

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

DIPARTIMENTO INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

Laurea in Ingegneria Elettronica

Modelli Numerici di Metasuperfici Mediante FDTD FDTD Numerical Modelling of Metasurfaces

Relatore:
Valter Mariani Primiani

Candidato:
Alessandro Intorbida
Mat. 1087977

Correlatore:
Franco Moglie

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

Indice

1	Metamateriali	2
1.1	L'Utilizzo della GSTC (General Sheet Transition Conditions) nell'analisi di Metasuperfici	2
1.1.1	Introduzione e definizioni di metasuperfici	2
1.1.2	Metasuperfici contro Superfici Selettive in Frequenza (FSS)	4
2	FDTD:Finite-difference time-domain method	9
2.1	Definizione FDTD	9
2.1.1	Equazioni 1-D per FDTD	10
2.1.2	Equazioni 2-D per FDTD	11
2.1.3	Dispersione numerica e stabilità	14
3	GSTC	17
3.1	Generalized Sheet Transition Condition FDTD per Simulazioni Metasuperfici	17
3.1.1	Analisi 1-D	17
3.1.2	Analisi 2-D	20
4	Risultati e Conclusioni	22
5	Appendice	25

1 Metamateriali

1.1 L'Utilizzo della GSTC (General Sheet Transition Conditions) nell'analisi di Metasuperfici

1.1.1 Introduzione e definizioni di metasuperfici

Negli ultimi anni c'è stata una grande attenzione dedicata alle metastrutture, che includono metamateriali e metasuperfici. Il prefisso meta è una preposizione greca che significa (tra l'altro) "oltre". Nel contesto dei metamateriali o delle metasuperfici, questo si riferisce a una metastruttura che ha un qualche tipo di proprietà esotica che normalmente non ha in natura. Sebbene in questo capitolo discuteremo delle metasuperfici e infine discuteremo di alcune condizioni generalizzate per la trasmissione dei campi elettromagnetici chiamate "GSTC", iniziamo la nostra discussione con metamateriali a tre dimensioni. I metamateriali sono un tipo di nuovi materiali sintetici progettati per ottenere proprietà uniche, infatti questi non sono già presenti in natura.

I metamateriali sono spesso progettati disponendo una serie di piccoli diffusori (ad esempio, anelli e aste metalliche, magneti sferici particelle dielettriche o altre inclusioni di forma arbitraria) in un array una regione di spazio tridimensionale, al fine di ottenere il comportamento desiderato. Il termine metamateriale non si riferisce a strutture periodiche classiche, come quelle a frequenza selettiva (FSS), ma si riferisce a un materiale o ad una struttura con proprietà più particolari rispetto ai dielettrici artificiali, ma che possono ancora essere descritte come materiale indipendente dai parametri paragonabili a materiali naturali. Un esempio è un cosiddetto materiale a doppio negativo (DNG), noto anche come materiale a indice negativo (NIM). Questo tipo di materiale ha la proprietà di possedere una sua permittività effettiva e una sua permeabilità effettiva simultaneamente negative in una data banda di frequenza. Un secondo esempio potrebbe essere l'indice di rifrazione vicino allo zero materiale, con permittività o permeabilità progettata per avere la sua parte reale vicina a zero. I materiali con proprietà uniche come questi hanno un'ampia gamma di potenziali applicazioni in elettromagnetismo a frequenze che vanno dalle basse microonde a quelle ottiche, compresi schermatura, materiali a bassa riflessione, nuovi substrati, antenne, interruttori tronic, dispositivi, lenti perfette, risonatori e, naturalmente, occultamento, tra le tante altre possibilità.

Il concetto di metamateriale tridimensionale può essere esteso ponendo i diffusori (o aperture) in una disposizione bidimensionale su una superficie. Questa superficie verrà allora chiamata metasuperficie, la quale può essere suddivisa in tre tipologie come: metafilm, metaschermi, e metagrating. Le metasuperfici sono un'alternativa interessante ai metamateriali 3-D per la loro semplicità e relativa facilità di utilizzo e fabbricazione. Le metasuperfici hanno molti vantaggi tra i quali: possono occupare meno spazio fisico rispetto alle strutture metamateriali 3-D e di conseguenza possono offrire la possibilità di minori perdite.

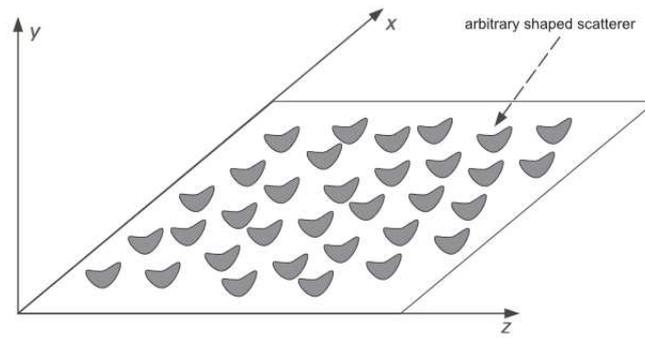
Le loro applicazioni per frequenze da microonde a ottiche hanno suscitato grande

interesse negli ultimi anni. Inoltre le applicazioni sopra menzionate per i metamateriali, e quindi per le metasuperfici consentono il controllo di superfici intelligenti, risonatori a cavità miniaturizzati, nuove strutture di guida d'onda compatte o assorbitori grandangolari, superfici di adattamento di impedenza, dispositivi biomedicali, conversione della polarizzazione, antenne e dispositivi di commutazione ad alta velocità, per citarne solo pochi. In generale, quindi, una metasuperficie è una qualsiasi struttura bidimensionale periodica il cui spessore e periodicità sono più piccoli rispetto alla lunghezza d'onda nel mezzo circostante.

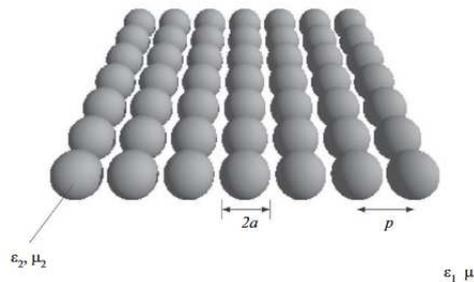
Tra queste si possono distinguere due grandi sottoclassi: metafilm e metascreen. Queste due sottoclassi si distinguono per il tipo di topologia che costituisce la metasuperficie. I metafilm sono metasuperfici con una topologia a "cermet" dove gli array di diffusori sono isolati (non a contatto)¹. I metascreen sono metasuperfici, invece, hanno una struttura a "rete"², che sono caratterizzate da aperture periodicamente distanziate in una superficie altrimenti relativamente impenetrabile [4]. Ci sono altri tipi di meta-strutture che sono una via di mezzo tra i metafilm e i metascreen. Ad esempio, un reticolo di fili rivestiti paralleli (un metagrating vedi 3) si comporta come un metafilm per i campi elettrici perpendicolari agli assi e come metaschermo per campi elettrici paralleli agli assi[3]. È importante notare che i singoli scatterer che costituiscono un metafilm (o aperture che costituiscono a un metascreen) non sono necessariamente di spessore nullo (ma anche piccoli rispetto al reticolo); possono essere di forma arbitraria e le loro dimensioni devono essere piccole solo rispetto alla lunghezza d'onda nel mezzo circostante, a maggior ragione perché la costante reticolare è stata assunta più piccola rispetto a quest'ultima.

È stato dimostrato che un tipo di condizioni al contorno note come GSTC sono il modo più appropriato per modellare le metasuperfici. Sebbene la forma funzionale delle GSTC possa essere diversa a seconda del tipo di metasuperficie, la descrizione GSTC consente di sostituire la metasuperficie con un'interfaccia, come mostrato nelle figure 4. L'interazione dell'elettrico (E) e magnetico (H) tra i campi su entrambi i lati della metasuperficie sono calcolati tramite i GSTC applicati a quell'interfaccia. In questo modello, tutte le informazioni sulla metasuperficie (geometria dei diffusori o delle aperture: forma, dimensione, proprietà del materiale, ecc.) sono intrinseche nei parametri di superficie effettivi che appaiono esplicitamente nelle GSTC [2, 5, 3, 4, 6]. Questi parametri di superficie (susceptibilità superficiali elettriche e magnetiche effettive e porosità superficiali) che compaiono esplicitamente nelle GSTC sono definite in modo univoco e come tali servono da grandezze fisiche che più propriamente caratterizzano i metascreen. I parametri di superficie effettivi per ogni data metasuperficie insieme ai GSTC sono tutti necessari per modellare la sua interazione con un campo EM a livello macroscopico.

In questa tesi presenteremo le GSTC necessarie per analizzare i tre principali tipi di metasuperfici: metafilm, metascreen e metagrating. Da queste GSTC deriviamo per ciascuna di queste metasuperfici i coefficienti di riflessione (R) e di trasmissione (T) delle onde piane che sono espressi in termini di parametri di superficie che caratterizzano la metasuperficie. Questi coefficienti vengono quindi utilizzati per



(a) serie di diffusori di forma arbitraria



(b) metafilm:schiera di particelle sferiche

Figura 1: Illustrazione di un metafilm, che consiste in un array di diffusori di forma arbitraria posti sul piano x, z : (a) array di scatterer spaziatamente arbitrariamente e (b) array di particelle sferiche.

sviluppare un approccio di recupero per determinare i dati misurati o simulati e i parametri di superficie efficaci definiti in modo univoco (cioè le suscettività superficiali elettriche e magnetiche e le porosità superficiali) che caratterizzano ciascuna delle metasuperfici. Infine, nell'ultima sezione, presenteremo vari altre applicazioni delle GSTC [9].

1.1.2 Metasuperfici contro Superfici Selettive in Frequenza (FSS)

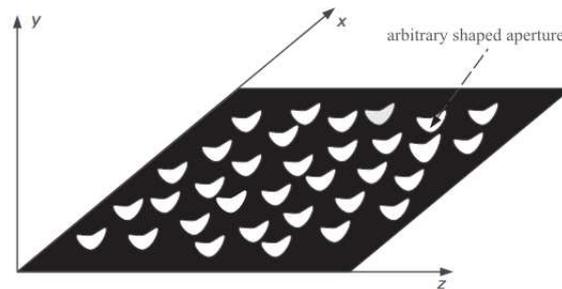
Prima di introdurre e discutere i diversi tipi di GSTC per le varie metasuperfici, dobbiamo fare la distinzione tra metasuperfici e le superfici selettive in frequenza (FSS). A seconda della lunghezza d'onda e della periodicità delle inclusioni che formano una struttura periodica ingegnerizzata, può essere o non essere possibile modellarla come un mezzo efficace (come nel caso di un metamateriale) o utilizzando parametri di superficie efficaci (come nel caso di una metasuperficie). Infatti, l'interazione del campo elettromagnetico con questi tipi di strutture ingegnerizzate possono essere divise in tre regioni separate di operazione 5, con comportamenti diversi per ciascuna regione.

È importante essere consapevoli di ciò e comprendere il comportamento di ciascuna regione durante l'esecuzione di misurazioni o l'analisi di metastrutture a diverse scale di lunghezza e/o frequenze. Nell'affrontare questo, commenteremo:

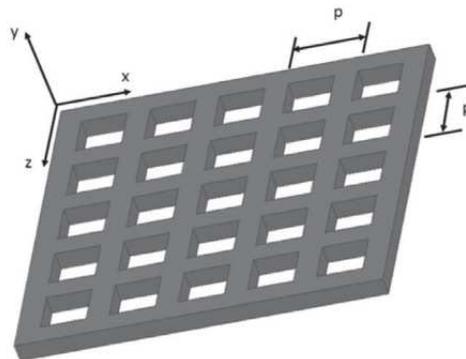
- La differenza tra un metamateriale e un convenzionale gap di banda fotonico (PBG) o elettromagnetico struttura del gap di banda (EBG) e, a sua volta.
- La differenza tra una metasuperficie e superficie selettiva in frequenza convenzionale (FSS).

Consideriamo ora i metamateriali 3-D, queste poi saranno estese di seguito alle metasuperfici. Il comportamento di un tale materiale composito è qualitativamente diverso in ciascuna delle tre regioni distinte mostrate nella 5.

La regione 1 corrisponde alla quasi regione statica, che implica basse frequenze; più specificamente, le frequenze alle quali la lunghezza d'onda è molto più grande del periodo della struttura (cioè la periodicità dei diffusori che compongono il mezzo composito) e al quale i diffusori non sono risonanti. Questi diffusori potrebbero avere momenti di dipolo indotti o permanenti, come è il caso per atomi o molecole per materiali classici, oppure questi potrebbero essere generici in forma e posti in una matrice ospite per ottenere un materiale composito artificiale progettato per ottenere un determinato comportamento. In questa regione vengono utilizzate formule di miscelazione classiche per ottenere proprietà materiali effettive equivalenti (permittività, permeabilità μ , ecc.).



(a) serie di aperture di forma arbitraria in uno schermo conduttore



(b) metafilm: serie di aperture quadrate

Figura 2: Illustrazione di un metascreen, che consiste in una serie di aperture di forma arbitraria in uno schermo conduttore situato nel piano x, z : (a) serie di aperture di forma arbitraria e (b) serie di aperture quadrate.

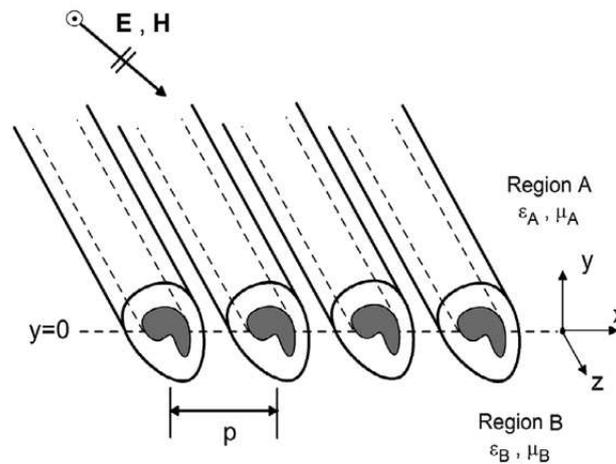
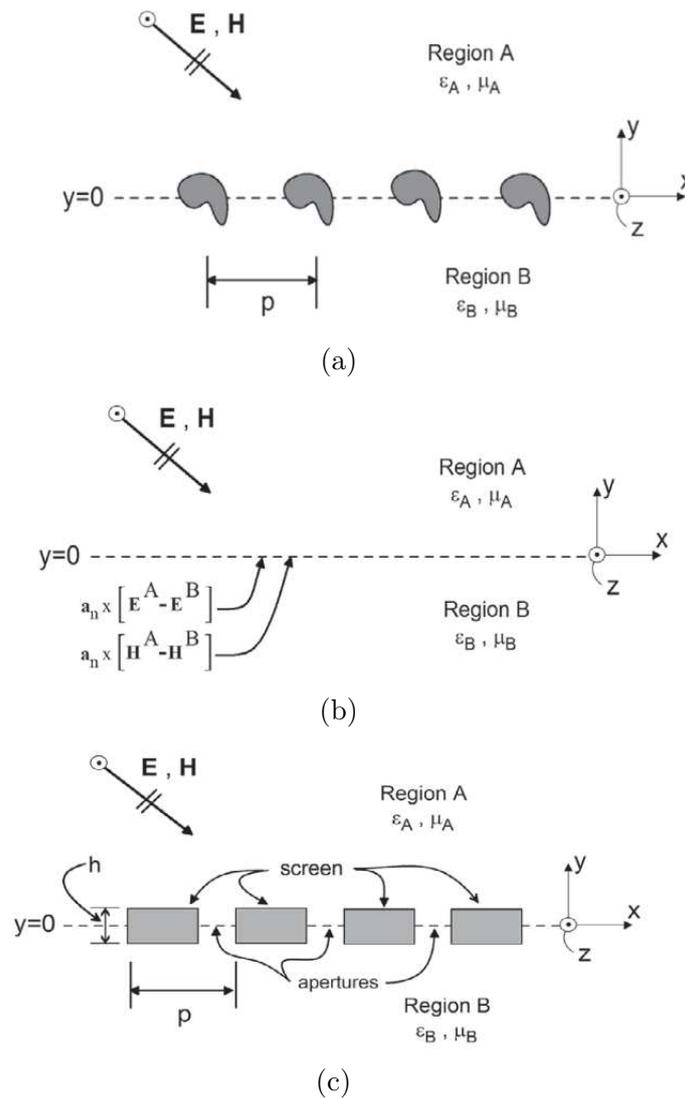


Figura 3: Illustrazione di un metagrating, che consiste in una serie di fili rivestiti e di forma arbitraria.

Prima di discutere il comportamento nella Regione 2, esaminiamo la Regione 3. Qui, la lunghezza d'onda diventa paragonabile o inferiore al periodo della struttura, e i campi non "vedono" più il composito come un mezzo efficace. A queste frequenze, esistono comportamenti sul campo più complicati e tecniche più elaborate per analizzarli deve essere utilizzata l'interazione del campo EM con le strutture periodiche composite (ad es. approcci ondulatori).

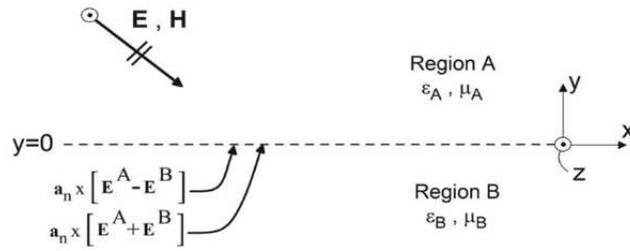
Le risonanze associate agli stessi diffusori possono causare interessanti e insoliti effetti previsti nelle proprietà effettive del materiale di un composito. La Regione 2 in 5 corrisponde a una regione in cui il periodo della struttura è ancora piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, ma i singoli diffusori sono progettati in una maniera con la quale (o tramite la loro forma o le loro proprietà costitutive) gli stessi diffusori possono risonare. Quando ciò accade, si realizza una nuova classe di materiali ingegnerizzati (metamateriali), rendendo possibile una vasta gamma di proprietà uniche che non sono facilmente reperibili in natura (DNG o materiali con indice vicino allo zero, per esempio). Regione 2, dove risonano gli scatter (ma non il reticolo, come nel caso della Regione 3), è dove si trovano i metamateriali. Il mezzo è dispersivo qui, ma possiamo ancora caratterizzare il suo comportamento elettromagnetico con i parametri effettivi ϵ e μ .

Simile ai metamateriali, a seconda della distanza tra lunghezza d'onda e periodo, si verificheranno tre regioni di comportamento per le interazioni elettromagnetiche con una metasuperficie. Per un reticolo bidimensionale di diffusori o aperture, la regione 1 in 5 corrisponde ai classici materiali a film sottile, mentre la regione 3 in 5 corrisponde alle risonanze associate alla periodicità dei diffusori o delle aperture. L'FSS convenzionale e le superfici PBG ricadono in questa terza regione. D'altra parte, quando noi parliamo di una metasuperficie, ci riferiamo una serie di diffusori o aperture che si trova nella regione 2 (o anche nella regione 1). Le risonanze della superficie possono essere associate alle risonanze dei diffusori o delle aperture, ma non

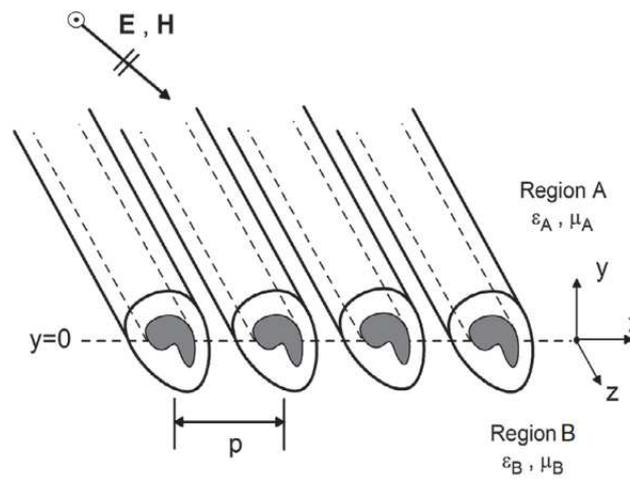


con la periodicità dell'array. Le FSS ordinari sono talvolta gestiti in questo regime, ma la distinzione tra questo tipo di operazione e quello della Regione 3 non sempre è chiarito. Sottolineiamo che il comportamento caratteristico della Regione 2 nella 5 potrebbe non essere verificato sempre per un dato metamateriale o metasuperficie.

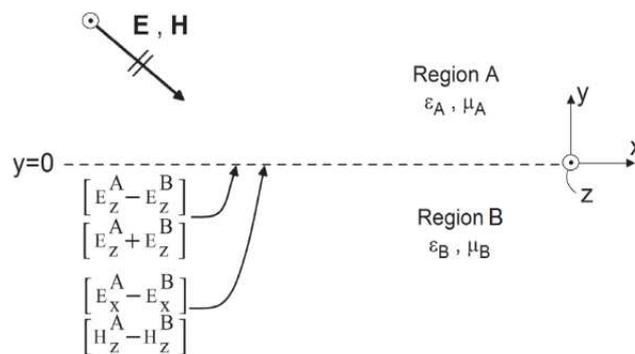
In sintesi, nelle Regioni 1 e 2 della 5 l'interazione di un campo elettromagnetico con una metasuperficie è descritto da parametri di superficie effettivi di qualche tipo. Nella regione 1, i parametri di superficie effettivi non sono dipendenti dalla frequenza (tranne nella misura in cui le proprietà di massa costituenti hanno una dipendenza dalla frequenza). Nella regione 2 (regione risonante degli scatterer o delle aperture), la metasuperficie è ancora individuata da proprietà superficiali effettive, che ora possono possedere un'intrinseca dipendenza dalla frequenza che rendendo possibili interessanti comportamenti risonanti. Nell'ultimo regione (Regione 3 in 5), l'interazione del campo elettromagnetico con l'array periodico è molto importante [9].



(d)



(e)



(f)

Figura 4: Piani di riferimento per i modelli GSTC: (a) un metafilm con diffusori di forma arbitraria, (b) piano di riferimento per un metafilm a cui sono applicati i GSTC, (c) un metaschermo con aperture di forma arbitraria, (d) piano di riferimento per un metaschermo a cui sono applicati i GSTC, (e) un metagrating con reticolo metallico rivestito di forma arbitraria, e (f) piano di riferimento per un metagrating a cui vengono applicati i GSTC. Si noti che ci sono tre diversi tipi di GCTS in (b), (d) e (f).

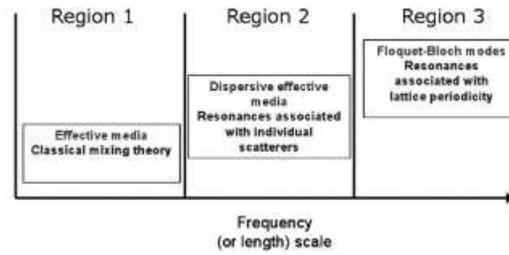


Figura 5: Tre regioni caratteristiche del comportamento del materiale composito o della metastruttura.

2 FDTD:Finite-difference time-domain method

2.1 Definizione FDTD

Al fine di fornire una presentazione globale dell'algoritmo, Il dominio del tempo alle differenze finite (FDTD) o il metodo di Yee (dal nome del matematico cinese americano Kane S. Yee, nato nel 1934) è una tecnica di analisi numerica utilizzata per modellare l'elettrodinamica computazionale (trovare soluzioni approssimate al sistema di equazioni differenziali associato) . Poiché si tratta di un metodo nel dominio del tempo, le soluzioni FDTD possono coprire un'ampia gamma di frequenze con una singola simulazione e trattare le proprietà dei materiali non lineari in modo naturale.

Il metodo FDTD appartiene alla classe generale dei metodi di modellazione numerica differenziale basati su griglia (metodi alle differenze finite). Le equazioni di Maxwell dipendenti dal tempo (in forma differenziale parziale) sono discretizzate mediante approssimazioni alle differenze centrali delle derivate parziali spazio-temporali. Le equazioni alle differenze finite risultanti vengono risolte sia in software che in hardware in modo sbalorditivo: le componenti del vettore del campo elettrico in un volume di spazio vengono risolte in un dato istante nel tempo; quindi le componenti del vettore del campo magnetico nello stesso volume spaziale vengono risolte nell'istante successivo nel tempo; e il processo viene ripetuto più e più volte fino a quando il comportamento del campo elettromagnetico transitorio o stazionario desiderato non è completamente evoluto. Il metodo FDTD ha i seguenti:

Vantaggi

- semplicità concettuale e matematica
- indipendenza dalla geometria e dalle caratteristiche dei materiali
- possibilità di studio nel tempo

Svantaggi

- necessita di potenti elaboratori

- la discretizzazione può introdurre errori sistematici
- a bassa frequenza bisogna fare approssimazioni

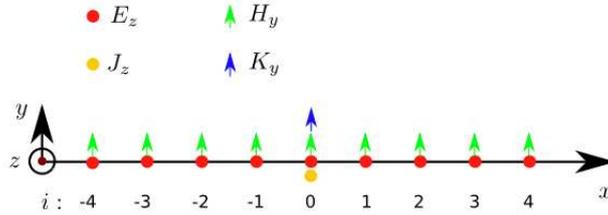


Figura 6: Posizione dei componenti del campo elettrico e magnetico nell'1-D griglia non sfalsata. I nodi della griglia sono posti in $x_i = i\Delta x$ con $\Delta x = \text{cost.}$, e dove i è un numero intero. La metasuperficie è rappresentata dall'equivalente densità di corrente superficiale elettrica e magnetica a $x = 0$.

2.1.1 Equazioni 1-D per FDTD

La 6 mostra la posizione dei componenti di campo rilevanti nella griglia 1-D non sfalsata. I campi elettrico e magnetico, così come tutte le altre grandezze elettromagnetiche come le densità di corrente, si trovano agli stessi nodi.

In una griglia uniforme, questi nodi sono punti equidistanti tra di loro nella griglia $x_i = i\Delta x$ come mostrato in 6. Per semplicità, assumiamo che i campi elettrico e magnetico siano lungo le direzioni z e y , rispettivamente, e si propagano in modo libero nello spazio. La metasuperficie è rappresentata da un equivalente elettrico e la densità di corrente superficiale magnetica a $x = 0$. Rappresentiamo gli indici spaziali e temporali per pedice e apice, rispettivamente. Ad esempio $E_i^n = E(i\Delta x, n\Delta t)$, assumendo le risoluzioni spaziali e temporali Δx e Δt , rispettivamente. Le corrispondenti equazioni 1-D Maxwell sono:

$$-\frac{\partial}{\partial x} E_z(x, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_y(x, t) - K_y(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y(x, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z(x, t) + J_z(x, t) \quad (2)$$

Dove J_z e K_y sono le densità di corrente elettrica e magnetica, rispettivamente. Se applichiamo gli schemi alla differenza centrale avremo:

$$\frac{E_{i+1}^n - E_{i-1}^n}{2\Delta x} = \mu_0 \frac{H_i^{n+1} - H_i^{n-1}}{2\Delta t} + K_i^n \quad (3)$$

$$\frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} = \epsilon_0 \frac{E_i^{n+1} - E_i^{n-1}}{2\Delta t} + J_i^n \quad (4)$$

I campi elettrico e magnetico possono essere aggiornati esplicitamente alla fase temporale $n + 1$, utilizzando i campi delle fasi temporali precedenti, come segue:

$$H_i^{n+1} = H_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} (E_{i+1}^n - E_{i-1}^n) - \frac{2\Delta t}{\mu_0} K_i^n \quad (5)$$

$$E_i^{n+1} = E_i^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - \frac{2\Delta t}{\epsilon_0} J_i^n \quad (6)$$

Dove K_i^n e J_i^n sono zero ovunque tranne nella metasuperficie. La densità di polarizzazione superficiale della metasuperficie viene aggiornata come:

$$P_0^n = \epsilon_0 \chi_{ee}^n E_{av}^n = \epsilon_0 \chi_{ee}^n E_0^n \quad (7)$$

$$M_0^n = \chi_{mm}^n H_{av}^n = \chi_{mm}^n H_0^n \quad (8)$$

Dove $\chi_{ee}^n = \chi_{ee}(n\Delta t)$ e $\chi_{mm}^n = \chi_{mm}(n\Delta t)$. Finalmente, si può riscrivere l'equivalente densità di corrente come:

$$\mathbf{J}_{eq} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{eq} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \quad (10)$$

Che può essere aggiornato utilizzando schemi di differenze all'indietro del primo o del secondo ordine. Per il primo caso, le equazioni risultanti assumono la forma:

$$J_0^n = \frac{P_0^n - P_0^{n-1}}{\Delta t} \quad (11)$$

$$K_0^n = \mu_0 \frac{M_0^n - M_0^{n-1}}{\Delta t} \quad (12)$$

La quale può essere scritto esplicitamente in termini di suscettibilità e di campo elettromagnetico come:

$$J_0^n = \epsilon_0 \frac{\chi_{ee}^n E_0^n - \chi_{ee}^{n-1} E_0^{n-1}}{\Delta t} \quad (13)$$

$$K_0^n = \mu_0 \frac{\chi_{mm}^n H_0^n - \chi_{mm}^{n-1} H_0^{n-1}}{\Delta t} \quad (14)$$

2.1.2 Equazioni 2-D per FDTD

La 7 mostra la posizione dei diversi componenti del campo su una griglia 2-D non sfalsata. I campi elettrico e magnetico, così come tutte le altre grandezze elettromagnetiche come le densità di corrente, si trovano agli stessi nodi. In una griglia uniforme, questi nodi sono equidistanti nei punti della griglia $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ ($\Delta x, \Delta y = \text{const.}$) come mostrato in 6.

Per brevità, consideriamo solo il modo elettrico trasversale, dove il campo elettrico è lungo la direzione z e il campo magnetico è nel piano x, y e si stanno propagando nello spazio libero. I risultati possono essere facilmente estesi a casi più generali.

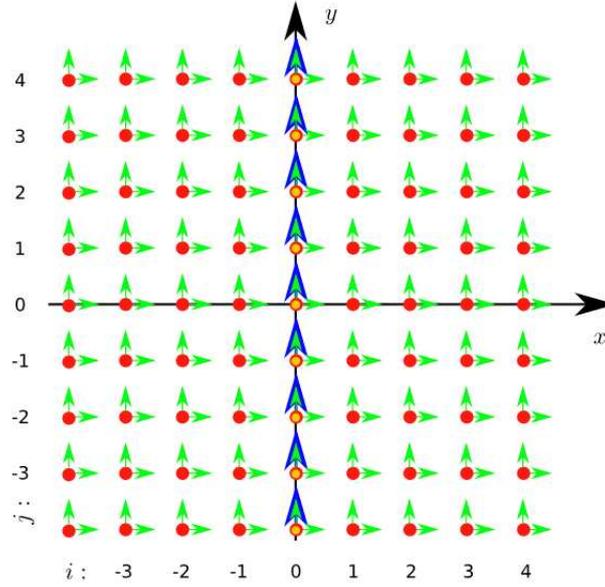


Figura 7: Posizione dei componenti del campo elettrico e magnetico nella griglia bidimensionale non sfalsata. I nodi della griglia sono posti in $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ con $\Delta x, \Delta y = const.$, e dove i e j sono gli interi. La metasuperficie è posta nel piano $x = 0$ ed è rappresentata dalle densità di corrente superficiale elettrica e magnetica equivalenti.

La metasuperficie è rappresentata da densità di corrente superficiale elettrica e magnetica equivalenti nel piano $x = 0$. Rappresentiamo gli indici spaziali e temporali rispettivamente per pedice e apice. Ad esempio $E_i^n = E(i\Delta x, n\Delta t)$, assumendo una griglia con risoluzioni spaziali e temporali Δx e Δt , rispettivamente. Le corrispondenti equazioni di Maxwell 2-D vengono lette come:

$$-\frac{\partial}{\partial x}E_z(x, y, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}H_y(x, y, t) - K_y(x, y, t) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z(x, y, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}H_x(x, y, t) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}H_y(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y}H_x(x, y, t) \\ = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}E_z(x, y, t) + J_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (17)$$

Dove $J_z\hat{\mathbf{z}}$ e $K_x\hat{\mathbf{x}} + K_y\hat{\mathbf{y}}$ sono l'equivalente elettrico e densità di corrente magnetica, rispettivamente. Applicando gli schemi di differenza centrale:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, y, t) \approx [f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t - \Delta t)]/(2\Delta t) \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, t) \approx [f(x + \Delta x, y, t) - f(x - \Delta x, y, t)]/(2\Delta x) \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y, t) \approx [f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y - \Delta y, t)]/(2\Delta y) \quad (20)$$

Discretizzando le 15,16,17 come:

$$\frac{zE_{i+1,j}^n - {}^nE_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = \mu_0 \frac{yH_{ij}^{n+1} - yH_{ij}^{n-1}}{2\Delta t} + K_{ij}^n \quad (21)$$

$$\frac{zE_{i,j+1}^n - zE_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = -\mu_0 \frac{xH_{ij}^{n+1} - xH_{ij}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1,j}^n - yH_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{xH_{i,j+1}^n - xH_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ = \epsilon_0 \frac{{}^iE_{ij}^{n+1} - zE_{ij}^{n-1}}{2\Delta t} + J_{ij}^n \end{aligned} \quad (23)$$

Dove le lettere dei componenti del vettore x, y, z sono poste prima dei campi, come in zE_{ij}^n , per evitare di mescolarli con gli indici di griglia i, j, n . I campi elettrico e magnetico possono essere aggiornati esplicitamente allo step temporale $n + 1$, utilizzando i campi al passo temporale precedente, come segue:

$$\begin{aligned} zE_{ij}^{n+1} = zE_{ij}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} (yH_{i+1,j}^n - yH_{i-1,j}^n) \\ - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} (xH_{i,j+1}^n - xH_{i,j-1}^n) - \frac{2\Delta t}{\epsilon_0} J_{ij}^n \end{aligned} \quad (24)$$

$$xH_{ij}^{n+1} = xH_{ij}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} (zE_{i,j+1}^n - zE_{i,j-1}^n) \quad (25)$$

$$yH_{ij}^{n+1} = yH_{ij}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} (E_{i+1,j}^n - zE_{i-1,j}^n) - \frac{2\Delta t}{\mu_0} K_{ij}^n \quad (26)$$

Le densità di polarizzazione della metasuperficie sono aggiornate usando:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t(\rho, t) &= \epsilon_0 \bar{\chi}_{ee}(\rho, t) \cdot \mathbf{E}_{av}(\rho, t) \\ \mathbf{M}_t(\rho, t) &= \bar{\chi}_{mm}(\rho, t) \cdot \mathbf{H}_{av}(\rho, t) \end{aligned} \quad (27)$$

Come:

$$\begin{aligned} P_0^n &= \epsilon_0 \chi_{ee}^n E_{av}^n = \epsilon_0 \chi_{ee}^n E_0^n \\ M_0^n &= \chi_{mm}^n H_{av}^n = \chi_{mm}^n H_0^n \end{aligned} \quad (28)$$

Dove $\chi_{ee}^n = \chi_{ee}(n\Delta t)$ e $\chi_{mm}^n = \chi_{mm}(n\Delta t)$. Finalmente, le densità di corrente equivalenti possono essere calcolate usando:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{eq} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \\ \mathbf{K}_{eq} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M} \end{aligned} \quad (29)$$

Che può essere aggiornato utilizzando schemi di differenze precedenti del primo o del secondo ordine. Per il primo caso, le equazioni risultanti assumono la forma:

$$\begin{aligned} J_0^n &= \frac{P_0^n - P_0^{n-1}}{\Delta t} \\ K_0^n &= \mu_0 \frac{M_0^n - M_0^{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (30)$$

Essa può essere scritta esplicitamente in termini di suscettibilità e i campi elettromagnetici come:

$$\begin{aligned} J_0^n &= \epsilon_0 \frac{\chi_{ee}^n E_0^n - \chi_{ee}^{n-1} E_0^{n-1}}{\Delta t} \\ K_0^n &= \mu_0 \frac{\chi_{mm}^n H_0^n - \chi_{mm}^{n-1} H_0^{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (31)$$

Le equazioni sono state riprese da [1, 8, 7].

2.1.3 Dispersione numerica e stabilità

L'algoritmo FDTD provoca una dispersione delle onde simulate in una regione dello spazio libero. Questa causa una variazione della velocità di fase dei modi numerici, questa variazione rispetto a c dipende dalla lunghezza d'onda e dalla direzione di propagazione all'interno della griglia. Nel caso che la risoluzione spaziale aumenta, la dispersione numerica si riduce.

Le onde non si propagano in uno spazio reale, ma in uno "spazio" numerico che origina dei ritardi e può provocare errori nella fase. In questo spazio le forme d'onda possono essere distorte, può presentarsi un'anisotropia e casi di pseudo-rifrazione. Questa dispersione numerica gioca un ruolo fondamentale per conoscere i limiti di modellizzazione FDTD, in particolar modo se si ha a che fare con strutture di dimensioni elettricamente grandi.

Iniziamo con l'analisi sulla dispersione dalle equazioni di Maxwell in forma compatta. Si prende una regione dello spazio libero normalizzata a c imponendo $\mu = 1$, $\epsilon = 1$, $\sigma = 0$ e $\sigma^* = 0$. Combinando le equazioni del rotore ed introducendo in vettore complesso $\mathbf{V} = \mathbf{H} + i\mathbf{E}$ si giunge a:

$$i\nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (32)$$

Sostituendo il vettore di campo all'interno della realizzazione spazio-temporale di Yee si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hat{x}}{\Delta x} \sin\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2}\right) + \frac{\hat{y}}{\Delta y} \sin\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2}\right) + \frac{\hat{z}}{\Delta z} \sin\left(\frac{\tilde{k}_z \Delta z}{2}\right) \right] \times \mathbf{V}|_{i,j,k}^n &= \\ &= \frac{-i}{\Delta t} \mathbf{V}|_{i,j,k}^n \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

Dove sono state prese le differenze centrali. Svolgendo il prodotto vettoriale ed eguagliando le componenti cartesiane si ottiene un sistema di tre equazioni nelle tre incognite V_x, V_y, V_z risolvibile imponendo il determinante nullo:

$$= \left[\frac{1}{\Delta x} \sin \left(\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y} \sin \left(\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta z} \sin \left(\frac{\tilde{k}_z \Delta z}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{c\Delta t} \sin \left(\frac{\tilde{\omega} \Delta t}{2} \right) \right]^2 = \quad (34)$$

L'equazione è denormalizzata rispetto a c in modo da ottenere l'espressione generale della dispersione numerica in tre dimensioni. Per un'onda elettromagnetica monodimensionale è possibile ricavare \tilde{k} dalla dove vengono annullate due componenti tra le tre:

$$\tilde{k} = \frac{2}{\Delta} \arcsin \left(\frac{\Delta}{c\Delta t} \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) \right) \quad (35)$$

Ricordando il legame esistente tra velocità di fase e numero d'onda si nota che la risoluzione spaziale influenza direttamente la velocità di fase numerica. Si definisce la densità di celle per lunghezza d'onda:

$$N_y = \frac{\lambda}{\Delta} \quad (36)$$

Che rappresenta un fattore di transizione tra ambiente elettromagnetico reale ed una regione numerica. Empiricamente si sceglie $N_y = 20$. Quindi se vogliamo analizzare campi elettromagnetici all'interno di una struttura, in un determinato range di frequenze, Δ_{max} non deve superare il limite Δ . Nei casi pratici si deve soddisfare la seguente condizione:

$$\Delta > \frac{\lambda_{min}}{10} \quad (37)$$

L'accuratezza della transizione migliora se $\Delta_{max} < \Delta$. Infatti se il numero di celle aumenta, anche i tempi di calcolo aumenteranno. Per contrastare questo aumento si dovrebbe ridurre il passo temporale Δt definito in precedente:

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta} \quad (38)$$

Nello scegliere il passo temporale bisogna ricorrere a criteri che mantengano la stabilità del sistema. Risolvendo per $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{\Delta t} \arcsin(\xi) \quad (39)$$

Dove:

$$\xi = c\Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2}\right) + \frac{1}{(\Delta y)^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2}\right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_z \Delta z}{2}\right)} \quad (40)$$

Dalla precedente otteniamo:

$$0 \leq \xi \leq c\Delta t \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \equiv \xi_{limite} \quad (41)$$

Le componenti del vettore d'onda numerico che massimizzano ξ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_y &= \pm \frac{\pi}{\Delta x} \\ \tilde{k}_x &= \pm \frac{\pi}{\Delta y} \\ \tilde{k}_z &= \pm \frac{\pi}{\Delta z} \end{aligned} \quad (42)$$

Nel caso che $\xi_{limite} > 1$ a causa di Δt la pulsazione numerica sarebbe complessa. Sotto queste condizioni 'è possibile provare l'instabilità del sistema numerico associato [7]. La condizione di stabilità viene ad essere la seguente:

$$\xi_{limite} \leq 1 \quad (43)$$

Cioè:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (44)$$

Ad esempio per una cella cubica $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta)^2} + \frac{1}{(\Delta)^2} + \frac{1}{(\Delta)^2}}} = \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \\ S &= \frac{c}{\Delta} \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (45)$$

Superare il valore S potrebbe provocare la divergenza dei risultati. In questo caso il programma andrebbe in errore visto che il risultato aumenterebbe fino a diventare talmente grande da non poter più essere rappresentabile da un linguaggio di programmazione come il C. Il numero di Courant viene definito comunemente come fattore di stabilità.

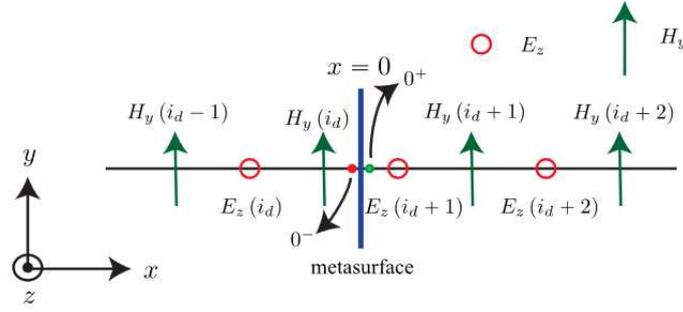


Figura 8: Schema computazionale per l'analisi 1-D di una metasuperficie 0-D. La metasuperficie, caratterizzata da tensori di suscettibilità superficiale, è posta a un nodo virtuale tra i punti di campionamento della griglia Yee FDTD sfalsata 1-D. I cerchi pieni rossi e verdi rappresentano nodi virtuali elettrici e magnetici appena prima e subito dopo la metasuperficie, cioè a $x = 0^-$ e $x = 0^+$, rispettivamente. L'onda incidente si propaga nella direzione x .

3 GSTC

Incominciamo ora ad introdurre le equazioni per la trasmissione dei campi elettromagnetici attraverso le metasuperfici, sia per una situazione 1-D e per 2-D.

3.1 Generalized Sheet Transition Condition FDTD per Simulazioni Metasuperfici

3.1.1 Analisi 1-D

Consideriamo qui il problema computazionale 1-D di una metasuperficie 0-D, rappresentata in 8. Ciò rappresenta ancora il problema pratico 3-D di una metasuperficie 2-D uniforme illuminata perpendicolarmente da un'onda elettromagnetica trasversale (TEM). La metasuperficie è posizionata nella griglia Yee sfalsata 1-D FDTD come mostrato in 8, cioè, a $x = 0$, tra le due celle vicine i_d e $i_d + 1$, dove i_d è il numero della cella prima della metasuperficie.

L'onda incidente illumina la metasuperficie da sinistra della metasuperficie ($x < 0$), mentre il lato destro ($x > 0$) è la regione delle onde trasmesse. Ovunque tranne che ai nodi attorno alla discontinuità, si possono usare le equazioni di aggiornamento FDTD convenzionali. Queste equazioni si possono leggere come [7]:

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_z^n(i+1) - E_z^n(i)] \quad (46)$$

$$E_z^n(i) = E_z^{n-1}(i) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} [H_y^{n-\frac{1}{2}}(i) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-1)] \quad (47)$$

Dove n rappresenta il tempo discreto, $t = n\Delta t$, con t passo temporale. Al contrario, un trattamento speciale deve essere applicato ai nodi intorno alla

discontinuità. Considera l'equazione di aggiornamento per $E_z^n(i_d + 1)$ in 8 che convenzionalmente dipenderebbe dai campi circostanti $H_y^{n-(1/2)}(i_d)$ e $H_y^{n-(1/2)}(i_d + 1)$. A causa della presenza della discontinuità tra le celle i_d e $i_d + 1$, $H_y^{n-(1/2)}(i_d)$ non può essere facilmente usato come tale in 41 o altrimenti nulla spiegherebbe l'effetto della discontinuità. Per rimediare a questa situazione, introduciamo un nodo magnetico virtuale (nodo H) sul lato destro della metasuperficie e riscriviamo l'equazione di aggiornamento che coinvolge questo nuovo nodo come:

$$E_z^n(i_d + 1) = E_z^{n-1}(i_d + 1) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(0^+) \right] \quad (48)$$

Dove $H_y^{n-(1/2)}(0^+)$ è sconosciuto. Per determinare questa quantità, invochiamo l'equazione GSTC $\Delta H_y = \varepsilon_0 \frac{d[\chi_{ee}^{zz} E_{z,av}]}{dt}$, la cui discretizzazione nel dominio del tempo si legge come:

$$H_y^{n-\frac{1}{2}}(0^+) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d) + \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left[\left(\chi_{ee}^{ZZ} E_{z,av} \right)^n - \left(\chi_{ee}^{ZZ} E_{z,av} \right)^{n-1} \right] \quad (49)$$

Dove si tiene ora conto dell'effetto della metasuperficie nel secondo termine del membro destro di questa equazione. Sostituendo 43 in 42 e raggruppando componenti identici e il rendimento:

$$E_z^n(i_d + 1) A_{ee}^{zz,n} = E_z^{n-1}(i_d + 1) A_{ee}^{ZZ,n-1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d) \right] - \frac{\chi_{ee}^{ZZ,n}}{2\Delta x} E_z^n(i_d) + \frac{\chi_{ee}^{ZZ,n-1}}{2\Delta x} E_z^{n-1}(i_d) \quad (50)$$

Con:

$$A_{ee}^{zz,n} = 1 + \frac{\chi_{ee}^{Zz,n}}{2\Delta x} \quad (51)$$

Consideriamo ora l'equazione di aggiornamento per $H_y^{n+(1/2)}(i_d)$, che dipenderebbe convenzionalmente dai campi circostanti $E_z^n(i_d)$ e $E_z^n(i_d + 1)$. Seguendo lo stesso argomento di $E_z^n(i_d + 1)$, introduciamo il nodo elettrico virtuale (E-node) sul lato sinistro della metasuperficie e riscriviamo l'aggiornamento dell'equazione 40 che coinvolge questo nuovo nodo come:

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left[E_z^n(0^-) - E_z^n(i_d) \right] \quad (52)$$

Invocare poi l'equazione GSTC $\Delta E_z = \mu_0 \frac{d[\chi_{mm}^{yy} H_{y,av}]}{dt}$, il cui dominio temporale viene discretizzato come:

$$E_Z^n(0^-) = E_Z^n(i_d + 1) - \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[(\chi_{mm}^{yy} H_{y,av})^{n+\frac{1}{2}} - (\chi_{mm}^{yy} H_{y,av})^{n-\frac{1}{2}} \right] \quad (53)$$

E infine sostituire 46 in 46 per ottenere.

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d) A_{mm}^{yy,n+\frac{1}{2}} &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d) A_{mm}^{yy,n-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_z^n(i_d + 1) - E_z^n(i_d)] \\ &- \frac{\chi_{mm}^{yy,n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d + 1) + \frac{\chi_{mm}^{yy,n-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ &\times H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1) \end{aligned} \quad (54)$$

Con:

$$A_{mm}^{yy,n} = 1 + \frac{\chi_{mm}^{yy,n}}{2\Delta x} \quad (55)$$

Le equazioni 47 e 48 sono le equazioni di aggiornamento per i nodi attorno alle discontinuità della metasuperficie. In assenza di metasuperficie, corrispondente a $\chi_{ee}^{ZZ,n}$ e $\chi_{mm}^{yy,n}$, queste equazioni si riducono alla loro convenzionali controparti 40 e 41, come previsto.

Un prossimo caso limite di interesse è quello di un meta-invariante nel tempo superficie, per cui $\chi_{ee}^{ZZ,n}$ e $\chi_{mm}^{yy,n}$ sono indipendenti dal tempo, cioè, su n , in modo che $A_{mm}^{yy,n} = A_{mm}^{yy} = 1 + (\chi_{mm}^{xx}/2\Delta x) = \mu_r$, dove μ_r è la corrispondente permeabilità alla metasuperficie della lastra diluita.

In questo caso, dividendo entrambi i lati di 48 per $A_{mm}^{yy} = \mu_r$ avremo:

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d) \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r \Delta x} [E_z^n(i_d + 1) - E_z^n(i_d)] \\ &+ \frac{\chi_{mm}^{yy}}{2\Delta x \mu_r} \left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d + 1) + H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Trascurare l'ultimo termine tra parentesi quadre riduce questa equazione alla sua controparte convenzionale per una "metasuperficie" modellata da una sottile lastra di permeabilità volumetrica μ_r , che può essere inteso come una diluizione della permeabilità superficiale della metasuperficie, $\mu_{r,surf}$, attraverso due celle della griglia, con lo spessore complessivo di $2\delta x$, cioè $\mu_r = \mu_{r,surf}/(2\Delta x)$. Un simile risultato tempo-invariante di suscettibilità si ottiene naturalmente per 50. Così, l'ultimo in 54 riduce efficacemente la lastra a un foglio senza maglie di spessore quasi zero. Un'interpretazione analoga è ovviamente trovata per 44 con $\epsilon_r = 1 + (\chi_{ee}^{ZZ}/2\Delta x)$. Nota che tali casi limite possono essere derivati direttamente anche nel caso di metasuperfici variabili nel tempo, per la quale 44 e 48 sono appena più usate.

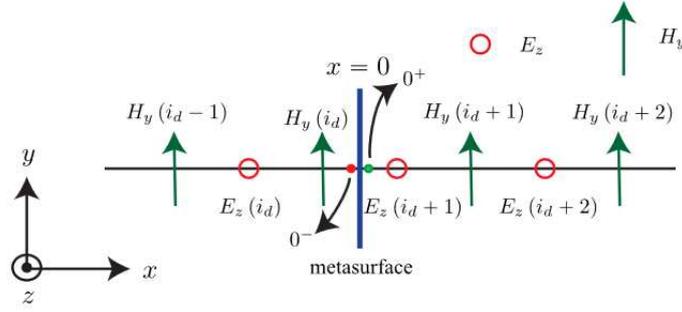


Figura 9: Schema computazionale per l'analisi 2-D di una metasuperficie 1-D. La metasuperficie, caratterizzata da tensori di suscettibilità superficiale, è posta su un array virtuale di nodi tra i punti di campionamento della griglia Yee FDTD sfalsata 2-D. I cerchi pieni rosso e verde rappresentano nodi virtuali elettrici e magnetici appena prima e subito dopo la metasuperficie, cioè a $x = 0^-$ e $x = 0^+$, rispettivamente. L'onda incidente si propaga nel piano x, y .

3.1.2 Analisi 2-D

Consideriamo ora il problema computazionale 2-D di una metasuperficie 1-D, rappresentata in 8. Questo presenta il problema pratico 3-D di un 1-D-non uniforme (ad es. gradiente di fase) metasuperficie 2-D illuminata da un'onda piana obliqua TM_z o TE_z . Senza la perdita di generalità, risolviamo qui il problema TM_z , con TE_z , H_x e H_y essendo i componenti di campo diversi da zero, mentre uno schema simile si applica direttamente al caso TE_z . La metasuperficie è posizionata nella griglia Yee sfalsata 2-D FDTD come mostrato in 8, dove i_d è il numero della cella prima di metasuperficie e $j_d = n_l : n_h$ rappresenta l'estensione della metasuperficie nella direzione dell'asse y . L'onda incidente illumina la metasuperficie nel piano x, z . Consideriamo l'equazione di aggiornamento per $E_z^n(i_d + 1, j_d)$ ai nodi attorno alle discontinuità, che convenzionalmente richiedono $H_y^{n-(1/2)}(i_d, j_d)$. Tuttavia, come nel caso 1-D, questa quantità di campo non può essere facilmente utilizzata come tale, perché annullerebbe l'effetto della metasuperficie, e quindi bisogna introdurre una matrice virtuale di nodi magnetici nella parte inferiore della discontinuità. Questo porta all'equazione aggiornata come:

$$\begin{aligned}
E_z^n(i_d + 1, j_d) &= E_z^{n-1}(i_d + 1, j_d) \\
&+ \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(0^+, j_d) \right] \\
&+ \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta y} \left[H_x^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) \right]
\end{aligned} \tag{57}$$

Che è la controparte 2-D della 42. Mentre per il campo magnetico sarà:

$$\begin{aligned}
H_y^{n-\frac{1}{2}}(0^+, j_d) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d, j_d) \\
&+ \frac{\varepsilon_0}{\Delta t} \left[\left(\chi_{ee}^{Zz} E_{Z,av} \right)^n - \left(\chi_{ee}^{Zz} E_{Z,av} \right)^{n-1} \right]
\end{aligned} \tag{58}$$

Che è la controparte 2-D della 43. Finalmente, sostituiamo la 52 con la 51 e raggruppando i risultati:

$$\begin{aligned}
E_z^n(i_d + 1, j_d) A_{ee}^{ZZ,n} &= E_Z^{n-1}(i_d + 1, j_d) A_{ee}^{zZ,n-1} \\
&+ \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x} \left[H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d, j_d) \right] \\
&+ \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta y} \left[H_x^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) \right] \\
&- \frac{1}{2\Delta x} \left[\chi_{ee}^{Zz,n} E_Z^n(i_d, j_d) - \chi_{ee}^{zZ,n-1} E_z^{n-1}(i_d, j_d) \right]
\end{aligned} \tag{59}$$

Con:

$$A_{ee}^{ZZ,n} = 1 + \frac{\chi_{ee}^{zz,n}}{2\Delta x} \tag{60}$$

Controparte 2-D della 42. Analogamente, si ottiene per la controparte 2-D di 46, 47, e 48, assumendo un array virtuale di nodi elettrici nella parte alta della discontinuità:

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d, j_d) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d, j_d) \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left[E_z^n(0^-, j_d) - E_z^n(i_d, j_d) \right]
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
E_z^n(0^-, j_d) &= E_z^n(i_d + 1, j_d) \\
&- \frac{\mu_0}{\Delta t} \left[\left(\chi_{mm}^{yy} H_{y,av} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\chi_{mm}^{yy} H_{y,av} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{62}$$

E:

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d, j_d) A_m^{y,n+1} &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d, j_d) A_m^{y,n-\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} \left[E_Z^n(i_d + 1, j_d) - E_z^n(i_d, j_d) \right] \\
&- \frac{\chi_{mm}^{yy,n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d) \\
&+ \frac{\chi_{mm}^{yy,n-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_d + 1, j_d)
\end{aligned} \tag{63}$$

4 Risultati e Conclusioni

In particolare, in questa fase preliminare di applicazione del codice, sono state confrontate le mappe di campo elettrico create da una metasuperficie trasparente e da una costituita da metallo ideale, per verificare il comportamento in presenza di due condizioni al contorno estreme per i campi. In particolare, le due situazioni vengono confrontate nelle figure seguenti ad istanti diversi dell'evoluzione temporale dei campi in una sezione del volume di calcolo. L'effetto di distorsione locale del campo, e conseguente diffusione, è ben evidente in presenza del conduttore. Come sviluppo futuro, il codice verrà completato per includere metasuperfici a condizione di impedenza diverse e intermedie rispetto alle due considerate in questa fase di messa a punto del programma:

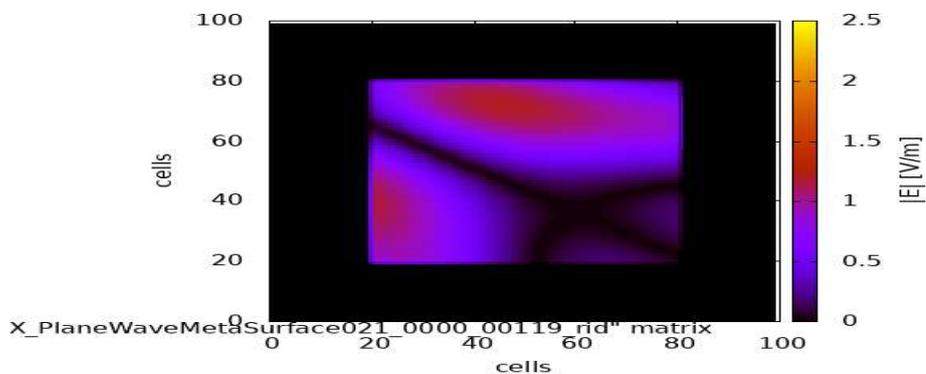


Figura 10: con metasuperficie "trasparente"

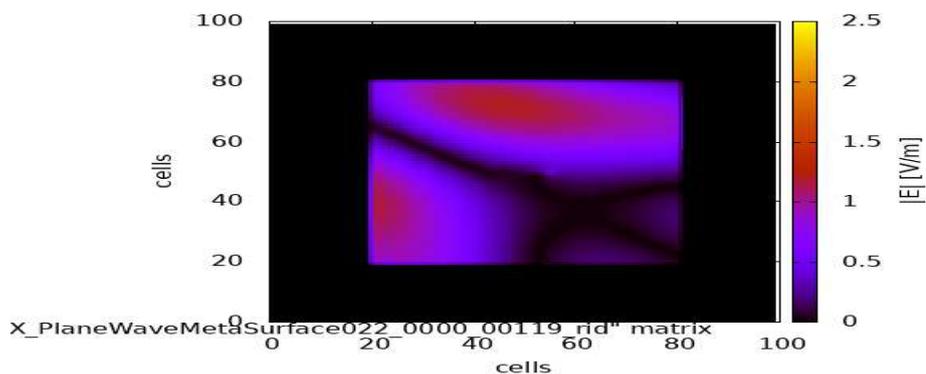
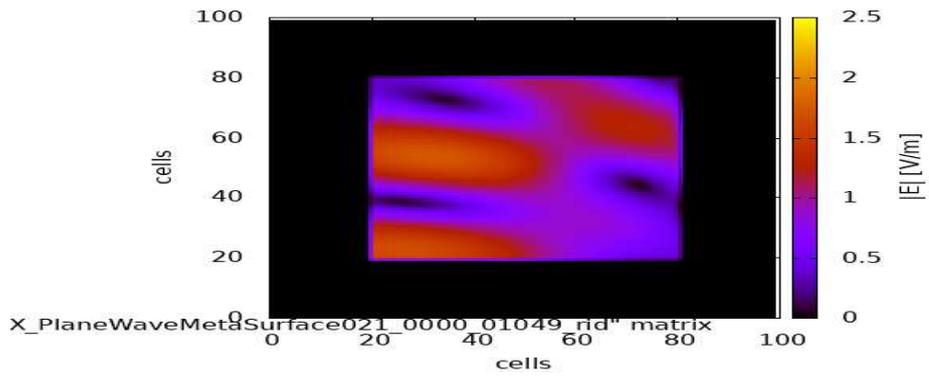


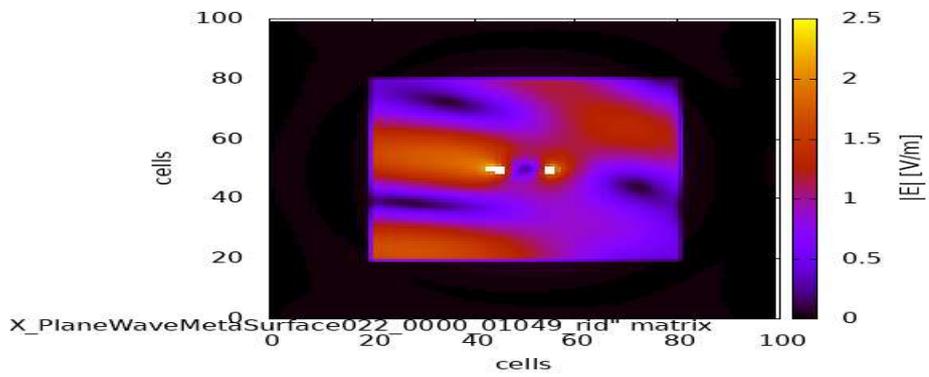
Figura 11: con metasuperficie

Figura 12: Confronto al passo temporale 119/2249



(a)

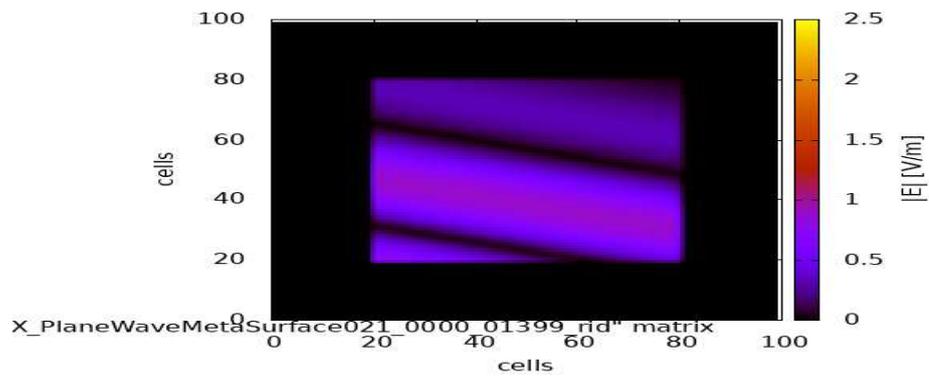
Figura 13: con metasuperficie "trasparente"



(a)

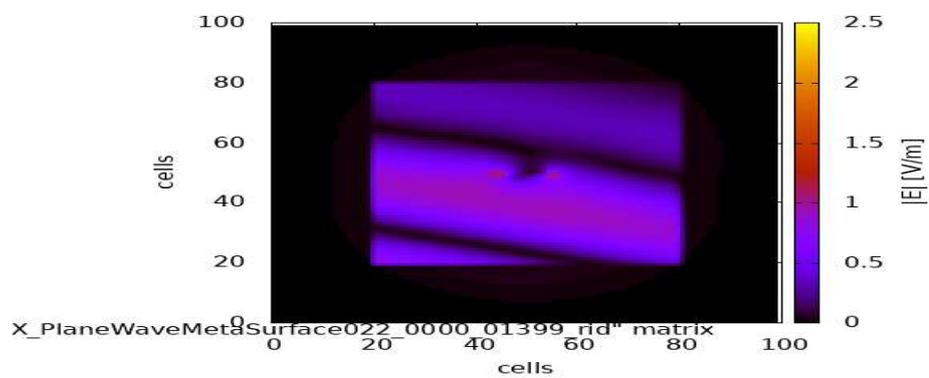
Figura 14: con metasuperficie

Figura 15: Confronto al passo temporale 1049/2249



(a)

Figura 16: con metasuperficie "trasparente"



(a)

Figura 17: con metasuperficie

Figura 18: Confronto al passo temporale 1399/2249

5 Appendice

Qui verrà riportato il codice relativo alle simulazioni, che però è ancora in fase di sviluppo, essendo questa una tesi sperimentale:

```

1  /*
2  *  RCFDTD - Simulation of electromagnetic reverberation
      chamber with FDTD on parallel computers
3  *  Copyright (C) 2013  Franco Moglie
4  *
5  *  This program is free software: you can redistribute it and
      /or modify
6  *  it under the terms of the GNU General Public License as
      published by
7  *  the Free Software Foundation, either version 3 of the
      License, or
8  *  (at your option) any later version.
9  *
10 *  This program is distributed in the hope that it will be
      useful,
11 *  but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied
      warranty of
12 *  MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See
      the
13 *  GNU General Public License for more details.
14 *
15 *  You should have received a copy of the GNU General Public
      License
16 *  along with this program.  If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
17 */
18
19 /* function history:
20 * 2003: Claudio Diaco, Franco Moglie
21 *      Core of ftdt functions.
22 * 2013: Franco Moglie
23 *      Optimization for FERMI machine.
24 */
25 /* FILE CHE CONTIENE LE ROUTINE DI CALCOLO DELLA FDTD */
26
27 #include "struttura_dati.h"
28 // #include "sub_metamateriali.h"
29
30 double xsi_ee(int anis_r, int anis_c, long int time, int im,
      int jm, struct_met * met);
31 double xsi_mm(int anis_r, int anis_c, long int time, int im,
      int jm, struct_met * met);
32
33 /* CALCOLA IL CAMPO ELETTRICO SUL METAMATERIALE PLANARE
      PERPENDICOLARE ALL'ASSE Z*/
34 void calcola_e_met_pianoz (struct_campoEM * campo, struct_fdt
      * fdt, struct_met * met, long int time)

```

```

35 {
36 /* Dobbiamo calcolare Ex e Ey per la cella a k+1 e salvare i
    vecchi valori a Ex e Ey per la cella a k */
37 /* La struttura dati e' met->campi_z, ove l'ultimo indice si
    riferisce a Ex o Ey o Hx o Hy con la seguente regola:
38 * 0: Exk (serve solo per salvare il valore dell'istante
    precedente)
39 * 1: Hyk (serve per calcolare il nuovo valore e salvare il
    valore dell'istante precedente)
40 * 2: Exkp1 (serve per calcolare il nuovo valore e salvare il
    valore dell'istante precedente)
41 * 3: Hykp1 (serve solo per salvare il valore dell'istante
    precedente)
42 * 4: Eyk (serve solo per salvare il valore dell'istante
    precedente)
43 * 5: Hxk (serve per calcolare il nuovo valore e salvare il
    valore dell'istante precedente)
44 * 6: Eykp1 (serve per calcolare il nuovo valore e salvare il
    valore dell'istante precedente)
45 * 7: Hxkp1 (serve solo per salvare il valore dell'istante
    precedente)
46 */
47 /* Funzione xsi_ee da completare per la metasuperficie planare
    sul piano normale a z:
48 * La funzione include la divisione per 2*Dz dell'articolo
49 * primo indice: 0=xx, 1=yy, 2=zz)
50 * secondo indice: istante di tempo
51 * terzo e quarto indice: coordinate i, j
52 * quinto indice: caratteristiche del metamateriale
53 */
54     int i, j, k;
55     int im, jm;
56     double prec_xsi_ee_zxx, prec_xsi_ee_zyy;
57
58     k = met->k0;
59
60 #pragma omp parallel for default(none) \
61     shared(campo, ftdt, met, time, k) \
62     private(i, j, im, jm, prec_xsi_ee_zxx,
63     prec_xsi_ee_zyy) \
64     num_threads(RCFDTD_THREADS)
65 for (im = 0; im < met->dimx - 1 - met->inx; im++)
66     for (jm = 0; jm < met->dimy - 1 - met->iny; jm++)
67     {
68         i = im + met->inx;
69         j = jm + met->iny;
70 /*     printf("Indici %d,%d,%d\n",i,j,k); */
71 /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
    variabile di appoggio */
72 prec_xsi_ee_zxx = met->xsi_ee_zxx[im][jm];
    prec_xsi_ee_zyy = met->xsi_ee_zyy[im][jm];

```

```

73  /* Calcola i balori all'istante 'time' e li salva nell'array
    2D */
74      // *****
75      /*
76  met->xsi_ee_zxx[im][jm] = 0;
77  met->xsi_ee_zyy[im][jm] = 0;
78      */
79  met->xsi_ee_zxx[im][jm] = xsi_ee(0,0,time,i,j,met);
80  met->xsi_ee_zyy[im][jm] = xsi_ee(1,1,time,i,j,met);
81
82      met->campi_z[2][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_ee_zxx) * met->
campi_z[2][im][jm] +
83      fdttd->coef2yx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hz[i][j][k + 1] -
campo->Hz[i][j - 1][k + 1]) -
84      (fdttd->coef2zx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hy[i][j][k + 1]
- campo->Hy[i][j][k]) +
85      (met->xsi_ee_zxx[im][jm]*campo->Ex[i][j][k] -
prec_xsi_ee_zxx*met->campi_z[0][im][jm]))) /
86      (1.0 - met->xsi_ee_zxx[im][jm]);
87
88  campo->Ex[i][j][k + 1] = met->campi_z[2][im][jm];
89  met->campi_z[0][im][jm] = campo->Ex[i][j][k];
90
91      met->campi_z[6][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_ee_zyy) * met->
campi_z[6][im][jm] +
92      (fdttd->coef2zx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hx[i][j][k + 1]
- campo->Hx[i][j][k]) +
93      (met->xsi_ee_zyy[im][jm]*campo->Ey[i][j][k] -
prec_xsi_ee_zyy*met->campi_z[4][im][jm])) -
94      fdttd->coef2yx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hz[i][j][k + 1] -
campo->Hz[i - 1][j][k + 1])) /
95      (1.0 - met->xsi_ee_zyy[im][jm]);
96
97  campo->Ey[i][j][k + 1] = met->campi_z[6][im][jm];
98  met->campi_z[4][im][jm] = campo->Ey[i][j][k];
99      }
100
101  i = met->dimx - 1;
102  im = met->dimx - 1 - met->inx ;
103  #pragma omp parallel for default(none) \
104      shared(campo, fdttd, met, time, i, im, k) \
105      private(j, jm, prec_xsi_ee_zyy) \
106      num_threads(RCFDTD_THREADS)
107  for (jm = 0; jm < met->dimy - 1 - met->iny; jm++)
108      {
109          j= jm + met->iny;
110          /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
varuiabile di appoggio */
111          prec_xsi_ee_zyy = met->xsi_ee_zyy[im][jm];
112          /* Calcola i bvalori all'istante 'time' e li salva nell'
array 2D */
113          // *****

```

```

114     /*
115 met->xsi_ee_zyy[im][jm] = 0;
116     */
117 met->xsi_ee_zyy[im][jm] = xsi_ee(1,1,time,i,j,met);
118
119     //Cambiare come abbiamo cambiato sopra
120 met->campi_z[6][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_ee_zyy) * met->
campi_z[6][im][jm] +
121     (fdtd->coef2zx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hx[i][j][k + 1]
- campo->Hx[i][j][k])) +
122     (met->xsi_ee_zyy[im][jm]*campo->Ey[i][j][k] -
prec_xsi_ee_zyy*met->campi_z[4][im][jm])) -
123     (fdtd->coef2yx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hz[i][j][k + 1] -
campo->Hz[i - 1][j][k + 1])) /
124     (1.0 - met->xsi_ee_zyy[im][jm]));
125
126 campo->Ey[i][j][k + 1] = met->campi_z[6][im][jm];
127 met->campi_z[4][im][jm] = campo->Ey[i][j][k];
128     }
129
130 j = met->dimy - 1;
131 jm = met->dimy - 1 - met->iny ;
132 #pragma omp parallel for default(none) \
133     shared(campo, fdt, met, time, j, jm, k) \
134     private(i, im, prec_xsi_ee_zxx) \
135     num_threads(RCFDTD_THREADS)
136 for (im = 0; im < met->dimx - 1 - met->inx; im++)
137     {
138         i = im + met->inx;
139         /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
varuiabile di appoggio */
140 prec_xsi_ee_zxx = met->xsi_ee_zxx[im][jm];
141         /* Calcola i bvalori all'istante 'time' e li salva nell'
array 2D */
142         // *****
143         /*
144 met->xsi_ee_zxx[im][jm] = 0;
145         */
146 met->xsi_ee_zxx[im][jm] = xsi_ee(0,0,time,i,j,met);
147
148         //Cambiare come abbiamo cambiato sopra
149 met->campi_z[2][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_ee_zxx) * met->
campi_z[2][im][jm] +
150     (fdtd->coef2yx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hz[i][j][k + 1] -
campo->Hz[i][j - 1][k + 1])) -
151     (fdtd->coef2zx_1[i][j][k + 1] * (campo->Hy[i][j][k + 1]
- campo->Hy[i][j][k])) +
152     (met->xsi_ee_zxx[im][jm]*campo->Ex[i][j][k] -
prec_xsi_ee_zxx*met->campi_z[0][im][jm])) /
153     (1.0 - met->xsi_ee_zxx[im][jm]));
154
155 campo->Ex[i][j][k + 1] = met->campi_z[2][im][jm];

```

```

156 met->campi_z[0][im][jm] = campo->Ex[i][j][k];
157     }
158 }
159
160 /* CALCOLA IL CAMPO MAGNETICO SUL METAMATERIALE PERPENDICOLARE
161    ALL'ASSE Z*/
162 /* Stessa struttura dati 'met->campi_z' della funzione '
163    calcola_e_met_pianoz' */
164 void calcola_h_met_pianoz (struct_campoEM * campo, struct_fdttd
165    * fdttd, struct_met * met, long int time)
166 {
167     int i, j, k;
168     int im, jm;
169     double prec_xsi_mm_zxx, prec_xsi_mm_zyy;
170
171     k = met->k0;
172
173 #pragma omp parallel for default(none) \
174     shared(campo, fdttd, met, time, k) \
175     private(i, j, im, jm, prec_xsi_mm_zxx,
176     prec_xsi_mm_zyy) \
177     num_threads(RCFDTD_THREADS)
178 for (im = 0; im < met->dimx - 1 - met->inx; im++)
179     for (jm = 0; jm < met->dimy - 1 - met->iny; jm++)
180     {
181         i= im + met->inx;
182         j= jm + met->iny;
183         /* printf("Indici %d,%d,%d\n",i,j,k); */
184         /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
185            variabile di appoggio */
186         prec_xsi_mm_zxx = met->xsi_mm_zxx[im][jm];
187         prec_xsi_mm_zyy = met->xsi_mm_zyy[im][jm];
188         /* Calcola i valori all'istante 'time' e li salva nell'array
189            2D */
190         // *****
191         /*
192         met->xsi_mm_zxx[im][jm] = 0;
193         met->xsi_mm_zyy[im][jm] = 0;
194         */
195         met->xsi_mm_zxx[im][jm] = xsi_mm(0,0,time,i,j,met);
196         met->xsi_mm_zyy[im][jm] = xsi_mm(1,1,time,i,j,met);
197
198         /* Aggiorna il campo magnetico lungo y */
199         met->campi_z[1][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_mm_zyy) * met->
200         campi_z[1][im][jm] +
201         fdttd->coef4y_1[j] * (campo->Ez[i + 1][j][k] - campo->Ez[i
202         ][j][k]) -
203         (fdtd->coef4z_1[k] * (campo->Ex[i][j][k + 1] - campo->Ex[i
204         ][j][k]) +
205         met->coefz[im][jm]*(met->xsi_mm_zyy[im][jm]*campo->Hy[i][j
206         ][k + 1] - prec_xsi_mm_zyy*met->campi_z[3][im][jm])) /
207         (1.0 - met->xsi_mm_zyy[im][jm]);

```

```

198 campo->Hy[i][j][k] = met->campi_z[1][im][jm];
199 met->campi_z[3][im][jm] = campo->Hy[i][j][k + 1];
200
201 /* Aggiorna il campo magnetico lungo x */
202 met->campi_z[5][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_mm_zxx) * met->
    campi_z[5][im][jm] +
203     (fdtd->coef4z_1[k] * (campo->Ey[i][j][k + 1] - campo->Ey[i]
        ][j][k] ) +
204     met->coefz[im][jm]*(met->xsi_mm_zxx[im][jm]*campo->Hx[i][j]
        ][k + 1] - prec_xsi_mm_zxx*met->campi_z[7][im][jm])) -
205     fdttd->coef4y_1[j] * (campo->Ez[i][j + 1][k] - campo->Ez[i]
        ][j][k])) /
206     (1.0 - met->xsi_mm_zxx[im][jm]);
207 campo->Hx[i][j][k] = met->campi_z[5][im][jm];
208 met->campi_z[7][im][jm] = campo->Hx[i][j][k + 1];
209     }
210
211 i = met->dimx - 1;
212 im = met->dimx - 1 - met->inx ;
213 #pragma omp parallel for default(none) \
214     shared(campo, fdttd, met, time, i, im, k) \
215     private(j, jm, prec_xsi_mm_zxx) \
216     num_threads(RCFDTD_THREADS)
217 for (jm = 0; jm < met->dimy - 1 - met->iny; jm++)
218     {
219         j= jm + met->iny;
220         /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
            varuiabile di appoggio */
221         prec_xsi_mm_zxx = met->xsi_mm_zxx[im][jm];
222         /* Calcola i bvalori all'istante 'time' e li salva nell'
            array 2D */
223         // *****
224         /*
225         met->xsi_mm_zxx[im][jm] = 0;
226         */
227         met->xsi_mm_zxx[im][jm] = xsi_mm(0,0,time,i,j,met);
228         /* Aggiorna il campo magnetico lungo x */
229         met->campi_z[5][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_mm_zxx) * met->
            campi_z[5][im][jm] +
230             (fdtd->coef4z_1[k] * (campo->Ey[i][j][k + 1] - campo->Ey[i]
                ][j][k] ) +
231             met->coefz[im][jm]*(met->xsi_mm_zxx[im][jm]*campo->Hx[i][j]
                ][k + 1] - prec_xsi_mm_zxx*met->campi_z[7][im][jm])) -
232             fdttd->coef4y_1[j] * (campo->Ez[i][j + 1][k] - campo->Ez[i]
                ][j][k])) /
233             (1.0 - met->xsi_mm_zxx[im][jm]);
234         campo->Hx[i][j][k] = met->campi_z[5][im][jm];
235         met->campi_z[7][im][jm] = campo->Hx[i][j][k + 1];
236     }
237
238 j = met->dimy - 1;
239 jm = met->dimy - 1 - met->iny ;

```

```

240 #pragma omp parallel for default(none) \
241     shared(campo, ftdtd, met, time, j, jm, k) \
242     private(i, im, prec_xsi_mm_zyy) \
243     num_threads(RCFDTD_THREADS)
244 for (im = 0; im < met->dimx - 1 - met->inx; im++)
245 {
246     i = im + met->inx;
247     /* Salva i valori calcolati all'istante 'time-1' in una
248        varuiabile di appoggio */
249     prec_xsi_mm_zyy = met->xsi_mm_zyy[im][jm];
250     /* Calcola i bvalori all'istante 'time' e li salva nell'
251        array 2D */
252     // *****
253     /*
254     met->xsi_mm_zyy[im][jm] = 0;
255     */
256     met->xsi_mm_zyy[im][jm] = xsi_mm(1,1,time,i,j,met);
257     /* Aggiorna il campo magnetico lungo y */
258     met->campi_z[1][im][jm] = ((1.0 - prec_xsi_mm_zyy) * met->
259     campi_z[1][im][jm] +
260     ftdtd->coef4y_1[j] * (campo->Ez[i + 1][j][k] - campo->Ez[i
261     ][j][k]) -
262     (ftdtd->coef4z_1[k] * (campo->Ex[i][j][k + 1] - campo->Ex[i
263     ][j][k]) +
264     met->coefz[im][jm]*(met->xsi_mm_zyy[im][jm]*campo->Hy[i][j
265     ][k + 1] - prec_xsi_mm_zyy*met->campi_z[3][im][jm]))) /
266     (1.0 - met->xsi_mm_zyy[im][jm]);
267     campo->Hy[i][j][k] = met->campi_z[1][im][jm];
268     met->campi_z[3][im][jm] = campo->Hy[i][j][k + 1];
269 }
270 }
271
272 void
273 alloca_piani_metas (struct_met * met, int tipo)
274 {
275     /* tipo = 0: Metasuperficie normale all'asse x (x costante)
276     * tipo = 1: Metasuperficie normale all'asse y (y costante)
277     * tipo = 2: Metasuperficie normale all'asse z (z costante)
278     */
279     switch (tipo)
280     {
281     case 0:
282         /* inx e dimx (variano gli indici j e k) */
283         break;
284     case 1:
285         /* iny e dimy (variano gli indici i e k) */
286         break;
287     case 2:
288         /* inz e dimz (variano gli indici i e j) */
289         met->campi_z = d_alloca_3d ((size_t) 8, (size_t) (met->
290         dimx - met->inx), (size_t) (met->dimy - met->iny), 0.0);

```

```

284     met->xsi_mm_zxx = d_alloca_2d ((size_t) (met->dimx - met
->inx), (size_t) (met->dimy - met->iny), 0.0);
285     met->xsi_mm_zyy = d_alloca_2d ((size_t) (met->dimx - met
->inx), (size_t) (met->dimy - met->iny), 0.0);
286     met->xsi_ee_zxx = d_alloca_2d ((size_t) (met->dimx - met
->inx), (size_t) (met->dimy - met->iny), 0.0);
287     met->xsi_ee_zyy = d_alloca_2d ((size_t) (met->dimx - met
->inx), (size_t) (met->dimy - met->iny), 0.0);
288     met->coefz = d_alloca_2d ((size_t) (met->dimx - met->inx
), (size_t) (met->dimy - met->iny), 1.0);
289     met->campi_x = NULL;
290     met->campi_y = NULL;
291     met->xsi_mm_yxx = NULL;
292     met->xsi_mm_yzz = NULL;
293     met->xsi_ee_yxx = NULL;
294     met->xsi_ee_yzz = NULL;
295     met->xsi_mm_xyy = NULL;
296     met->xsi_mm_xzz = NULL;
297     met->xsi_ee_xyy = NULL;
298     met->xsi_ee_xzz = NULL;
299     break;
300     default:
301     printf ("Function 'alloca_piani_metas' - Tipo = %d
forbiden.\n", tipo) ;
302     exit (EXIT_FAILURE);
303     break;
304 }
305 }
306
307 void
308 libera_piani_metas (struct_met * met, int tipo)
309 {
310     /* tipo = 0: Metasuperficie normale all'asse x (x costante)
311     * tipo = 1: Metasuperficie normale all'asse y (y costante)
312     * tipo = 2: Metasuperficie normale all'asse z (z costante)
313     */
314     switch (tipo)
315     {
316     case 0:
317     /* inx e dimx (variano gli indici j e k) */
318     break;
319     case 1:
320     /* iny e dimy (variano gli indici i e k) */
321     break;
322     case 2:
323     /* inz e dimz (variano gli indici i e j) */
324     d_libera_3d (met->campi_z, (size_t) 8, (size_t) met->
dimx - met->inx);
325     d_libera_2d (met->xsi_mm_zxx, (size_t) met->dimx - met->
inx);
326     d_libera_2d (met->xsi_mm_zyy, (size_t) met->dimx - met->
inx);

```

```
327     d_libera_2d (met->xsi_ee_zxx, (size_t) met->dimx - met->
    inx);
328     d_libera_2d (met->xsi_ee_zyy, (size_t) met->dimx - met->
    inx);
329     d_libera_2d (met->coefz, (size_t) met->dimx - met->inx);
330     break;
331     default:
332     printf ("Function 'libera_piani_metas' - Tipo = %d
    forbidden.\n", tipo) ;
333     exit (EXIT_FAILURE);
334     break;
335 }
336 }
```

Riferimenti bibliografici

- [1] Nima Chamanara, Yousef Vahabzadeh, and Christophe Caloz. Simultaneous control of the spatial and temporal spectra of light with space-time varying metasurfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 67(4):2430–2441, 2019.
- [2] Christopher L Holloway, Andrew Dienstfrey, Edward F Kuester, John F O’Hara, Abul K Azad, and Antoinette J Taylor. A discussion on the interpretation and characterization of metafilms/metasurfaces: The two-dimensional equivalent of metamaterials. *Metamaterials*, 3(2):100–112, 2009.
- [3] Christopher L Holloway and Edward F Kuester. A homogenization technique for obtaining generalized sheet-transition conditions for a metafilm embedded in a magnetodielectric interface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 64(11):4671–4686, 2016.
- [4] Christopher L Holloway and Edward F Kuester. Generalized sheet transition conditions for a metascreen—a fishnet metasurface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 66(5):2414–2427, 2018.
- [5] Christopher L Holloway, Edward F Kuester, and Andrew Dienstfrey. Characterizing metasurfaces/metafilms: The connection between surface susceptibilities and effective material properties. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 10:1507–1511, 2011.
- [6] Edward F Kuester, Mohamed A Mohamed, Melinda Piket-May, and Christopher L Holloway. Averaged transition conditions for electromagnetic fields at a metafilm. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(10):2641–2651, 2003.
- [7] Allen Taflove, Susan C Hagness, and Melinda Piket-May. Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method. *The Electrical Engineering Handbook*, 3, 2005.
- [8] Yousef Vahabzadeh, Nima Chamanara, and Christophe Caloz. Generalized sheet transition condition fdtd simulation of metasurface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 66(1):271–280, 2017.
- [9] Fan Yang and Yahya Rahmat-Samii. *Surface electromagnetics: with applications in antenna, microwave, and optical engineering*. Cambridge University Press, 2019.