano

$$\bar{a}^2 - \bar{b}^2 = \frac{(\bar{d} - 1)\left(\frac{J_{1C}}{J_{2C}} - \frac{J_{3C}}{J_{2C}}\right)}{\left(1 - \frac{J_{3C}}{J_{2C}}\right)\left(\frac{J_{1C}}{J_{2C}} - 1\right)} = \frac{(D - J_{2C})(J_{1C} - J_{3C})}{(J_{2C} - J_{3C})(J_{1C} - J_{2C})} \quad (2.48)$$

Sostituendo le Eq. (2.44)-(2.45) all'Eq. (2.34) e separando le variabili si ha

$$\frac{d\bar{H}_{2C}}{\sqrt{(\bar{a}^2 - (\bar{H}_{2C})^2)(\bar{b}^2 - (\bar{H}_{2C})^2)}} = -\sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}}d\bar{t} \quad (2.49)$$

Primo caso: $\bar{a}^2 < \bar{b}^2$, da cui $\bar{a} < \bar{b}$, $\bar{d} < 1$, e quindi $D < J_{2C}$. Dall'Eq. (2.49)

segue

$$\int \frac{d(\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{a}})}{\sqrt{(1 - (\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{a}})^2)(1 - (\frac{\bar{a}}{\bar{b}})^2(\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{a}})^2)}} = - \int \bar{b} \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} d\bar{t} \quad (2.50)$$

L'integrale a sinistra dell'uguale è un integrale ellittico di primo tipo, pertanto, utilizzando le funzioni ellittiche di Jacobi, si ottiene l'espressione

$$\bar{H}_{2C} = -\bar{a}\text{sn}(\bar{\xi}(\bar{t})) \quad (2.51)$$

con

$$\bar{\xi}(\bar{t}) = \bar{b} \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} (\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (2.52)$$

Le soluzioni per \bar{H}_{1C} e \bar{H}_{3C} sono ottenute sostituendo l'Eq (2.51) alle Eq. (2.44)-(2.45), e utilizzando i due teoremi sulle funzioni ellittiche: $\text{sn}^2\tau + \text{cn}^2\tau = 1$ e $\text{dn}^2\tau + k^2\text{sn}^2\tau = 1$, con $k^2 = \bar{a}^2/\bar{b}^2$

$$\bar{H}_{1C} = \pm \bar{a} \sqrt{\frac{J_{1C}(J_{2C} - J_{3C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \text{cn}(\bar{\xi}(\bar{t})) \quad (2.53)$$

$$\bar{H}_{3C} = \pm \bar{b} \sqrt{\frac{J_{3C}(J_{1C} - J_{2C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \text{dn}(\bar{\xi}(\bar{t})) \quad (2.54)$$

Il segno di queste due componenti adimensionalizzate del momento angolare è determinato dal segno delle condizioni iniziali.

Secondo caso: $\bar{a}^2 > \bar{b}^2$, da cui $\bar{a} > \bar{b}$, $\bar{d} > 1$, e quindi $D > J_{2C}$. Dall'Eq. (2.49)

segue

$$\int \frac{d(\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{b}})}{\sqrt{(1 - (\frac{\bar{b}}{\bar{a}})^2(\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{b}})^2)(1 - (\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{b}})^2)}} = - \int \bar{a} \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} d\bar{t} \quad (2.55)$$

Le soluzioni si trovano allo stesso modo mostrato nel primo caso.

$$\bar{H}_{2C} = -\bar{b}\text{sn}(\bar{\eta}(\bar{t})) \quad (2.56)$$

con

$$\bar{\eta}(\bar{t}) = \bar{a} \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} (\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (2.57)$$

$$\bar{H}_{1C} = \pm \bar{a} \sqrt{\frac{J_{1C}(J_{2C} - J_{3C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \operatorname{dn}(\bar{\eta}(\bar{t})) \quad (2.58)$$

$$\bar{H}_{3C} = \pm \bar{b} \sqrt{\frac{J_{3C}(J_{1C} - J_{2C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \operatorname{cn}(\bar{\eta}(\bar{t})) \quad (2.59)$$

Terzo caso: $\bar{a}^2 = \bar{b}^2$, da cui $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{d} = 1$, e quindi $D = J_{2C}$. L'Eq. (2.49) diventa

$$\frac{d\bar{H}_{2C}}{\bar{a}^2 - (\bar{H}_{2C})^2} = -\sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} d\bar{t} \quad (2.60)$$

Integrando si ottiene

$$\tanh^{-1}\left(\frac{\bar{H}_{2C}}{\bar{a}}\right) = -\bar{a} \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{2C})(J_{2C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}} (\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (2.61)$$

da cui

$$\bar{H}_{2C} = -\bar{a} \tanh(\bar{\eta}(\bar{t})) \quad (2.62)$$

$$\bar{H}_{1C} = \pm \bar{a} \sqrt{\frac{J_{1C}(J_{2C} - J_{3C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \frac{1}{\cosh(\bar{\eta}(\bar{t}))} \quad (2.63)$$

$$\bar{H}_{3C} = \pm \bar{a} \sqrt{\frac{J_{3C}(J_{1C} - J_{2C})}{J_{2C}(J_{1C} - J_{3C})}} \frac{1}{\cosh(\bar{\eta}(\bar{t}))} \quad (2.64)$$

In questo caso le soluzioni non sono periodiche, mentre nei casi precedenti lo sono. Pertanto, per $\bar{\eta}(\bar{t}) \rightarrow \infty$, \bar{H}_{1C} e \bar{H}_{3C} vanno a zero, mentre \bar{H}_{2C} tende a $-\bar{a}$. Inoltre, per $\bar{d} \rightarrow 1$, le soluzioni dei casi precedenti convergono alla soluzione di questo caso.

2.8 Ricostruzione della matrice di rotazione

L'utilizzo della matrice di rotazione serve per comprendere come il corpo rigido ruota durante il suo moto rispetto al sistema di riferimento fisso, secondo l'Eq. (2.2).

Tuttavia, quando un corpo rigido ruota liberamente, possono presentarsi i punti critici degli angoli di Eulero, infatti l'angolo di nutazione θ presenta delle criticità quando assume dei valori prossimi a $n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$, in più il vettore della velocità angolare $\omega(t)$ non è un differenziale esatto [A]. Per evitarli si potrebbero usare quattro coordinate, come i quaternioni, ma in questo modo la complessità di calcolo aumenta. Si ricorre quindi ad una ricostruzione della matrice di rotazione [6]. La formula di ricostruzione è data dall'Eq. (2.7)

$$\dot{R}(t) = R(t)\Omega(t) \quad (2.65)$$

Quando la velocità angolare rimane costante, $\omega(t) = \omega_0$, l'Eq. (2.65) può essere integrata analiticamente. Sulla base di questa possibilità, la stessa Eq. (2.65) può essere integrata numericamente per approssimazione ad ogni passo temporale quando $\omega(t)$ varia con il tempo.

Nel caso in cui la velocità angolare sia costante, la soluzione dell'Eq. (2.65), dato il valore iniziale $R(0)$, è

$$R(t) = R(0) \exp(t \Omega_0) \quad (2.66)$$

dove è stata definita la matrice esponenziale

$$\exp(t \Omega_0) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Omega_0)^k \quad (2.67)$$

Ricorrendo al teorema di Cayley-Hamilton, per cui ogni matrice quadrata è radice del suo polinomio caratteristico, si trova una forma semplificata dell'Eq. (2.67) del tipo

$$\exp(t \Omega_0) \equiv I_d + \frac{\Omega_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|} \sin(t \|\boldsymbol{\omega}_0\|) + \left(\frac{\Omega_0}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|} \right)^2 (1 - \cos(t \|\boldsymbol{\omega}_0\|)) \quad (2.68)$$

con $\|\boldsymbol{\omega}_0\|^2 = (\omega_{10})^2 + (\omega_{20})^2 + (\omega_{30})^2$. L'Eq. (2.68) permette l'integrazione numerica dell'Eq. (2.65) quando la velocità angolare varia con il tempo. Pertanto, si utilizza il metodo del punto medio, secondo cui si approssima il valore di un integrale definito di una funzione valutando quest'ultima al tempo $t = (t_{n+1} + t_n)/2$, usando il valore medio della velocità angolare

$$\omega(t + \Delta t/2) \equiv \frac{1}{2} \{\omega(t) + \omega(t + \Delta t)\} \quad (2.69)$$

Assumendo che la velocità angolare sia costante durante il passo temporale da t a $t + \Delta t$, si integra l'Eq. (2.65) analiticamente per il valore iniziale $R(t)$ per trovare $R(t + \Delta t)$

$$R(t + \Delta t) = R(t) \exp \{ \Delta t \Omega(t + \Delta t/2) \} \quad (2.70)$$

dove si utilizza l'Eq. (2.68) per valutare la matrice esponenziale per $\omega_0 = \omega(t + \Delta t/2)$.

Capitolo 3

Simulazioni numeriche

3.1 Soluzione numerica delle equazioni di Eulero

Per ottenere le soluzioni numeriche si integrano le equazioni di Eulero utilizzando il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine. Infatti, le equazioni di Eulero riportate nella forma delle Eq. (2.16)-(2.18) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in quanto, derivando il vettore della velocità angolare rispetto al tempo, in componenti si ottiene [A]

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta} \cos \phi + \ddot{\psi} \sin \phi \sin \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} (\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta) \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\ddot{\theta} \sin \phi + \ddot{\psi} \cos \phi \sin \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} (\dot{\theta} \cos \phi \cos \theta - \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta) \quad (3.2)$$

$$\dot{\omega}_3 = \ddot{\psi} \cos \phi + \ddot{\phi} - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.3)$$

Tuttavia, le stesse equazioni di Eulero non vengono risolte per gli angoli di Eulero, al fine di evitare punti critici e complessità di calcolo [A], ma vengono risolte rispetto alla velocità angolare, che viene ottenuta sfruttando l'inversa dell'Eq. (2.9), da cui le Eq. (2.19)-(2.21). Il sistema è ora costituito da tre equazioni differenziali ordinarie di primo ordine. Dato che un'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere ricondotta a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, e in questo caso $n = 1$, si nota come il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine coincide con il metodo di Eulero esplicito.

In definitiva, vengono integrate le Eq. (2.19)-(2.21) utilizzando il metodo di Eulero esplicito per tempi discreti con incremento temporale Δt . Per un dato $H_{iC}(t)$,

il metodo numerico fornisce $H_{iC}(t + \Delta t)$, dove $H_{iC}(0)$ è noto dalle condizioni iniziali. Le soluzioni per $\omega(t)$ si ottengono infine invertendo l'Eq. (2.9).

Si riporta di seguito lo schema formale di Eulero esplicito per la risoluzione delle equazioni di Eulero. Dalle Eq. (2.19)-(2.21) si esplicitano $\dot{H}_{1C}(t)$, $\dot{H}_{2C}(t)$, $\dot{H}_{3C}(t)$

$$\dot{H}_{1C}(t) = -\left(\frac{1}{J_{2C}} - \frac{1}{J_{3C}}\right)H_{2C}(t)H_{3C}(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{H}_{2C}(t) = -\left(\frac{1}{J_{3C}} - \frac{1}{J_{1C}}\right)H_{3C}(t)H_{1C}(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{H}_{3C}(t) = -\left(\frac{1}{J_{1C}} - \frac{1}{J_{2C}}\right)H_{1C}(t)H_{2C}(t) \quad (3.6)$$

Si nota come la derivata di ogni componente del momento angolare dipenda dal prodotto delle altre due. Si introducono le costanti

$$\alpha = \left(\frac{1}{J_{2C}} - \frac{1}{J_{3C}}\right) = \left(\frac{J_{3C} - J_{2C}}{J_{2C}J_{3C}}\right) \quad (3.7)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{J_{3C}} - \frac{1}{J_{1C}}\right) = \left(\frac{J_{1C} - J_{3C}}{J_{1C}J_{3C}}\right) \quad (3.8)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{J_{1C}} - \frac{1}{J_{2C}}\right) = \left(\frac{J_{2C} - J_{1C}}{J_{1C}J_{2C}}\right) \quad (3.9)$$

per cui sostituendo

$$\dot{H}_{1C}(t) = -\alpha H_{2C}(t)H_{3C}(t) \quad (3.10)$$

$$\dot{H}_{2C}(t) = -\beta H_{3C}(t)H_{1C}(t) \quad (3.11)$$

$$\dot{H}_{3C}(t) = -\gamma H_{1C}(t)H_{2C}(t) \quad (3.12)$$

A questo punto si applica il metodo di Eulero esplicito per cui

$$H_{1C}(t + \Delta t) = H_{1C}(t) - h\alpha H_{2C}(t)H_{3C}(t) \quad (3.13)$$

$$H_{2C}(t + \Delta t) = H_{2C}(t) - h\beta H_{3C}(t)H_{1C}(t) \quad (3.14)$$

$$H_{3C}(t + \Delta t) = H_{3C}(t) - h\gamma H_{1C}(t)H_{2C}(t) \quad (3.15)$$

3.2 L'esperimento di Dzhani­bekov

Si considera un dado a farfalla caratterizzato dai seguenti valori dei momenti di inerzia: $J_{1C} = 3.036 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^2$, $J_{2C} = 2.741 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^2$, $J_{3C} = 0.699 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^2$. Il momento di inerzia intermedio si ha lungo la direzione assiale del dado a

farfalla. Il tempo $t = 0$ indica quando questo si distacca dal bullone con momento angolare principale $H_{2C}(0) = 2.1252 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s}$ e con momenti angolari secondari $H_{1C}(0) = 0.001 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s}$ e $H_{3C}(0) = 0.001 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2\text{s}$.

Segue il codice MATLAB:

```
s0 = 0;
sf = 40;
h = 0.00002;
s = [s0:h:sf]';
n = length(s);
u = ones(n,1);
u(1) = 0.001*10^(-5);
v = ones(n,1);
v(1) = 2.1252*10^(-5);
w = ones(n,1);
w(1) = 0.001*10^(-5);
J1 = 3.036*10^(-6);
J2 = 2.741*10^(-6);
J3 = 0.699*10^(-6);
alpha = (J3-J2)/J2/J3;
beta = (J1-J3)/J1/J3;
gamma = (J2-J1)/J1/J2;
m(1) = sqrt(u(1)^2+v(1)^2+w(1)^2);
for i = 2:n
    u(i) = u(i-1)-h*alpha*v(i-1)*w(i-1);
    v(i) = v(i-1)-h*beta*u(i-1)*w(i-1);
    w(i) = w(i-1)-h*gamma*u(i-1)*v(i-1);
    m(i) = sqrt(u(i)^2+v(i)^2+w(i)^2);
end
```

Il metodo di Eulero esplicito, come anche il metodo di Runge-Kutta, dipende fortemente dal passo di integrazione h . Più si fa diminuire h , più l'errore dovuto agli arrotondamenti fatti ad ogni passo da parte della macchina è minore. L'Eulero

esplicito approssima in modo peggiore rispetto al Runge-Kutta, ma in questo caso specifico abbassando ulteriormente h non si hanno significativi miglioramenti: il metodo di integrazione scelto è adeguato alla soluzione numerica del problema.

Plottando $H_{1C}(t)$, $H_{2C}(t)$, $H_{3C}(t)$ e $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ rispetto al tempo si ottiene la soluzione numerica riportata in Fig. 3.1.

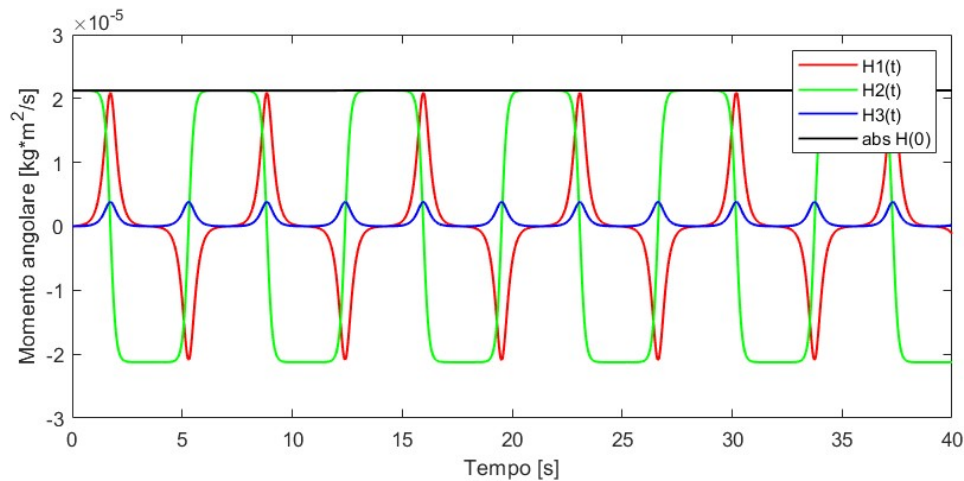


Figura 3.1: Soluzione numerica dell'esperimento Dzhanibekov. Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Osservando il grafico, è evidente come si verifichi a intervalli regolari l'inversione del momento angolare e quindi - utilizzando l'Eq.(2.9) - della velocità angolare, da cui il ribaltamento del dado a farfalla rispetto all'asse intermedio. Si nota anche come, negli istanti di inversione di rotazione, intervengano le rotazioni secondarie rispetto agli altri assi: i picchi rappresentano i contributi rispetto all'asse maggiore e all'asse minore, di intensità differente. Il momento angolare si conserva.

3.3 Casi asimmetrici

Per casi asimmetrici si intendono quei casi in cui il momento di inerzia intermedio J_{2C} è uguale o al momento di inerzia maggiore J_{1C} o al momento di inerzia minore J_{3C} . La soluzione analitica per questi casi si ottiene calcolando il limite delle equazioni risolutive delle equazioni di Eulero.

Caso J_{2C} prossimo a J_{1C} : J_{2C} può essere espresso utilizzando un parametro $\varepsilon \ll 1$, tale per cui

$$J_{2C} = J_{1C} - \varepsilon \quad (3.16)$$

Sostituendo l'Eq. (3.16) nella soluzione analitica del primo caso e facendone il limite per ε che tende a zero, si ottengono

$$\bar{H}_{1C} = \pm \bar{a}_s \cos((\bar{\xi}_s(\bar{t})), \quad \bar{H}_{2C} = -\bar{a}_s \sin((\bar{\xi}_s(\bar{t})), \quad \bar{H}_{3C} = \pm \sqrt{\frac{J_{3C}(J_{1C} - D)}{J_{1C}(J_{1C} - J_{3C})}} = \text{costante} \quad (3.17)$$

con

$$\bar{a}_s = \pm \sqrt{\frac{D - J_{3C}}{J_{1C} - J_{3C}}} \quad (3.18)$$

$$\bar{\xi}_s(\bar{t}) = \sqrt{\frac{(J_{1C} - D)(J_{1C} - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}}(\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (3.19)$$

Le soluzioni analitiche vengono confermate numericamente in Fig. 3.2.

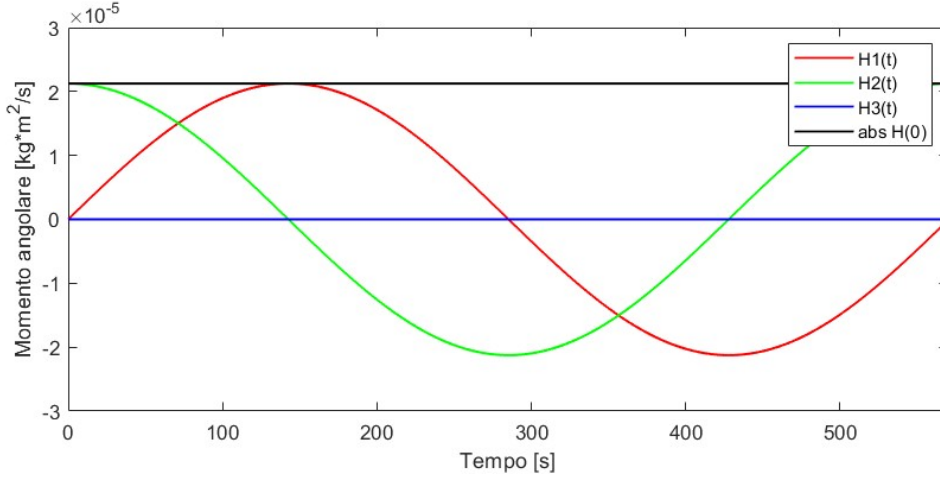


Figura 3.2: Caso J_{2C} prossimo a J_{1C} . Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Come si vede, rispetto al caso precedente, le rotazioni rispetto gli assi s_1 e s_2 sono sinusoidali mentre rispetto l'asse s_3 la rotazione è costante: l'effetto Dzhanibekov non si manifesta, siccome non è presente un asse intermedio, essendo $J_{1C} = J_{2C} > J_{3C}$.

Caso J_{2C} prossimo a J_{3C} : J_{2C} può essere espresso utilizzando un parametro $\varepsilon \ll 1$, tale per cui

$$J_{2C} = J_{3C} + \varepsilon \quad (3.20)$$

Sostituendo l'Eq. (3.20) nella soluzione analitica del secondo caso e facendone il limite per ε che tende a zero, si ottengono

$$\bar{H}_{1C} = \pm \sqrt{\frac{J_{1C}(D - J_{3C})}{J_{3C}(J_{1C} - J_{3C})}} = \text{costante}, \quad \bar{H}_{2C} = -\bar{b}_s \sin((\bar{\eta}_s(\bar{t})), \quad \bar{H}_{3C} = \pm \bar{b}_s \cos((\bar{\eta}_s(\bar{t}))) \quad (3.21)$$

con

$$\bar{b}_s = \pm \sqrt{\frac{J_{1C} - D}{J_{1C} - J_{3C}}} \quad (3.22)$$

$$\bar{\eta}_s(\bar{t}) = \sqrt{\frac{(J_{1C} - J_{3C})(D - J_{3C})}{J_{1C}J_{3C}}}(\bar{t} - \bar{t}_0) \quad (3.23)$$

Le soluzioni analitiche vengono confermate numericamente in Fig. 3.3.

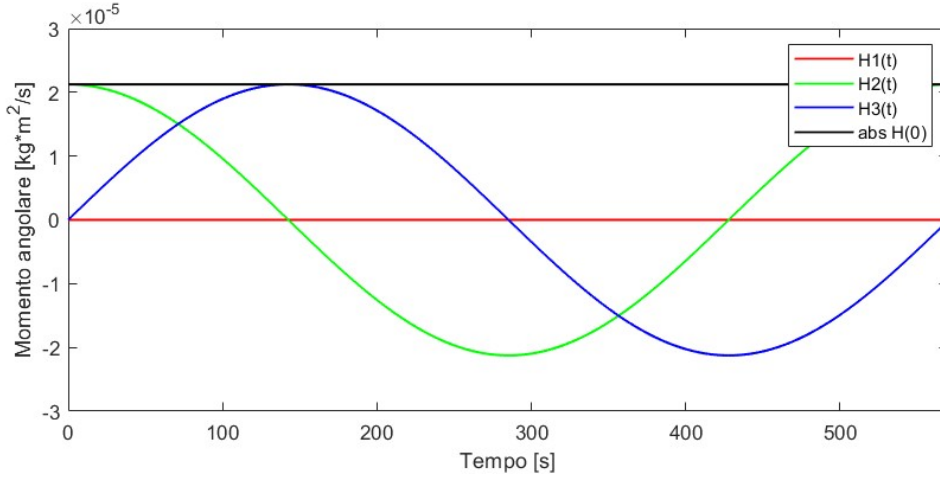


Figura 3.3: Caso J_{2C} prossimo a J_{3C} . Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Come si vede, rispetto al caso precedente, le rotazioni rispetto gli assi s_2 e s_3 sono sinusoidali mentre rispetto l'asse s_1 la rotazione è costante: l'effetto Dzhanibekov non si manifesta, siccome non esiste un asse intermedio, essendo $J_{1C} > J_{2C} = J_{3C}$.

3.4 Dispiegamento dei pannelli solari di un satellite

Viene esaminato il caso in cui il momento di inerzia rispetto a ogni asse è variabile. Un satellite, rilasciato nello spazio, dispiega i suoi pannelli solari, cambiando geometria, quindi i momenti di inerzia rispetto ai suoi assi (corpo istantaneamente rigido). Si considerano tre configurazioni, in ognuna la rotazione viene effettuata lungo l'asse del satellite, caratterizzato dal momento d'inerzia principale J_{2C} . Al fine di avere un confronto diretto con le soluzioni numeriche prima mostrate, si utilizzano gli stessi parametri del dado a farfalla.

Nella prima configurazione, i pannelli solari sono chiusi, come mostrato in Fig. 3.4. Rispetto al centro di massa C del satellite, vale che $J_{1C} > J_{3C} > J_{2C}$.



Figura 3.4: Prima configurazione: pannelli solari chiusi [8]

Nonostante sia presente un momento d'inerzia principale intermedio, qui J_{3C} , l'effetto Dzhanibekov non si manifesta poiché la rotazione principale viene impressa lungo l'asse del satellite con momento d'inerzia principale J_{2C} , qui minimo: la rotazione è stabile, ovvero la rotazione non si svolge attorno all'asse con momento d'inerzia principale intermedio. Questo viene confermato numericamente in Fig. 3.5.

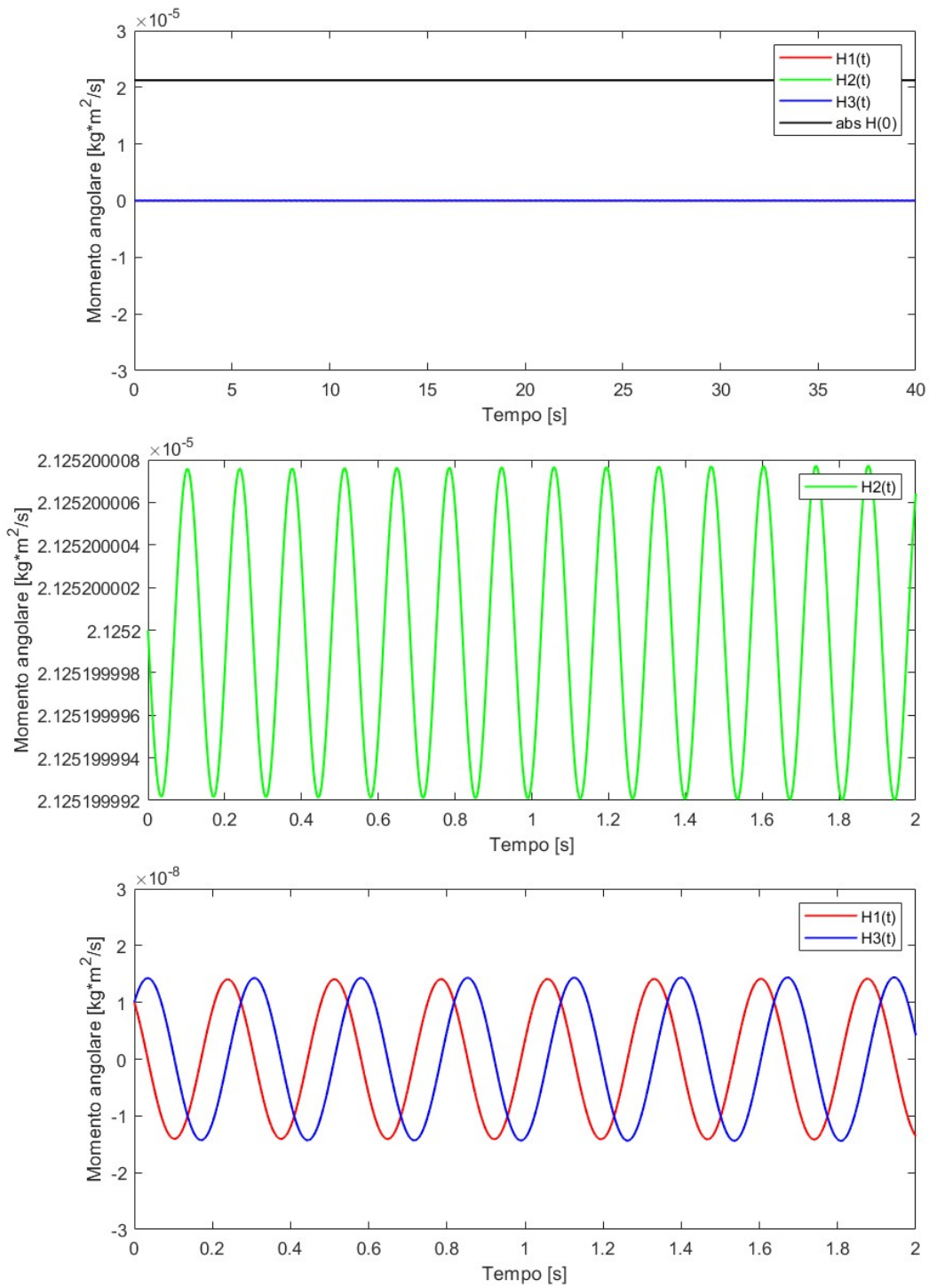


Figura 3.5: Soluzione numerica della prima configurazione. Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Nella seconda configurazione, i pannelli solari sono semi-aperti, come mostrato in Fig. 3.6. Rispetto al centro di massa C del satellite, vale che $J_{1C} > J_{3C} = J_{2C}$.



Figura 3.6: Seconda configurazione: pannelli solari semi-aperti [8]

Essendo $J_{2C} = J_{3C}$, ci si riconduce al caso asimmetrico presentato in precedenza: la soluzione numerica riprende quella mostrata per J_{2C} prossimo a J_{3C} , e viene mostrata in Fig. 3.7.

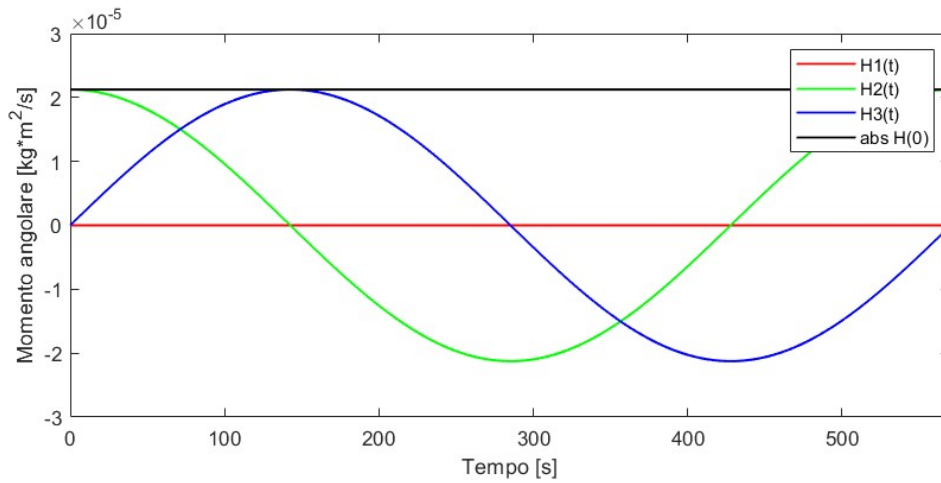


Figura 3.7: Soluzione numerica della seconda configurazione. Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Nella terza configurazione, i pannelli solari sono completamente aperti, come mostrato in Fig. 3.8. Rispetto al centro di massa C del satellite, vale che $J_{1C} > J_{2C} > J_{3C}$.



Figura 3.8: Terza configurazione: pannelli solari completamente aperti [8]

J_{2C} supera J_{3C} e diventa il momento d'inerzia principale intermedio: ci si riconduce al fenomeno Dzhanibekov, come riportato in Fig. 3.9.

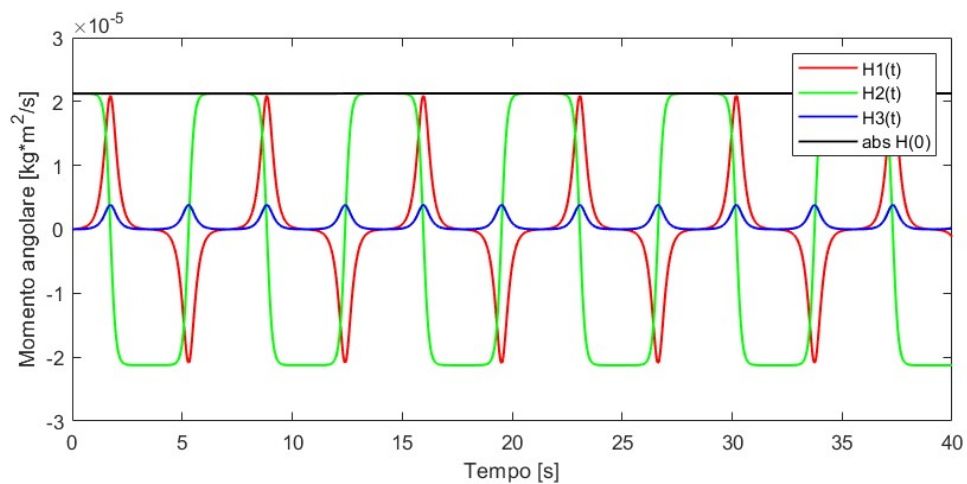


Figura 3.9: Soluzione numerica della terza configurazione. Si riportano gli andamenti di $H_{1C}(t)$ in rosso, $H_{2C}(t)$ in verde, $H_{3C}(t)$ in blu, $\|\mathbf{H}_C(t)\|$ in nero

Conclusioni

L'effetto Dzhanibekov è stato spiegato per via analitica, geometrica e numerica. La soluzione analitica dimostra matematicamente come avviene il fenomeno, servendosi delle funzioni ellittiche di Jacobi e di funzioni sinusoidali iperboliche. La soluzione geometrica, sebbene permette di visualizzare il fenomeno e quindi lo rende più intuibile, non mostra quanto velocemente o lentamente viene percorsa ogni orbita dal vettore della velocità angolare. La soluzione numerica abbassa il grado di complessità risolutiva della soluzione analitica, utilizzando il metodo numerico del Runge-Kutta al quarto ordine ricondotto all'Eulero esplicito, e manifesta l'andamento temporale del vettore della velocità angolare assente nella soluzione geometrica: dal grafico risultante dal codice MATLAB è possibile vedere la periodicità di inversione del moto del corpo rigido, e quindi il ribaltamento di quest'ultimo dovuto alla rotazione rispetto all'asse con momento d'inerzia principale intermedio, che risulta instabile. Inoltre, se dapprima l'effetto Dzhanibekov possa sembrare violi la legge di conservazione del momento angolare, viene dimostrato come, al contrario, rispetti le leggi della fisica: il momento angolare rimane costante durante il moto. Infine, è stato presentato un esempio applicativo del fenomeno: il dispiegamento dei pannelli solari di un satellite.

Appendice A

Dinamica del corpo rigido

A.1 Angoli di Eulero e velocità angolare

L'orientazione della base solidale al corpo rigido $\mathbf{e}(t)$ rispetto alla base fissa \mathbf{e}^I può essere pensata come il risultato di tre rotazioni successive, ciascuna individuata da un angolo: di precessione ψ , di nutazione θ e di rotazione propria ϕ [4][9]. Questi tre angoli sono detti angoli di Eulero. Si considera inizialmente $\mathbf{e}(t)$ essere coincidente con \mathbf{e}^I . Di seguito vengono sottintese le dipendenze dal tempo. La prima rotazione di ψ viene effettuata sull'asse \mathbf{e}_3^I , questa porta la base dalla sua orientazione originale ad una intermedia \mathbf{e}'' . La seconda rotazione di θ sull'asse \mathbf{e}_1'' risulta in un'altra orientazione intermedia \mathbf{e}' . La terza rotazione di ϕ sull'asse \mathbf{e}_3' fa ottenere l'orientazione finale della base \mathbf{e} . Considerando le rotazioni di ciascun angolo individualmente

$$\mathbf{e} = R_\phi \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' = R_\theta \mathbf{e}'', \quad \mathbf{e}'' = R_\psi \mathbf{e}^I \quad (\text{A.1})$$

con

$$R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}, \quad R_\phi = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

dall'Eq. (A.1) segue che la matrice di rotazione complessiva è

$$R = R_\phi R_\theta R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & s_\psi c_\phi + c_\psi c_\theta s_\phi & s_\theta s_\phi \\ -c_\psi s_\phi - s_\psi c_\theta c_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & s_\theta c_\phi \\ s_\psi s_\theta & -c_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

avendo usato come abbreviazioni c_ψ , c_θ , c_ϕ per $\cos \psi$, $\cos \theta$, $\cos \phi$ e s_ψ , s_θ , s_ϕ per $\sin \psi$, $\sin \theta$, $\sin \phi$ rispettivamente.

L'utilizzo degli angoli di Eulero presenta degli svantaggi: si utilizzano infatti i coseni direttori, che sono funzioni trigonometriche in tre coordinate, e inoltre per valori di $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) l'asse della terza rotazione coincide con quella della prima rotazione, di conseguenza ψ e ϕ non possono essere distinti. In più, numericamente, indicando con r_{ij} l'elemento ij -esimo di R , dall'Eq. (A.3) possono essere ricavate le seguenti formule

$$c_\theta = r_{33}, \quad c_\psi = -r_{32}/s_\theta, \quad c_\phi = r_{23}/s_\theta, \quad (\text{A.4})$$

$$s_\theta = \sigma \sqrt{1 - c_\theta^2}, \quad s_\psi = r_{31}/s_\theta, \quad s_\phi = r_{13}/s_\theta \quad (\text{A.5})$$

da cui si nota come ci siano problemi di calcolo quando θ è vicino a uno dei suoi valori critici $n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

In base alla costruzione degli angoli di Eulero precedentemente data, è possibile dedurre che le velocità angolari relative a ciascuna rotazione rispetto alla precedente sono date rispettivamente da: $\dot{\psi} \mathbf{e}_3^I$, $\dot{\theta} \mathbf{e}_1''$, $\dot{\phi} \mathbf{e}_3'$. Applicando la legge di composizione delle velocità angolari si ottiene la velocità angolare del corpo rigido rispetto alla terna fissa \mathbf{e}^I

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3^I + \dot{\theta} \mathbf{e}_1'' + \dot{\phi} \mathbf{e}_3' \quad (\text{A.6})$$

Utilizzando le espressioni che permettono di assegnare le componenti di ciascuna terna di versori rispetto alla precedente

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3^I + \dot{\theta} (\cos \psi \mathbf{e}_1^I + \sin \psi \mathbf{e}_2^I) + \dot{\phi} (-\sin \theta \mathbf{e}_2'' + \cos \theta \mathbf{e}_3'') \quad (\text{A.7})$$

e di conseguenza, tenendo conto che

$$\mathbf{e}_2'' = -\sin \psi \mathbf{e}_1^I + \cos \psi \mathbf{e}_2^I, \quad \mathbf{e}_3'' = \mathbf{e}_3^I \quad (\text{A.8})$$

si ha infine

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \mathbf{e}_1^I + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2^I + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_3^I \quad (\text{A.9})$$

Questa relazione esprime quindi le componenti della velocità angolare rispetto alla terna fissa in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime. Si presenta anche in questa occasione il problema legato all'utilizzo degli angoli di Eulero: non è possibile scrivere il vettore di rotazione infinitesima $\boldsymbol{\omega} dt$ come differenziale esatto di una funzione degli angoli di Eulero, infatti

$$\boldsymbol{\omega} dt = (d\theta \cos \psi + d\phi \sin \theta \sin \psi) \mathbf{e}_1^I + (d\theta \sin \psi - d\phi \sin \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2^I + (d\psi + d\phi \cos \theta) \mathbf{e}_3^I \quad (\text{A.10})$$

l'ultima espressione a destra dell'uguale non è il differenziale di nessuna funzione degli angoli di Eulero.

Utilizzando le formule per il passaggio di coordinate, è possibile esprimere le componenti della velocità angolare rispetto alla terna solidale \mathbf{e} , ottenendo

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.11})$$

Riprendendo l'Eq (A.3) e svolgendo il prodotto $(R)^T \dot{R}$ e osservando le varie corrispondenze tra i termini, si dimostra che $((R(t))^T \dot{R}(t) = \Omega(t)$.

A.2 Moto alla Poinsot e suoi integrali primi

Le equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido possono essere studiate in gran dettaglio in un caso particolare, che comprende il moto di un corpo rigido isolato [9].

Il moto di un corpo rigido si dice alla Poinsot se esiste un punto Q , fisso oppure coincidente con il centro di massa C , tale che il momento delle forze esterne rispetto a Q sia nullo a tutti gli istanti: $\mathbf{M}_Q = 0$. Il moto di un corpo rigido isolato, ovvero libero e non sottoposto ad alcuna forza attiva, dove Q coincide con il centro di massa C , è un moto alla Poinsot.

Nel moto alla Poinsot le equazioni di Eulero sono sufficienti a determinare l'evoluzione dell'orientamento del corpo. Successivamente, il moto del centro di massa

può essere ricavato dalla prima equazione cardinale: se il corpo rigido è isolato, esso si muoverà di moto rettilineo uniforme. Ciò che rende interessante il moto alla Poincot è comunque la possibilità di ricavare numerose informazioni riguardo all'evoluzione della velocità angolare dalle equazioni di Eulero.

Le due più importanti informazioni nella dinamica del corpo rigido sono l'energia cinetica e il momento angolare. Nel moto alla Poincot entrambe si conservano

$$\dot{\mathbf{H}}_C(t) = 0, \quad \dot{K} = \frac{d(\frac{1}{2}\mathbf{H}_C(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t))}{dt} = 0 \quad (\text{A.12})$$

L'esistenza dei due integrali primi indipendenti permette di determinare analiticamente l'integrale generale delle equazioni di Eulero poiché nel moto alla Poincot queste ultime, diventando omogenee, sono tre equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nelle incognite $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$.

A.3 Rotazioni permanenti e loro stabilità

Gli integrali primi ricavati nel moto alla Poincot non garantiscono che anche la velocità angolare si conservi [9]. In particolare, non tutti i moti di corpi rigidi isolati si svolgono a velocità angolare costante.

Si dicono rotazioni permanenti quei moti alla Poincot che si svolgono a velocità angolare costante. Un moto alla Poincot è una rotazione permanente se e solo se la velocità angolare iniziale è approssimativamente parallela a un asse principale d'inerzia rispetto a Q . Va allora trattato il problema di stabilità di tali rotazioni permanenti.

Sia $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ una rotazione permanente di un moto alla Poincot di un corpo rigido, cioè tale che $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ implica $\boldsymbol{\omega}(t) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ per ogni $t \geq t_0$. Tale rotazione si dice stabile se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta_\epsilon > 0$ tale che $|\boldsymbol{\omega}(t_0) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}| < \delta_\epsilon$, da cui, per ogni $t \geq t_0$, $|\boldsymbol{\omega}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}| < \epsilon$.

Una rotazione permanente si dice stabile quando, fissata una tolleranza ϵ , è possibile determinare una necessaria precisione δ_ϵ tale che tutti i moti che iniziano con $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ sufficientemente precisa, ovvero distante meno di δ_ϵ dalla rotazione permanente, possiedono nel tempo una velocità angolare che non si allontana da $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ più della tolleranza, altrimenti si dice rotazione permanente instabile.

Appendice B

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

B.1 Eulero esplicito e Runge-Kutta

I metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie vengono utilizzati per fornire un'approssimazione numerica di una funzione $y(t) : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, soluzione del seguente problema ai valori iniziali, o di Cauchy, del primo ordine [10].

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

dove $f(t, y) : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Metodo di Eulero esplicito: è un metodo ad un passo della forma generale

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(h, t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{B.2})$$

in cui la funzione ϕ dipende dalla funzione f del problema dato dall'Eq. (B.1). In questo caso ϕ non dipende da y_{n+1} e la sua applicazione è immediata.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (\text{B.3})$$

Metodi di Runge-Kutta: sono della forma generale

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (\text{B.4})$$

dove

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (\text{B.5})$$

in cui i parametri reali b_i, c_i, a_{ij} definiscono il metodo ed s è detto numero di stadi.

Pertanto un metodo di Runge-Kutta è un metodo a un passo in cui risulta

$$\phi(h, t_n, y_n) = \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (\text{B.6})$$

Il metodo di Runge-Kutta classico è al quarto ordine ed è un metodo esplicito, cioè ciascun vettore k_i si può calcolare esplicitamente in funzione dei valori di k_j precedenti, $j = 1, 2, \dots, i - 1$.

B.2 Esempio: oscillatore armonico

Come esempio preliminare per testare i metodi numerici si è risolta numericamente l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico:

$$x''(t) + 2\alpha x'(t) + \beta x(t) = 0 \quad (\text{B.7})$$

da cui

$$x''(t) = -2\alpha x'(t) - \beta x(t) = g(t, x(t), x'(t)) \quad (\text{B.8})$$

con condizioni iniziali imposte

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Indicando $x'(t)$ con $z(t)$ e $x(t)$ con $y(t)$, l'Eq. (B.8) diventa

$$\begin{cases} z(t) = x'(t) = f(t, y(t), z(t)) \\ z'(t) = -2\alpha z(t) - \beta y(t) = g(t, y(t), z(t)) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

con rispettive condizioni iniziali, dal sistema costituito dalle Eq. (B.9)

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Per risolvere il sistema differenziale ottenuto, si applica il metodo di Runge-Kutta al quarto ordine: per ogni passo di integrazione, vengono fatte quattro approssimazioni: una nel punto iniziale, due nel punto medio, una nel punto finale. Ogni approssimazione ha come risultato due coefficienti, k_i e j_i , $i = 1, 2, 3, 4$, da cui, per ogni salto temporale

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{B.12})$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \frac{h}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \quad (\text{B.13})$$

Segue il codice MATLAB:

```
t0 = 0;
tf = 30;
h = 0.2;
t = [t0:h:tf]';
n = length(t);
y=ones(n,1);
y(1)=1;
z=ones(n,1);
z(1)=0;
for i = 2:n
    t_c1=t(i-1);
    y_c1=y(i-1);
    z_c1=z(i-1);
    k1 = f(t_c1,y_c1,z_c1);
    j1 = g(t_c1,y_c1,z_c1);
    t_c2=t(i-1)+0.5*h;
    y_c2=y(i-1)+0.5*h*k1;
    z_c2=z(i-1)+0.5*h*j1;
    k2 = f(t_c2,y_c2,z_c2);
    j2 = g(t_c2,y_c2,z_c2);
    t_c3=t(i-1)+0.5*h;
    y_c3=y(i-1)+0.5*h*k2;
```

```

z_c3=z(i-1)+0.5*h*j2;
k3 = f(t_c3,y_c3,z_c3);
j3 = g(t_c3,y_c3,z_c3);
t_c4=t(i-1)+h;
y_c4=y(i-1)+h*k3;
z_c4=z(i-1)+h*j3;
k4 = f(t_c4,y_c4,z_c4);
j4 = g(t_c4,y_c4,z_c4);
y(i) = y(i-1) + h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
z(i) = z(i-1) + h*(j1+2*j2+2*j3+j4)/6;
end
function y=f(t,y,z)
y=z;
end
function y=g(t,y,z)
y=-2*alpha*z-beta*y;
end

```

In base ai valori assunti da alpha e beta si ottengono i vari casi di oscillatori armonici. Per esempio, si riportano le seguenti tipologie, mostrate nelle Fig. B.1, B.2 e B.3.

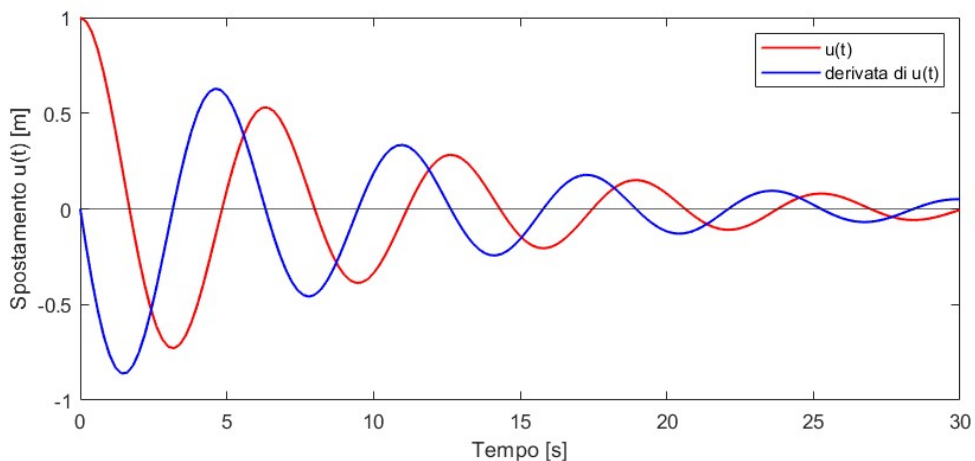


Figura B.1: Oscillatore armonico smorzato, $\alpha = 1$ e $\beta = 0.1$

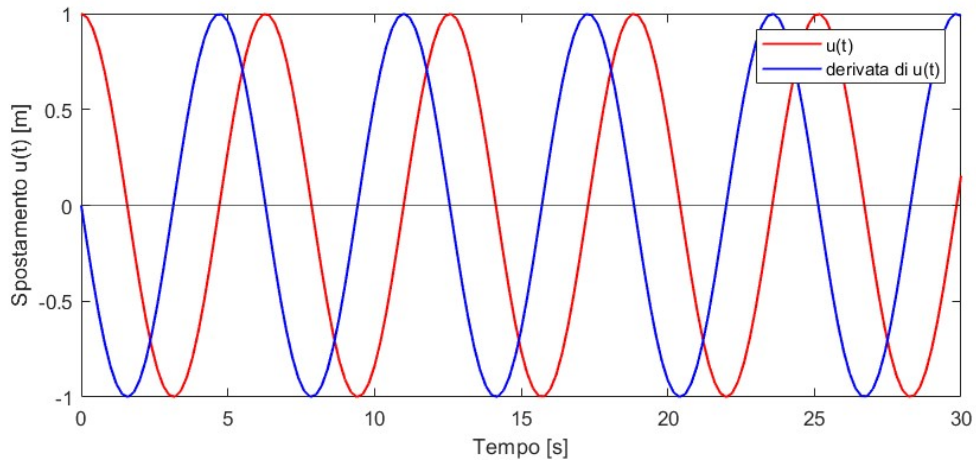


Figura B.2: Oscillatore armonico libero, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$

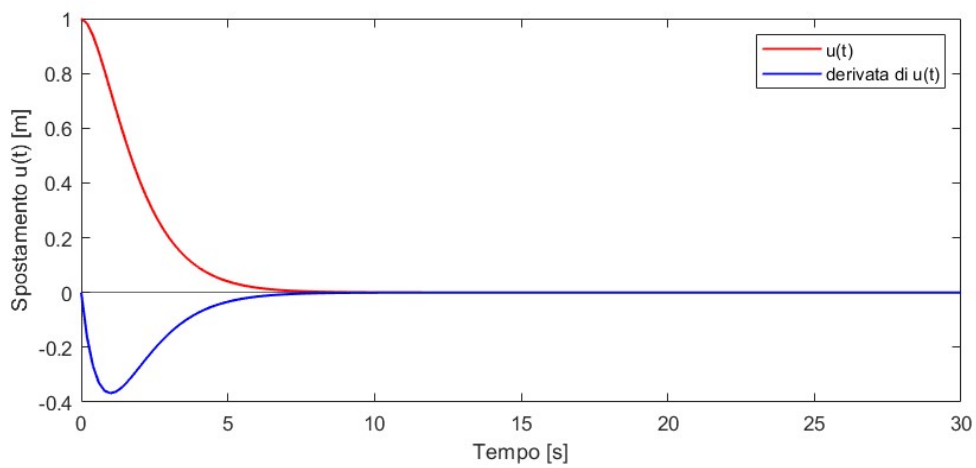


Figura B.3: Oscillatore armonico con smorzamento supercritico,
 $\alpha = 1$ e $\beta = 1$

B.3 Rappresentazione dei numeri sul calcolatore

Ogni operazione effettuata su calcolatore risulta affetta da errori di arrotondamento [10]. Essi sono dovuti al fatto che sul calcolatore può essere rappresentato solo un sottoinsieme finito dell'insieme dei numeri reali. I numeri reali vengono rappresentati mediante il sistema posizionale, per cui fissata una base $\beta \in \mathbb{N}$ con $\beta \geq 2$ e dato x numero reale con un numero finito di cifre x_k con $0 \leq x_k < \beta$ per $k = -m, \dots, n$, la rappresentazione posizionale di x in base β è

$$x_\beta = (-1)^s [x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 . x_{-1} \dots x_{-m}] = (-1)^s \left(\sum_{k=-m}^n x_k \beta^k \right), \quad x_n \neq 0 \quad (\text{B.14})$$

Il punto che compare fra x_0 e x_{-1} è detto punto decimale se la base è 10, punto binario se la base è 2, mentre s è individuato dal segno di x : $s = 0$ se x è positivo, 1 se negativo. Per esempio, la scrittura convenzionale $x_{10} = 425.33$ indica il numero $x = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$. Un numero razionale può avere un numero di cifre finito in una base ed infinito in un'altra. Ad esempio $1/3$ ha infinite cifre in base 10, avendosi $x_{10} = 0.\bar{3}$, mentre ne ha una sola in base 3, essendo $x_3 = 3 \cdot 3^{-2}$. Tutti i numeri reali si possono ben approssimare con numeri aventi una rappresentazione finita. Fissata infatti la base β , vale la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_\beta \in \mathbb{R}, \exists y_\beta \text{ t.c. } |y_\beta - x_\beta| < \varepsilon \quad (\text{B.15})$$

dove y_β ha rappresentazione posizionale finita. In effetti, dato il numero positivo $x_\beta = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 . x_{-1} \dots x_{-m} \dots$ con un numero finito od infinito di cifre, per ogni $r \geq 1$ si possono costruire due numeri

$$x_\beta^{(l)} = \sum_{k=0}^{r-1} x_{n-k} \beta^{n-k}, \quad x_\beta^{(u)} = x_\beta^{(l)} + \beta^{n-r+1} \quad (\text{B.16})$$

con r cifre, tali che $x_\beta^{(l)} < x_\beta < x_\beta^{(u)}$ e $x_\beta^{(u)} - x_\beta^{(l)} = \beta^{n-r+1}$. Se r è scelto in modo tale che $\beta^{n-r+1} < \varepsilon$, prendendo y_β pari a $x_\beta^{(l)}$ o pari a $x_\beta^{(u)}$ si giunge alla disuguaglianza cercata. Questo risultato legittima la rappresentazione dei numeri reali su calcolatore (e dunque con un numero finito di cifre).

Anche se da un punto di vista astratto le basi sono tutte tra loro equivalenti, nella pratica computazionale tre sono le basi generalmente impiegate: base 2 o binaria,

base 10 o decimale e base 16 o esadecimale. MATLAB usa fino a 16 o 32 cifre decimali. Nella rappresentazione esadecimale i simboli usati per la rappresentazione delle cifre sono $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$. Più è piccola la base adottata, più lunga è la stringa di caratteri necessari per rappresentare lo stesso numero.

Le soluzioni numeriche presenti in queste tesi sono state svolte dapprima su carta, poi si è utilizzato il calcolatore. Sebbene i passaggi fossero giusti, una volta messi di mezzo i parametri e svolgendo i calcoli con la calcolatrice, la soluzione era totalmente diversa da quella data come risultato da MATLAB, le motivazioni risiedono in quanto messo in evidenza prima.

Per esempio, riprendendo il caso dell'oscillatore armonico, si era approssimato alla quarta o quinta cifra decimale, utilizzando tale notazione in MATLAB, che ne richiede almeno 16 fino ad arrivare a 32, si sono ottenuti grandi errori: per il primo passo, dai calcoli fatti con la calcolatrice risultava $z(2) = -0.0196693$ e $y(2) = 0.805254$, mentre la soluzione corretta è $z(2) = -0.194746$ e $y(2) = 0.980331$.

Bibliografia

- [1] Ashbaugh M.S., Chicone C.C., Cushman R.H., *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 3, No. 1, Plenum Publishing Corporation, 1991.
- [2] Poinsot L., *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, Bachelier Paris, 1834.
- [3] Eulero L., *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable*, Vol. 14, Memoires de l'academie des sciences de Berlin, Berlin Academy, 1754.
- [4] Wittenburg J., *Dynamics of Multibody Systems, II Ed.*, Springer Berlin, 2008.
- [5] Scientific Figure on ResearchGate, https://www.researchgate.net/figure/Color-online-The-tennis-racket-effect-Illustration-of-the-motion-of-the-tennis-racket_fig1_317913807, 2017.
- [6] Murakami H., Rios O., Impelluso T.J., *A Theoretical and Numerical Study of the Dzhanibekov and Tennis Racket Phenomena*, Vol. 83, No. 11, ASME Journal of Applied Mechanics, 2016.
- [7] Frankel T., *The Geometry of Physics: An Introduction, III Ed.*, Cambridge University Press, 2013.
- [8] TEN TECH LLC Services & Solutions, *Spacecraft Solar Panel Deployment Analysis*, <https://www.youtube.com/watch?v=UxaA5VlchZI>, 2013.
- [9] Biscari P., Ruggeri T., Saccomandi G., Vianello M., *Meccanica Razionale, IV Ed.*, Vol. 138, Springer Milano, 2022.
- [10] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *Matematica Numerica, II Ed.*, Springer Milano, 2005.