



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

Un modello per la frattura nei materiali viscoelastici: applicazioni numeriche ai tessuti cartilaginei

A fracture model for viscoelastic materials: numerical applications to cartilage tissues

Candidato:
Giacomo Giovagnoli

Relatore:
Prof. Giovanni Lancioni

Anno Accademico 2023-2024



UNIVERSITÀ
POLITECNICA
DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

Un modello per la frattura nei materiali viscoelastici: applicazioni numeriche ai tessuti cartilaginei

A fracture model for viscoelastic materials: numerical applications to cartilage tissues

Candidato:
Giacomo Giovagnoli

Relatore:
Prof. Giovanni Lancioni

Anno Accademico 2023-2024

UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA
Via Brezze Bianche – 60131 Ancona (AN), Italy

Sommario

L'obiettivo di questo studio è quello di presentare e validare un modello numerico che sia in grado di descrivere il comportamento viscoelastico del tessuto cartilagineo quando questo viene sottoposto a un carico. Particolare attenzione viene posta sul danneggiamento e sulla rottura di questi materiali. Innanzitutto viene fatta una descrizione fisiologica del tessuto cartilagineo e delle sue proprietà, per poi passare alla descrizione teorica del modello. In seguito i risultati ottenuti dall'implementazione in codice MATLAB® del modello vengono confrontati con un altro modello presente in letteratura.

Indice

1	Tessuto cartilagineo	1
1.1	Cellule e tessuto connettivo	3
1.2	La cartilagine	4
1.2.1	La matrice extracellulare	4
1.3	Tipologie di cartilagine	5
1.4	Struttura della cartilagine articolare	7
2	Elasticità e viscoelasticità	9
2.1	Elasticità	11
2.2	Plasticità	12
2.3	Viscoelasticità	12
2.3.1	Modello di Maxwell	14
2.3.2	Modello di Kelvin-Voigt	16
2.3.3	Modello di Maxwell Generalizzato	17
3	Formulazione teorica della frattura in materiali viscoelastici	19
3.1	Viscoelasticità del tessuto cartilagineo	21
3.2	Frattura	21
3.3	Modello	22
3.4	Energie	23
3.5	Potenze	25
3.5.1	Potenza interna	25
3.5.2	Potenza esterna	26
3.6	Criterio di stabilità	26
3.7	Dissipazione	30
3.7.1	Evoluzione viscosa	30
3.8	Strategia di risoluzione	31
3.8.1	Soluzione numerica	34
4	Risultati	35
4.1	Risultati presenti in letteratura	37
4.2	Calibrazione	39
4.3	Risultati	40
5	Conclusioni	47

Indice

6 Applicazioni	51
6.1 Elasticità e Frattura	59

Elenco delle figure

1.1	Tessuti connettivi.	3
1.2	Tessuto cartilagineo al microscopio.	5
1.3	Composizione della matrice extracellulare.	6
1.4	Composizione della matrice di cartilagine.	7
1.5	Articolazione.	8
2.1	Elasticità lineare e iperelasticità.	12
2.2	Comportamento inelastico.	12
2.3	Molla elastica.	13
2.4	Smorzatore.	13
2.5	Modello di Maxwell.	14
2.6	Rilassamento del modello in seguito a deformazione costante.	15
2.7	Creep del modello in seguito ad uno sforzo costante.	15
2.8	Modello di Kelvin-Voigt.	16
2.9	Creep del modello.	16
2.10	Modello di Maxwell generalizzato a n rami.	17
2.11	Modello di Maxwell generalizzato a un solo ramo	17
4.1	Relazione sforzo-deformazione a differenti velocità di deformazione.	38
4.2	Danneggiamento a differenti velocità di deformazione.	39
4.3	Basse velocità di deformazione.	40
4.4	Alte velocità di deformazione.	41
4.5	Variazione dello stress al variare della velocità di deformazione.	41
4.6	Curve di carico.	42
4.7	Tensione di rottura.	42
4.8	Tensione di rottura riportata in Ateshian et al.	43
4.9	Deformazione di rottura.	44
4.10	Velocità di deformazione elevata. Dall'angolo in alto a sinistra in senso antiorario: spostamento, sforzi, deformazioni e danno.	44
4.11	Velocità di deformazione bassa.Dall'angolo in alto a sinistra in senso antiorario: spostamento, sforzi, deformazioni e danno.	45
4.12	Evoluzione del danno all'avanzare della deformazione a basse velocità di deformazione.	45
4.13	Fase completamente danneggiata a basse velocità di deformazione.	46
6.1	Autologous Chondrocyte Transplantation.	54

Elenco delle figure

6.2	Idrogel iniettabili.	55
6.3	Protesi articolare d'anca.	55

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Tessuto cartilagineo

Il tessuto cartilagineo

1.1 Cellule e tessuto connettivo

Le **cellule connettivali**, come suggerito dal nome stesso, si occupano di connettere, collegare e fare da supporto alle varie strutture dell'organismo[1]. Alcune di queste cellule costituiscono il tessuto epiteliale, che riveste sia l'intero corpo, attraverso la pelle, che i singoli organi. Altre cellule connettivali costituiscono le ossa, la cartilagine, i legamenti e i tendini. Sono tessuti connettivi anche il tessuto adiposo, che serve per immagazzinare i grassi, e il sangue. Il sangue infatti, seppur liquido, mette in collegamento le varie porzioni del corpo trasportando nutrimento e messaggeri chimici.



Figura 1.1: Tessuti connettivi.

1.2 La cartilagine

La cartilagine è una forma specializzata di tessuto connettivo avascolare, aneurológico e alinfatico presente nelle articolazioni sinoviali, nella colonna vertebrale, nelle costole, nelle orecchie esterne, nel naso, nelle vie aeree e nelle placche di crescita di bambini e adolescenti [2]. Il tessuto cartilagineo appartiene ai tessuti connettivi di sostegno o scheletrici ed è, per questo, dotato di particolari proprietà meccaniche e funzionali come elasticità, elevata resistenza alla tensione e alla pressione[3]. Questo particolare tipo di tessuto è caratterizzato da un'abbondante matrice extracellulare nella quale, racchiusi all'interno di lacune o cavità, si trovano i condrociti, ossia cellule specializzate il cui compito è quello di secernere le macromolecole che compongono la matrice extracellulare cartilaginea [4]. Essendo la cartilagine un tessuto che non contiene né vasi né nervi, il nutrimento raggiunge i condrociti situati nelle lacune grazie alla permeabilità della sostanza extracellulare [3].

1.2.1 La matrice extracellulare

I tessuti biologici non sono formati unicamente da cellule ma una parte importante del loro volume è costituito dallo spazio extracellulare, che comprende una fitta rete di macromolecole la cui organizzazione spaziale dà origine alla **matrice extracellulare (MEC o ECM)**. La matrice cellulare è una componente organizzata dei tessuti biologici, prevalente rispetto alle cellule nel caso in cui si parli di tessuti connettivi e la cui composizione varia a seconda del tessuto considerato. Il suo ruolo è quello di avvolgere le cellule nella costituzione dei tessuti, fornendo loro supporto e garantendone il nutrimento. Le proprietà meccaniche dei tessuti sono fortemente influenzate dalla matrice extracellulare[5], infatti le tre principali componenti sono il collagene, l'elastina e i proteoglicani. L'elastina è responsabile del comportamento elastico del materiale, il collagene si oppone alla trazione e i proteoglicani resistono molto bene alla compressione. Oltre a queste tre proteine ce ne sono in realtà molte altre, ciascuna con il proprio ruolo, per garantire il corretto funzionamento del tessuto. Tutte queste proteine sono disciolte in acqua in un rapporto fra fase solida e fase liquida di 1 a 4. Anche l'acqua gioca il suo ruolo nel comportamento meccanico complessivo perché essendo un fluido incomprimibile è in grado di opporsi alle pressioni che il corpo esercita sulle articolazioni per effetto della forza peso. Un paragone sufficientemente esplicativo potrebbe risiedere nell'accostamento fra matrice extracellulare e cemento armato. Proprio come nel cemento armato, infatti, nella ECM sono presenti strutture monodimensionali rigide immerse in una sostanza gelatinosa allo scopo di migliorarne la resistenza e la rigidità.

Per svolgere le funzioni biomeccaniche di supporto strutturale e resistenza alla deformazione, la matrice extracellulare (ECM) della cartilagine contiene una famiglia unica di proteoglicani intrappolati all'interno di una rete fibrillare di collagene altamente idratata [2].

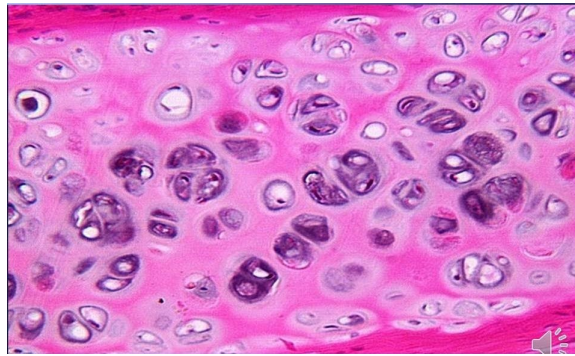


Figura 1.2: Tessuto cartilagineo al microscopio.

1.3 Tipologie di cartilagine

Dal punto di vista istologico, la cartilagine è distinguibile in tre tipi fondamentali che differiscono in abbondanza, distribuzione e tipi di collagene e proteoglicani in essa contenuti, dando luogo a differenze nell'aspetto e nelle proprietà biomeccaniche.

Questi tipi sono la cartilagine ialina, la cartilagine elastica e la cartilagine fibrosa, ciascuna con la propria composizione biochimica e di conseguenza la propria funzione fisiologica. La cartilagine ialina rappresenta il tipo più comune di cartilagine.

Nell'adulto, essa costituisce il rivestimento delle superfici articolari, oltre a formare le cartilagini costali, gli anelli tracheali, la maggior parte delle cartilagini laringee, le cartilagini bronchiali e quelle del naso. La matrice extracellulare della cartilagine ialina presenta una componente fibrosa composta principalmente da collagene di tipo II, mentre la sostanza amorfa è caratterizzata dalla presenza di grandi complessi molecolari formati da proteoglicani aggregati a lunghe catene di acido ialuronico (un glicosamminoglicano che conferisce resistenza ed elasticità al tessuto). Mentre la componente fibrosa garantisce un'elevata resistenza alla trazione, la sostanza amorfa conferisce alla cartilagine una grande resistenza alla compressione e forma superfici perfettamente lisce e prive di attriti, proprietà essenziali, ad esempio, per il normale scivolamento reciproco delle superfici articolari. La cartilagine elastica è un tessuto caratterizzato da una rete di fibre elastiche distribuite all'interno della matrice extracellulare. Questa tipologia di cartilagine presenta una colorazione giallastra, dovuta alla presenza di fibre elastiche (che sono anche definite fibre gialle) ed è opaca a differenza della cartilagine ialina. Come suggerisce il nome, è la tipologia di cartilagine più elastica e flessibile, qualità che derivano dalla predominanza della componente fibrosa rispetto alla matrice cartilaginea [6]. Essa è in grado di fornire un sostegno rigido e, allo stesso tempo, molto flessibile grazie alla proprietà delle fibre di elastina, una proteina che consente alle fibre di ritornare alla loro forma originale dopo essere state stirate. Nella cartilagine elastica, la matrice extracellulare è meno abbondante e contiene una porzione significativa di fibre di elastina, che decorrono in tutte le direzioni formando una rete molto compatta, e un minor contenuto di proteoglicani. La cartilagine elastica nell'uomo costituisce il sostegno dell'orecchio

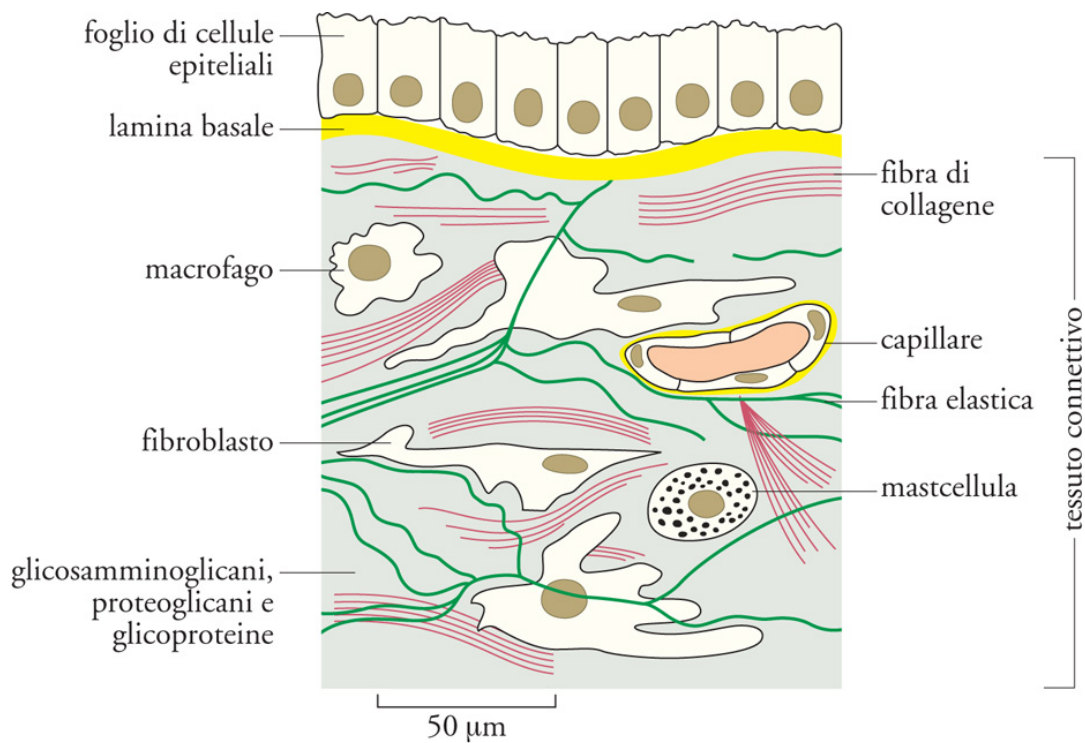


Figura 1.3: Composizione della matrice extracellulare.

esterno ed è presente anche nella laringe e nell'epiglottide.

Nella cartilagine fibrosa la componente di collagene è preponderante rispetto alla matrice amorfa. È caratterizzata dalla presenza di grossi fasci fibrosi immersi in una scarsa matrice cartilaginea con piccole quantità di proteoglicani. Questo tipo di cartilagine è composto principalmente da collagene di tipo I, che forma sottili fasci fibrosi conferendo al tessuto un'elevata rigidità e resistenza alla compressione e alla tensione, anche in presenza di forze notevoli. La ECM della fibrocartilagine consiste approssimativamente per il 60-70% di collagene, per l'8-9% di altre proteine e per circa l'1% di proteoglicani. Questo tipo di cartilagine è presente in zone soggette a notevoli pressioni quali, ad esempio, i dischi intervertebrali, i menischi, la mandibola e le zone di collegamento tra ossa e tendini.

La **cartilagine articolare** è un tipo particolare di cartilagine ialina: è costituita dalla componente cellulare, i condrociti, che rappresentano circa il 20% del volume totale del tessuto e influenzano la struttura e la composizione della matrice extracellulare sintetizzandone i componenti necessari[7]. La matrice extracellulare è composta da acqua, collagene, proteoglicani e altre proteine non collageniche. A causa dell'elevato grado di differenziazione, i condrociti hanno una limitata capacità di replicazione che ne determina una scarsa risposta riparativa in seguito a lesioni. Per quanto riguarda la matrice extracellulare, l'acqua rappresenta circa il 65-80% del volume totale della cartilagine mentre la restante percentuale è costituita dalla componente organica: principalmente collagene e proteoglicani. Nella matrice

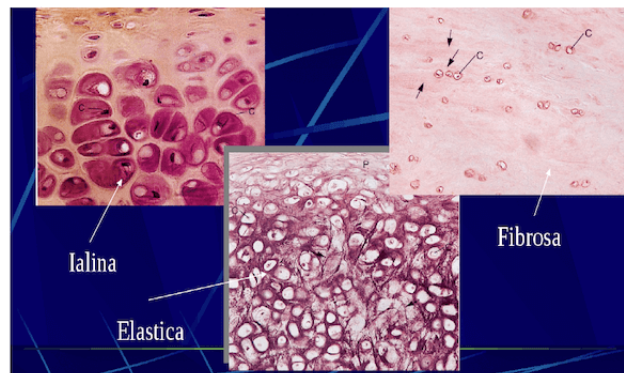


Figura 1.4: Composizione della matrice di cartilagine.

extracellulare che circonda i condrociti si possono distinguere tre differenti regioni classificate in accordo con la composizione biochimica, con la funzionalità e l'aspetto che presentano. Finché la cartilagine è presente nelle giunture delle articolazioni deve resistere a stimoli importanti, primo fra tutti quello rappresentato dal carico corporeo, come nel caso significativo di anca e ginocchio. Queste richieste meccaniche implicano la presenza di un'alta organizzazione strutturale che si evidenzia nella differenziazione del tessuto in regioni diverse per composizione biochimica, struttura dei componenti della ECM e numero e forma dei condrociti immersi in quest'ultima. La cartilagine articolare si compone di quattro principali strati orizzontali o regioni distinte: la zona tangenziale superficiale, la zona intermedia, la zona profonda e la zona di cartilagine calcificata. In generale le cellule cartilaginee, dalla zona superficiale a quelle via via più profonde, diminuiscono in numero e aumentano in dimensioni e attività metabolica. Il contenuto di collagene è maggiore verso la superficie, mentre il contenuto di proteoglicani si comporta in maniera opposta aumentando con la profondità. Assieme al collagene, anche l'acqua è maggiormente abbondante nella zona superficiale tangenziale. Queste variazioni all'interno della struttura e composizione del tessuto influenzano la eterogeneità delle proprietà di trasporto nella cartilagine articolare.

1.4 Struttura della cartilagine articolare

- **Strato Superficiale (Tangenziale):** è lo strato esterno che funge da protezione contro gli stress di taglio generati dall'articolazione. Comprende il *lamina splendens*, una sottile zona superficiale dove le fibrille di collagene (principalmente collagene di tipo II e IX) sono organizzate parallelamente alla superficie articolare. I condrociti in questa regione sono appiattiti, contribuendo a ridurre l'attrito. La continuità e l'integrità di questo strato sono essenziali per mantenere la funzionalità degli strati sottostanti, preservandoli da sollecitazioni e lesioni.

- **Zona di Transizione (Intermedia):** è lo strato situato immediatamente sotto lo strato superficiale, questa zona rappresenta un ponte sia anatomico che funzionale tra la superficie e le zone più profonde. Qui, il collagene è disposto obliquamente, mentre i condrociti assumono una forma più sferica. Questo strato offre una prima resistenza alle forze compressive, riducendo l'impatto e distribuendo il carico verso gli strati inferiori.
- **Zona Profonda (Radiale):** questa zona fornisce la principale resistenza meccanica alla compressione. In essa, le fibre di collagene sono orientate perpendicolarmente alla superficie articolare, creando una struttura robusta che ancora lo strato al tessuto osseo subcondrale. Questa zona funge da fondamentale supporto meccanico per tutta la cartilagine.
- **Strato Calcificato:** questo sottile strato si trova vicino all'osso subcondrale e rappresenta la transizione dalla cartilagine ialina morbida all'osso rigido. Il limite tra la zona profonda e lo strato calcificato è segnato dalla *linea del tidemark*. Qui, le fibrille di collagene sono orientate parallelamente alla superficie articolare, fornendo la massima resistenza alle forze di taglio più profonde e contribuendo alla stabilità generale dell'articolazione [8].

La cartilagine articolare (CA) riveste le estremità ossee delle articolazioni sinoviali, formando uno strato sottile e resiliente che resiste a milioni di cicli di carico durante la vita, dai 70 ai 300 milioni, ad esempio durante la camminata, quando il carico trasmesso attraverso l'articolazione del ginocchio è pari a 2-4 volte il peso corporeo. Di conseguenza, le superfici cartilaginee sono continuamente soggette a deformazioni che generano sia stress compressivi che tensili. La cartilagine deve quindi agire attenuando gli stress eccessivi, che altrimenti porterebbero alla distruzione ossea, deformandosi sotto carico. Inoltre, la deformazione della cartilagine compensa le incongruenze e asperità delle ossa, aumentando l'area di contatto e distribuendo uniformemente il carico sulle superfici ossee, riducendo così lo stress [9].

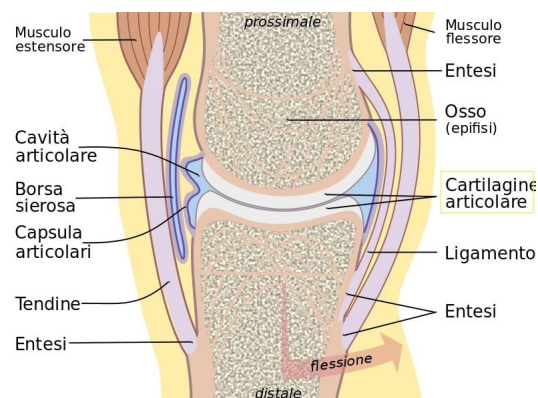


Figura 1.5: Articolazione.

Capitolo 2

Elasticità e viscoelasticità

Elasticità e viscoelasticità

Le equazioni che saranno presentate nel seguito faranno riferimento ad un continuo monodimensionale. Da qui in avanti, la dipendenza dal tempo è riportata a pedice e per una generica funzione $a_t(b)$ dipendente dal tempo e da b che a sua volta è funzione di una variabile spaziale ($b=b(x)$), la notazione è la seguente:

$$a' = \frac{da}{db} \quad (2.1)$$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \quad (2.2)$$

2.1 Elasticità

Si introducano alcuni concetti fondamentali della meccanica dei materiali[10]. Si definisce deformazione lungo una direzione definita (ε) la differenza fra lunghezza finale e lunghezza iniziale del corpo lungo quella direzione, normalizzando rispetto alla lunghezza iniziale tale che

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad [adim.]$$

Lo sforzo (o stress) σ è la forza per unità di superficie che agisce sul corpo.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad [Pa = \frac{N}{m^2}]$$

Tuttavia, questa unità di misura risulta essere troppo piccola per le applicazioni pratiche; di conseguenza, si utilizza più frequentemente un suo multiplo.

Il comportamento elastico è caratterizzato dal recupero del carico una volta che l'allungamento viene rimosso o dal ritorno alla lunghezza iniziale una volta rimosso il carico. Questa relazione fra carico e deformazione può essere lineare o non lineare. Nel primo caso si parla di Elasticità Lineare e il coefficiente che lega lo sforzo alla deformazione è il Modulo di Young (E), che in questo caso è considerato costante. La legge che descrive il comportamento elastico lineare è la Legge di Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.3)$$

ed è tipica delle piccole deformazioni.

Se invece lo sforzo è funzione della deformazione tramite una relazione non lineare si parla di Elasticità Non Lineare o Iperelasticità (Hyperelasticity):

$$\sigma = f(\varepsilon). \quad (2.4)$$

In realtà un comportamento perfettamente lineare è raro da trovare nelle prove di trazione dei materiali. Tuttavia, quando le deformazioni sono piccole, ossia nel tratto ascendente iniziale della curva sforzo-deformazione, l'andamento si avvicina molto al comportamento lineare. Al crescere della deformazione invece la curva abbandona l'andamento lineare e si parla di comportamento iperelastico.

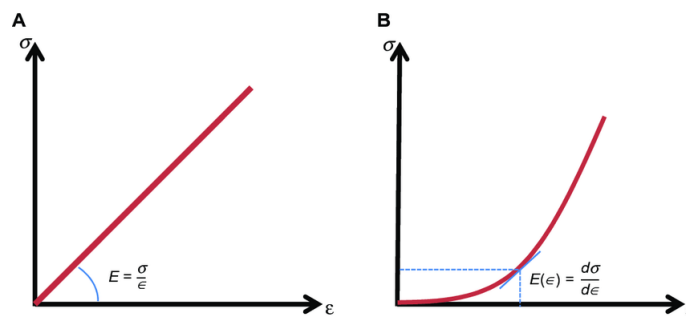


Figura 2.1: Elasticità lineare e iperelasticità.

2.2 Plasticità

Quando un materiale viene caricato oltre il limite di snervamento (yielding point) non è più in grado di recuperare la sua configurazione iniziale [10, 11]. Le deformazioni permanenti sono dette deformazioni **inelastiche**. Questo comportamento inelastico può essere dovuto o alla plasticità vera e propria del materiale o a rottura/danneggiamento del materiale stesso.

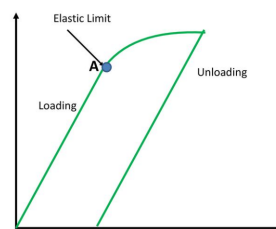


Figura 2.2: Comportamento inelastico.

2.3 Viscoelasticità

Alcuni materiali non sono unicamente definiti dalla relazione sforzo-deformazione che li caratterizza, a causa della dipendenza di questa relazione dal tempo, e quindi

dalla velocità. Materiali di questo genere, in cui la relazione $\sigma - \varepsilon$ dipende dal rate con cui si carica il materiale, sono detti **anelastici** e si dividono in:

- viscoelastici: materiali la cui risposta dipende dal rate di carico e che tornano alle condizioni iniziali una volta scaricati;
- viscoplastici: materiali la cui risposta dipende dal rate di carico ma che mantengono la deformazione anche una volta scaricati.

A causa di dissipazioni interne che si sviluppano quando un corpo viene deformato, il comportamento della maggior parte dei materiali si discosta sia dalla perfetta elasticità che dalla perfetta viscosità, e può essere meglio descritto dalla viscoelasticità [12]. I materiali biologici sono fra quelli che meglio si prestano ad essere modellati come viscoelastici. L'elasticità viene generalmente modellata attraverso molle elastiche e viene governata, come già accenato, dalla legge di Hooke:

$$\sigma_s = E\varepsilon_s \quad (2.5)$$

dove la s a pedice sta per "spring".

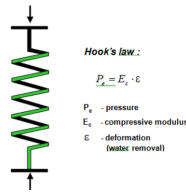


Figura 2.3: Molla elastica.

La viscosità, invece, viene modellata attraverso uno smorzatore contenente un liquido di viscosità η ed è governata dalla seguente legge che lega la tensione alla velocità di deformazione:

$$\sigma_d = \eta \dot{\varepsilon}_d \quad (2.6)$$

In questo caso la d a pedice sta per "dashpot" e con $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ si indica la velocità di deformazione [s^{-1}].

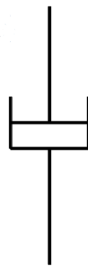


Figura 2.4: Smorzatore.

Limitandosi a considerare il caso lineare, perché sia valido il principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile combinare molle elastiche e smorzatori ai fini di costruire modelli in grado di descrivere il comportamento dei diversi materiali che si vogliono studiare. Due dei modelli più classici con cui si studia la viscoelasticità sono il modello di Maxwell e il modello di Kelvin-Voigt.

2.3.1 Modello di Maxwell

Il modello di Maxwell[13] prevede una serie fra una molla elastica ("spring",s) e uno smorzatore ("dashpot",d).

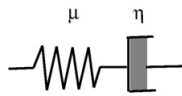


Figura 2.5: Modello di Maxwell.

Essendo i due componenti in serie, l'allungamento complessivo risulta essere la somma dei due singoli allungamenti

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_s + \varepsilon_d \quad (2.7)$$

Inoltre, effettuando un taglio fra i due componenti deve valere

$$\sigma_s = \sigma_d = \sigma_{tot} \quad (2.8)$$

Derivando la (2.6), si scrive:

$$\varepsilon_{tot} \dot{=} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d \quad (2.9)$$

Dalla (2.5) si ottiene l'espressione della $\dot{\varepsilon}_d$ mentre derivando la (2.4) si determina l'espressione di $\dot{\varepsilon}_s$ come $\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{\sigma}_s}{E}$. Sostituendo tutto all'interno della (2.8) e ricordando che $\sigma_s = \sigma_d$ si ottiene:

$$\varepsilon_{tot} \dot{=} = \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.10)$$

che si può riscrivere come:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.11)$$

Quella appena scritta è un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine, ossia un sistema del prim'ordine, nella variabile σ , che si può facilmente risolvere dividendo tutto per il coefficiente di ordine zero. Così facendo si ottiene:

$$\frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.12)$$

Si chiami $\tau = \frac{\eta}{E}$ la costante di tempo caratteristica del sistema. Nel caso in cui la

deformazione sia costante nel tempo, e quindi $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, l'equazione si riscrive:

$$\tau \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0 \quad (2.13)$$

la cui soluzione, ottenuta integrando entrambi i membri è:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{|\sigma|}{|\sigma_0|} = -\frac{1}{\tau} t \quad (2.14)$$

$$\frac{|\sigma|}{|\sigma_0|} = e^{-\frac{1}{\tau} t} \quad (2.15)$$

che si riscrive, supponendo sforzi non negativi:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{1}{\tau} t} \quad (2.16)$$

L'andamento nel tempo dello sforzo, riportato nel grafico 2.6, denota una caratteristica tipica dei materiali viscoelastici, ovvero la diminuzione dello sforzo con il tempo in seguito ad una deformazione imposta costante. Questo comportamento è noto con il nome di **rilassamento** e si contrappone al fenomeno che avviene imponendo uno sforzo impulsivo costante, detto **creep**. Durante il creep si verifica un aumento della deformazione anche una volta che lo sforzo cessa.

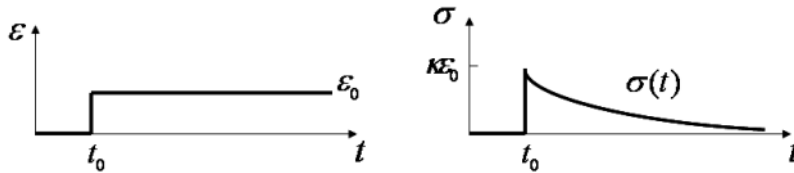


Figura 2.6: Rilassamento del modello in seguito a deformazione costante.

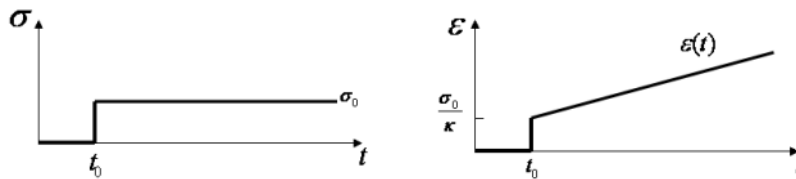


Figura 2.7: Creep del modello in seguito ad uno sforzo costante.

Il rilassamento e il creep sono espressi tramite due coefficienti:

- modulo di rilassamento $G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$
- creep compliance $J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$

2.3.2 Modello di Kelvin-Voigt

Il modello di Kelvin-Voigt[14] è composto dal parallelo fra una molla elastica e uno smorzatore.

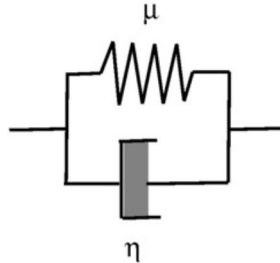


Figura 2.8: Modello di Kelvin-Voigt.

In questo caso, essendo in parallelo, l'allungamento della molla dev'essere uguale all'allungamento dello smorzatore:

$$\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d \quad (2.17)$$

mentre lo sforzo complessivo è dato dalla somma dei singoli sforzi

$$\sigma = \sigma_{tot} = \sigma_s + \sigma_d \quad (2.18)$$

Ricordando la (2.4) e la (2.5) e sostituendole all'interno della (2.17), tenendo presente che $\varepsilon_s = \varepsilon_d$ si ottiene:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Quella appena ottenuta è un'equazione differenziale lineare ordinaria del prim'ordine che possiamo risolvere nel modo seguente:

$$\tau\dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.20)$$

dove $\tau = \frac{\eta}{E}$ è la costante dinamica del prim'ordine. La soluzione analitica del problema è analoga al Modello di Maxwell, con le dovute differenze, per cui verrà tralasciata. Supponendo uno sforzo a gradino, il comportamento del sistema è il seguente:

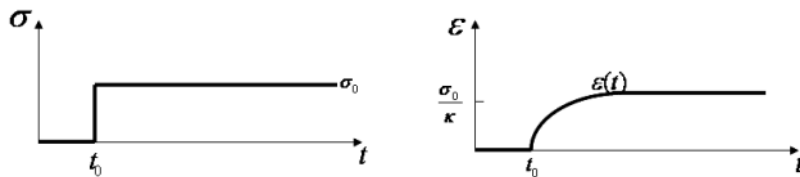


Figura 2.9: Creep del modello.

2.3.3 Modello di Maxwell Generalizzato

Per la rappresentazione dei materiali reali si ricorre spesso a modelli ben più complessi dei classici Maxwell e Kelvin-Voigt [13], come ad esempio il Modello di Maxwell Generalizzato, ottenuto come parallelo fra una molla detta **di equilibrio** e n rami di tipo Maxwell. È necessario ricorrere a modelli più complessi perché il rilassamento dei polimeri reali dipende da più fibre di dimensioni e composizione differente, ciascuna con un proprio tempo di rilassamento caratteristico che influisce su quello del complessivo. Nel caso in cui ci sia un solo ramo di tipo Maxwell, il modello prende il nome di Modello di Maxwell Generalizzato a un solo ramo e prevede il parallelo fra una molla ideale, detta di **equilibrio** (EQ), e un solo elementino di Maxwell, la cui molla elastica è detta di **non equilibrio** (NEQ).

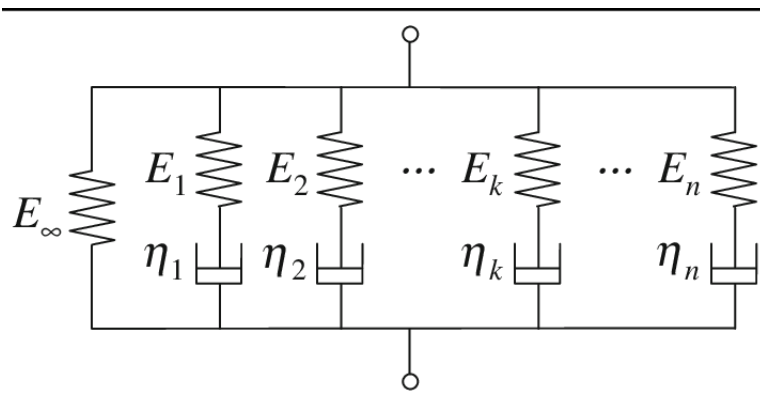


Figura 2.10: Modello di Maxwell generalizzato a n rami.

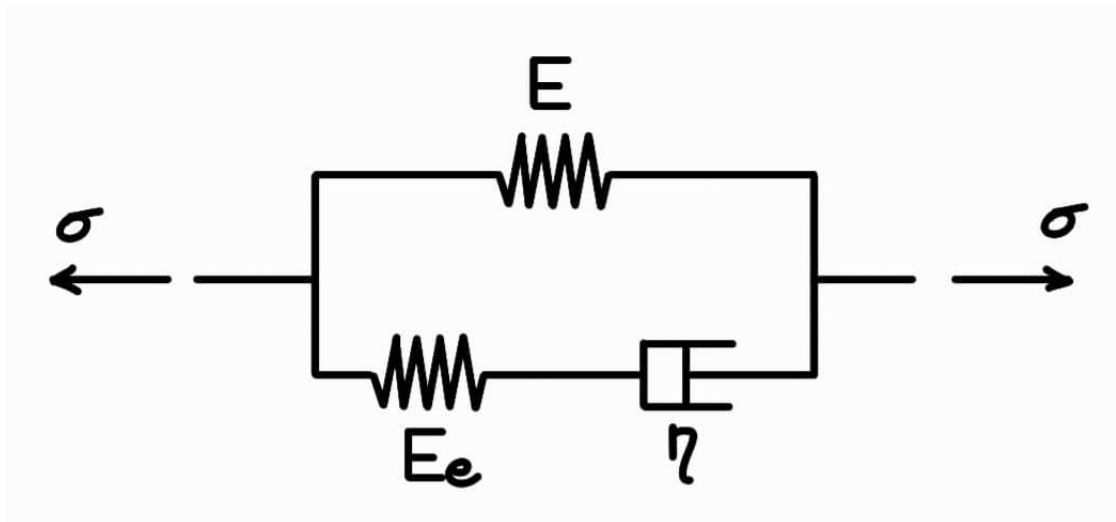


Figura 2.11: Modello di Maxwell generalizzato a un solo ramo

Si indichi con ε la **deformazione** a cui si aggiunge un pedice a seconda che si tratti di deformazione elastica della molla o deformazione viscosa dello smorzatore; rispettivamente $\varepsilon_e, \varepsilon_v$.

Capitolo 2 Elasticità e viscoelasticità

Con E si indica il Modulo di Young della molla di equilibrio, mentre con E_e indichiamo il Modulo di Young della molla di non equilibrio. Con η si indica la viscosità dello smorzatore.

Effettuando un taglio fra molla di non equilibrio e smorzatore è evidente che lo sforzo dello smorzatore debba essere uguale a quello della molla di non equilibrio:

$$\sigma_{NEQ} = \sigma_v \quad (2.21)$$

mentre lo sforzo complessivo ai capi dell'elementino, dato che è costituito da un parallelo fra due rami, è dato dalla somma dello sforzo di equilibrio e dello sforzo di non equilibrio:

$$\sigma = \sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ} \quad (2.22)$$

Per quanto riguarda la deformazione della molla di equilibrio ε , coincidente con la deformazione complessiva del modello, deve uguagliare la deformazione del ramo di non equilibrio con molla e smorzatore perché due rami in parallelo, condividendo gli estremi, condideranno anche la deformazione; dunque:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (2.23)$$

Capitolo 3

Formulazione teorica della frattura in materiali viscoelastici

Formulazione teorica della frattura in materiali viscoelastici

3.1 Viscoelasticità del tessuto cartilagineo

Le proprietà viscoelastiche della cartilagine sono ben note in letteratura [15, 16] e sono attribuite alla natura bifasica della cartilagine, che come già abbondantemente evidenziato, è formata da una fase solida e una fase liquida. I tessuti biologici, a causa della loro complessità, si discostano notevolmente sia dall'approssimazione ad un comportamento perfettamente elastico, descrivibile da una molla elastica, sia dal comportamento perfettamente viscoso, descrivibile con uno smorzatore e tipico dei fluidi [17]. Proprio come altri tessuti biologici, il tessuto cartilagineo presenta i tipici comportamenti viscoelastici, come il rilassamento (diminuzione dello sforzo nel tempo una volta imposta una deformazione), il creep (applicando una tensione istantanea e mantenendola costante, il corpo continua a deformarsi nel tempo) e l'isteresi (differenza di lavoro fra il ciclo di carico e il ciclo di scarico). La natura viscoelastica della cartilagine è da attribuire alla componente elastica delle proteine fibrose come l'elastina e il collagene, e alla componente viscosa legata alla parte acquosa contenuta nelle cellule e nella matrice extracellulare.

3.2 Frattura

Le lesioni della cartilagine articolare riguardano circa il 10-12% della popolazione e le cause più frequenti sono l'attività sportiva intensa e le malattie degenerative che colpiscono le giunture, come l'artrosi, l'osteonecrosi e l'osteocondrosi [3]. Seppure gli studi sulle lesioni condrali siano ancora pochi, l'evidenza scientifica mostra come il danno articolare tende a peggiorare. Essendo la cartilagine articolare un tessuto avascolare e aneurologico, nel caso di lesioni superficiali non si innescano meccanismi infiammatori. I condrociti producono nuova matrice cellulare, tuttavia la loro capacità di proliferazione è molto limitata. Se invece il danno è più profondo e coinvolge anche lo strato osseo sottostante la parte si infiamma e il vecchio tessuto cartilagineo viene sostituito da fibrocartilagine, meno resistente e più incline a degenerare. Per questi motivi è evidente che caratterizzare il comportamento a frattura del tessuto cartilagineo sia utile per prevenire tali problematiche e per lo studio di pratiche riabilitative o sportive.

Geometricamente, la frattura non è altro che la formazione di una superficie interna al materiale (superficie di frattura) divisa fra due facce non connesse fra loro [18], mentre energeticamente alla frattura è associata una variazione di energia potenziale e quindi una dissipazione di energia. Dal punto di vista della meccanica dei continui, la frattura non è diversa da un taglio. Tuttavia dal punto di vista della meccanica della frattura c'è grande differenza fra questi due concetti perché la frattura ha un'evoluzione imprevedibile e si origina in corrispondenza di irregolarità del materiale, senza che vi siano forze esterne applicate al suo contorno, come invece accade nel caso di un taglio[18]. Per lo studio della frattura si ricorre ad una formulazione variazionale di tipo **phase-field** [19]. Il modello phase-field è un importante strumento matematico formulato appositamente per trattare i problemi che riguardano la frontiera di un corpo. Nello specifico, la formulazione phase-field è utile per descrivere una porzione di frontiera senza dover necessariamente tracciarla in modo netto, ma racchiudendola in una regione continua dello spazio, in modo che il campo di fase (phase-field) $d(\mathbf{x}, t)$ sia una funzione regolare di spazio e tempo che varia gradualmente fra i valori che caratterizzano le due diverse fasi:

- $d = 0$ fase primaria
- $d = 1$ fase secondaria
- $0 < d < 1$ fase di transizione

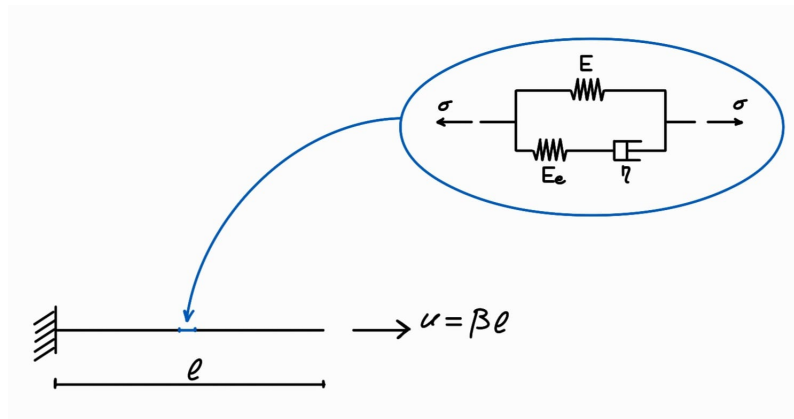
La modellazione phase-field si presta molto bene alla descrizione di corpi continui soggetti a frattura perché permette di includere la frontiera fra una fase sana e una fase danneggiata, oltre a tener conto dell'energia che viene liberata dalla frattura[20]. Inoltre, l'approccio scelto è di tipo **variazionale**, ovvero si scrive l'energia come un funzionale e lo si minimizza. Così come ponendo la derivata prima di una funzione uguale a zero è possibile trovare un punto di minimo locale, annullando la **variazione prima** di un funzionale è possibile individuare il minimo del funzionale. Nel caso in cui sia l'energia ad essere formulata come funzionale, la variazione prima dell'energia restituisce il percorso a minor contenuto energetico. Questo tipo di considerazioni prendono il nome di Principio di Minimo dell'Energia.

3.3 Modello

Si consideri l'elementino viscoelastico (Maxwell generalizzato ad un solo ramo di tipo Maxwell) come appartenente ad un dominio unidimensionale $(0, \ell)$ di lunghezza ℓ che idealmente potrebbe rappresentare un provino di tessuto cartilagineo in trazione lungo la direzione x , incastrato in un estremo e tirato dall'altro.

Lo spostamento di un punto $x \in (0, \ell)$ all'istante di tempo t si indica con

$$u = u_t(x) \tag{3.1}$$



Un punto x che si trova a distanza l_0 dall'origine del sistema di riferimento, dopo aver subito uno spostamento $u(x)$ si troverà a distanza l .

3.4 Energie

Si definiscano ora le **densità di energia potenziale elastica** delle molle come funzioni quadratiche, ossia:

Al fine di tenere conto della frattura, le densità di energia potenziale elastica sono moltiplicate per una **funzione di degradazione** (degradation function) $\omega = \omega(d)$, che è funzione della variabile di campo di fase d , anche detta **danno** o **variabile di frattura**.

$$\Psi_{EQ}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}\omega(d)E\varepsilon^2 \quad (3.2)$$

$$\Psi_{NEQ}(\varepsilon_e, d) = \frac{1}{2}\omega(d)E_e\varepsilon_e^2 \quad (3.3)$$

Come precedentemente accenato, la variabile di campo di fase rappresenta le due fasi in cui può trovarsi la frontiera del corpo, che nella fattispecie sono la fase in cui il materiale è sano e la fase in cui il materiale è danneggiato. I valori che corrispondono alle due fasi sono:

- $d=0$ corrispondente ad assenza di danno
- $d=1$ corrispondente a danno massimo

La funzione di degradazione $\omega(d)$ descrive lo stato in cui si trova il materiale in funzione del danno a cui è sottoposto[20], ossia: se il materiale non è danneggiato, la funzione di degradazione deve valere 1, indicando che il materiale è perfettamente sano. Se invece il danno è massimo, la funzione di degradazione deve valere 0, ad indicare il livello nullo di salute del materiale. La forma più semplice di ω che più si

presta a questa forma della funzione di degradazione è

$$\omega(d) = (1 - d)^2 \quad (3.4)$$

I valori che rispecchiano le due fasi sono:

$$d = 0 \Rightarrow \omega = 1 \text{ materiale sano} \quad (3.5)$$

$$d = 1 \Rightarrow \omega = 0 \text{ materiale danneggiato} \quad (3.6)$$

Si definisca ora la **densità di energia di frattura**, ossia la quantità di energia necessaria perché si creino nuove superfici di frattura:

$$\varphi(d) = \frac{G_f}{C_0} \left(\frac{1}{b} \alpha(d) + b d'^2 \right) \quad (3.7)$$

La densità di energia di frattura è associata alla formazione di cricche ed è fondamentale per descrivere la resistenza che un materiale oppone alla frattura. La forma utilizzata dell'energia di frattura è quella proposta da Ambrosio e Tortorelli[21] in risposta all'esigenza di perfezionare la teoria di Griffith[22]. G_f è l'energia critica di frattura (così come proposta da Griffith), C_0 è una costante, b è un parametro che regola lo spessore della regione di transizione, d è il parametro del campo di fase, mentre d' è un parametro che penalizza transizioni troppo repentine del campo di fase tra una fase e l'altra; infatti, se la transizione è rapida, d'^2 sarà un termine grande che aumenta il valore dell'energia totale. Essendo questo un approccio di minimizzazione energetica, valori troppo elevati di energia vengono scartati. $\alpha(d)$ è una funzione non decrescente del danno che rappresenta l'aumento di energia legato alla crescita del danno. Può essere scelta lineare o parabolica ma per semplicità

Derivando la (3.2) rispetto alla deformazione:

$$\frac{\partial \Psi_{EQ}(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = 2 \left(\frac{1}{2} \omega(d) E \varepsilon \right) = \omega(d) E \varepsilon \quad (3.8)$$

È evidente che lo stress relativo alla molla di equilibrio si possa scrivere come derivata rispetto alla deformazione della densità di energia elastica del ramo di equilibrio, ossia:

$$\sigma_{EQ} = \frac{\partial \Psi_{EQ}}{\partial \varepsilon} = \omega(d) E \varepsilon \quad (3.9)$$

mentre lo stress relativo alla molla di non equilibrio è

$$\sigma_{NEQ} = \frac{\partial \Psi_{NEQ}}{\partial \varepsilon_e} = \omega(d) E_e \varepsilon_e = \omega(d) \eta \dot{\varepsilon}_d \quad (3.10)$$

Si aggiungano le condizioni al contorno del problema:

1. $u(0) = 0$
2. $u(\ell) = \beta\ell$
3. $d(0) = d(\ell) = 0$

La prima condizione al contorno implica che l'estremo in $x=0$ della barra di lunghezza ℓ è incastrato e quindi vincolato ad avere spostamento nullo. La seconda condizione si riferisce all'altro estremo della barra, che subisce uno spostamento $u(\ell) = \beta\ell$ dove β è un parametro che permette di esprimere lo spostamento in funzione della lunghezza iniziale della barra. La terza condizione stabilisce che il danno subito dalla barra negli estremi è nullo, in accordo con la situazione reale.

Oltre alle condizioni al contorno introduciamo una **condizione di irreversibilità**, relativa all'impossibilità della frattura di regredire, che possiamo scrivere

$$\dot{d} \geq 0$$

La condizione di irreversibilità impone che il materiale non possa ripararsi e che quindi il danno sia una funzione monotona crescente. Dato che $\alpha(d)$ è una funzione crescente di d

$$\dot{\alpha}(d) = \alpha'(d)\dot{d} \geq 0 \quad (3.11)$$

Il che significa che ad un danno crescente corrisponde un'aumento dell'energia di frattura, ossia che l'energia di frattura è dissipativa.

3.5 Potenze

3.5.1 Potenza interna

La potenza interna I associata al problema è data dall'integrale sulla lunghezza del dominio unidimensionale della somma delle variazioni temporali delle componenti della densità di energia interna. Le componenti di energia interna che intervengono sono: l'energia potenziale elastica del ramo di equilibrio (EQ), quella del ramo di non equilibrio (NEQ), l'energia legata allo smorzatore e l'energia di frattura.

$$I = \int_0^\ell \left[\dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ} + \sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varphi}(d) \right] dx \quad (3.12)$$

Derivando le espressioni di queste componenti di energia rispetto al tempo si ottiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\ell \left[\dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ} + \sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varphi}(d) \right] dx = \quad (3.13) \\ &= \int_0^\ell \left\{ \sigma_{EQ} \dot{\varepsilon} + \sigma_{NEQ} \dot{\varepsilon}_e + \sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \left[\frac{\partial}{\partial d} (\Psi_{EQ} + \Psi_{NEQ}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b d' \dot{d}' \right\} dx \quad (3.14) \end{aligned}$$

3.5.2 Potenza esterna

La potenza esterna rappresenta il lavoro fatto dalle forze esterne applicate al sistema nel tempo. Le forze esterne si dividono in forze di volume, che agiscono sul corpo e forze di superficie che agiscono sulla frontiera. Data la natura monodimensionale del problema la distribuzione di carico sulla frontiera collassa alle forze puntuali applicate agli estremi del dominio. Essendo la potenza esterna quella prodotta dalle forze esterne, sarà descritta tramite prodotti fra le forze esterne e le velocità dei relativi punti di applicazione.

Sia il seguente campo di velocità composto da velocità di spostamento, velocità di deformazione viscosa e velocità di danneggiamento:

$$\dot{u}, \dot{\epsilon}_v, \dot{d} \quad (3.15)$$

Se si indica con q la distribuzione di carico sull'asta e con f_0 e f_ℓ la forza superficiale che agisce rispettivamente sugli estremi vincolato e tirato, la potenza esterna si può scrivere nella seguente forma:

$$W = \int_0^\ell (q\dot{u} + B_v\dot{\epsilon}_v)dx + f\dot{u}|_0^\ell \quad (3.16)$$

Tuttavia il termine B_v è nullo perché non ci sono forze viscosse agenti all'esterno del corpo, quindi si può riscrivere la potenza esterna come:

$$W = \int_0^\ell (q\dot{u})dx + f\dot{u}|_0^\ell \quad (3.17)$$

3.6 Criterio di stabilità

Le variabili di stato del problema siano $\dot{u}, \dot{\epsilon}_v, \dot{d}$.

Il criterio di stabilità sancisce che un processo evolve attraverso configurazioni di equilibrio stabile se e solo se ad ogni istante di tempo l'energia totale del sistema occupa un minimo locale.

È una condizione necessaria per la stabilità.

L'energia totale del sistema è data dalla somma di vari contributi:

- energia elastica
- energia di frattura
- energia viscosa
- energia esterna

per cui

$$\Pi = \Psi_{ela} + \varphi_{frac} + U_v - W_{ext} \quad (3.18)$$

dove con Π si indica l'energia totale del sistema.

Il criterio di stabilità richiede che la variazione prima dell'energia $\delta\Pi$ sia non negativa per qualsiasi perturbazione ammissibile delle variabili di stato del problema $(\dot{u}, \dot{\varepsilon}_v, \dot{d})$, ossia:

$$\delta\Psi_{ela}(u, \varepsilon_v, d) + \delta\varphi_{frac}(u, \varepsilon_v, d) + \delta U_v(u, \varepsilon_v, d) - \delta W_{ext}(u, \varepsilon_v, d) \geq 0 \quad (3.19)$$

$\forall(\delta u, \delta\varepsilon_v, \delta d)$ e per $\delta d \geq 0$.

L'espressione dei primi tre termini costituisce il lavoro interno mentre l'ultimo termine corrisponde al lavoro esterno, dove il simbolo δ indica le variazioni $(\delta u, \delta\varepsilon_v, \delta d)$.

L'equazione (3.19) è il Principio dei Lavori Virtuali. Se vale il Principio dei Lavori Virtuali, vale anche il Principio delle Potenze Virtuali. Sostituendo potenza interna ed esterna al posto dei rispettivi lavori si può scrivere:

$$I - W \geq 0 \quad \forall(\hat{u}, \hat{\varepsilon}_v, \hat{d}), \quad \hat{d} \geq 0 \quad (3.20)$$

dove il simbolo $\hat{\cdot}$ indica una grandezza virtuale e di conseguenza arbitraria.

Il Principio delle Potenze Virtuali altro non è che una formulazione debole dell'equilibrio di un sistema meccanico.

Nel seguito si farà uso del Principio delle Potenze Virtuali per ricavare le equazioni che governano l'evoluzione del problema.

1 - Bilancio macroscopico

Partendo dalla relazione precedente:

$$I - W \geq 0 \quad (3.21)$$

e considerando all'interno delle due potenze quantità virtuali, è possibile ottenere il seguente risultato:

$$\int_0^\ell \left\{ \sigma_{EQ} \hat{\varepsilon} + \sigma_{NEQ} \hat{\varepsilon}_e + \sigma_v \hat{\varepsilon}_v + \left[\frac{\partial}{\partial d} (\Psi_{EQ} + \Psi_{NEQ}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \hat{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \hat{d}' \right\} dx - \int_0^\ell (q \hat{u}) dx + f \hat{u}|_0^\ell \geq 0 \quad (3.22)$$

annullando all'interno delle due potenze sia la velocità virtuale di deformazione viscosa che il rate virtuale di danno ma considerando la velocità di spostamento, che quindi dev'essere uguale alla velocità di deformazione dell'elementino:

$$\hat{\varepsilon}_v = 0, \quad \hat{d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\varepsilon}_e = \hat{\varepsilon} = \hat{u}'$$

è possibile riscrivere la (3.22) come:

$$\int_0^\ell \left\{ \sigma_{EQ} \hat{\varepsilon} + \sigma_{NEQ} \hat{\varepsilon} \right\} dx - \int_0^\ell (q \hat{u}) dx + f \hat{u}|_0^\ell = 0 \quad \forall \hat{u} \quad \text{forma debole} \quad (3.23)$$

dove q è il carico esterno applicato in direzione longitudinale e f è il carico a cui sono sottoposti gli estremi.

Quella appena descritta è la **forma debole** o **forma integrale** del bilancio macroscopico.

Ricordando che $\dot{\hat{\epsilon}} = \dot{\hat{u}}'$:

$$\int_0^\ell \left\{ (\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}) \dot{\hat{u}}' \right\} dx - \int_0^\ell (q \dot{\hat{u}}) dx + f \dot{\hat{u}}|_0^\ell = 0 \quad (3.24)$$

A questo punto è possibile integrare per parti, tenendo presente che $\dot{\hat{u}}'$ è la funzione di grado 1, mentre $(\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ})$ è la funzione di grado 0.

$$(\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}) \dot{\hat{u}}|_0^\ell - \int_0^\ell (\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ})' \dot{\hat{u}} dx - \int_0^\ell q \dot{\hat{u}} dx - f \dot{\hat{u}}|_0^\ell = 0 \quad (3.25)$$

Il termine $(\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}) \dot{\hat{u}}|_0^\ell$, che indica le forze reattive, si annulla negli estremi.

Invertendo i segni e accorpendo i termini simili:

$$\int_0^\ell [(\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ})' + q] \dot{\hat{u}} dx + f \dot{\hat{u}}|_0^\ell = 0 \quad \forall \dot{\hat{u}}' \quad (3.26)$$

Localizzando l'integrale si ottiene la **forma forte** o **forma differenziale** del bilancio macroscopico, ossia:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ})' + q = 0 & \text{in } [0; \ell] \\ u(0) = 0; \quad u(\ell) = \beta \ell \end{cases} \quad \text{forma forte} \quad (3.27)$$

2 - Bilancio Viscoso

Partendo ancora dal Principio delle Potenze Virtuali (3.22) e annullando questa volta il rate di spostamento e il rate di danno ma considerando non nullo il rate di deformazione viscosa, cioè:

$$\dot{\hat{u}} = 0, \quad \dot{\hat{d}} = 0, \quad \dot{\hat{\epsilon}}_e = -\dot{\hat{\epsilon}}_v$$

si ottiene la seguente relazione:

$$\int_0^\ell (\sigma_v - \sigma_{NEQ}) \dot{\hat{\epsilon}}_v dx = 0 \quad \text{forma debole} \quad (3.28)$$

Localizzando:

$$\Rightarrow \sigma_v = \sigma_{NEQ} \quad \text{forma forte} \quad (3.29)$$

3 - Evoluzione della frattura

Si riscriva la (3.22):

$$\int_0^\ell \left\{ \sigma_{EQ} \dot{\hat{\varepsilon}} + \sigma_{NEQ} \dot{\hat{\varepsilon}}_e + \sigma_v \dot{\hat{\varepsilon}}_v + \left[\frac{\partial}{\partial d} (\Psi_{EQ} + \Psi_{NEQ}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{\hat{d}} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \dot{\hat{d}} \right\} dx - \int_0^\ell (q \dot{u}) dx + f \dot{u}|_0^\ell \geq 0 \quad (3.30)$$

Considerando nulli sia il rate di spostamento che il rate di deformazione viscosa e cioè $\dot{u} = \dot{\hat{\varepsilon}} = 0$, $\dot{\hat{\varepsilon}}_v = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\varepsilon}}_e = 0$:

$$\int_0^\ell \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial d} (\Psi_{EQ} + \Psi_{NEQ}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{\hat{d}} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \dot{\hat{d}} \right\} dx \geq 0 \quad \forall \dot{\hat{d}} \quad (3.31)$$

Ricordando la (3.2) e la (3.3), le derivate parziali rispetto a d di Ψ_{EQ} e Ψ_{NEQ} assumono la forma:

$$\int_0^\ell \left\{ \left[\omega' \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_e^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{\hat{d}} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \dot{\hat{d}} \right\} dx \geq 0 \quad \forall \dot{\hat{d}} \quad (3.32)$$

A questo punto è possibile ottenere la formulazione debole della soglia di frattura integrando per parti. Si illustrano i passaggi necessari per ottenere il risultato desiderato:

Innanzitutto si separano i vari termini dell'integrale:

$$\int_0^\ell \omega' \left(\frac{1}{2} E \varepsilon + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_e \right) \dot{\hat{d}} dx + \int_0^\ell \left[\frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{\hat{d}} dx + \int_0^\ell \left[2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \right] \dot{\hat{d}} dx \geq 0 \quad \forall \dot{\hat{d}}$$

Sarà solo il terzo termine ad essere integrato per parti, dove la funzione di grado 0 è d' e la funzione di grado 1 è $2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}'$:

$$\int_0^\ell \left(2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d}' \dot{\hat{d}} \right) dx = 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d} \dot{\hat{d}}|_0^\ell - \int_0^\ell \left[2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d} \dot{\hat{d}}'' \right] dx$$

Sostituendo lo sviluppo per parti del terzo termine all'interno dell'espressione di partenza e raggruppando i termini simili si ottiene:

$$\int_0^\ell \left\{ \left[\omega' \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_e^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' - 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d} \dot{\hat{d}}'' \right] \dot{\hat{d}} \right\} dx + 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d} \dot{\hat{d}}|_0^\ell \geq 0 \quad \forall \dot{\hat{d}} \geq 0 \quad (3.33)$$

forma debole

Inoltre il termine fuori dall'integrale è nullo perché $\dot{\hat{d}}(0) = \dot{\hat{d}}(\ell) = 0$, come specificato dalle condizioni al contorno.

Localizzando:

$$\Rightarrow \omega'(\Psi) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' - 2 \frac{G_f}{C_0} b \hat{d} \dot{\hat{d}}'' \geq 0 \quad \text{forma forte} \quad (3.34)$$

dove $\Psi = \Psi_{NEQ} + \Psi_{EQ}$

3.7 Dissipazione

Il secondo principio della termodinamica afferma che l'entropia di un sistema possa soltanto aumentare, mai diminuire. Nel caso di sistemi meccanici si tende spesso a formulare questo concetto in forma di energia dissipata, ossia: l'energia dissipata, uguale alla differenza fra l'energia interna totale (dispersa all'interno del materiale) e l'energia immagazzinata sotto forma di energia potenziale elastica, deve sempre essere non negativa.

$$D = I - \int_0^\ell (\dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ}) dx \geq 0 \quad (3.35)$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \{ \dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ} + \sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varphi}(d) \} dx - \int_0^\ell (\dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ}) \geq 0 \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \{ \dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ} + \sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varphi}(d) - \dot{\Psi}_{EQ} + \dot{\Psi}_{NEQ} \} dx \geq 0 \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell [\sigma_v \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varphi}(d)] dx \geq 0 \quad (3.38)$$

Tenendo presente che lo stress viscoso σ_v ha la seguente espressione, l'integrale sul dominio del primo termine assume la forma:

$$\sigma_v = \omega(d)\eta\dot{\varepsilon}_v \quad (3.39)$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell [\sigma_v \dot{\varepsilon}_v] dx = \int_0^\ell [\omega\eta\dot{\varepsilon}_v^2] dx$$

Per quanto riguarda il secondo termine:

$$\int_0^\ell \dot{\varphi}(d) dx = \int_0^\ell \frac{G_f}{C_0} \left(\frac{1}{b} \alpha' \dot{d} + 2bd' \dot{d}' \right) dx \geq 0 \quad \text{se } \dot{d} \geq 0$$

3.7.1 Evoluzione viscosa

Mettendo insieme il **bilancio viscoso** e il primo termine della **disuguaglianza di dissipazione**

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_v = \sigma_{NEQ} \\ \sigma_v = \omega\eta\dot{\varepsilon}_v \end{cases} \quad (3.40)$$

dove $\sigma_{NEQ} = \omega E_e \varepsilon_e = \omega E_e (\varepsilon - \varepsilon_v)$.

Di conseguenza:

$$\omega E_e(\varepsilon - \varepsilon_v) = \omega \eta \dot{\varepsilon}_v \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow E_e(\varepsilon - \varepsilon_v) = \eta \dot{\varepsilon}_v$$

$$\Rightarrow \eta \dot{\varepsilon}_v + E_e \varepsilon_v = E_e \varepsilon$$

$$\Rightarrow \tau \dot{\varepsilon}_v + \varepsilon_v = \varepsilon \quad (3.42)$$

con $\tau = \frac{\eta}{E_e}$ tempo caratteristico di rilassamento.

Riscrivendo la (3.42) e facendone la derivata temporale:

$$\eta \ddot{\varepsilon}_v + E_e \dot{\varepsilon}_v = E_e \dot{\varepsilon} \quad (3.43)$$

Siccome per la (3.39) $\Rightarrow \sigma_v = \omega \eta \dot{\varepsilon}_v$

Allora

$$\eta \ddot{\varepsilon}_v + E_e \dot{\varepsilon}_v = E_e \dot{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\sigma}_v}{\dot{\omega}} + E_e \frac{\sigma_v}{\omega \eta} = E_e \dot{\varepsilon} \quad (3.44)$$

$$\frac{\dot{\sigma}_v}{\dot{\omega}} + \tau \frac{\sigma_v}{\omega} = E_e \dot{\varepsilon} \quad (3.45)$$

Si è arrivati così all'evoluzione viscosa in termini di σ_v , che però è anche uguale a σ_{NEQ} , ovvero lo sforzo corrispondente al ramo di non equilibrio.

3.8 Strategia di risoluzione

Le equazioni che governano l'evoluzione del problema non hanno soluzione analitica, perciò ricorre ad una soluzione di tipo numerico.

La soluzione adottata per questo problema consiste nel calcolare la soluzione all'istante $t + \Delta t$, nota che sia la soluzione all'istante t .

Innanzitutto le equazioni andrebbero linearizzate ma in questo caso non è necessario perché il problema è stato formulato in modo lineare, quindi le variabili di stato si possono scrivere nella forma lineare seguente:

$$u(t + \Delta t) = u_t + \Delta u$$

$$\varepsilon_v(t + \Delta t) = \varepsilon_{vt} + \Delta \varepsilon_v$$

$$d(t + \Delta t) = d_t + \Delta d$$

in cui una variabile valutata al tempo $t + \Delta t$ può essere scritta come somma fra la variabile valutata all'istante t e la rispettiva variazione.

Si procede a questo punto linearizzando le equazioni ricavate precedentemente.

1-Bilancio macroscopico incrementale

Considerando la (3.23) e supponendo $q=0$, $f=0$ e d fissato:

$$\int_0^\ell (\sigma_{EQ,t+\Delta t} + \sigma_{NEQ,t+\Delta t}) \dot{\varepsilon} dx = \quad (3.46)$$

Dato che $\sigma_{EQ,t} = \omega(d_t) E u'_t$ e $\sigma_{NEQ,t} = \omega(d_t) E_e \varepsilon_{e_t}$:

$$\int_0^\ell (\sigma_{EQ,t+\Delta t} + \sigma_{NEQ,t+\Delta t}) \dot{\varepsilon} dx = \int_0^\ell (\sigma_{EQ,t} + \Delta\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ,t} + \Delta\sigma_{NEQ}) \dot{\varepsilon} dx \quad (3.47)$$

dove $\Delta\sigma_{EQ} = \omega(d) E \Delta u'$, $\Delta\sigma_{NEQ} = \omega(d) E_e \Delta \varepsilon_e$, $\Delta \varepsilon_e = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_v$

$$= \int_0^\ell \{ (\sigma_{EQ,t} + \sigma_{NEQ,t}) + \omega(d_t) [(E + E_e) \Delta u' - E_e \Delta \varepsilon_v] \} \dot{u}' dx = 0 \quad (3.48)$$

2-Bilancio microscopico linearizzato per d

Supponendo u, ε_v fissati, si linearizza la (3.33):

$$\int_0^\ell \left\{ \left[\omega' \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_e^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha' \right] \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b d' \dot{d}' \right\} dx = \quad (3.49)$$

$$= \int_0^\ell \left\{ \left[\omega'(d_t) \left(\frac{1}{2} E u_t'^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_{e_t}^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha'(d_t) \right] \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b d_t' \dot{d}' \right\} dx + \quad (3.50)$$

$$+ \int_0^\ell \left\{ \left[\omega''(d_t) \left(\frac{1}{2} E u_t'^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_{e_t}^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha''(d_t) \right] \Delta d \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \Delta d' \dot{d}' \right\} dx \geq 0 \quad \text{LIN } d \quad (3.51)$$

$$\forall \Delta d \geq 0$$

$$\dot{d} : \Delta \dot{d} + \dot{d} \geq 0$$

Energia quadratica corrispondente

$$\mathcal{E}_{d,LIN} = \int_0^\ell \frac{1}{2} \left[\omega_t'' (\Psi_{EQ_t} + \Psi_{NEQ_t}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha_t'' \right] \Delta d^2 + \frac{G_f}{C_0} b \Delta d'^2 + \quad (3.52)$$

$$+ \left[\omega_t' (\Psi_{EQ_t} + \Psi_{NEQ_t}) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha_t' \right] \Delta d + 2 \frac{G_f}{C_0} b d_t' \Delta d' dx \quad (3.53)$$

Problema variazionale equivalente:

$$\Delta d = \arg \min \{ \mathcal{E}_{d,LIN} + c.c. + \Delta d \geq 0 \} \quad (\text{LIN d})$$

3-Evoluzione viscosa

Lo studio dell'evoluzione viscosa ci permette di ricavare l'espressione di ε_v che potrà poi essere sostituita all'interno del bilancio macroscopico. Una volta sostituita la deformazione viscosa all'interno del bilancio macroscopico linearizzato siamo in grado di calcolare u.

Dati $d_{t+\Delta t}$ e $u_{t+\Delta t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}_v + \frac{\omega}{\tau} \varepsilon_v = \frac{\omega}{\tau} \varepsilon \\ \varepsilon_v(t) = \varepsilon_{vt} \quad \text{condizione iniziale} \end{cases} \quad (3.54)$$

con $\omega = \omega(d_{t+\Delta t})$ e $\varepsilon = \varepsilon_{t+\Delta t} = u'_{t+\Delta t}$

La soluzione di questo sistema lineare si ottiene mediante Trasformata di Laplace:

$$\varepsilon_{v,t+\Delta t} = e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} \varepsilon_{vt} + \int_0^{\Delta t} e^{-\frac{\omega}{\tau} (\Delta t-s)} \frac{\omega}{\tau} \varepsilon ds = \quad (3.55)$$

$$= e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} \varepsilon_{vt} + \varepsilon (1 - e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}) \quad \text{LIN } \varepsilon_v \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon_v = \varepsilon_{v,t+\Delta t} - \varepsilon_{v,t} = (\varepsilon_t + \Delta \varepsilon - \varepsilon_{v,t}) (1 - e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}) = \quad (3.57)$$

dove $\varepsilon - \varepsilon_v = \varepsilon_e$ e $\Delta \varepsilon = \Delta u'$

$$\Rightarrow (\varepsilon_{et} + \Delta u') (1 - e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}) \quad (3.58)$$

Sostituendo l'espressione di $\Delta \varepsilon_v$ in $\Delta \varepsilon_e = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_v$:

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon_e = \Delta u' - [(\varepsilon_{et} + \Delta u') (1 - e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t})] \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon_e = \Delta u' - [\varepsilon_{et} - \varepsilon_{et} e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} + \Delta u' - \Delta u' e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}] \quad (3.60)$$

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon_e = \Delta u' - \varepsilon_{et} + \varepsilon_{et} e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} - \Delta u' + \Delta u' e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} \quad (3.61)$$

$$\Rightarrow \Delta \varepsilon_e = -\varepsilon_{et} + (\varepsilon_{et} + \Delta u') e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t} \quad (3.62)$$

Analogamente, sostituendo $\Delta \varepsilon_v$ nella (3.48) si ottiene:

$$\int_0^\ell \left\{ (\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}) - \omega(d_t) E_e (\varepsilon_t - \varepsilon_{vt}) (1 - e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}) + \omega(d_t) (E + E_e e^{-\frac{\omega}{\tau} \Delta t}) \Delta u' \right\} \dot{u}' = 0 \quad (3.63)$$

Problema incrementale per u

$$\int_0^\ell \{\sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}\} \hat{\varepsilon} dx = 0 \quad (3.64)$$

Sostituendo al posto di σ_{EQ} e σ_{NEQ} la loro espressione scritta nella forma della legge di Hooke linearizzata:

$$\int_0^\ell \{\omega(d_i) E u'_i + \omega(d_i) E_e \varepsilon_{ei} + \omega(d_i) E \delta u'_i + \omega(d_i) E_e \delta \varepsilon_{ei}\} \hat{\varepsilon} dx = \quad (3.65)$$

$$\int_0^\ell \{\sigma_{EQ_i} + \sigma_{NEQ_i} + \omega(d_i) E \delta u'_i + \omega(d_i) E_e \delta u'_i \exp + + \omega(d_i) E_e (u'_i - \varepsilon_{vt}) \exp - \omega(d_i) E_e \varepsilon_{ei}\} \hat{\varepsilon} dx = 0 \quad (3.66)$$

$$\int_0^\ell \{\sigma_{EQ_i} + \omega(d_i) E_e (u'_i - \varepsilon_{vt}) \exp + + \omega(d_i) (E + E_e \exp) \delta u'_i\} \hat{\varepsilon} dx = 0 \quad (3.67)$$

Si può scrivere $u_{i+1} = u_i + \delta u_i$ e $\varepsilon_{e(i+1)} = \varepsilon_{ei} + \delta \varepsilon_{ei} = (u'_i + \delta u'_i - \varepsilon_{vt}) \exp = (u'_{i+1} - \varepsilon_{vt})$

Problema incrementale per d

$$d_i \rightarrow d_i + \delta d_i = d_{i+1}$$

$$\int_0^\ell \left\{ \left[\omega'(d_i) \left(\frac{1}{2} E (u'_i)^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_{ei}^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha'(d_i) \right] \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b d'_i \hat{d}' \right\} dx + \quad (3.68)$$

$$+ \int_0^\ell \left\{ \left[\omega''(d_i) \left(\frac{1}{2} E (u'_i)^2 + \frac{1}{2} E_e \varepsilon_{ei}^2 \right) + \frac{G_f}{C_0 b} \alpha''(d_i) \right] \delta d_i \dot{d} + 2 \frac{G_f}{C_0} b \delta d'_i \hat{d}' \right\} dx \geq 0 \quad (3.69)$$

3.8.1 Soluzione numerica

Negli ultimi anni sono state sviluppate strategie di risoluzione numerica per tutti quei problemi per cui l'esistenza di soluzione analitica è in dubbio. Il modello analitico presentato in questo capitolo è stato successivamente implementato in un programma MATLAB® adeguatamente costruito per poterne calcolare la soluzione numerica.

La frattura a cui è sottoposta la cartilagine è di tipo **coesivo**, ossia tale per cui il materiale continua ad opporre una resistenza che diminuisce gradualmente anche a frattura avvenuta. Per questo motivo la **funzione di degradazione** utilizzata nel modello numerico assume la forma:

$$\omega(d) = \frac{1}{1 + \phi(d)} \quad (3.70)$$

[?]

$$\text{dove } \phi(d) = \frac{a_1 d P(d)}{(1-d)^p} \text{ e } P(d) = 1 + a_2 d + a_3 d^2$$

Capitolo 4

Risultati

Risultati

4.1 Risultati presenti in letteratura

Per poter valutare l'efficacia del modello proposto nei capitoli precedenti è stato deciso di confrontarne le prestazioni con quelle di un modello numerico presentato in un articolo di **Ateshian et al.**[23] dal titolo **Damage Mechanics of Biological Tissues in Relation to Viscoelasticity**, il cui obiettivo è quello di descrivere i meccanismi di danneggiamento tipici dei tessuti biologici in relazione alle proprietà viscoelastiche dei tessuti stessi evidenziate dai risultati sperimentali. In questo contesto, il danno rappresenta un deterioramento permanente delle proprietà del materiale, come una riduzione del modulo elastico, mentre il cedimento rappresenta la condizione più estrema in cui il danno, propagandosi attraverso il dominio del materiale, ne causa la frammentazione. In biomeccanica è importante studiare la meccanica del cedimento del tessuto cartilagineo ai fini di prevenire infortuni, descrivere gli effetti delle malattie degenerative e quelli dell'invecchiamento, che è il principale responsabile della perdita di viscosità. Studi presenti in letteratura hanno già dimostrato che il tessuto cartilagineo si rilassa in risposta ad una deformazione imposta[24, 25], presenta creep in seguito ad una tensione costante[26] e il suo Modulo di Young varia con la velocità di deformazione [24, 27]. Nell'articolo si descrive dapprima il danneggiamento puramente elastico dei materiali, attribuito alla rottura dei legami forti (e.g. legami covalenti), che sono supposti reagire in modo elastico; per poi estendere la trattazione ai materiali viscoelastici. Gli approcci con cui viene trattata la dissipazione di energia modo calore dovuta alla viscoelasticità nei materiali biologici sono due. Il primo prevede la descrizione dei tre meccanismi chimici responsabili della viscosità, ossia:

- attrito fra molecole dello stesso materiale (viscosità vera e propria);
- attrito fra pareti solide e fluido nei mezzi porosi;
- rottura e formazione dei legami deboli.

Il secondo approccio invece è decisamente più usuale e viene detto **teoria delle variabili di stato interne**[28], prevede la scomposizione del gradiente di deformazione \mathbf{F} nelle deformazioni associate a un modello microstrutturale del materiale che, similmente a quanto proposto nei capitoli precedenti di questo studio, è costituito dal parallelo fra una molla di equilibrio e un elementino di Maxwell(Figura 2.11).

Il modello proposto in **Ateshian et al.**[23] è stato calibrato sfruttando i risultati sperimentali di rilassamento a basse deformazioni proposti da **Park e Ateshian**[29] ottenuti tramite prove di trazione su provini di tessuto cartilagineo di giovani bovini. In seguito è stato implementato un modello agli elementi finiti tramite un software open source[30] ed è stato utilizzato per predire il comportamento del tessuto sottoposto ad una deformazione del 10% a differenti velocità di deformazione (da 0.1%/s a 1000%/s con intervalli pari ad una decade).

I risultati ottenuti sono riportati di seguito:

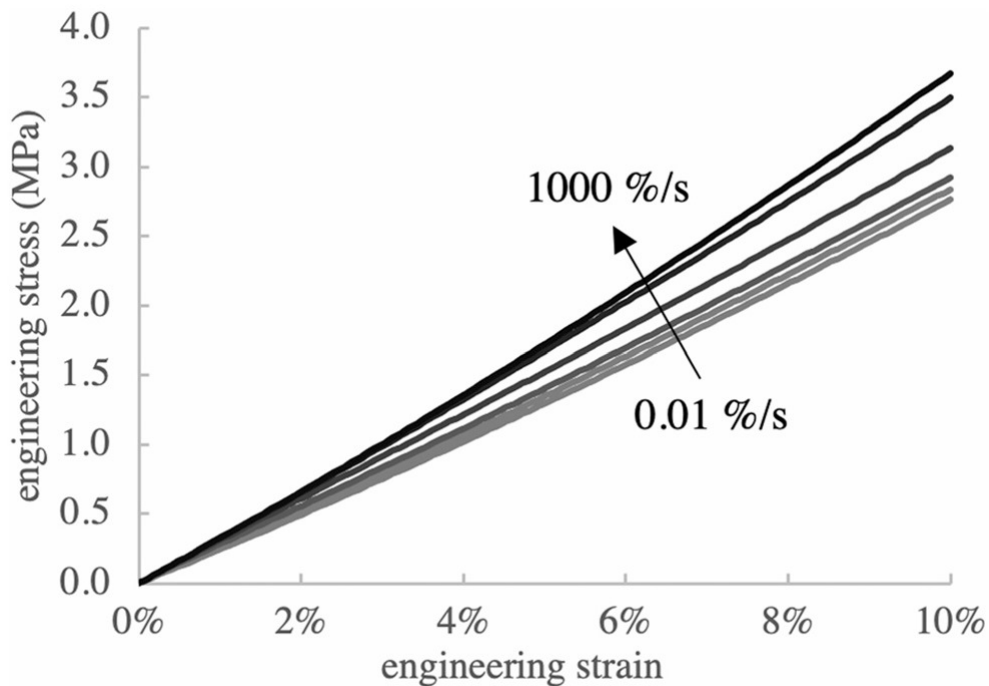


Figura 4.1: Relazione sforzo-deformazione a differenti velocità di deformazione.

Dall'immagine 4.1 appare evidente come lo stress aumenti all'aumentare della velocità di deformazione. Questo particolare fenomeno è tipico dei materiali viscoelastici.

Nell'immagine 4.2 invece sono rappresentate le curve di carico del modello proposto da **Ateshian et al.**[23] per la cartilagine articolare bovina, in cui si nota come la tensione di danneggiamento cresca all'aumentare della velocità di deformazione. Viceversa, da questo grafico traspare che la deformazione di rottura non varia al variare della velocità di deformazione.

Secondo quanto riportato da Ateshian, questo risultato è una conseguenza dell'ipotesi costitutiva secondo cui il danno si avvia nella componente elastica dello stress e viene distribuito in modo uniforme nella componente dissipativa dello stress, ma se così non fosse e se i dati sperimentali suggerissero una forte dipendenza della deformazione di rottura del tessuto dalla velocità di deformazione, sarebbe ragione-

vole adottare un'ipotesi di modellizzazione alternativa riguardante la ripartizione del danno.

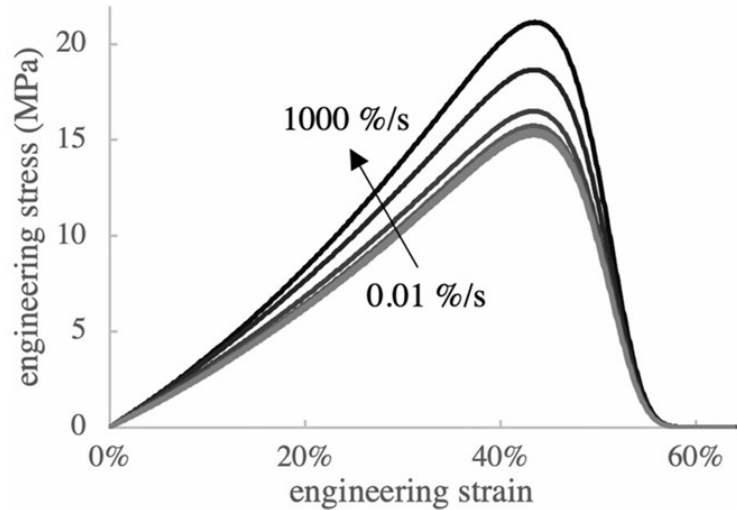


Figura 4.2: Danneggiamento a differenti velocità di deformazione.

4.2 Calibrazione

Prima di poter confrontare il modello proposto nei capitoli precedenti con quello di **Ateshian et al.**[23] è necessario impostare correttamente i parametri. Il modello qui proposto prende in input i seguenti parametri:

- la lunghezza iniziale del provino ℓ_0 ;
- il modulo di Young della molla di equilibrio E ;
- il modulo di Young della molla di non equilibrio E_e ;
- la viscosità η ;
- la lunghezza dell'elemento finito h_{el} ;
- la velocità di deformazione $\dot{\beta}$;
- la deformazione finale β_{finale} ;
- il passo temporale dt ;
- il tempo finale t_{finale} ;
- le tolleranze del danno.

Per quanto riguarda la lunghezza iniziale si prendono in considerazione le dimensioni dei provini di tessuto cartilagineo utilizzati nello studio di **Park et al.**[29], ovvero $\ell_0 = 3.98 \pm 0.59mm$. I moduli elastici di entrambe le molle vengono fissati a $E = E_e = 0.663MPa$. Poiché si vuole ottenere $\tau = \frac{\eta}{E} = 1$ si sceglie $\eta = 0.663$. La lunghezza dell'elemento finito è $h_{el} = 0.04mm$, la deformazione finale viene posta pari a $\beta_{final} = 2.1$ e il tempo finale si calcola come $t_{final} = \frac{\beta_{final}}{\beta}$. Le tolleranze del danno sono fissate a $toll_d = 10^{-4}$ e rappresentano la condizione di iterazione, ossia finché la differenza fra il valore attuale e quello precedente si mantiene maggiore della tolleranza il calcolo prosegue, altrimenti se i due valori sono troppo vicini si utilizza il valore precedente.

4.3 Risultati

Una volta impostati tutti i parametri del modello si può procedere con l'esecuzione delle prove numeriche.

Sono state eseguite prove a differenti velocità di deformazione, partendo da velocità molto basse fino ad arrivare a velocità elevate. Il limite inferiore è stato scelto osservando quale fosse l'intorno di valori per cui il comportamento del modello tendesse asintoticamente a quello della velocità infinitamente lenta, in cui lo smorzatore ha tutto il tempo di rilassarsi, impedendo di fatto alla molla di non equilibrio di intervenire, rendendone lo sforzo nullo: $\sigma = \sigma_{EQ}$.

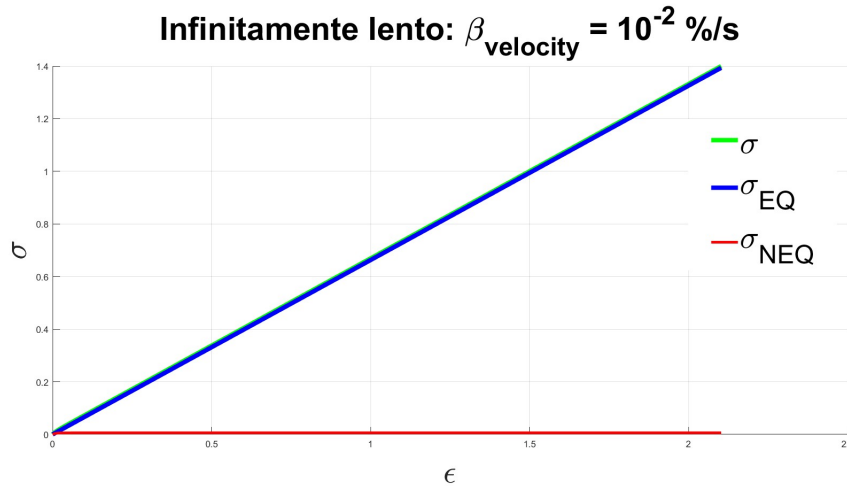


Figura 4.3: Basse velocità di deformazione.

Viceversa il limite superiore è stato fissato in prossimità di comportamento "infinitamente veloce" da parte del modello, ovvero per velocità tali da impedire il rilassamento dello smorzatore. Se si impedisce allo smorzatore di rilassarsi lo sforzo corrisponde alla somma degli sforzi delle due molle: $\sigma = \sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}$.

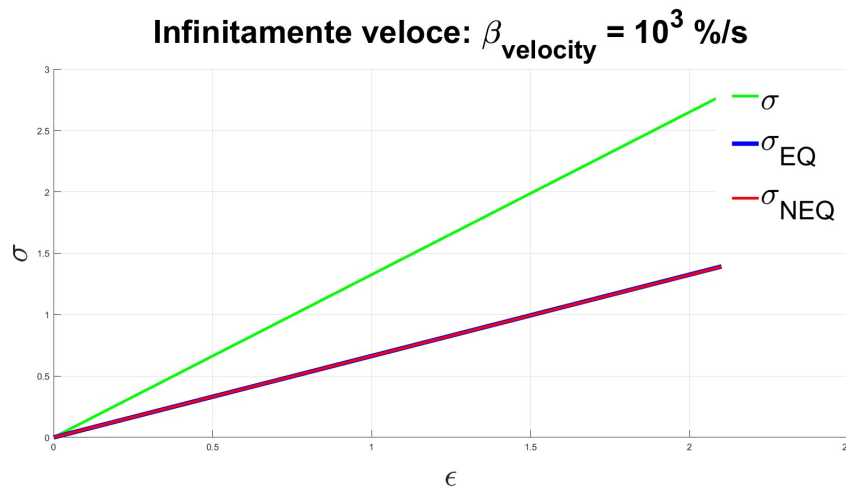


Figura 4.4: Alte velocità di deformazione.

Per deformazioni di rottura molto più grandi del dominio del provino siamo in grado di evidenziare il comportamento elastico del tessuto cartilagineo alle differenti velocità di deformazione.

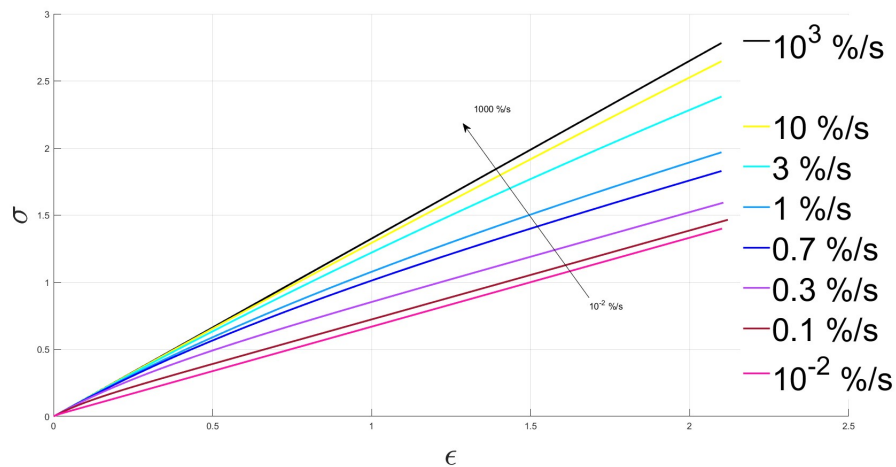


Figura 4.5: Variazione dello stress al variare della velocità di deformazione.

Nella figura 4.5 si evidenzia come lo sforzo abbia un andamento crescente con il crescere del rate di deformazione, proprio come accadeva nel modello di **Ateshian et al.**[23].

Si osserva inoltre che la curva a pendenza più bassa corrisponde alla velocità infinitamente lenta, ovvero in cui lo smorzatore si rilassa e annulla lo sforzo di non equilibrio σ_{NEQ} . La curva a pendenza più elevata invece è la curva infinitamente veloce, per la quale lo smorzatore non ha tempo di rilassarsi. Avendo scelto $E = E_e$ la pendenza della curva infinitamente veloce è doppia rispetto alla pendenza della curva infinitamente lenta.

Passando invece a descrivere le curve di carico riportate nell'immagine 4.6 è evidente come l'andamento segua quello del modello di Ateshian et al., riportando però una sostanziale differenza: la deformazione di rottura dipende dalla velocità di deformazione.

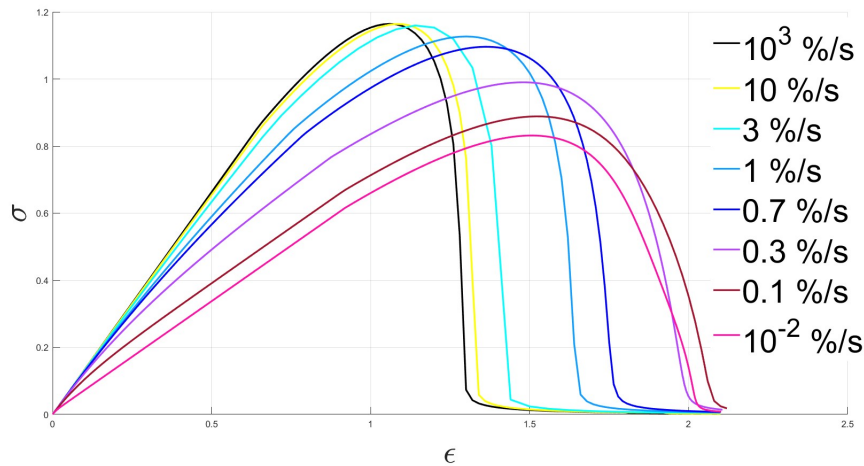


Figura 4.6: Curve di carico.

Di seguito vengono riportati anche i grafici che mostrano l'andamento della tensione di rottura (figura 4.7) e della deformazione di rottura (figura 4.9) in funzione del rate di deformazione.

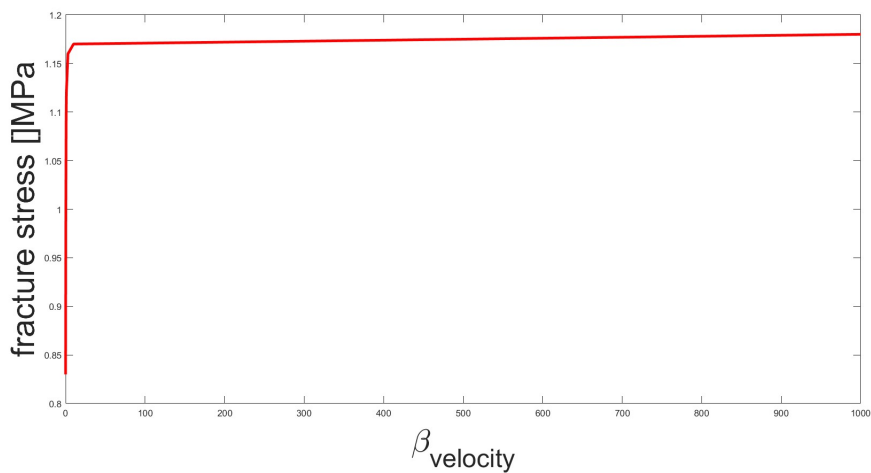


Figura 4.7: Tensione di rottura.

Mettendo a confronto l'andamento della tensione di rottura di questo modello con il modello di Ateshian et al. si nota come nel primo caso l'incremento più significativo si verifica fra $10^{-2}\%/s$ e $10\%/s$, mentre nel secondo caso la crescita della tensione di rottura è molto più graduale ed è massima fra $10\%/s$ e $10^3\%/s$. La dipendenza della deformazione di rottura dalla velocità di deformazione emerge anche mettendo a

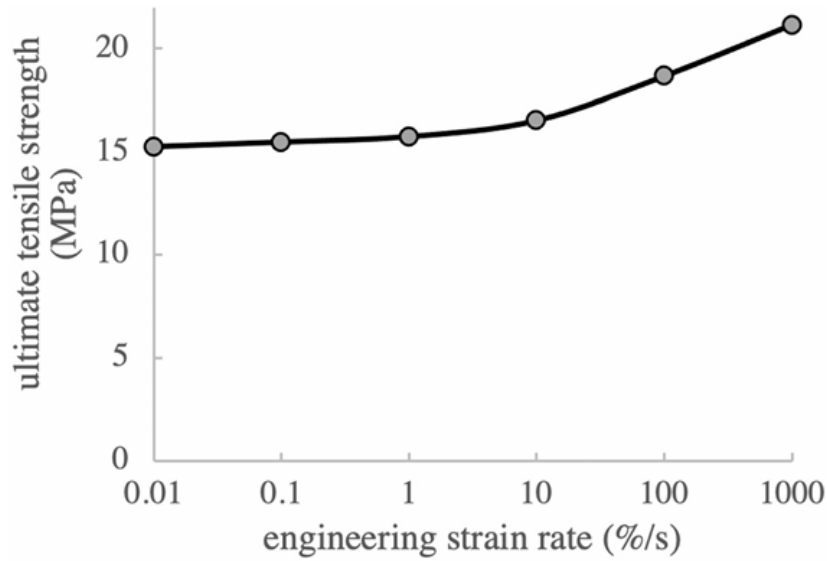


Figura 4.8: Tensione di rottura riportata in Ateshian et al.

confronto i grafici che rappresentano l'evoluzione del danno. In rosso sono riportate le grandezze associate allo smorzatore, in blu le grandezze associate alla molla di non equilibrio e in nero le grandezze compressive per ciascun elementino. Come già accennato, ad alte velocità di deformazione lo smorzatore non ha tempo di rilassarsi, quindi la sua deformazione è nulla e la deformazione della molla di equilibrio eguaglia la deformazione della molla di non equilibrio ($\varepsilon = \varepsilon_e$). Invece il suo stress è pari alla metà dello stress compressivo perché $\sigma = \sigma_{EQ} + \sigma_{NEQ}$ con $\sigma_{EQ} = \sigma_{NEQ}$. Ad alte velocità (figura 4.10) il danno si genera in corrispondenza di una deformazione del modello pari a $\varepsilon \approx 0.66$.

Nell'immagine 4.11, relativa alle basse velocità, si nota come nell'istante in cui si verifica il danno lo sforzo prodotto dallo smorzatore è nullo, proprio perché essendo $\sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_v$, se $\dot{\varepsilon}_v = 0 \Rightarrow \sigma_v = 0$. Proprio come previsto, a basse velocità il danno si instaura per deformazioni maggiori, in particolare per $\varepsilon \approx 1$.

Man mano che la deformazione cresce, prevalentemente al centro del provino, il danno aumenta, fino a raggiungere il valore $d=1$, corrispondente alla fase totalmente danneggiata.

Dall'immagine 4.13 si nota come a danneggiamento avvenuto anche la molla di non equilibrio (in blu) subisce una deformazione. Questo accade perché la frattura accelera il processo deformativo, rendendo lo smorzatore incapace di compensare tutta la deformazione da solo, e di conseguenza propagando la deformazione anche alla molla di non equilibrio.

La situazione appena descritta è evidente nell'immagine 4.12, in cui si vede chiaramente l'istante in cui la deformazione complessiva dell'elementino inizia a discostarsi dalla deformazione dello smorzatore e inoltre la deformazione della molla

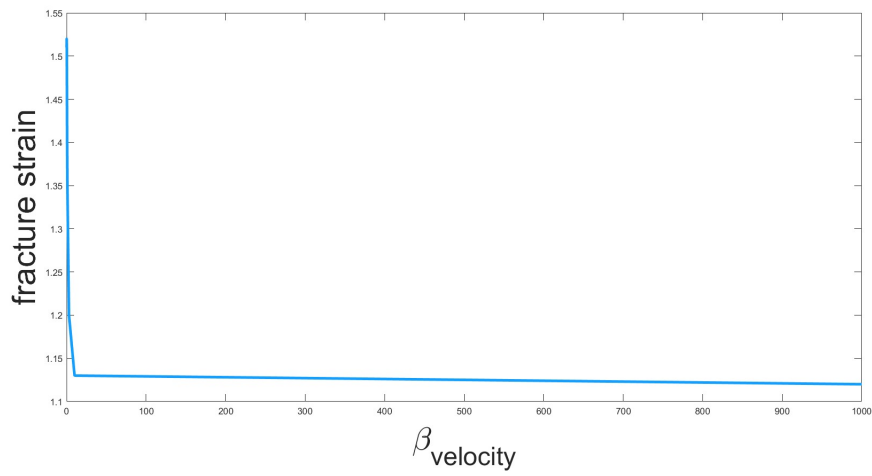


Figura 4.9: Deformazione di rottura.

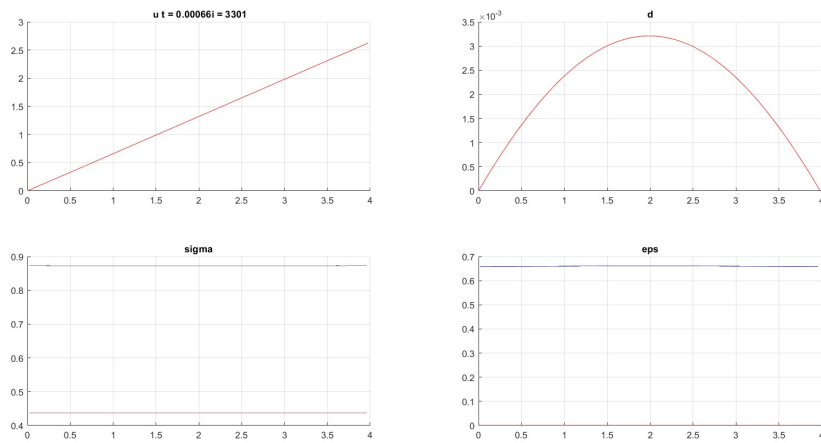


Figura 4.10: Velocità di deformazione elevata. Dall'angolo in alto a sinistra in senso antiorario: spostamento, sforzi, deformazioni e danno.

di non equilibrio inizia a crescere.

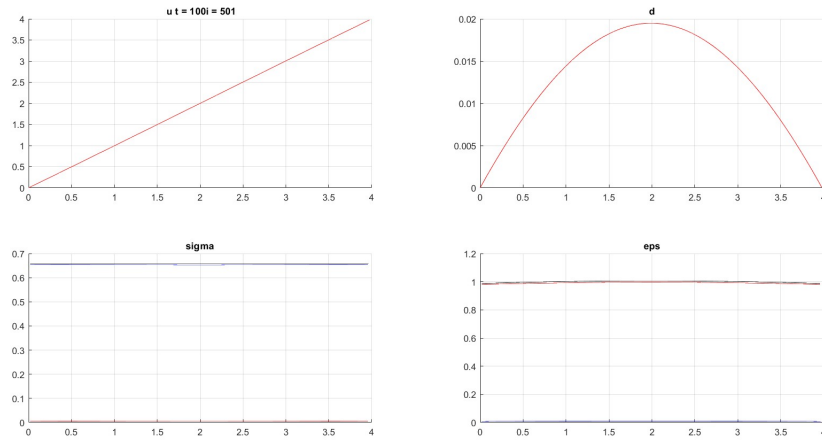


Figura 4.11: Velocità di deformazione bassa. Dall'angolo in alto a sinistra in senso antiorario: spostamento, sforzi, deformazioni e danno.

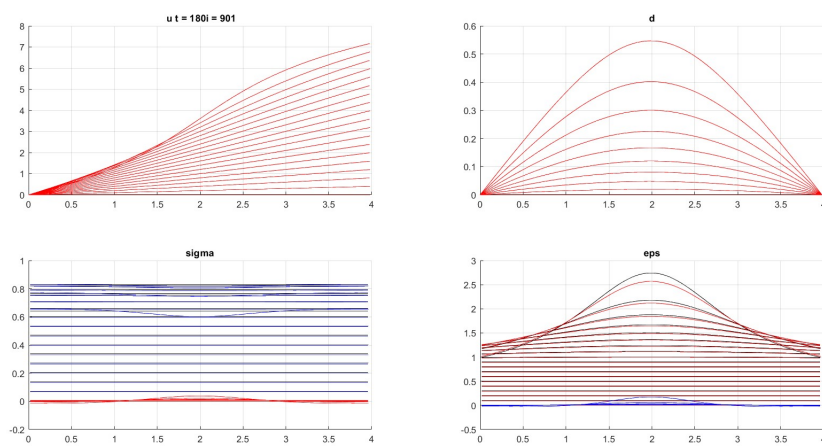


Figura 4.12: Evoluzione del danno all'avanzare della deformazione a basse velocità di deformazione.

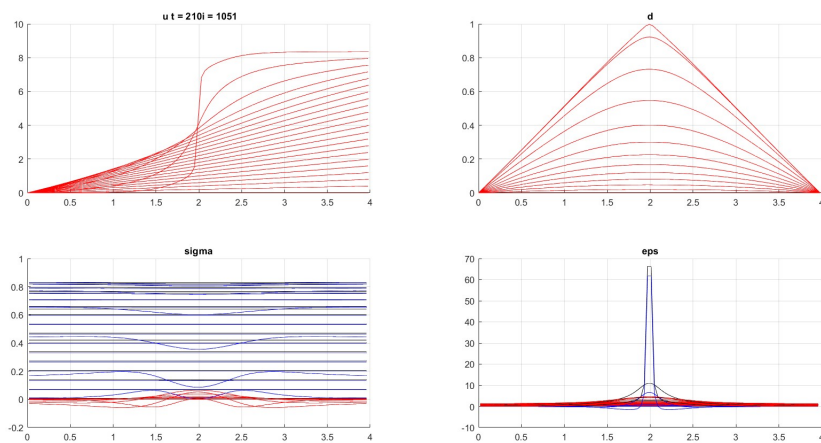


Figura 4.13: Fase completamente danneggiata a basse velocità di deformazione.

Capitolo 5

Conclusioni

Conclusioni

Sebbene il modello proposto non sia stato precisamente calibrato sui risultati sperimentali presenti in letteratura effettuando un fitting polinomiale delle curve, si è comunque dimostrato perfettamente in grado di prevedere il comportamento viscoelastico di un materiale. Si sottolinea che il modello proposto da **Ateshian et al.**[23] è stato sì calibrato sui risultati sperimentali prodotti da **Park et al.**[29], ma questi non prevedevano il cedimento del provino. Per questo motivo al momento non è possibile sapere se il comportamento a frattura sia descritto adeguatamente dal modello di Ateshian, il che rende questo modello altrettanto valido.

Ulteriori indagini sperimentali dovranno essere effettuate in futuro proprio per capire come si comporta il tessuto cartilagineo se caricato oltre la tensione di rottura.

Capitolo 6

Applicazioni

Applicazioni

Le applicazioni dei modelli ingegneristici della cartilagine sono cresciute esponenzialmente negli ultimi tempi, testimoniando addirittura la nascita del termine "cartilage engineering". Il motivo di tutto questo interesse è dovuto al fatto che la cartilagine manca di meccanismi per la rigenerazione ed essendo soggetta a intensi cicli di carico e scarico per quasi tutta la vita di un individuo è importante sviluppare uno o più modi per mantenerne l'efficienza [31]. Come testimoniato da [31, Chung et al.], una delle pratiche più diffuse per la rigenerazione della cartilagine articolare è l'Autologous Chondrocyte Transplantation (ACT), che consiste nel prelevare una porzione di cartilagine dal paziente, isolarne i condrociti, farli riprodurre in vitro e impiantarli nuovamente nel paziente. L'aumentato numero di condrociti porta ad una maggior produzione di ECM e quindi alla ricostituzione del tessuto cartilagineo. Prima che i condrociti impiantati siano in grado di produrre sufficiente matrice extracellulare da rimpiazzare il tessuto danneggiato è necessario del tempo. Per questo motivo i condrociti vengono inseriti all'interno di matrici artificiali composte da idrogel e altri materiali[32] il cui ruolo è quello di simulare il comportamento della cartilagine naturale finché questa non ricresce. Inoltre le matrici sintetiche dovranno essere in grado di adattarsi alle tensioni provenienti dai tessuti adiacenti senza differenze di resistenza altrimenti potrebbero danneggiarsi, o peggio, danneggiare i tessuti sani. Ed ecco che allora nella sintetizzazione di queste matrici artificiali che dovranno accogliere i condrociti potrebbe rivelarsi utile un modello numerico per la simulazione del tessuto cartilagineo, in modo che le proprietà meccaniche delle matrici prodotte siano quanto più fedeli possibile a quelle del tessuto originale.

La cartilagine articolare è un materiale molto interessante dal punto di vista ingegneristico proprio a causa delle sue proprietà meccaniche. Simularne il comportamento potrebbe essere utile nella sintesi di nuovi materiali. Un campo in cui i nuovi materiali sono sempre benvenuti, soprattutto se meccanicamente simili ai tessuti biologici è la produzione di protesi. Le protesi articolari devono essere realizzate con materiali che non vengano rigettati dal corpo e che possibilmente non lo danneggino. Al momento si utilizzano prevalentemente protesi in titanio rivestite in silicone. Il ruolo del silicone è proprio quello di sostituire la cartilagine, almeno nel suo strato superficiale, perciò dovrà essere sintetizzato in modo tale da resistere ai cicli di carico in maniera analoga a quanto fatto dalla cartilagine stessa. È importante inoltre che la texture del silicone sia in grado di minimizzare gli attriti, proprio come nel caso del tessuto cartilagineo.

Un'ulteriore applicazione di un modello numerico per la caratterizzazione della

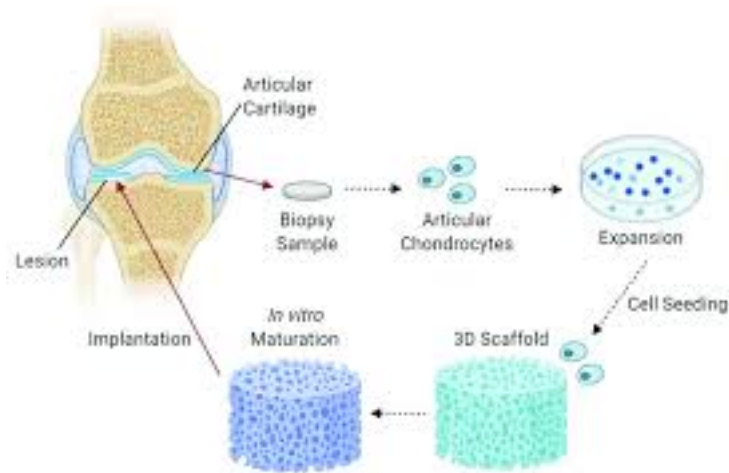


Figura 6.1: Autologous Chondrocyte Transplantation.

cartilagine consiste nella predizione delle malattie degenerative che interessano questo tipo di tessuto. Un'approccio personalizzato con raccolta di dati sul paziente potrebbe essere in grado di descrivere, tramite il modello, l'evoluzione del danno nel tessuto, senza bisogno di ripetere esami di carattere radiologico che in alcuni casi mettono a rischio la salute del paziente.

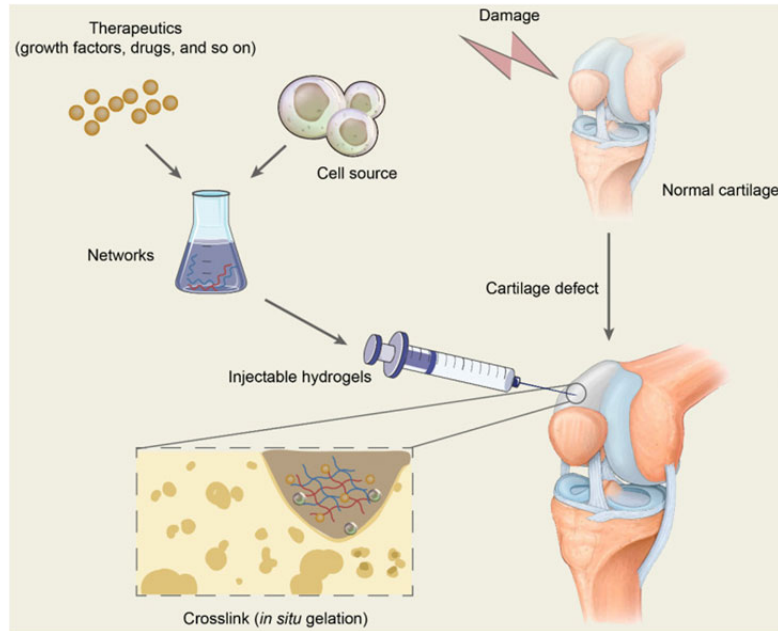


Figura 6.2: Idrogel iniettabili.

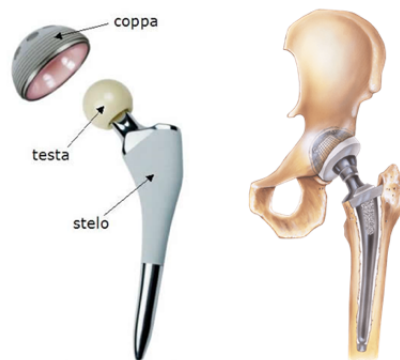


Figura 6.3: Protesi articolare d'anca.

Appendice

Discretizzazione a Elementi Finiti

6.1 Elasticità e Frattura

Problema per u :

$$u, d \rightarrow u + \Delta u, d + \Delta d$$

$$\int_0^\ell (\omega(d)Eu' + \omega E\Delta u') \hat{u}' dx = 0$$

$$\sum_e \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\cdot) dx = \sum_e \int_{-1}^1 (\cdot) \frac{h_e}{2} d\xi =$$

$$\sum_e \int_{-1}^1 \left(\omega(d) E \frac{2}{h_e} \bar{\psi}' \cdot \underline{u}^e + \omega(d) E \frac{2}{h_e} \bar{\psi}' \cdot \delta \underline{u}^e \right) \frac{2}{h_e} \bar{\psi}' \cdot \hat{\underline{u}}^e \frac{h_e}{2} d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^1 \left[\omega(d) E \frac{2}{h_e} \bar{\psi}' \otimes \bar{\psi}' \underline{u}^e + \omega(d) E \frac{2}{h_e} \bar{\psi}' \otimes \bar{\psi}' \delta \underline{u}^e \right] \cdot \hat{\underline{u}}^e d\xi =$$

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^N W_j f(\xi_j)$$

$$\sum_j W_j \left(\omega(d_j) \frac{2}{h_e} E \bar{\psi}' \otimes \bar{\psi}' \underline{u}^e + \omega(d_j) \frac{2}{h_e} E \bar{\psi}' \otimes \bar{\psi}' \delta \underline{u}^e \right) \cdot \hat{\underline{u}}^e d\xi = *$$

$$\underline{f}^e = \sum_j W_j \omega(d_j) \frac{2}{h_e} E \bar{\Psi}' \otimes \bar{\Psi}' \underline{u}^e$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \sum_j W_j \omega(d_j) \frac{2}{h_e} E \bar{\Psi}' \otimes \bar{\Psi}'$$

$$* = (\underline{f}^e + \underline{\underline{K}}^e \Delta \underline{u}^e) \cdot \hat{\underline{u}}^e$$

$$\text{Assemblaggio } (\underline{f} + \underline{\underline{K}} \Delta \underline{u}) = 0$$

$$\lambda = 1 + u' = 1 + \underline{\Psi}'_e \cdot \underline{u}^e = 1 + \frac{2}{h_e} \bar{\Psi}' \cdot \underline{u}^e$$

$$d_j = \bar{\Psi}'(\xi) \cdot \underline{d}^e$$

$\omega(d_j)$ nel codice: $\omega \rightarrow g$

$$\underline{\bar{\Psi}}' = \begin{vmatrix} \bar{\Psi}_1' \\ \bar{\Psi}_2' \end{vmatrix}, \quad \underline{\bar{\Psi}}' \underline{\bar{\Psi}}'^T = \begin{vmatrix} \bar{\Psi}_1' \\ \bar{\Psi}_2' \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1' & \bar{\Psi}_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\Psi}_1' \bar{\Psi}_1' & \bar{\Psi}_1' \bar{\Psi}_2' \\ \bar{\Psi}_2' \bar{\Psi}_1' & \bar{\Psi}_2' \bar{\Psi}_2' \end{vmatrix} = \underline{\bar{\Psi}}' \otimes \underline{\bar{\Psi}}'$$

$$\underline{K} \underline{u} = -\underline{f} \quad \begin{vmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{12}^T & \underline{K}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{vmatrix}$$

$$\underline{K}_{11} u_1 + \underline{K}_{12} u_2 = -f_1$$

$$\underline{K}_{12}^T u_1 + \underline{K}_{22} u_2 = -f_2$$

$$u_2 = \underline{K}_{22}^{-1} \left(-f_2 - \underline{K}_{12}^T u_1 \right)$$

$$\underline{\underline{K}} \Delta \underline{d} + \underline{f} = \underline{0} \quad \text{equivalente a} \quad \min \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} \Delta \underline{d} \cdot \Delta \underline{d} + \underline{f} \Delta \underline{d} \right\}$$

$$d = \underline{\Psi}^e \cdot \underline{d}^e = \bar{\Psi} \cdot \underline{d}^e$$

$$d' = \underline{\Psi}^{(e')} \cdot \underline{d}^e = \frac{2}{h_e} \bar{\Psi}' \cdot \underline{d}^e, \quad \underline{d}^e = \begin{vmatrix} d(x_e) \\ d(x_{e+1}) \end{vmatrix}$$

Bibliografia

- [1] E. P. Widmaier, R. Hershel, and K. T. Strang. *Vander's Human Physiology. The mechanism of body function, 14th edition*. McGraw-Hill Education, 2016.
- [2] Yamini Krishnan and Alan J Grodzinsky. Cartilage diseases. *Matrix Biology*, 71:51–69, 2018.
- [3] Valerio Sansone, Laura de Girolamo, et al. La cartilagine articolare. In *Ortopedia*, pages 22–33. Esculapio, 2012.
- [4] Arnold I Caplan. Cartilage. *Scientific American*, 251(4):84–97, 1984.
- [5] Subrata Pal and Subrata Pal. Mechanical properties of biological materials. *Design of artificial human joints & organs*, pages 23–40, 2014.
- [6] Sergio Adamo, P Carinci, Mario Molinaro, G Siracusa, Mario Stefanini, Elio Ziparo, et al. Istologia di monesi. In *ISTOLOGIA di Monesi, V ed*, volume 1, pages 1–877. Piccin Nuova Libreria SpA, 2002.
- [7] M Domenicucci. Anatomia funzionale e patologica delle articolazioni. *Atti*, 42(03):46, 2016.
- [8] Paul B Lewis, L Pearce McCarty III, Richard W Kang, and Brian J Cole. Basic science and treatment options for articular cartilage injuries. *Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy*, 36(10):717–727, 2006.
- [9] A Verteramo and BB Seedhom. Zonal and directional variations in tensile properties of bovine articular cartilage with special reference to strain rate variation. *Biorheology*, 41(3-4):203–213, 2004.
- [10] Joseph E Shigley, Richard G Budynas, J Keith Nisbett, Giovanni B Broggiato, Gianluca Chiappini, Cortese Luca, Edoardo Mancini, Rossi Marco, Sasso Marco, et al. *SHIGLEY. PROGETTO E COSTRUZIONE DI MACCHINE*. McGraw-Hill Education (Italy) srl, 2024.
- [11] SH Crandall, NC Dahl, TJ Lardner, RR Archer, and NH Cook. An introduction to the mechanics of solids; with si units, ser. *Engineering mechanics series*. Singapore: McGraw-Hill, 1978.
- [12] Richard M Christensen. *Theory of viscoelasticity*. Courier Corporation, 2013.

Bibliografia

- [13] David Roylance. Engineering viscoelasticity. *Department of Materials Science and Engineering–Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA*, 2139:1–37, 2001.
- [14] Shuhua Hu Harvey Thomas Banks and Zackary R. Kenz. A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 3(1):26–36: Mechanical analogs, 2010.
- [15] WC Hayes and LF Mockros. Viscoelastic properties of human articular cartilage. *Journal of applied physiology*, 31(4):562–568, 1971.
- [16] Wendy R Trickey, Greta M Lee, and Farshid Guilak. Viscoelastic properties of chondrocytes from normal and osteoarthritic human cartilage. *Journal of Orthopaedic Research*, 18(6):891–898, 2000.
- [17] Y. C. Fung. *Biomechanics Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer, 1981.
- [18] Leonid I Slepyan. *Models and phenomena in fracture mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [19] Peidong Li. A review on phase field models for fracture and fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 2023.
- [20] X.Zhuang. Phase field modeling and computer implementation: A review. *Engineering Fracture Mechanics*, 262, 2022.
- [21] Tortorelli VM Ambrosio L. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via gamma convergence. *Commun Pure Applied Mathematics*, 1990.
- [22] A . A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solid.i.
- [23] Gerard A Ateshian, Kimberly R Kroupa, Courtney A Petersen, Brandon K Zimmerman, Steve A Maas, and Jeffrey A Weiss. Damage mechanics of biological tissues in relation to viscoelasticity. *Journal of Biomechanical Engineering*, 145(4):041011, 2023.
- [24] Shaw Akizuki, Van C Mow, Francisco Müller, Julio C Pita, David S Howell, and Daniel H Manicourt. Tensile properties of human knee joint cartilage: I. influence of ionic conditions, weight bearing, and fibrillation on the tensile modulus. *Journal of orthopaedic research*, 4(4):379–392, 1986.
- [25] SL-Y Woo, P Lubock, MA Gomez, GF Jemmott, SC Kuei, and WH Akeson. Large deformation nonhomogeneous and directional properties of articular cartilage in uniaxial tension. *Journal of biomechanics*, 12(6):437–446, 1979.

- [26] Mary Beth Schmidt, Van C Mow, Lawrence E Chun, and David R Eyre. Effects of proteoglycan extraction on the tensile behavior of articular cartilage. *Journal of Orthopaedic Research*, 8(3):353–363, 1990.
- [27] GE Kempson, MAR Freeman, and SAV Swanson. Tensile properties of articular cartilage. *Nature*, 220(5172):1127–1128, 1968.
- [28] Bernard D Coleman and Morton E Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The journal of chemical physics*, 47(2):597–613, 1967.
- [29] Seonghun Park and Gerard A Ateshian. Dynamic response of immature bovine articular cartilage in tension and compression, and nonlinear viscoelastic modeling of the tensile response. 2006.
- [30] Steve A Maas, Benjamin J Ellis, Gerard A Ateshian, and Jeffrey A Weiss. Febio: finite elements for biomechanics. 2012.
- [31] Cindy Chung and Jason A Burdick. Engineering cartilage tissue. *Advanced drug delivery reviews*, 60(2):243–262, 2008.
- [32] Claire Vinatier, Dominique Mrugala, Christian Jorgensen, Jérôme Guicheux, and Danièle Noël. Cartilage engineering: a crucial combination of cells, biomaterials and biofactors. *Trends in biotechnology*, 27(5):307–314, 2009.