



UNIVERSITA' POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea triennale in **Ingegneria Meccanica**

Analisi di un Codice MATLAB per il calcolo delle traiettorie chiuse percorse da una sfera rotolante su un piano e studio delle condizioni di anolonomia

Analysis of a MATLAB code for a rolling sphere on a plane along closed paths and study of non-holonomy conditions

Relatore: Prof. **Coco Marco**

Tesi di Laurea di:

Carducci Pietro

Matricola:

S1101110

A.A. 2023 / 2024

Indice

Indice	3
1 Introduzione	6
2 Olonomia	8
2.1 Definizione di Olonomia	8
2.1.1 Fibrati di Olonomia	8
2.1.2 La Struttura di una Gruppo di Olonomia	9
2.2 Rotolamento e Olonomia	10
2.2.1 Puro Rotolamento	10
2.2.2 Olonomia nella Robotica	12
2.3 L'Olonomia di una Sfera Rotolante	13
2.3.1 Sfera Rotolante	13
2.3.2 Lemmi di Johnson	15
2.3.3 Gruppo di Rotazione $SO(3)$	17
2.3.4 Formula di Eulero-Rodrigues	20
3 Studio dell'anonomia di una sfera rotolante	23
3.1 Studio e calcolo delle traiettorie chiuse	23
3.2 Angoli di Eulero	26
3.2.1 Il set 3-2-3	26
3.2.2 Il set 3-1-3	29
3.2.3 Il set 3-2-1	32
3.2.4 Il set 3-1-2	35
4 Analisi Codici MATLAB	38
4.1 Codice MATLAB "get phi2 values numerically"	38
4.1.1 Definizione Variabili Globali	38
4.1.2 L'incognita φ_2	39
4.1.3 Definizione f , f_plus e f_minus	39
4.2 Codice MATLAB "get theta"	43
4.2.1 Definizione Variabile Globale	43
4.2.2 Inizializzazione Variabile a	43

4.2.3	Calcolo di θ	43
4.3	Codice MATLAB "get tests"	44
4.3.1	Definizione Variabili Globali	44
4.3.2	Inizializzazione Variabili b e c	44
4.3.3	Calcolo dei test per ogni valore di φ_2 e θ	44
4.4	Codice MATLAB "get q calculated"	45
4.4.1	Definizione Variabili Globali	45
4.4.2	Definizione Vettori di Base	45
4.4.3	Inizializzazione Variabili	45
4.4.4	Ciclo di calcolo per phi1 e quaternione	45
4.4.5	Calcolo x , y e $q_calculated$	46
4.4.6	Calcolo \mathbf{A}_r e $q_calculated$	46
4.5	Codice MATLAB "get rectangle"	47
4.5.1	Definizione Variabili Globali	47
4.5.2	Richiamo Codici Precedenti	47
4.5.3	Eliminazione di Valori di "phi2" Non Validi	48
4.5.4	Test di Validità dei Valori di "phi2" e "theta"	48
4.5.5	Controllo Finale con il Quaternione	49
4.5.6	Presentazione delle Soluzioni	50
4.6	Codice MATLAB "main"	50
4.6.1	Rotazione Composta Particolare	50
4.6.2	Soluzioni Finali	50
4.7	Ulteriori Rotazioni e Soluzioni	51
4.7.1	Rotazioni Composte Alternative	51
4.7.2	Soluzioni per Rotazioni Composte Alternative	52
5	Conclusioni	53
	Elenco delle figure	54
	Bibliografia	56

Capitolo 1

Introduzione

Nel presente elaborato verrà analizzato un codice di MATLAB atto al calcolo di traiettorie chiuse percorse da una sfera rotolante su un piano e ne verranno studiate le condizioni di anolonomia.

Il fenomeno che verrà studiato nei capitoli successivi può essere descritto come segue: si immagini una sfera rotolante su un piano tale che il centro di massa tracci sul piano una traiettoria rettangolare, quando il centro di massa ritornerà nel punto di partenza potrà essere avvenuto un cambiamento nell'orientazione del sistema di riferimento della sfera.

Questo cambiamento viene chiamato "Anolonomia".

Di seguito la raffigurazione di quanto descritto:

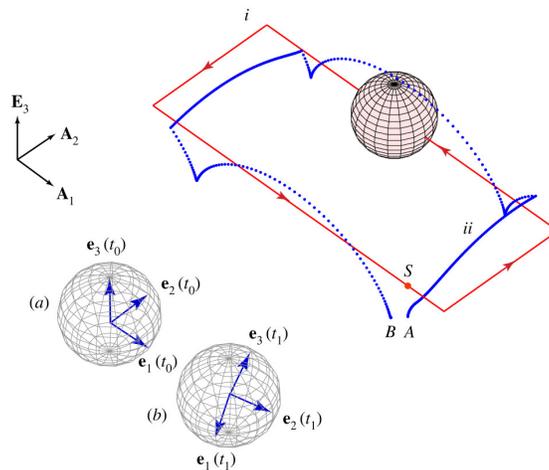


Figura 1.1: Raffigurazione Anolonomia, figura da [4].

Come si può notare dalla figura, il sistema di riferimento della sfera è cambiato:

- (a): sistema di riferimento di partenza;
- (b): sistema di riferimento al ritorno.

Ora è possibile studiare la condizione di anolonomia per trovare quali traiettorie possano essere percorse per ottenere questo tipo di cambiamento.

Inoltre è possibile trovare la traiettoria necessaria, o una combinazione di più traiettorie necessarie, per partire da un'orientazione nota e tornare al punto di partenza con una seconda orientazione, anch'essa nota.

Per ottenere la combinazione di più traiettorie chiuse desiderate è necessario studiare prima i concetti di anolonomia e olonomia.

Si parla di *anolonomia* quando si descrive il fenomeno dal punto di vista dei vincoli cinematici: infatti i vincoli anolonomi limitano gli spostamenti e le velocità dei punti del sistema, limitando quindi le direzioni e le traiettorie su cui far rotolare la sfera sul piano; essi sono anche detti vincoli di mobilità in quanto determinano come un sistema può muoversi in relazione alle sue proprietà cinematiche. Inoltre i vincoli anolonomi non possono essere integrati per ottenere relazioni geometriche tra le coordinate del sistema perché non sono soddisfatte le condizioni di integrabilità.

Si parla di *olonomia* quando si descrive il fenomeno dal punto di vista geometrico, riguardo alle connessioni sulla sfera: l'olonomia descrive come il trasporto parallelo lungo curve chiuse non preserva le proprietà geometriche che vengono trasportate, per effetto della curvatura della connessione. Il trasporto parallelo in una connessione affine permette di trasportare vettori lungo curve chiuse in maniera tale che restino paralleli rispetto alla connessione sulla sfera: in altre parole i vettori che si muovono lungo queste curve chiuse subiscono rotazioni che dipendono dalla geometria della sfera.

I due termini possiedono lo stesso significato, ma si distinguono per il contesto di riferimento. Nel presente elaborato verrà analizzata l'**anolonomia** associata ad una sfera rotolante su un piano e saranno illustrati i seguenti tre concetti fondamentali:

- i Lemmi di Johnson;
- il Gruppo di Rotazione $SO(3)$;
- la Formula di Eulero-Rodrigues.

Successivamente verrà studiata la condizione di anolonomia della sfera rotolante e, nello specifico, il ruolo che svolgono gli Angoli di Eulero per ottenere le traiettorie chiuse desiderate.

Infine verrà analizzato il codice MATLAB, preso da [5], atto a computare numericamente le soluzioni desiderate, ottenendo gli angoli "theta", "phi2" e "phi1", il quaternion unitario che descrive la rotazione composta e i rettangoli che descrivono le traiettorie chiuse.

Capitolo 2

Olonomia

2.1 Definizione di Olonomia

2.1.1 Fibrati di Olonomia

Siano (B, π, R) un *principal right H-bundle* di un manifold M connesso e sia $L \subset TB$ una connessione su B .

Per ogni $u \in B$ il *holonomy bundle* di L dentro u è il set $B^L(u)$ che consiste in quei punti v per i quali esiste una curva L -orizzontale $f : [a, b] \rightarrow B$ che soddisfa $f(a) = u$ ed $f(b) = v$.

L'olonomia di L in u è il set $Hol^L(u) \subset H$ che consiste in quelle $h \in H$ per i quali $u \cdot h$ giacciono in $B^L(u)$.

Questi passaggi derivano da [1].

Ovvero:

- un *principal right bundle* (o fibrato principale) è uno spazio geometrico che collega uno spazio base (\mathbf{M}) e uno spazio di fibre (\mathbf{B}), in cui H è il gruppo di struttura del fibrato che agisce alla destra delle fibre di \mathbf{B} ;
- la connessione $L \subset TB$ su \mathbf{B} viene definita un sottospazio \mathbf{TB} , dove \mathbf{TB} è tangente in \mathbf{B} ;
- il *holonomy bundle* (o fibrato di olonomia) $B^L(u)$ è l'insieme dei punti di B raggiungibili da u tramite curve orizzontali rispetto a L , curve descritte dalla funzione $f : [a, b] \rightarrow B$;
- l'olonomia di L in u : $Hol^L(u)$ rappresenta l'insieme degli elementi di H , che se applicati ad u possono produrre un punto appartenente all'*holonomy bundle* $B^L(u)$ e se $h \in Hol^L(u)$ allora significa che esistono curve orizzontali in B che collegano h a u e $u \cdot h$.

2.1.2 La Struttura di una Gruppo di Olonomia

Il set $Hol^L(u)$ è un sottogruppo di H . Infatti sia una traiettoria costante $f : [0, 1] \rightarrow B$ definita da $f(t) = u$ una curva L-orizzontale, segue che l'elemento identità e giace in $Hol^L(u)$.

Se h giace in $Hol^L(u)$ allora per definizione esiste una curva L-orizzontale $f : [0, 1] \rightarrow B$ tale che $f(0) = u$ mentre $f(1) = u \cdot h$. La mappatura $g : [0, 1] \rightarrow B$ definita da $g(t) = g(1-t) \cdot h^{-1}$ è allora una L-orizzontale e unisce u a $u \cdot h^{-1}$.

Se h_1 e h_2 giacciono in $Hol^L(u)$, allora sia $f_i : [0, 1] \rightarrow B$ una curva L-orizzontale che soddisfi la condizione $f_i(0) = u$ e $f_i(1) = u \cdot h_i^{-1}$, mostrando così che il gruppo $Hol^L(u)$ è chiuso rispetto agli inversi.

Si definisca una nuova curva L-orizzontale $g : [0, 1] \rightarrow B$ imponendo che siano $g(t) = f_1(2t)$ per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $g(t) = f_2(2t-1)$ per $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Allora $g(0) = u$ e $g(1) = (u \cdot h_2) \cdot h_1 = u \cdot (h_1 h_2)$, mostrando così che il gruppo $Hol^L(u)$ è chiuso rispetto alle moltiplicazioni.

Questi passaggi derivano da [1].

Ovvero, si vuole dimostrare che $Hol^L(u)$ è un sottogruppo di H :

- si dimostra prima che l'elemento identità e di H appartiene a $Hol^L(u)$;
- si dimostra che se un elemento h appartiene a $Hol^L(u)$, allora anche l'inverso h^{-1} appartiene a $Hol^L(u)$;
- si dimostra che se esistono due curve L-orizzontali che appartengono a $Hol^L(u)$, allora si può costruire una nuova curva L-orizzontale che lega le prime due e che anch'essa appartiene a $Hol^L(u)$;
- quindi, se $Hol^L(u)$ contiene l'identità e ed è chiuso rispetto agli inversi e alle moltiplicazioni, allora è un **sottogruppo** di H .

2.2 Rotolamento e Olonomia

2.2.1 Puro Rotolamento

Di seguito verranno analizzate le seguenti definizioni:

1. Moto di Puro Rotolamento;
2. Vincolo di Puro Rotolamento tramite eq. Differenziali e Gruppo di Rotazione $SO(3)$.

Moto di Puro Rotolamento

Si ha Moto di Puro Rotolamento quando un corpo rigido rotola senza strisciare su un piano fisso, ovvero quando la velocità del punto di contatto lungo il piano è nulla.

Sia \vec{R} il vettore congiungente il centro di massa e il punto di contatto istantaneo P con il piano fisso, e siano \vec{v}_{cm} la velocità del centro di massa, \vec{v}_P la velocità del punto P e $\vec{\omega}$ la velocità angolare, quindi

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (2.1)$$

Ma essendo $\vec{v}_P = 0$, allora

$$\vec{v}_{cm} = -\vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (2.2)$$

Quindi prendendo in considerazione la direzione di rotolamento

$$v_{cm} = R\omega. \quad (2.3)$$

Sia l'accelerazione

$$a_{cm} = R\dot{\omega} = R\alpha. \quad (2.4)$$

Questa definizione sarà utile come base per presentare e dimostrare i Lemmi di Johnson.

Vincolo di Puro Rotolamento tramite eq. Differenziali e Gruppo di Rotazione $SO(3)$

Dato un spazio $B = SO(3) \times \mathbb{R}^2$, dove $SO(3)$ indica l'orientazione della sfera e \mathbb{R}^2 indica il punto di contatto del corpo sul piano, il vincolo di rotolamento senza scivolamento né torsione può essere espresso con equazioni differenziali:

$$\alpha = a^{-1}da + a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -dx \\ 0 & 0 & -dy \\ dx & dy & 0 \end{pmatrix} a = 0 \quad (2.5)$$

per una curva $(a(t); x(t); y(t))$ in B .

Le curve in B che soddisfano il vincolo sono quelle curve tangenti al piano $D = \text{Ker } \alpha$, trasversale alle fibre della proiezione $SO(3) \times \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$.

La funzione Ker non è altro che il kernel di una matrice, ovvero il nucleo di una trasformazione lineare.

Quindi è possibile congiungere due punti di B con una curva tangente in D , ovvero è possibile far rotolare una sfera da una posizione qualsiasi ad un'altra scegliendo la traiettoria apposita.

Questi passaggi derivano da [1].

Ovvero:

- si introduce lo spazio delle configurazioni $B = SO(3) \times \mathbb{R}^2$, definito da $\alpha \in SO(3)$ che rappresenta la rotazione della sfera, e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che indicano la posizione del punto sul piano;
- si intende descrivere il "Vincolo di Rotolamento senza scivolamento né torsione", cioè senza che avvengano spostamenti tangenziali relativi tra sfera e piano né cambiamenti nella rotazione della sfera intorno alla normale al piano;
- nell'equazione (2.5) da rappresenta la variazione di orientazione della sfera e la matrice rappresenta la variazione del punto di contatto tra la sfera e il piano;
- ponendo $\alpha = 0$ si impone che non vengano consentiti né scivolamenti né torsioni.

Tale definizione tornerà utile nell'approfondimento del Gruppo di Rotazione $SO(3)$.

2.2.2 Olonomia nella Robotica

Il problema dell'olonomia e anolonomia del rotolamento è molto rilevante in robotica, nell'ambito della quale un obiettivo chiave è quello di manipolare un oggetto afferrato da un robot per riuscire a rilocalizzarlo e riorientarlo arbitrariamente: è questa la **proprietà di destrezza**.

Lo sviluppo di mani robotiche finora è stato svolto implementando un paradigma antropomorfo, ma consiste di troppi giunti per essere una soluzione industriale.

L'**anolonomia del rotolamento** può aiutare a raggiungere questo obiettivo: infatti il rotolamento su superfici dell'oggetto manipolato può essere utile per ottenere la destrezza con un sistema meccanico più semplice.

Aggiungere di proposito l'anolonomia in un sistema può essere considerato un modo per spostare la complessità del sistema stesso dall'hardware al software.

Infatti pianificare e controllare sistemi anolonomi è generalmente considerato più complicato che per sistemi olonomi, il solo fatto che ci sono meno gradi di libertà disponibili che configurazioni implica che lo standard di pianificazione non può essere adattato a sistemi anolonomi.

Dal punto di vista del controllo, i sistemi anolonomi sono sistemi non lineari, cioè non linearizzabili, e la loro approssimazione lineare non mantiene le caratteristiche fondamentali del sistema, come ad esempio la controllabilità.

Queste considerazioni derivano da [2].

2.3 L'Olonomia di una Sfera Rotolante

2.3.1 Sfera Rotolante

Si prende in considerazione una ruota di raggio R che rotola con velocità angolare $\frac{d\theta}{dt} = -\omega$; essendo moto di puro rotolamento si ha la seguente equazione per lo spostamento del centro di massa (cm):

$$\vec{r}_{cm} = R(\theta_0 - \theta)\vec{i} + R\vec{j} \quad (2.6)$$

dove θ è l'angolo di rotazione in radianti e θ_0 è l'angolo iniziale di rotazione della ruota.

Sia B un punto esterno alla ruota e θ l'angolo rispetto al piano, la velocità di B è

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{B/cm} \quad (2.7)$$

in cui $\vec{v}_{B/cm}$ indica la velocità relativa di B rispetto al centro di massa; tale velocità è tangente alla ruota e può essere espressa come

$$\vec{v}_{B/cm} = \omega R \sin \theta \vec{i} - \omega R \cos \theta \vec{j} = -\omega \vec{k} \times \vec{r}_{B/cm} \quad (2.8)$$

dove \times è il prodotto vettoriale.

Può essere utilizzata la forma $\frac{d\vec{\theta}}{dt} = -\omega \vec{k}$, quindi

$$\vec{v}_{B/cm} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}_{B/cm}. \quad (2.9)$$

Essendo B il punto di contatto tra ruota e superficie ne deriva che

$$\vec{r}_{B/cm} = -R\vec{j} \implies \vec{v}_B = 0. \quad (2.10)$$

Dunque la ruota rotola ma non scivola.

Ora si passa dalla ruota alla sfera.

Sia $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ la parametrizzazione della traiettoria sul piano su cui rotola la sfera, si assume che la sfera abbia raggio unitario, quindi il moto del centro di massa è $\vec{r}_{cm} = \vec{r}(t) + \vec{k}$.

Non vi è differenza tra il rotolamento della ruota e il rotolamento della sfera, quindi la dimostrazione del rotolamento senza scivolamento della ruota può essere applicato anche alla sfera.

È possibile calcolare la velocità del fondo della sfera aggiungendo la velocità del centro alla velocità relativa del fondo rispetto al centro di massa, e si arriva a

$$\begin{aligned}
\vec{v}_B(t) &= \vec{r}_{cm}(t)' + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{B/cm} \\
&= \vec{r}_{cm}(t)' + \vec{\omega}(t) \times (-\vec{k}) \\
&= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + \omega_x(t)\vec{j} - \omega_y(t)\vec{i} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Questo comporta che i vettori di $\vec{\omega}(t)$ siano

$$\omega_x(t) = -g'(t), \quad \omega_y(t) = f'(t). \tag{2.12}$$

È importante sottolineare come nel rotolamento non vi sia torsione, cioè che $\omega_z = 0$.

Da ciò si ottiene

$$\vec{\omega}(t) = -g'(t)\vec{i} + f'(t)\vec{j} \tag{2.13}$$

e dunque è possibile descrivere il comportamento della sfera lungo la traiettoria $\vec{r}(t)$.

Il passo successivo è quello di costruire le equazioni del moto per un punto qualsiasi P sulla superficie della sfera. Si assume che la traiettoria $\vec{r}(t)$ sia chiusa così che il punto finale del centro di massa sia invariato dal rotolamento della sfera.

Sia la velocità di P

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{cm}(t) + \vec{v}_{P/cm}. \tag{2.14}$$

Si può determinare la posizione finale di P con la velocità relativa $\vec{v}_{P/cm}$ e la posizione iniziale di P rispetto al centro di massa (cm), quindi

$$\vec{v}_{P/cm}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{P/cm}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -g'(t) & f'(t) & 0 \\ x_{P/cm}(t) & y_{P/cm}(t) & z_{P/cm}(t) \end{vmatrix}. \tag{2.15}$$

Abbreviando $x_{P/cm}$, $y_{P/cm}$, $z_{P/cm}$ come x , y e z , l'equazione diventa

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t)z(t) \\ g'(t)z(t) \\ -f'(t)x(t) - g'(t)y(t) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Questi passaggi derivano da [6] e servono da introduzione alla sezione successiva relativa ai **Lemmi di Johnson**.

2.3.2 Lemmi di Johnson

Per mostrare l'anolonomia di una sfera rotolante è necessario dimostrare che è possibile spostare la sfera tra due orientazioni arbitrarie facendola rotolare lungo una traiettoria chiusa.

Questa dimostrazione è scomponibile come segue:

- dimostrare che un punto qualsiasi della sfera può essere trasferito al Polo Nord della stessa (**Lemma 2**);
- dimostrare che è possibile ottenere una rotazione dell'asse z rotolando, senza cambiare il Polo Nord della sfera (**Lemma 1**).

Il vincolo di puro rotolamento, in relazione all'impossibilità di torsione, previene una diretta rotazione della sfera rispetto all'asse z , ma una trasformazione equivalente può essere eseguita facendo rotolare la sfera lungo una traiettoria ben definita.

Lemma 1: Sia $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e definiamo $\vec{r}(t)$ come $[0, 2\pi + \theta]$, ovvero:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} 0\vec{i} + t\vec{j} & \text{se } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ (t - \frac{\pi}{2})\vec{i} + (\frac{\pi}{2})\vec{j} & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2}\vec{i} + (\pi + \frac{\theta}{2} - t)\vec{j} & \text{se } \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \\ (\theta + \frac{3\pi}{2} - t)\vec{i} - \frac{\pi}{2}\vec{j} & \text{se } \frac{3\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} + \theta \\ 0\vec{i} + (-2\pi - \theta + t)\vec{j} & \text{se } \frac{3\pi}{2} + \theta \leq t < 2\pi + \theta \end{cases} \quad (2.17)$$

Facendo rotolare la sfera lungo la traiettoria $\vec{r}(t)$ l'effetto sulla sfera è lo stesso di rotazione in senso anti-orario (vista dall'alto) di θ radianti rispetto all'asse z .

Dimostrazione. La dimostrazione può essere eseguita come diretto svolgimento delle equazioni del moto ma anche con una raffigurazione della traiettoria descritta dal Lemma, ci sono 5 stadi di movimento:

1. Rotazione in senso orario lungo l'asse x di $\frac{\pi}{2}$ radianti;
2. Rotazione in senso anti-orario lungo l'asse y di $\frac{\theta}{2}$ radianti;
3. Rotazione in senso anti-orario lungo l'asse x di π radianti;
4. Rotazione in senso orario lungo l'asse y di $\frac{\theta}{2}$ radianti;
5. Rotazione in senso orario lungo l'asse x di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

□

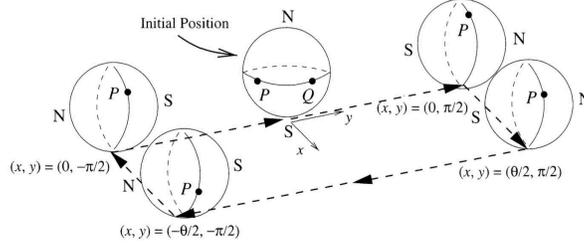


Figura 2.1: Traiettorie descritte dal **Lemma 1**, figura da [6].

Lemma 2: *Per un punto qualsiasi P sulla sfera esiste una traiettoria $\vec{r}(t)$ ($0 \leq t \leq T < \infty$) differenziabile a tratti tale che il rotolamento della sfera lungo la traiettoria $\vec{r}(t)$ ricolloca P al Polo Nord.*

Dimostrazione. Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ e si consideri il cerchio che passa sia per il punto P sia per il Polo Nord e che corrisponde all'angolo tra la posizione del vettore P e \vec{k} .

Sia \vec{u} il vettore unitario nella direzione $-x_0\vec{i} - y_0\vec{j}$ e si denoti \vec{v} un vettore unitario perpendicolare a \vec{u} .

Si definisca $\vec{r}(t)$ come la traiettoria rettangolare su $[0, 2\pi + \phi]$ data da

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} t\vec{u} + 0\vec{v} & \text{se } 0 \leq t < \frac{\phi}{2} \\ \frac{\phi}{2}\vec{u} + (t - \frac{\phi}{2})\vec{v} & \text{se } \frac{\phi}{2} \leq t < \pi + \frac{\phi}{2} \\ (\phi + \pi - t)\vec{u} + \pi\vec{v} & \text{se } \pi + \frac{\phi}{2} \leq t < \phi + \pi \\ 0\vec{u} + (2\pi + \phi - t)\vec{v} & \text{se } \pi + \phi \leq t < 2\pi + \phi. \end{cases} \quad (2.18)$$

Allo stesso modo del **Lemma 1** si descriverà la trasformazione come risultante di ogni componente della traiettoria rettangolare.

Si precisa che l'arco della sfera che separa P dal **Polo Nord** è inizialmente di ϕ unità di lunghezza. Dopo aver fatto rotolare la sfera della distanza di $\phi/2$ in direzione \vec{u} , P si muove a metà strada tra il suo punto iniziale e il **Polo Nord**. Successivamente la sfera viene fatta rotolare della distanza di valore π in direzione perpendicolare a \vec{v} .

Ne risulta che P rimane sempre nello stesso cerchio iniziale ma distante dal **Polo Sud** della lunghezza d'arco del valore di $\phi/2$. Facendo rotolare la sfera in direzione $-\vec{u}$ il punto P viene riposizionato al **Polo Sud**.

La parte finale della traiettoria consente alla sfera di tornare al suo punto d'origine rotolando della distanza π nella direzione $-\vec{v}$ mentre si muove P dal **Polo Sud** al **Polo Nord**.

Si completa così la trasformazione desiderata. □

Applicazioni Rilevanti

Data una coppia di orientazioni per una sfera che giace su un piano, grazie ai **Lemmi di Johnson** è possibile determinare una traiettoria chiusa tale per cui si fa rotolare la sfera (senza scivolamento né torsione) partendo con la prima orientazione e tornando al punto di origine con la seconda orientazione.

Questa proprietà torna molto utile nella manipolazione di robot sferici per consentire il loro riorientamento arbitrario attraverso l'impiego esclusivo di Moto di Puro Rotolamento lungo una traiettoria specifica.

Sarà oggetto dei successivi capitoli l'analisi e il calcolo delle suddette traiettorie chiuse.

I passaggi per la descrizione dei Lemmi e le relative dimostrazioni derivano da [6].

2.3.3 Gruppo di Rotazione $SO(3)$

Il Gruppo di Rotazione $SO(3)$ può essere identificato in maniera univoca con una matrice \mathbf{R} propriamente ortogonale. Dopo aver definito un sistema di riferimento ortonormale $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ per \mathbb{R}^3 , è possibile utilizzare una matrice per definire il tensore di rotazione \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (2.19)$$

Il tensore \mathbf{R} è poi usato per definire una base corotazionale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{R} \mathbf{E}_k = \sum_{i=1}^3 R_{ik} \mathbf{E}_i, \quad \text{con } k = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Inoltre è noto che un tensore di rotazione è caratterizzato da un asse di rotazione \mathbf{r} e da un angolo di rotazione θ . Conseguentemente dell'equazione sopra riportata, ne deriva che

$$r_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k, \quad \text{con } k = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Per lo stesso principio la rotazione può essere parametrizzata con il quaternion unitario (q_0, \mathbf{q}) , quindi

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \mathbf{q} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{r}. \quad (2.22)$$

Le componenti $R_{ik} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E}_i$ del tensore \mathbf{R} possono avere una rappresentazione particolare utilizzando il quaternion unitario

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \\
&= (2q_0^2 - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & q_3^2 \end{bmatrix} \\
&+ 2q_0 \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

in cui $q_k = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}_k$.

Si nota come le colonne vettori della matrice \mathbf{R} definiscono i componenti dei vettori mobili in relazione alle loro controparti fisse e viceversa

$$\mathbf{e}_k = R_{1k} \mathbf{E}_1 + R_{2k} \mathbf{E}_2 + R_{3k} \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{E}_k = R_{1k} \mathbf{e}_1 + R_{2k} \mathbf{e}_2 + R_{3k} \mathbf{e}_3. \tag{2.24}$$

Tali identità saranno utilizzate per costruire $\mathbf{e}_i(t)$ dati q_0 , \mathbf{q} ed \mathbf{E}_k .

Il vettore della velocità angolare ω è il vettore assiale del tensore antisimmetrico $\overline{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}_0$ ($\mathbf{R}\mathbf{R}_0$)^T, dove \mathbf{R}_0 è una qualsiasi costante del tensore.

Tale vettore ha la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = \\
&= 2q_0^2 - 2\dot{q}_0 \mathbf{q} + 2\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Se ω è costante, allora anche le componenti ω_i sono costanti.

Inoltre è possibile notare che ω determina $\dot{\mathbf{e}}_k$, con $\dot{\mathbf{e}}_k = \omega \times \mathbf{e}_k$ e la direzione di ω è definita dall'asse di istantanea rotazione \mathbf{i}

$$\mathbf{i} = \frac{\omega}{\|\omega\|}. \tag{2.26}$$

Gli assi \mathbf{r} e \mathbf{i} sono paralleli solo quando $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$.

Quindi è possibile determinare l'elemento di linea cinematica ds per il gruppo di rotazione $\text{SO}(3)$

$$ds = \sqrt{\frac{2T}{M}} dt \tag{2.27}$$

in cui $T = \frac{M}{2} \omega \cdot \omega$, sostituendo

$$ds = \sqrt{\omega \cdot \omega} dt \quad (2.28)$$

ma

$$\begin{aligned} \omega \cdot \omega &= 4\dot{q}_0^2 + 4\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \\ &= 4\dot{q}_0^2 + 4\dot{q}_1^2 + 4\dot{q}_2^2 + 4\dot{q}_3^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Le geodetiche rispetto a ds sono estremizzate da \mathbf{T} e in riferimento al teorema di Jacobi, si può notare che \mathbf{T} si conserva lungo le geodetiche. Ciò implica anche che la velocità angolare $\sqrt{\omega \cdot \omega}$ è costante.

È possibile ottenere un gruppo di rotazione $\text{SO}(3)$ utilizzando quaternioni unitari (q_0, \mathbf{q}) o i parametri di Eulero-Rodrigues (b_x, b_y, b_z) per parametrizzare \mathbf{R} .

Se si sceglie un sistema di riferimento $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ per \mathbb{R}^3 tale che \mathbf{E}_1 è normale ad un piano: $q_1(0) = \dot{q}_1(0) = 0$, allora si può determinare l'angolo ψ tale che

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad q_2 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\psi), \quad q_3 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\psi). \quad (2.30)$$

È possibile scrivere l'espressione analitica per $\theta(t)$ e $\mathbf{r}(t)$

$$\theta(t) = 2 \cos^{-1}(q_0(t)). \quad (2.31)$$

$$\psi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{q_2(t)}{q_3(t)}\right). \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\psi(t))\mathbf{E}_1 + \sin(\psi(t))\mathbf{E}_2. \quad (2.33)$$

Questi passaggi derivano da [7].

2.3.4 Formula di Eulero-Rodrigues

La formula di Eulero-Rodrigues, tramite un'interpretazione geometrica, rappresenta un modo efficace per descrivere la rotazione di un vettore in uno spazio tridimensionale.

Infatti la rotazione di un corpo rigido può essere presentata sotto forma di parametri di Rodrigues che associano i coseni della direzione di un'asse di rotazione alla tangente di metà dell'angolo di rotazione come tre quantità:

$$b_x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_x, \quad b_y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_y, \quad b_z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_z \quad (2.34)$$

come mostrato in figura:

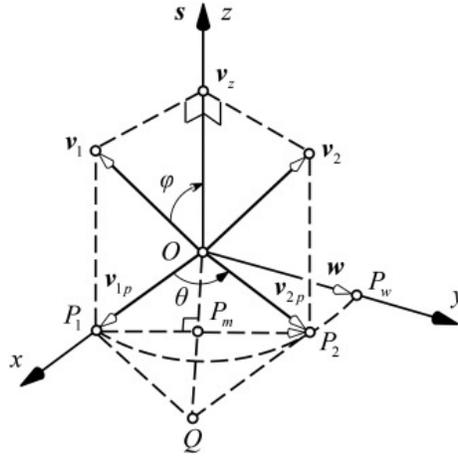


Figura 2.2: Costruzione vettori \vec{v}_1 , \vec{v}_{1p} , \vec{v}_2 , \vec{v}_{2p} ed il rombo, figura da [3].

Viene chiamato $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$ il vettore di Rodrigues, le tre quantità (b_x, b_y, b_z) sono i parametri di Rodrigues e l'asse di rotazione è

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \quad (2.35)$$

cioè un versore.

Si considera la tangente di **metà** angolo la quale rappresenta una caratteristica fondamentale della parametrizzazione delle rotazioni.

Nella figura il vettore \vec{v}_1 , ruotando di angolo θ rispetto all'asse unitario \mathbf{s} che è in linea con l'asse \mathbf{z} , forma il vettore \vec{v}_2 .

Le proiezioni dei vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 su un piano xy sono chiamati \vec{v}_{1p} e \vec{v}_{2p} .

Nel piano proiettato viene a formarsi un rombo dalle linee $\overline{P_1Q}$ e $\overline{P_2Q}$; disegnando anche le diagonali $\overline{P_1P_2}$ e \overline{OQ} perpendicolari tra loro si ottiene il punto medio P_m .

La tangente della metà dell'angolo di rotazione può essere riscritta come

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{P_1P_m}{OP_m}. \quad (2.36)$$

Riscrivendo la formula sopra indicata in funzione dei vettori proiezioni si ottiene

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\|\vec{v}_{2p} - \vec{v}_{1p}\|}{\|\vec{v}_{2p} + \vec{v}_{1p}\|}. \quad (2.37)$$

Il vettore \vec{v}_2 invece può essere riscritto come

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2p} + \vec{v}_z \quad (2.38)$$

ovvero come combinazione delle sue proiezioni sul piano xy e sull'asse \mathbf{z} .

Ma il vettore \vec{v}_2 è il risultato di una rotazione del vettore \vec{v}_1 e può essere riscritto come

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{1p} \cos(\theta) + \omega \sin(\theta) + \vec{v}_z \quad (2.39)$$

in cui

$$\vec{v}_{1p} = \vec{v}_1 - \vec{v}_z = \vec{v}_1 - (s \cdot \vec{v}_1)s. \quad (2.40)$$

$$\omega = s \times \vec{v}_1. \quad (2.41)$$

Nell' eq. (2.41), $[s \times]$ risulta in una matrice antisimmetrica

$$A_s = [s \times] = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Dato che il prodotto vettoriale di \mathbf{s} è un'operazione lineare su $\omega \mapsto s \times \vec{v}_1$ in forma matriciale, allora

$$s \times \vec{v}_1 = [s \times] \vec{v}_1 = A_s \vec{v}_1. \quad (2.43)$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (\vec{v}_1 - (s \cdot \vec{v}_1)s) \cos(\theta) + (s \times \vec{v}_1) \sin(\theta) + (s \cdot \vec{v}_1)s = \\ &= \vec{v}_1 \cos(\theta) + (s \times \vec{v}_1) \sin(\theta) + (s \cdot \vec{v}_1)s(1 - \cos(\theta)). \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'equazione precedente può essere così riscritta

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \cos(\theta)\vec{v}_1 + \sin(\theta)[s \times] \vec{v}_1 + (1 - \cos(\theta))\mathbf{ss}^T \vec{v}_1 = \\ &= (\cos(\theta)I + \sin(\theta)[s \times] + (1 - \cos(\theta))\mathbf{ss}^T) \vec{v}_1\end{aligned}\quad (2.45)$$

in cui I è una matrice identità 3×3 e \mathbf{ss}^T è il prodotto tensoriale di due vettori.

Escludendo dall'equazione il vettore \vec{v}_1 , si ha la formula di Eulero-Rodrigues in forma matriciale

$$\mathbf{R} = \cos(\theta)I + \sin(\theta)[s \times] + (1 - \cos(\theta))\mathbf{ss}^T. \quad (2.46)$$

La matrice antisimmetrica \mathbf{A}_s ha la seguente proprietà

$$\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s = \mathbf{ss}^T - I. \quad (2.47)$$

Allora la formula di Eulero-Rodrigues può essere riscritta in forma standard

$$\mathbf{R} = I + \sin(\theta)\mathbf{A}_s + (1 - \cos(\theta))\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s. \quad (2.48)$$

Tale forma standard viene usata per la costruzione di una matrice di rotazione a partire dalla rappresentazione asse-angolo delle rotazioni ottenendo

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} s_x^2 + (1 - s_x^2) \cos \theta & s_x s_y (1 - \cos \theta) - s_z \sin \theta & s_x s_z (1 - \cos \theta) + s_y \sin \theta \\ s_x s_y (1 - \cos \theta) + s_z \sin \theta & s_y^2 + (1 - s_y^2) \cos \theta & s_y s_z (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta \\ s_x s_z (1 - \cos \theta) - s_y \sin \theta & s_y s_z (1 - \cos \theta) - s_x \sin \theta & s_z^2 + (1 - s_z^2) \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Questi passaggi derivano da [3].

Grazie all'applicazione della formula di Eulero-Rodrigues sarà possibile trovare la rappresentazione del quaternion unitario per rotazioni composte.

Capitolo 3

Studio dell'anolonomia di una sfera rotolante

Sarà oggetto del presente capitolo lo studio di traiettorie chiuse percorse da una sfera rotolante su un piano per tornare al punto di partenza con un'orientazione diversa.

3.1 Studio e calcolo delle traiettorie chiuse

Innanzitutto verranno trattate le traiettorie chiuse di tipo rettangolare, come descritte in figura dai seguenti parametri

$$H_2 = R\varphi_2, \quad W = R\theta, \quad H_1 = R\varphi_1. \quad (3.1)$$

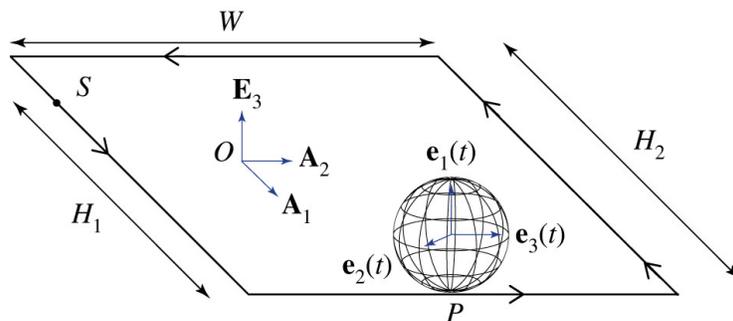


Figura 3.1: Traiettoria chiusa rettangolare, figura da [4].

La sfera di raggio R inizia il moto dal punto S, che viene indicato dal parametro H_1 , e la traiettoria rettangolare ha dimensioni H_2 e W .

Il cambio di orientazione della sfera è dato dal tensore di rotazione

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \hat{\mathbf{S}}(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \odot) = \\ &= \mathbf{R}(\varphi_2 - \varphi_1, \mathbf{A}_2)\mathbf{R}(\theta, \mathbf{A}_1)\mathbf{R}(-\varphi_2, \mathbf{A}_2)\mathbf{R}(-\theta, \mathbf{A}_1)\mathbf{R}(\varphi_1, \mathbf{A}_2)\end{aligned}\quad (3.2)$$

in cui

$$\theta = \frac{W}{R}, \quad \varphi_1 = \frac{H_1}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{H_2}{R}.\quad (3.3)$$

È possibile rappresentare la rotazione composta \mathbf{S} in termini di un asse di rotazione \mathbf{s} e un angolo di rotazione ψ . È anche possibile descrivere questa rotazione composta con una rappresentazione a quaternioni unitari

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \odot).\quad (3.4)$$

Segue la descrizione con quaternioni unitari delle 5 rotazioni.

Prima rotazione $\mathbf{R}(\varphi_1, \mathbf{A}_2)$:

$$\begin{cases} q_{0,1} = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right); \\ \mathbf{q}_1 = \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \mathbf{A}_2. \end{cases}\quad (3.5)$$

Seconda rotazione $\mathbf{R}(-\theta, \mathbf{A}_1)$:

$$\begin{cases} q_{0,2} = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right); \\ \mathbf{q}_2 = \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A}_1. \end{cases}\quad (3.6)$$

Terza rotazione $\mathbf{R}(-\varphi_2, \mathbf{A}_2)$:

$$\begin{cases} q_{0,3} = \cos\left(\frac{-\varphi_2}{2}\right); \\ \mathbf{q}_3 = \sin\left(\frac{-\varphi_2}{2}\right) \mathbf{A}_2. \end{cases}\quad (3.7)$$

Quarta rotazione $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{A}_1)$:

$$\begin{cases} q_{0,4} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \\ \mathbf{q}_4 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A}_1. \end{cases}\quad (3.8)$$

Quinta Rotazione $\mathbf{R}(\varphi_2 - \varphi_1, \mathbf{A}_2)$:

$$\begin{cases} q_{0,5} = \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right); \\ \mathbf{q}_5 = \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \mathbf{A}_2. \end{cases}\quad (3.9)$$

Occorre calcolare le rotazioni composte con la formula di composizione dei quaternioni unitari: siano $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}(a_0, \mathbf{a})$ e $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(b_0, \mathbf{b})$ due rotazioni, la loro composizione risulta in $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{C}}(c_0 = a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c} = a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

Applicando 4 volte la formula di Eulero-Rodrigues per rotazioni composte si ottiene la rappresentazione a quaternioni unitari per $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \odot)$

$$\begin{cases} q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right); \\ \mathbf{q}_0 = \sin(\theta) \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \mathbf{A}_r + \sin(\varphi_2) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{A}_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

in cui

$$\mathbf{A}_r = -\cos\left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2}\right) \mathbf{A}_3 + \sin\left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2}\right) \mathbf{A}_1. \quad (3.11)$$

Tale applicazione della formula di Eulero-Rodrigues deriva da [4].

3.2 Angoli di Eulero

La parametrizzazione degli angoli di Eulero di un tensore di rotazione \mathbf{T} consiste nella moltiplicazioni di tre rotazioni. Esistono dodici possibili set di Angoli di Eulero. Nel presente elaborato verranno presi in considerazione i seguenti quattro set:

$$3 - 2 - 3; \quad 3 - 1 - 3; \quad 3 - 2 - 1; \quad 3 - 1 - 2.$$

3.2.1 Il set 3-2-3

Prima rotazione:

- Angolo: v_1 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{E}_3 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_1) & \sin(v_1) & 0 \\ -\sin(v_1) & \cos(v_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \cos(v_1)\mathbf{E}_1 + \sin(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\sin(v_1)\mathbf{E}_1 + \cos(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3. \end{cases} \quad (3.13)$$

Seconda rotazione:

- Angolo: v_2 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{e}'_2 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_2) & 0 & -\sin(v_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v_2) & 0 & \cos(v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \cos(v_2)\mathbf{e}'_1 - \sin(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}''_3 = \sin(v_2)\mathbf{e}'_2 + \cos(v_2)\mathbf{e}'_3. \end{cases} \quad (3.15)$$

Terza rotazione:

- Angolo: v_3 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{e}_3'' ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_3) & \sin(v_3) & 0 \\ -\sin(v_3) & \cos(v_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3'' \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(v_3)\mathbf{e}_1'' + \sin(v_3)\mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_2 = -\sin(v_3)\mathbf{e}_1'' + \cos(v_3)\mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3''. \end{cases} \quad (3.17)$$

È possibile dunque trovare il sistema di riferimento di Eulero per questo set

$$\{\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3''\}. \quad (3.18)$$

Si ha la rappresentazione

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-2-3}(v_1, v_2, v_3) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}_3'')\mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_2)\mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.19)$$

Quindi si possono costruire i tre rettangoli secondo le tre rotazioni:

Primo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \circ\right) = \mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.20)$$

Secondo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{v_2}{2}, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circ\right) = \mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_2). \quad (3.21)$$

Terzo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(v_3, 3\pi - \frac{\pi}{2} - v_2, 3\pi, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circ\right) = \mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}_3''). \quad (3.22)$$

In totale

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-2-3}(v_1, v_2, v_3) &= \hat{\mathbf{S}}\left(v_3, 3\pi - \frac{\pi}{2} - v_2, 3\pi, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circlearrowleft\right) \times \\
&\times \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{v_2}{2}, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circlearrowleft\right) \times \\
&\times \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \circlearrowleft\right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

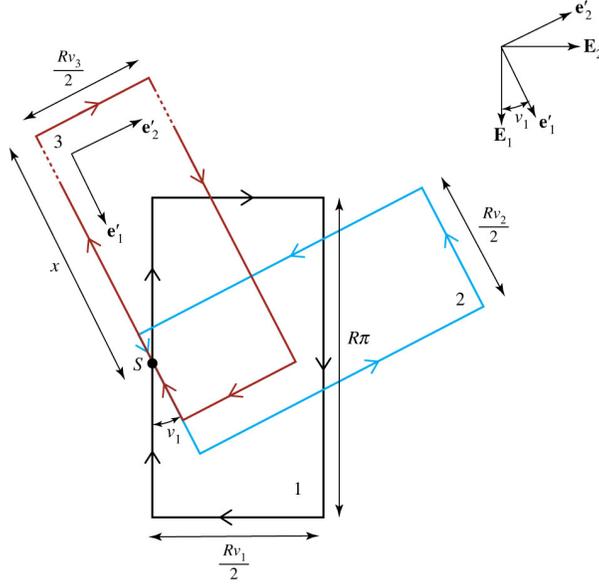


Figura 3.2: Rettangoli secondo il set 3-2-3 di Angoli di Eulero, figura da [4].

con

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_3 = \sin(v_2)\mathbf{e}'_1 + \cos(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{s}_3 = \sin(\varphi_1)\mathbf{A}_3 + \cos(\varphi_1)\mathbf{A}_1. \end{cases} \tag{3.24}$$

Quindi

$$\varphi_1 = \frac{5\pi}{2} - v_2, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3. \tag{3.25}$$

3.2.2 Il set 3-1-3

Prima rotazione:

- Angolo: v_1 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{E}_3 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_1) & \sin(v_1) & 0 \\ -\sin(v_1) & \cos(v_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \cos(v_1)\mathbf{E}_1 + \sin(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\sin(v_1)\mathbf{E}_1 + \cos(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3. \end{cases} \quad (3.27)$$

Seconda rotazione:

- Angolo: v_2 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{e}'_1 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v_2) & \sin(v_2) \\ 0 & -\sin(v_2) & \cos(v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}''_2 = \cos(v_2)\mathbf{e}'_2 + \sin(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_3 = -\sin(v_2)\mathbf{e}'_2 + \cos(v_2)\mathbf{e}'_3. \end{cases} \quad (3.29)$$

Terza rotazione:

- Angolo: v_3 ;
- Verso: Antiorario;
- Asse: \mathbf{e}''_3 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_3) & \sin(v_3) & 0 \\ -\sin(v_3) & \cos(v_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3'' \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(v_3)\mathbf{e}_1'' + \sin(v_3)\mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_2 = -\sin(v_3)\mathbf{e}_1'' + \cos(v_3)\mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3''. \end{cases} \quad (3.31)$$

È possibile dunque trovare il sistema di riferimento di Eulero per questo set

$$\{\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}''_3\}. \quad (3.32)$$

E si ha la rappresentazione

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-1-3}(v_1, v_2, v_3) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_3)\mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_1)\mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.33)$$

Quindi si possono costruire i tre rettangoli secondo le tre rotazioni:

Primo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \circ\right) = \mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.34)$$

Secondo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{v_2}{2}, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, \circ\right) = \mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_1). \quad (3.35)$$

Terzo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(v_3, \frac{5\pi}{2} - v_2, 3\pi, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, \circ\right) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_3). \quad (3.36)$$

In totale

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-1-3}(v_1, v_2, v_3) &= \hat{\mathbf{S}}\left(v_3, \frac{5\pi}{2} - v_2, 3\pi, \mathbf{e}'_1, -\mathbf{e}'_2, \circ\right) \times \\ &\quad \times \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{v_2}{2}, \mathbf{e}'_1, -\mathbf{e}'_2, \circ\right) \times \\ &\quad \times \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \circ\right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

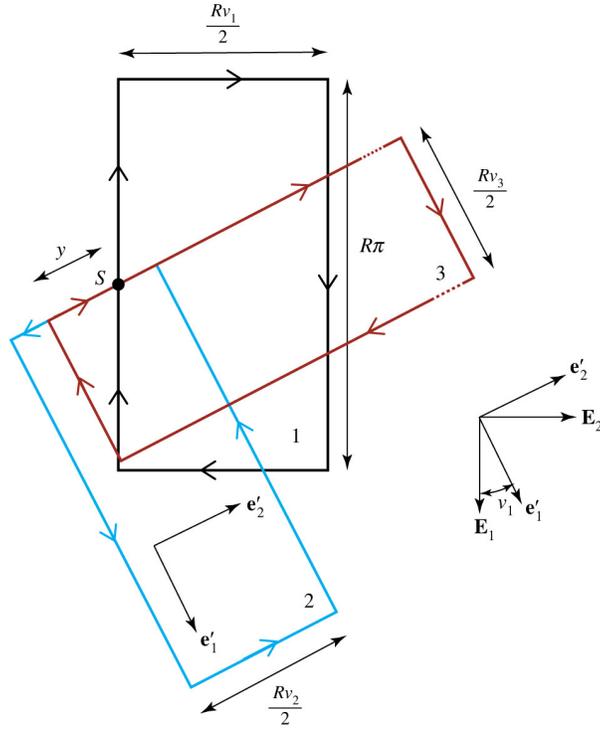


Figura 3.3: Rettangoli secondo il set 3-1-3 di Angoli di Eulero, figura da [4].

con

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3'' = -\sin(v_2)\mathbf{e}_2' + \cos(v_2)\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{s}_3 = \sin(\varphi_1)\mathbf{A}_3 + \cos(\varphi_1)\mathbf{A}_1. \end{cases} \quad (3.38)$$

Quindi

$$\varphi_1 = \frac{5\pi}{2} - v_2, \quad \mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}_2', \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{e}_3' = \mathbf{E}_3. \quad (3.39)$$

3.2.3 Il set 3-2-1

Prima rotazione:

- Angolo: v_1 ;
- Asse: \mathbf{E}_3 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_1) & \sin(v_1) & 0 \\ -\sin(v_1) & \cos(v_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \cos(v_1)\mathbf{E}_1 + \sin(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\sin(v_1)\mathbf{E}_1 + \cos(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3 \end{cases} \quad (3.41)$$

Seconda rotazione:

- Angolo: v_2 ;
- Asse: \mathbf{e}'_2 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_2) & 0 & -\sin(v_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v_2) & 0 & \cos(v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \cos(v_2)\mathbf{e}'_1 - \sin(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}''_3 = \sin(v_2)\mathbf{e}'_1 + \cos(v_2)\mathbf{e}'_3 \end{cases} \quad (3.43)$$

Terza rotazione:

- Angolo: v_3 ;
- Asse: \mathbf{e}''_1 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v_3) & \sin(v_3) \\ 0 & -\sin(v_3) & \cos(v_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2 = \cos(v_3)\mathbf{e}_2'' + \sin(v_3)\mathbf{e}_3'' \\ \mathbf{e}_3 = -\sin(v_3)\mathbf{e}_2'' + \cos(v_3)\mathbf{e}_3'' \end{cases} \quad (3.45)$$

È possibile dunque trovare il sistema di riferimento di Eulero per questo set

$$\{\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}''_1\}. \quad (3.46)$$

E si ha la rappresentazione:

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-2-1}(v_1, v_2, v_3) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_1)\mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_1)\mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.47)$$

Quindi si possono costruire i tre rettangoli secondo le tre rotazioni:

Primo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \circlearrowleft\right) = \mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.48)$$

Secondo rettangolo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{|v_2|}{2}, -\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, v_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \circlearrowleft & v_2 < 0 \\ \circlearrowright & v_2 > 0 \end{cases}\right) = \\ = \mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_2). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Terzo Rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_3}{2}, 3\pi - 2\pi + v_2, 3\pi, -\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circlearrowleft\right) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_1). \quad (3.50)$$

In totale

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-2-1}(v_1, v_2, v_3) &= \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_3}{2}, 3\pi - 2\pi + v_2, 3\pi, -\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \circlearrowleft\right) \times \\ &\times \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{|v_2|}{2}, -\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, v_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \circlearrowleft & v_2 < 0 \\ \circlearrowright & v_2 > 0 \end{cases}\right) \times \\ &\times \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \circlearrowleft\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

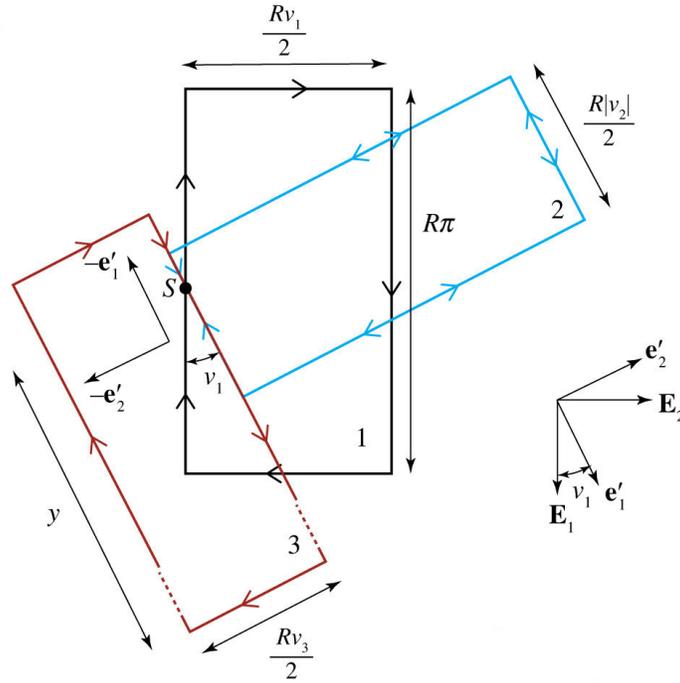


Figura 3.4: Rettangoli secondo il set 3-2-1 di Angoli di Eulero, figura da [4].

con

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \cos(v_2)\mathbf{e}_1 - \sin(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{s}_3 = \sin(\varphi_1)\mathbf{A}_3 + \cos(\varphi_1)\mathbf{A}_1. \end{cases} \quad (3.52)$$

Quindi

$$\varphi_1 = \pi + v_2, \quad \mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{A}_2 = -\mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3. \quad (3.53)$$

3.2.4 Il set 3-1-2

Prima rotazione:

- Angolo: v_1 ;
- Asse: \mathbf{E}_3 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_1) & \sin(v_1) & 0 \\ -\sin(v_1) & \cos(v_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \cos(v_1)\mathbf{E}_1 + \sin(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = -\sin(v_1)\mathbf{E}_1 + \cos(v_1)\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{E}_3. \end{cases} \quad (3.55)$$

Seconda rotazione:

- Angolo: v_2 ;
- Asse: \mathbf{e}'_1 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v_2) & \sin(v_2) \\ 0 & -\sin(v_2) & \cos(v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}''_2 = \cos(v_2)\mathbf{e}'_2 + \sin(v_2)\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}''_3 = -\sin(v_2)\mathbf{e}'_2 + \cos(v_2)\mathbf{e}'_3. \end{cases} \quad (3.57)$$

Terza rotazione:

- Angolo: v_3 ;
- Asse: \mathbf{e}''_2 ;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v_3) & 0 & -\sin(v_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v_3) & 0 & \cos(v_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(v_3)\mathbf{e}_1'' - \sin(v_3)\mathbf{e}_3'' \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3 = \sin(v_3)\mathbf{e}_1'' + \cos(v_3)\mathbf{e}_3''. \end{cases} \quad (3.59)$$

È possibile dunque trovare il sistema di riferimento di Eulero per questo set

$$\{\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}''_2\}. \quad (3.60)$$

E si ha la rappresentazione:

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-1-2}(v_1, v_2, v_3) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_2)\mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_1)\mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.61)$$

Quindi si possono costruire i tre rettangoli secondo le tre rotazioni:

Primo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \circlearrowleft\right) = \mathbf{R}(v_1, \mathbf{E}_3). \quad (3.62)$$

Secondo rettangolo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{|v_2|}{2}, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, v_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \circlearrowleft & v_2 < 0 \\ \circlearrowright & v_2 > 0 \end{cases}\right) = \\ = \mathbf{R}(v_2, \mathbf{e}'_2). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Terzo rettangolo:

$$\hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_3}{2}, 3\pi - \pi + v_2, 3\pi, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, \circlearrowleft\right) = \mathbf{R}(v_3, \mathbf{e}''_1). \quad (3.64)$$

In totale

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}_{3-1-2}(v_1, v_2, v_3) = \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_1}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \circlearrowleft\right) \times \\ \times \hat{\mathbf{S}}\left(\pi, \varphi_1 \in \left[0, \frac{v_2}{2}\right], \frac{|v_2|}{2}, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, v_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} \circlearrowleft & v_2 < 0 \\ \circlearrowright & v_2 > 0 \end{cases}\right) \times \\ \times \hat{\mathbf{S}}\left(\frac{v_3}{2}, 3\pi - \pi + v_2, 3\pi, -\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1, \circlearrowleft\right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

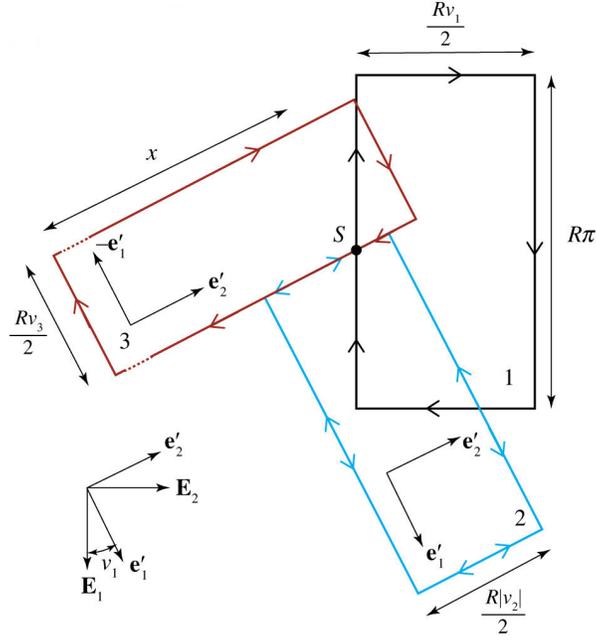


Figura 3.5: Rettangoli secondo il set 3-1-2 di Angoli di Eulero, figura da [4].

con

$$\begin{cases} \mathbf{e}_2'' = \cos(v_2)\mathbf{e}_2' + \sin(v_2)\mathbf{e}_3' \\ \mathbf{s}_3 = \sin(\varphi_1)\mathbf{A}_3 + \cos(\varphi_1)\mathbf{A}_1. \end{cases} \quad (3.66)$$

Quindi

$$\varphi_1 = 2\pi + v_2, \quad \mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}_2', \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{e}_1', \quad \mathbf{A}_e = \mathbf{e}_3' = \mathbf{E}_3. \quad (3.67)$$

Capitolo 4

Analisi Codici MATLAB

Saranno oggetto del presente capitolo la presentazione e l'analisi dei codici MATLAB [5] impiegati per computare le soluzioni numeriche al problema precedentemente illustrato.

4.1 Codice MATLAB "get phi2 values numerically"

Il codice MATLAB, da [5], ha l'obiettivo di computare numericamente i valori di `phi2`.

4.1.1 Definizione Variabili Globali

Si considerano le seguenti variabili globali

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) - \cos(\theta) \cos(\varphi_2)] \\ b = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)] \sin(\varphi_2) \\ c = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right). \end{cases} \quad (4.1)$$

Si definisce inoltre la costante `epsilon` = 0.01 per evitare di prendere valori esatti in punti problematici.

La variabile `k` è la seguente

$$k = 2[\arcsin(\sqrt{c})] = 2 \left[\arcsin \left(\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\varphi_2}{2} \right) \right) \right]. \quad (4.2)$$

4.1.2 L'incognita φ_2

Si definisce l'incognita φ_2 , che avrà dominio

$$\varphi_2 \in [2 \arcsin(\sqrt{c}); \pi) \cup (\pi; 2\pi - 2 \arcsin(\sqrt{c})] \cup [2\pi + 2 \arcsin(\sqrt{c}); 3\pi). \quad (4.3)$$

Quindi si inserisce nel codice MATLAB con il comando `/linspace`:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & [\text{linspace}(k, \pi + \textit{epsilon}, 50); \\ & \text{linspace}(\pi + \textit{epsilon}, 2\pi - k, 50); \\ & \text{linspace}(2\pi + k, 3\pi, 50);] \end{aligned} \quad (4.4)$$

ovvero viene creato un `array` di φ_2 dividendo l'intervallo in tre segmenti, gli stessi del dominio:

- 50 punti da k a $\pi + \textit{epsilon}$;
- 50 punti da $\pi + \textit{epsilon}$ a $2\pi - k$;
- 50 punti da $2\pi + k$ a 3π .

4.1.3 Definizione `f`, `f_plus` e `f_minus`

Si manipolano le variabili a , b e c in modo tale che si arrivi a

$$2a = f(\varphi_2, b, c). \quad (4.5)$$

Si sostituiscono le variabili c e b in a .

Da c

$$\begin{aligned} c &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \\ \frac{c}{\sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)} &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - \frac{c}{\sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)} &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \pm \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da b

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)] \sin(\varphi_2) \\ \frac{2b}{\sin(\varphi_2)} &= [1 - \cos(\theta)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sostituendo in a

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) - \cos(\theta) \cos(\varphi_2)] \\
 2a &= 1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) - \cos(\theta) \cos(\varphi_2) \\
 2a &= 1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) [1 - \cos(\theta)] \\
 2a &= 1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2(\frac{\varphi_2}{2})}} + \cos(\varphi_2) \left[\frac{2b}{\sin(\varphi_2)} \right]. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Nella forma finale si ottiene

$$f(\varphi_2, b, c) = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2(\frac{\varphi_2}{2})}} + 2b \left[\frac{\cos(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2)} \right]. \tag{4.9}$$

Si definiscono quindi le funzioni **f_plus** e **f_minus**

$$\begin{cases}
 \mathbf{f_plus} = 1 + \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2(\frac{\varphi_2}{2})}} + 2b \left[\frac{\cos(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2)} \right] - 2a \\
 \mathbf{f_minus} = 1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2(\frac{\varphi_2}{2})}} + 2b \left[\frac{\cos(\varphi_2)}{\sin(\varphi_2)} \right] - 2a
 \end{cases} \tag{4.10}$$

```

global a b c
epsilon = 0.01;
k = 2*asin(sqrt(c));
phi2 = [linspace(k,pi-epsilon,50)';
        linspace(pi+epsilon,2*pi-k,50)';
        linspace(2*pi+k,3*pi-epsilon,50)'];

f_plus = 1+sqrt(1-c./sin(phi2/2).^2)+cos(phi2)./sin(phi2)*2*b-2*a;
f_minus = 1-sqrt(1-c./sin(phi2/2).^2)+cos(phi2)./sin(phi2)*2*b-2*a;
figure()
hold on

```

Figura 4.1: Introduzione codice MATLAB "get_phi2_values_numerically", figura da [5].

Si generano dei grafici per `f_plus`:

- si divide la finestra del grafico in 2 sezioni;
- si tracciano 3 curve corrispondenti ai 3 intervalli di φ_2 utilizzando i valori da 1 a 50, da 51 a 100 e da 101 a 151;
- si imposta l'asse di φ_2 da 0 a 3π ;
- si impostano l'asse di φ_2 da 0 a 3π e l'intervallo verticale da -50 a 50.

Si ripete lo stesso procedimento per `f_minus`.

```
subplot(1,2,1)
hold on
plot(phi2(1:50),f_plus(1:50),'color','black');
plot(phi2(51:100),f_plus(51:100),'color','black');
plot(phi2(101:150),f_plus(101:150),'color','black');
axis([0,3*pi,-50,50])
plot([0,3*pi],[0 0],'color','black')
xlabel('\varphi_2$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$f_{plus}(\varphi_2)$', 'Interpreter','latex')
title('Solving for the roots of $f_{plus}(\varphi_2)=0$', 'Interpreter','latex')

subplot(1,2,2)
hold on
plot(phi2(1:50),f_minus(1:50),'color','black');
plot(phi2(51:100),f_minus(51:100),'color','black');
plot(phi2(101:150),f_minus(101:150),'color','black');
axis([0,3*pi,-50,50])
plot([0,3*pi],[0 0],'color','black')
xlabel('\varphi_2$', 'Interpreter','latex')
ylabel('$f_{minus}(\varphi_2)$', 'Interpreter','latex')
title('Solving for the roots of $f_{minus}(\varphi_2)=0$', 'Interpreter','latex')
```

Figura 4.2: Creazione grafici `f_plus` e `f_minus`, figura da [5].

Si calcolano poi le soluzioni reali di `f_plus`:

- si utilizza il comando `syms x real` che serve per definire `f_plus` come funzione simbolica di `x`

$$f_plus_sym = 1 + \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} + 2b \left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right] - 2a; \quad (4.11)$$

- si utilizza il comando `vpasolve` per risolvere numericamente l'equazione "`f_plus_sym==0`" nei 3 intervalli del dominio, con i risultati memorizzati in `s1`, `s2`, `s3`.

```
syms x real
f_plus_sym = 1+sqrt(1-c./sin(x/2).^2)+cos(x)./sin(x)*2*b-2*a;
s1 = double(vpasolve(f_plus_sym==0, x, [k, pi-epsilon]));
s2 = double(vpasolve(f_plus_sym==0, x, [pi+epsilon, 2*pi-k]));
s3 = double(vpasolve(f_plus_sym==0, x, [2*pi+k, 3*pi]));
```

Figura 4.3: Calcolo Numerico `f_plus`, figura da [5].

Allo stesso modo si procede per `f_minus`:

- si utilizza il comando `syms x real` che serve per definire `f_minus` come funzione simbolica di `x`

$$f_minus_sym = 1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}} + 2b \left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right] - 2a; \quad (4.12)$$

- si utilizza il comando `vpasolve` per risolvere numericamente l'equazione "`f_minus_sym==0`" nei 3 intervalli del dominio, con i risultati memorizzati in `s4`, `s5`, `s6`.

```
syms x real
f_minus_sym = 1-sqrt(1-c./sin(x/2).^2)+cos(x)./sin(x)*2*b-2*a;
s4 = double(vpasolve(f_minus_sym==0, x, [k, pi-epsilon]));
s5 = double(vpasolve(f_minus_sym==0, x, [pi+epsilon, 2*pi-k]));
s6 = double(vpasolve(f_minus_sym==0, x, [2*pi+k, 3*pi]));
```

Figura 4.4: Calcolo Numerico `f_minus`, figura da [5].

Infine si valutano le soluzioni e si presentano nel grafico finale con l'output: `phi2_sols = [s1, s2, s3, s4, s5, s6]`.

```
y1 = double(subs(f_plus_sym, 'x', s1));
y2 = double(subs(f_plus_sym, 'x', s2));
y3 = double(subs(f_plus_sym, 'x', s3));
y4 = double(subs(f_minus_sym, 'x', s4));
y5 = double(subs(f_minus_sym, 'x', s5));
y6 = double(subs(f_minus_sym, 'x', s6));

subplot(1,2,1)
pt1 = plot(s1,y1, '*','color','blue');
pt2 = plot(s2,y2, '*','color','blue');
pt3 = plot(s3,y3, '*','color','blue');
datatip(pt1,s1,y1);
datatip(pt2,s2,y2);
datatip(pt3,s3,y3);

subplot(1,2,2)
pt4 = plot(s4,y4, '*','color','blue');
pt5 = plot(s5,y5, '*','color','blue');
pt6 = plot(s6,y6, '*','color','blue');
datatip(pt4,s4,y4);
datatip(pt5,s5,y5);
datatip(pt6,s6,y6);

phi2_sols = [s1; s2; s3; s4; s5; s6];

end
```

Figura 4.5: Valutazione soluzioni, grafici e soluzioni, figura da [5].

4.2 Codice MATLAB "get theta"

Il codice MATLAB, da [5], ha l'obiettivo di calcolare θ .

4.2.1 Definizione Variabile Globale

Si considera la seguente variabile globale

$$a = \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) - \cos(\theta) \cos(\varphi_2)]. \quad (4.13)$$

4.2.2 Inizializzazione Variabile a

Vengono inizializzate le variabili

$$\begin{cases} n = \text{lenght}(\varphi_2) \\ \theta = \text{zeroes}(n; 2) \end{cases} \quad (4.14)$$

cioè:

- $n = \text{lenght}(\varphi_2)$: il numero n è pari alla lunghezza di φ_2 ;
- $\theta = \text{zeroes}(n;2)$: la variabile θ è inizializzata come una matrice di dimensioni " $n \times 2$ ", ovvero con 2 colonne per ogni riga, quindi per ogni valore di φ_2 verranno calcolati 2 possibili valori di θ .

4.2.3 Calcolo di θ

La variabile θ espressa in funzione di a è la seguente

$$\begin{cases} \theta_{i,1} = \arccos\left(\frac{(2a-1-\cos(\frac{\varphi_2}{2}))}{1-\cos(\frac{\varphi_2}{2})}\right) \\ \theta_{i,2} = 2\pi - \arccos\left(\frac{(2a-1-\cos(\frac{\varphi_2}{2}))}{1-\cos(\frac{\varphi_2}{2})}\right). \end{cases} \quad (4.15)$$

L'incognita $\theta_{i,1}$ viene sottratta a 2π per rendere l'angolo $\theta_{i,2}$ positivo.

```
global a
n = length(phi2);
theta = zeros(n,2);
for i = 1:n
    theta(i,1) = acos((2*a-1-cos(phi2(i)))/(1-cos(phi2(i))));
    theta(i,2) = 2*pi-theta(i,1); % adding 2*pi to make positive
end
```

Figura 4.6: Calcolo θ nel codice MATLAB "get_theta", figura da [5].

4.3 Codice MATLAB "get tests"

Il codice MATLAB, da [5], ha l'obiettivo di verificare che i valori di φ_2 e θ , che rappresentano i parametri dei lati di un rettangolo, soddisfino due equazioni specifiche.

4.3.1 Definizione Variabili Globali

Si considerano le seguenti variabili globali

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} [1 - \cos(\theta)] \sin(\varphi_2) \\ c = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right). \end{cases} \quad (4.16)$$

Esse rappresentano valori costanti con cui vengono confrontati i risultati dei test.

4.3.2 Inizializzazione Variabili b e c

Vengono inizializzate le variabili

$$\begin{cases} n = \text{lenght}(\varphi_2) \\ \text{test1} = \text{zeroes}(n; 2) \\ \text{test2} = \text{zeroes}(n; 2) \end{cases} \quad (4.17)$$

ovvero:

- $n = \text{lenght}(\varphi_2)$: n è il numero di valori di φ_2 ;
- test1 e test2 sono matrici di dimensioni $n \times 2$, inizializzate a zero, quindi ogni riga e colonna rappresenterà una configurazione di φ_2 e θ .

4.3.3 Calcolo dei test per ogni valore di φ_2 e θ

Verranno calcolati i test per ogni valore di φ_2 e θ secondo le variabili.

```
global b c
n = length(phi2);
test1 = zeros(n,2);
test2 = zeros(n,2);
for i = 1:n
    test1(i,1) = sin(theta(i,1)/2)^2*sin(phi2(i))-b;
    test1(i,2) = sin(theta(i,2)/2)^2*sin(phi2(i))-b;
    test2(i,1) = sin(theta(i,1))^2*sin(phi2(i)/2)^2-c;
    test2(i,2) = sin(theta(i,2))^2*sin(phi2(i)/2)^2-c;
end
```

Figura 4.7: Calcolo test1 e test2 nel codice MATLAB "get_tests", figura da [5].

4.4 Codice MATLAB ”get q calculated”

Il codice MATLAB, da [5], ha l’obiettivo di calcolare il secondo parametro del quaternion unitario che descrive la rotazione composta.

4.4.1 Definizione Variabili Globali

Si considerano le seguenti variabili globali

$$\begin{cases} \psi = 2 \arccos(a) \\ a = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ s1 \\ s3. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4.2 Definizione Vettori di Base

Si introducono i vettori di base per esprimere le rotazioni nelle direzioni degli assi principali

$$\begin{cases} \mathbf{A1} = [1, 0, 0] & \text{vettore unitario lungo l'asse x} \\ \mathbf{A2} = [0, 1, 0] & \text{vettore unitario lungo l'asse y} \\ \mathbf{A3} = [0, 0, 1] & \text{vettore unitario lungo l'asse z.} \end{cases} \quad (4.19)$$

4.4.3 Inizializzazione Variabili

Vengono inizializzate le variabili:

$$\begin{cases} n = \text{lenght}(\varphi_2) \\ q_calculated = \text{zeroes}(3; n) \\ \text{phi1_fun} = \text{zeroes}(n; 1) \\ \text{phi1} = \text{zeroes}(n; 1) \end{cases} \quad (4.20)$$

ovvero:

- $n = \text{lenght}(\varphi_2)$: n è il numero di valori di φ_2 ;
- $q_calculated = \text{zeroes}(3;n)$: viene creata una matrice di dimensione $3 \times n$ che memorizzerà i quaternioni calcolati;
- phi1_fun e phi1 sono inizializzati come vettori colonna di zeri di lunghezza n e memorizzano i valori intermedi e finali di phi1 .

4.4.4 Ciclo di calcolo per phi1 e quaternione

Il ciclo itera per ciascun valore di phi2 e calcola i valori di phi1 e del quaternione.

4.4.5 Calcolo x, y e q_calculated

Si considerano le seguenti funzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sin(\frac{\psi}{2})s1}{\sin(\theta_{\alpha_i})\sin(\frac{\phi_{i2}}{2})}; \\ x = -\frac{\sin(\frac{\psi}{2})s3}{\sin(\theta_{\alpha_i})\sin(\frac{\phi_{i2}}{2})}; \\ \phi_{i1_fun} = \text{atan2}(y;x); \\ \phi_{i1} = \frac{\phi_{i2}}{2} + \phi_{i1_fun}. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Si verifica la condizione di ϕ_{i1} : $\phi_{i1} \leq \phi_{i2}$.

Se soddisfatta si procede con il calcolo del vettore di rotazione \mathbf{A}_r e $q_calculated$.

4.4.6 Calcolo \mathbf{A}_r e $q_calculated$

Si definiscono

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_r = -\cos(\phi_{i1_fun})\mathbf{A}_3 + \sin(\phi_{i1_fun})\mathbf{A}_1 \\ q_calculated = \sin(\theta_{\alpha_i})\sin\left(\frac{\phi_{i2}}{2}\right)\mathbf{A}_r + \sin(\phi_{i2})\sin\left(\frac{\theta_{\alpha_i}}{2}\right). \end{array} \right. \quad (4.22)$$

```

global psi s1 s3

A1 = [1;0;0];
A2 = [0;1;0];
A3 = [0;0;1];

n = length(phi2);
q_calculated = zeros(3,n);
phi1_fun = zeros(n,1);
phi1 = zeros(n,1);
for i = 1:n
    y = sin(psi/2)*s1/(sin(theta(i))*sin(phi2(i)/2));
    x = -sin(psi/2)*s3/(sin(theta(i))*sin(phi2(i)/2));
    phi1_fun(i) = atan2(y,x);
    phi1(i) = phi2(i)/2+phi1_fun(i);
    if phi1(i)<=phi2(i)
        Ar = -cos(phi1_fun(i))*A3+sin(phi1_fun(i))*A1;
        q_calculated(:,i) = sin(theta(i))*sin(phi2(i)/2)*Ar+sin(phi2(i))*sin(theta(i)/2)^2*A2;
    end
end
end

```

Figura 4.8: Codice MATLAB "get_q_calculated", figura da [5].

4.5 Codice MATLAB "get_rectangle"

Il codice MATLAB, da [5], ha l'obiettivo di calcolare il secondo parametro del quaternion unitario che descrive la rotazione composta.

4.5.1 Definizione Variabili Globali

Si considerano le seguenti variabili globali

$$\begin{cases} \text{psi} = \text{angolo di rotazione;} \\ \text{s1} = \text{componente x vettore di rotazione;} \\ \text{s2} = \text{componente y vettore di rotazione;} \\ \text{s3} = \text{componente z vettore di rotazione;} \\ a = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right); \\ b = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) s2; \\ c = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) (s1^2 + s3^2). \end{cases} \quad (4.23)$$

4.5.2 Richiamo Codici Precedenti

Di seguito si richiamano i codici analizzati precedentemente:

$$\begin{cases} [\text{phi2}] = \text{get_phi2_values_numerically} \\ [\text{theta}] = \text{get_theta}(\text{phi2}) \end{cases} \quad (4.24)$$

```
global psi s1 s2 s3 a b c
psi = angle;

s1 = s(1);
s2 = s(2);
s3 = s(3);

a = cos(psi/2);
b = sin(psi/2)*s2;
c = sin(psi/2)^2*(s1^2+s3^2);

%% find all possible phi2 solution ranges graphically
[phi2] = get_phi2_values_numerically();

%% get theta values
[theta] = get_theta(phi2);
```

Figura 4.9: Definizione Variabili Globali e Richiamo Codici Precedenti di "phi2" e "theta" nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].

4.5.3 Eliminazione di Valori di "phi2" Non Validi

Nel passaggio successivo si eliminano i valori di "phi2" per cui i valori di "theta" non sono numeri reali.

Si utilizza il comando "keep_index" per tenere traccia dei valori da mantenere e ricalcolare "theta" con i valori rimasti.

4.5.4 Test di Validità dei Valori di "phi2" e "theta"

Si eseguono due test (get_tests) sui valori calcolati di "phi2" e "theta" per verificare che siano validi.

Si conservano solo i valori che soddisfano entrambi i test entro un valore "epsilon = 1.0e-10".

```
%% narrowing down candidates
% delete phi2 values corresponding to theta values that do not belong to
% the set of real numbers
keep_index = zeros(length(phi2),1);
for i = 1:length(phi2)
    if isreal(theta(i,1))
        keep_index(i) = 1;
    end
end
phi2 = phi2.*keep_index;
phi2 = nonzeros(phi2);
[theta] = get_theta(phi2);

% test if the remaining equations are valid
[test1, test2] = get_tests(phi2, theta);
% the tests will have same value for positive and negative theta
% delete the candidates that do not satisfy test 1 and test 2
epsilon = 1.0e-10;
keep_index = zeros(length(phi2),1);
for i = 1:length(phi2)
    if abs(test1(i,1))<epsilon && abs(test2(i,1))<epsilon
        keep_index(i) = 1;
    end
end
phi2 = phi2.*keep_index;
phi2 = nonzeros(phi2);
[theta] = get_theta(phi2);
```

Figura 4.10: Eliminazione Valori Non Validi di "phi2" e Test di Validità per "phi2" e "theta" nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].

4.5.5 Controllo Finale con il Quaternione

Si effettua il controllo della coerenza dei valori ottenuti per "phi2" e "theta" con il quaternione unitario desiderato.

Si confrontano i seguenti valori

$$\begin{cases} q0_desired = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right); \\ q0_calculated = \frac{1}{2}[1 + \cos(\theta) + \cos(\varphi_2) - \cos(\theta)\cos(\varphi_2)]; \\ q0_error = \text{abs}(q0_calculated - q0_desired); \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} q_desired = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)[s1; s2; s3]; \\ q_calculated = [\text{get_q_calculated}(\text{phi2}; \text{theta})]; \\ q_error = \text{abs}(q_calculated - q_desired). \end{cases} \quad (4.26)$$

Si mantengono i valori ottenuti finora tali per cui "phi1 ≤ phi2".

```
% final check: reconstruct the quaternion rotation and see if the answers
% match
% doing some reconfigurations
phi2 = [phi2; phi2];
theta = [theta(:,1); theta(:,2)];
% checking q0
q0_desired = cos(psi/2);
q0_calculated = 0.5*(1+cos(theta)+cos(phi2)-cos(theta).*cos(phi2));
q0_error = abs(q0_desired-q0_calculated);
% checking q
phi1 = zeros(length(phi2),2);
q_desired = sin(psi/2)*[s1;s2;s3];
[q_calculated,phi1] = get_q_calculated(phi2,theta);
q_error = abs(q_calculated-q_desired); % make into norms

keep_index = zeros(length(phi2),1);
% also keep values where phi1<=phi2
for i = 1:length(phi2)
    if q0_error(i)<epsilon && norm(q_error(:,i))<epsilon
        keep_index(i) = 1;
    end
end
phi2 = phi2.*keep_index;
phi2 = nonzeros(phi2);
theta = theta.*keep_index;
theta = nonzeros(theta);
phi1 = phi1.*keep_index;
phi1 = nonzeros(phi1);
```

Figura 4.11: Controllo Finale nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].

4.5.6 Presentazione delle Soluzioni

Si presentano le soluzioni per "theta", "phi2" e "phi1".

```
% present final answers
disp('The possible solutions are')
for i = 1:length(phi2)
    disp(['theta = ', num2str(theta(i,1)), ', phi2 = ', num2str(phi2(i)), ', phi1 = ', num2str(phi1(i))])
end
end
```

Figura 4.12: Presentazione Soluzioni nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].

4.6 Codice MATLAB "main"

Il codice MATLAB, da [5], ha l'obiettivo di fornire i risultati "theta", "phi2" e "phi1" per una rotazione composta particolare.

4.6.1 Rotazione Composta Particolare

La rotazione composta in esame è la seguente

$$\mathbf{R}\left(\frac{3\pi}{2}, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0.98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3\right). \quad (4.27)$$

```
psi = 1.5*pi; % angle of rotation
s = [0.1; sqrt(1-0.1^2-0.1^2); 0.1]; % axis of rotation

[theta, phi2, phi1] = get_rectangle(psi, s);
```

Figura 4.13: Rotazione Composta Particolare nel codice MATLAB "main", figura da [5].

4.6.2 Soluzioni Finali

Le soluzioni computate da MATLAB sono le seguenti

```
The possible solutions are
theta = 3.0333, phi2 = 8.6465, phi1 = 3.5379
theta = 3.2499, phi2 = 2.3633, phi1 = 0.39626
theta = 3.2499, phi2 = 8.6465, phi1 = 6.6794
```

Figura 4.14: Soluzioni in rispetto alla Rotazione Composta Particolare nel codice MATLAB "main", figura da [5].

Le soluzioni finali risultano

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \left(\frac{3\pi}{2}, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0,98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3 \right) \\ = \tilde{\mathbf{S}}(3.0033, 3.5379, 8.6465, A_1, A_2, \odot); \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.2499, 0.39626, 2.3633, A_1, A_2, \odot); \quad (4.29)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.2499, 6.6794, 8.6465, A_1, A_2, \odot). \quad (4.30)$$

Di seguito la loro raffigurazione come rettangoli

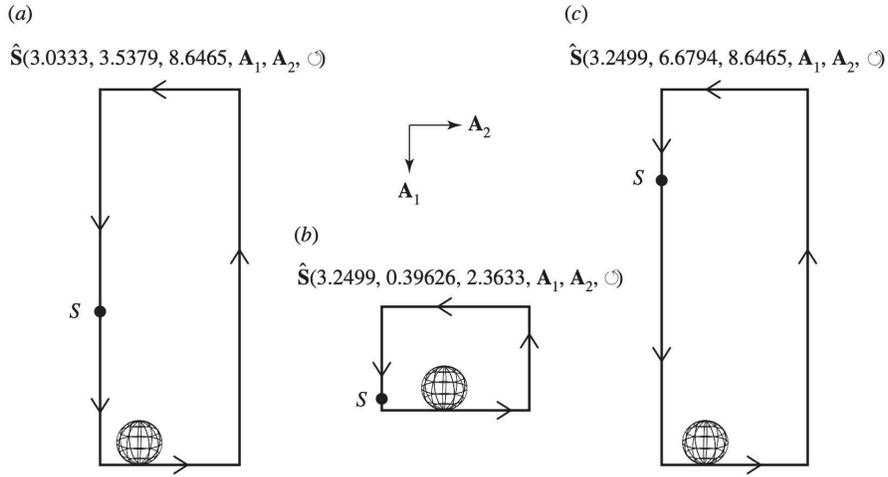


Figura 4.15: Rettangoli Finali, dalla (a) alla (c) i rettangoli sono descritti rispettivamente dalle eq. (4.28), (4.29) e (4.30), figura da [4].

4.7 Ulteriori Rotazioni e Soluzioni

Tramite il codice MATLAB, da [5], è possibile prendere in considerazione ulteriori rotazioni composte.

4.7.1 Rotazioni Composte Alternative

Due rotazioni composte alternative sono le seguenti

$$\mathbf{R}_a \left(\frac{\pi}{2}, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0,98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3 \right) \quad (4.31)$$

e

$$\mathbf{R}_b \left(\pi, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0,98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3 \right). \quad (4.32)$$

4.7.2 Soluzioni per Rotazioni Composte Alternative

Le soluzioni computate da MATLAB sono le seguenti

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a \left(\frac{\pi}{2}, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0,98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3 \right) \\ = \tilde{\mathbf{S}}(2.8795, 2.7525, 7.0758, A_1, A_2, \odot); \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.4037, 0.38911, 0.79257, A_1, A_2, \odot); \quad (4.34)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.4037, 5.8941, 7.0758, A_1, A_2, \odot); \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b \left(\pi, 0.1\mathbf{A}_1 + \sqrt{0,98}\mathbf{A}_2 + 0.1\mathbf{A}_3 \right) \\ = \tilde{\mathbf{S}}(2.9413, 3.1466, 7.8641, A_1, A_2, \odot); \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.3419, 0.0050506, 1.5809, A_1, A_2, \odot); \quad (4.37)$$

$$= \tilde{\mathbf{S}}(3.3419, 6.2882, 7.8641, A_1, A_2, \odot). \quad (4.38)$$

Capitolo 5

Conclusioni

La tesi analizza codici MATLAB per il calcolo di traiettorie chiuse di una sfera rotolante su un piano e affronta lo studio delle condizioni di anolonomia.

Sono state presentate: la definizione di olonomia, il rapporto tra rotolamento e olonomia e l'olonomia di una sfera rotolante.

Successivamente sono state studiate le condizioni di anolonomia di una sfera rotolante, con particolare attenzione al ruolo degli Angoli di Eulero.

Infine sono state esaminate e discusse tutte le funzioni del codice MATLAB.

È possibile giungere alla conclusione che l'analisi delle traiettorie chiuse di una sfera rotolante su un piano, nelle condizioni di anolonomia studiate, può avere applicazioni nella riorientazione di robot sferici.

Sarebbe possibile infatti far rotolare il robot su queste traiettorie chiuse, senza scivolamento né torsione, per ottenere ogni orientazione finale desiderata.

Elenco delle figure

1.1	Raffigurazione Anolonomia, figura da [4].	6
2.1	Traiettorie descritte dal Lemma 1 , figura da [6].	16
2.2	Costruzione vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_{1p}, \vec{v}_2, \vec{v}_{2p}$ ed il rombo, figura da [3]. . .	20
3.1	Traiettorie chiuse rettangolare, figura da [4].	23
3.2	Rettangoli secondo il set 3-2-3 di Angoli di Eulero, figura da [4].	28
3.3	Rettangoli secondo il set 3-1-3 di Angoli di Eulero, figura da [4].	31
3.4	Rettangoli secondo il set 3-2-1 di Angoli di Eulero, figura da [4].	34
3.5	Rettangoli secondo il set 3-1-2 di Angoli di Eulero, figura da [4].	37
4.1	Introduzione codice MATLAB "get_phi2_values_numerically", figura da [5].	40
4.2	Creazione grafici <code>f_plus</code> e <code>f_minus</code> , figura da [5].	41
4.3	Calcolo Numerico <code>f_plus</code> , figura da [5].	41
4.4	Calcolo Numerico <code>f_minus</code> , figura da [5].	42
4.5	Valutazione soluzioni, grafici e soluzioni, figura da [5].	42
4.6	Calcolo θ nel codice MATLAB "get_theta", figura da [5].	43
4.7	Calcolo <code>test1</code> e <code>test2</code> nel codice MATLAB "get_tests", figura da [5].	44
4.8	Codice MATLAB "get_q_calculated", figura da [5].	46
4.9	Definizione Variabili Globali e Richiamo Codici Precedenti di "phi2" e "theta" nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].	47
4.10	Eliminazione Valori Non Validi di "phi2" e Test di Validità per "phi2" e "theta" nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].	48
4.11	Controllo Finale nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].	49
4.12	Presentazione Soluzioni nel codice MATLAB "get_rectangle", figura da [5].	50
4.13	Rotazione Composta Particolare nel codice MATLAB "main", figura da [5].	50

4.14 Soluzioni in rispetto alla Rotazione Composta Particolare nel codice MATLAB "main", figura da [5].	50
4.15 Rettangoli Finali, dalla (a) alla (c) i rettangoli sono descritti rispettivamente dalle eq. (4.28), (4.29) e (4.30), figura da [4]. . .	51

Bibliografia

- [1] Robert Bryant. *Holonomy and Special Geometries*. International Press, 2005.
- [2] Yacine Chitour, Mauricio Godoy Molina e Petri Kokkonen. “The rolling problem: overview and challenges”. In: *Geometric control theory and sub-Riemannian geometry* (2014), pp. 103–122.
- [3] Jian S Dai. “Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections”. In: *Mechanism and Machine Theory* 92 (2015), pp. 144–152.
- [4] Theresa E. Honein e Oliver M. O’Reilly. “Explorations of the holonomy of a rolling sphere”. In: *Proceedings of the Royal Society A* 480.2282 (2024), p. 20230684. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2023.0684>.
- [5] Theresa E. Honein e Oliver M. O’Reilly. *Supplementary material from “Explorations of the holonomy of a rolling sphere”*. Gen. 2024. URL: https://rs.figshare.com/collections/Supplementary_material_from_Explorations_of_the_holonomy_of_a_rolling_sphere_/7007795/1.
- [6] Brody Dylan Johnson. “The nonholonomy of the rolling sphere”. In: *The American Mathematical Monthly* 114.6 (2007), pp. 500–508.
- [7] Alyssa Novelia e Oliver M O’Reilly. “On Geodesics of the Rotation Group $SO(3)$ ”. In: *Regul. Chaot. Dyn.* 20 (2015), pp. 729–738. DOI: [10.1134/S1560354715060088](https://doi.org/10.1134/S1560354715060088).