



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI INGEGNERIA EDILE

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Architettura

**Valutazione numerica del comportamento meccanico di
archi in muratura storica rinforzati con materiali
compositi.**

Numerical evaluation of the mechanical behavior of
historical masonry arches reinforced with composite
materials.

Relatore:

Dott.ssa Ing. Erica Magagnini

Laureando:

Daniele Salvati

Anno Accademico 2022/2023

SOMMARIO

INTRODUZIONE.....	Pag.1
1. STATICA DELL'ARCO IN MURATURA.....	“ 2
1.1 Definizione e terminologia base di un arco in muratura.....	“ 2
1.2 L'Evoluzione del calcolo di un arco.....	“ 3
1.2.1 Metodo degli antichi Romani.....	“ 3
1.2.2 Metodo di B.A. Vittone.....	“ 3
1.2.3 Metodo di De La Hire (1640-1718).....	“ 4
1.2.4 Metodo di De Belidor (1729).....	“ 5
1.2.5 Il collasso flessionale di Couplet (1730).....	“ 6
1.2.6 Il principio dei massimi e dei minimi di C. Coulomb (1773)	“ 6
1.2.7 Il calcolo a rottura di L. Mascheroni (1785).....	“ 7
1.3 Dalla catenaria alla funicolare dei carichi (o curva delle pressioni).	“ 9
1.4 Metodo grafico per la costruzione della curva delle pressioni di Méry.....	“ 11
1.5 Stabilità dell'arco secondo Heyman.....	“ 14
2. STRATEGIE DI RINFORZO DI ARCHI E VOLTE IN MURATURA.....	“ 16
2.1 Premessa.....	“ 16
2.2 Rinforzo con FRP.....	“ 17
2.3 Rinforzo con tirante metallico intradossale ed estradossale.....	“ 19
2.3.1 Tirante metallico intradossale.....	“ 19
2.3.2 Tirante metallico estradossale.....	“ 20
2.4 Rinforzo mediante cappa armata estradossale.....	“ 21
2.5 Rinforzo mediante posa in opera di rin fianchi cellulari.....	“ 22
2.6 Rinforzo dei piedritti mediante contrafforti.....	“ 23
2.7 L'arco armato.....	“ 24
3. METODO AGLI ELEMENTI FINITI.....	“ 26
3.1 Premessa.....	“ 26

3.2	Descrizione del metodo agli elementi finiti.....	“ 27
3.2.1	Discretizzazione del dominio in elementi finiti.....	“ 28
3.2.2	Elemento nel sistema di riferimento locale.....	“ 29
3.2.3	Elemento nel sistema di riferimento globale.....	“ 31
3.3	Assemblaggio e soluzione.....	“ 32
3.4	Codice di calcolo Ansys Mechanical APDL.....	“ 33
3.3.1	Introduzione al programma.....	“ 33
3.3.2	Interfaccia grafica del programma.....	“ 34
4.	MODELLAZIONE DELL'ARCO.....	“ 43
4.1	Prima modellazione dell'arco in muratura non rinforzato.....	“ 43
4.1.1	Definizione delle proprietà dei materiali.....	“ 43
4.1.2	Fase di meshatura.....	“ 48
4.1.3	Applicazione dei carichi e dei vincoli.....	“ 51
4.1.4	Analisi della struttura.....	“ 52
4.1.5	Risultati dell'analisi.....	“ 54
4.2	Seconda modellazione dell'arco in muratura non rinforzato.....	“ 55
4.2.1	Descrizione della modellazione.....	“ 55
4.2.2	Risultati dell'analisi.....	“ 65
4.3	Modellazione dell'arco in muratura rinforzato.....	“ 75
4.3.1	Descrizione della modellazione.....	“ 75
4.3.2	Risultati dell'analisi.....	“ 85
5.	CONCLUSIONI.....	“ 91
	RINGRAZIAMENTI.....	“ 94
	BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA.....	“ 95

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa tesi è l'analisi numerica del comportamento meccanico dell'arco in muratura, appartenente alla volta dell'ex caserma Villarey sede dell'attuale Facoltà di Economia e Commercio situata nella città di Ancona, rinforzato con materiale composito in fibra di vetro.

Inizialmente, si delineano le varie teorie della statica degli archi e volte in muratura, che si sono alternate nel corso dei secoli, appartenenti a diversi studiosi e scienziati, fino alla spiegazione del metodo grafico, ideato da Mèry, utile per la costruzione della curva delle pressioni. Concetto che risulterà essenziale.

In seguito, verranno descritti i vari interventi di consolidamento di queste strutture, che risultano tutt'oggi, nonostante le varie innovazioni nel mondo dell'edilizia e dell'ingegneria, un argomento delicato.

Per essere matematicamente soddisfatta, l'analisi si baserà su ipotesi e considerazioni che rendono comunque il sistema capace di fornire soluzioni attendibili.

Il modello numerico utilizzato sarà il metodo agli elementi finiti o comunemente noto come F.E.M. (Finite Element Method). Quest'ultimo ha l'obiettivo di ottenere delle soluzioni approssimate, per far ciò il dominio della struttura viene suddiviso in tanti sottodomini, detti appunto elementi finiti, riducendo così il problema ad un numero preciso di incognite, e di essi si studieranno gli spostamenti e le deformazioni. Nel capitolo 3 si darà anche una dimostrazione matematica di questo utile metodo.

All'oggetto preso in esame è stato applicato il metodo FEM tramite l'utilizzo del software Ansys Mechanical APDL, per poter modellare l'arco e ottenere poi i dati riguardanti lo stato tensionale e deformativo.

Successivamente verrà descritto il funzionamento del programma Ansys e i risultati ottenuti saranno elaborati e commentati nelle conclusioni.

Inoltre quest'ultimi saranno confrontati con la tesi "*Rinforzo di arco in muratura con GFRP*" di Serena Mandozzi, relatore Prof. Ing. Roberto Capozucca, svolta presso l'Università Politecnica delle Marche, corso di Laurea Magistrale in Ing. Edile-Architettura, A.A. 2011-2012.

CAPITOLO 1: STATICA DELL'ARCO IN MURATURA

1.1. DEFINIZIONE E TERMINOLOGIA DI UN ARCO IN MURATURA:

L'arco è un elemento strutturale, in grado di trasformare le sollecitazioni provocate dai carichi gravitazionali in forze di compressione che agiscono sui vari conci, i quali, si reggono per mutuo contrasto.

I piedritti, invece, sono elementi verticali che sostengono gli archi alle due estremità.

In conclusione, non è un elemento decorativo, è una struttura prevalentemente compressa che rappresenta la concretizzazione delle isostatiche di compressione della struttura.

Nell'arco possono anche essere distinte le seguenti parti (presenti nella figura 1.1):

- *Asse* : linea media dell'arco;
- *Imposta* : la sezione in cui l'arco si appoggia alla spalla o al piedritto;
- *Chiave* : il punto più alto dell'arco;
- *Luce* : la dimensione orizzontale fra le spalle o i piedritti;
- *Estradosso* : la linea esterna dell'arco;
- *Intradosso* : la linea interna dell'arco;
- *Concio* : elemento base a forma di cuneo che genera l'arco;
- *Linea d'appoggio* : linea dove il piedritto interseca la sezione d'imposta;
- *Monta* : la massima altezza della sommità dell'intradosso rispetto alla linea di appoggio.

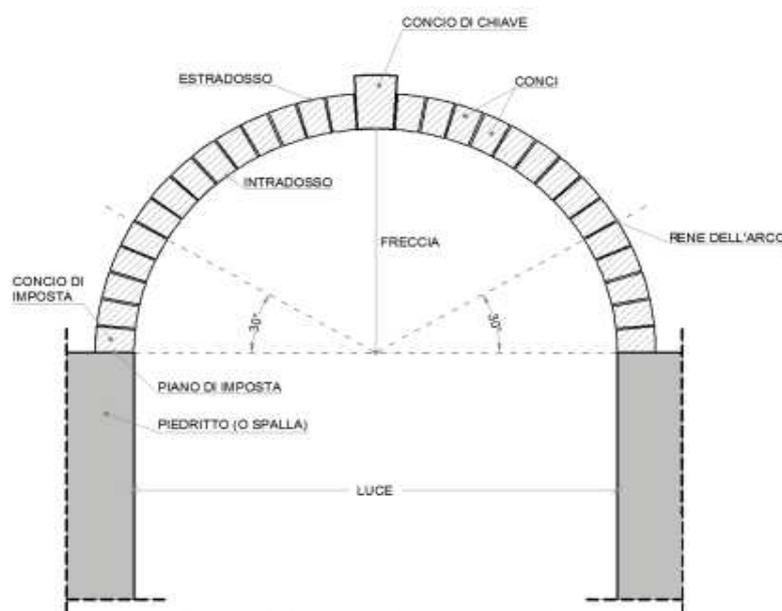


Figura 1.1: terminologia principale di un arco

1.2. L'EVOLUZIONE DEL CALCOLO DELL'ARCO

Tutti gli studi del 700 hanno avuto come obiettivo di definire sotto l'influenza del peso proprio e di carichi aggiuntivi se le dimensioni di un arco fossero sufficienti per impedire la creazione di un meccanismo di collasso.

La determinazione della curva delle pressioni era il principale argomento di discussione nelle prime teorie della statica. Nella loro crescita graduale, questi studi, hanno scoperto lo strumento che consentiva di misurare la spinta sulle imposte, dove in corrispondenza di quest'ultime, l'arco esercita delle sollecitazioni verso l'esterno che tendono a ribaltare i piedritti. La dimensione del piedritto deve essere tale da fornire una stabilità sufficiente per poter evitare il ribaltamento.

Nel corso degli anni diverse teorie e considerazioni scientifiche si sono alternate:

1.2.1. Metodo di proporzionamento dei piedritti secondo gli antichi romani

Affinché si inizi ad analizzare l'arco e ad avere consapevolezza dei meccanismi strutturali del suo funzionamento, si deve arrivare all'epoca romana, nella quale furono elaborate e perfezionate le tecniche greche ed etrusche.

Uno dei primi chiari esempi di questo nuovo elemento strutturale fu il *De Architectura* di Vitruvio, nel quale egli dimostrò di aver intuito chiaramente l'effetto spingente esercitato dalla volta sui piedritti.

Considerando R il raggio dell'arco, H l'altezza ed S lo spessore dei piedritti attraverso semplici regole geometriche si raggiungeva il dimensionamento di quest'ultimi.

Doveva risultare che:

$$H = 2R \quad (1.1)$$

$$S = 0,3R \quad (1.2)$$

1.2.2. Metodo di proporzionamento dei piedritti secondo B. A. Vittone

Oltre a quello dei romani un altro metodo di proporzionamento dei piedritti risulta appartenere a Bernardo Antonio Vittone.

Anch'esso si basava su alcune regole geometriche empiriche, con l'obiettivo che i piedritti stessi contenessero la spinta dell'arco.

Nonostante la forma, quest'ultimo veniva suddiviso in tre parti uguali, AB, BC, CD.

In seguito, si disegnava una semicirconferenza, con centro in D e raggio CD.

L'estremità opposta a C del diametro, E, apparteneva al filo esterno del piedritto.

Questa regola imponeva un diverso dimensionamento al variare della geometria dell'arco.

La regola conduceva ad avere piedritti di spessore maggiore per archi a tutto sesto anziché per archi a sesto acuto, poiché, la spinta per i primi risultava essere maggiore.

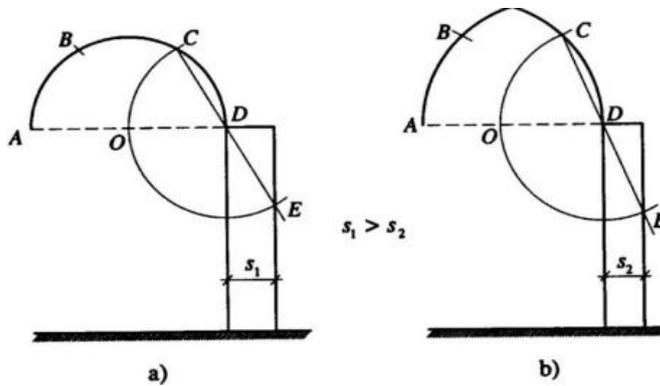


Figura 1.2: Metodo empirico per il dimensionamento dei piedritti: per arco a tutto sesto (a) e per arco a sesto acuto (b).

1.2.3. Metodo di proporzionamento dei piedritti secondo De La Hire (1640-1718)

Philippe De La Hire con le sue opere è considerato come colui che ha influenzato le teorie successive, infatti, gli scienziati del XVII e del XIX secolo si sono riferiti a lui.

Affrontò essenzialmente due problematiche:

- L'equilibrio di una volta indipendente dai piedritti (trattata nel *Traité de Méchanique*, nel 1695)
- La determinazione della larghezza dei piedritti in funzione delle spinte (trattata nell'opera intitolata *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, nel 1712).

De La Hire nell'opera del 1712 studiò l'equilibrio dell'arco nella situazione di rottura, descrivendo prima il meccanismo di collasso che risultava essere per scivolamento.

La parte centrale compresa tra due raggi a 45° rimaneva integra, scivolava verso il basso, esercitando un'azione di cuneo sulle parti restanti dell'arco, spingendole in fuori, promuovendone così il ribaltamento senza scorrimento.

L'ipotesi fondamentale che limitò la teoria di De la Hire fu l'assenza di attrito tra i conci, poiché se l'imposta dell'arco era orizzontale, l'equilibrio del concio d'imposta non era possibile, in quanto, l'azione verticale della forza peso e della reazione all'imposta non potevano equilibrare la forza scambiata con il concio che su di esso appoggiava.

Il metodo di dimensionamento dei piedritti invece risultava essere il seguente:

- Il peso Q del cuneo centrale veniva scomposto nelle due componenti RA e RB .
- Si tracciava una linea dal punto A al punto C e si scomponeva la forza RA nelle due componenti F e F_1 , individuando la leva equivalente.

Per l'equilibrio il momento ribaltante $F \cdot L_A$ doveva uguagliare il momento stabilizzante $P \cdot L_D$, dove P rappresentava il peso proprio del piedritto.

Quest'ultimo veniva calcolato attraverso la relazione inversa:

$$P = F \frac{l_A}{l_D} \quad (1.3)$$

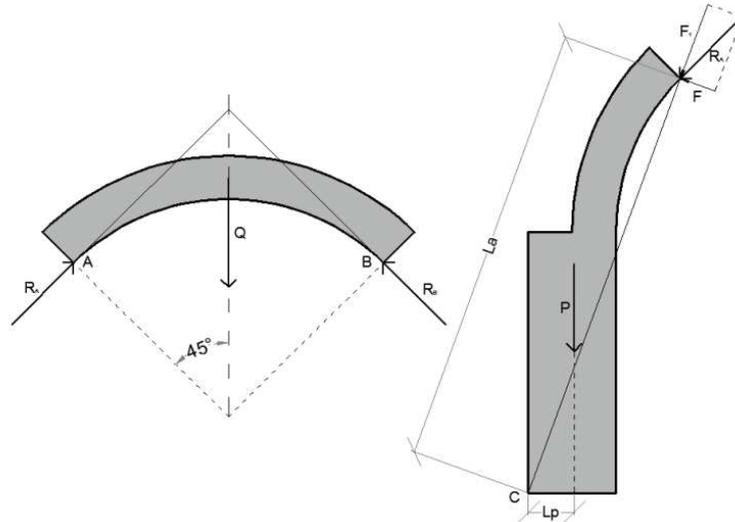


Figura 1.3: Metodo di dimensionamento dei piedritti di De La Hire

1.2.4. Metodo di De Belidor (1729)

Qualche anno dopo De Belidor ripropose gli studi di De La Hire. Egli suppose che la reazione dell'arco fosse applicata a metà spessore anziché all'intradosso. La reazione che il cuneo centrale esercitava sulla sezione di scorrimento era fornita dall'equazione:

$$F = \frac{Q}{2 \cos \varphi} \quad (1.4)$$

Imponendo l'equazione di equilibrio intorno al punto C si otteneva la seguente relazione:

$$F d_F = P x_g \quad (1.5)$$

In cui d_f dalla similitudine dei triangoli risultava essere pari a:

$$d_F = (y_a \tan \varphi - x_a) \cos \varphi \quad (1.6)$$

Sostituendo la 1.4 e la 1.6 all'equazione 1.5 ed isolando la P si determinava il peso del piedritto:

$$P = \frac{Q}{2 \cos \varphi} (y_a \tan \varphi - x_a) \frac{\cos \varphi}{x_g} = \frac{Q(y_a \tan \varphi - x_a)}{2x_g} \quad (1.7)$$

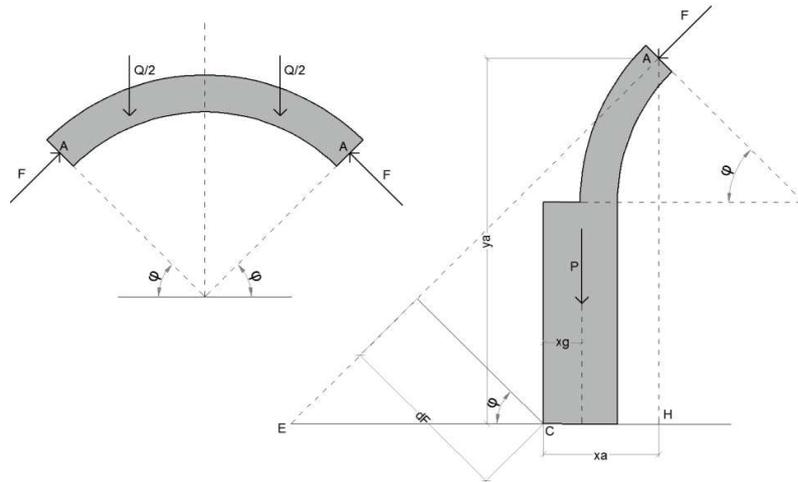


Figura 1.4: Metodo di dimensionamento dei piedritti di De Belidor

1.2.5. Il collasso flessionale di Claude Antoine Couplet (1730)

Anche Couplet suggerì un altro modo di collasso di un arco, infatti, abbandonò l'idea del cuneo spingente di De La Hire con rottura per scivolamento e adottò quella di un meccanismo complesso basato sul collasso flessionale.

La crisi avviene quindi per apertura e rotazione delle sezioni di imposta della sezione in chiave, e delle due sezioni poste a 45° dalla chiave con formazione di cerniere in B, D, A, E e C.

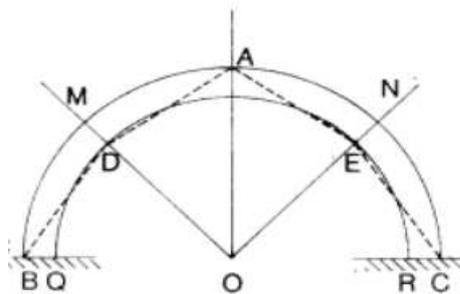


Figura 1.5: Schema illustrativo del meccanismo
A 4 blocchi adottato da Couplet

1.2.6. Il principio dei massimi e dei minimi di C. Coulomb (1773)

Oltre ad introdurre il problema della coesione e della presenza dell'attrito, Coulomb offrì un metodo di analisi per la determinazione dei meccanismi di rottura, quattro furono quelli da lui analizzati. Fornì inoltre un metodo per il calcolo del valore della spinta orizzontale in chiave al variare dell'angolo di rottura dei giunti alle reni.

Mentre diversi scienziati erano alla ricerca della forma o delle dimensioni della volta affinché le sollecitazioni corrispondessero ad uno schema statico ben preciso, Coulomb, si prefissò invece, di determinare le sollecitazioni che insorgevano in una volta sotto determinate condizioni di forma e di carico.

Prima il calcolo era essenzialmente limitato al progetto, mentre ora era basato anche alla verifica.

Egli impose come problema fondamentale della trattazione di trovare l'azione orizzontale in chiave (la forza P applicata in S , nella Figura 1.6) che garantiva l'equilibrio della volta.

Per risolvere tale problema egli ipotizzò quattro situazioni limite, che, secondo lui, precedevano immediatamente la rottura. Quest'ultime erano caratterizzate dallo scorrimento relativo tra le facce dei giunti nelle due direzioni e dall'apertura del giunto per rotazione all'intradosso e all'estradosso.

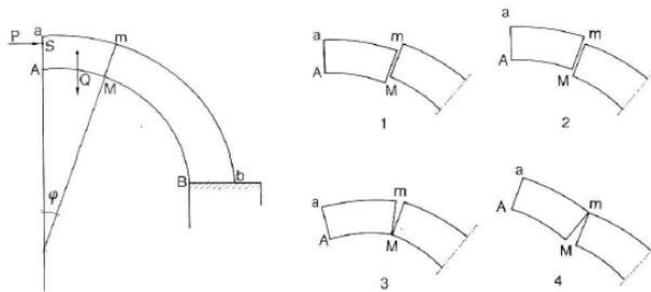


Figura 1.6: Schema illustrativo della volta a rottura secondo Coulomb

Per attivare questi meccanismi venne imposto l'equilibrio limite di scorrimento nelle due direzioni. La logica di tale metodo era quella di determinare quattro valori di spinta al variare della posizione angolare del giunto. In seguito, selezionare quelli che corrispondevano al massimo, quando l'equilibrio del concio era fatto rispetto a movimenti di caduta verso l'interno, ed al minimo, quando l'equilibrio era fatto rispetto a movimenti di sollevamento verso l'esterno.

1.2.7. Il calcolo a rottura di L. Mascheroni (1785)

La sua analisi si può facilmente riassumere in pochi passaggi. Inizialmente analizzò i cinematismi possibili per i sistemi di aste incernierate, poi utilizzò questo approccio per lo studio del comportamento cinematico dell'arco. Infine, arrivò all'analisi della volta, definendo due meccanismi di rottura:

- La rottura per scivolamento del cuneo centrale, già illustrato da De la Hire;
- La rottura multipla con formazione di cinque cerniere nell'arco e nei piedritti.

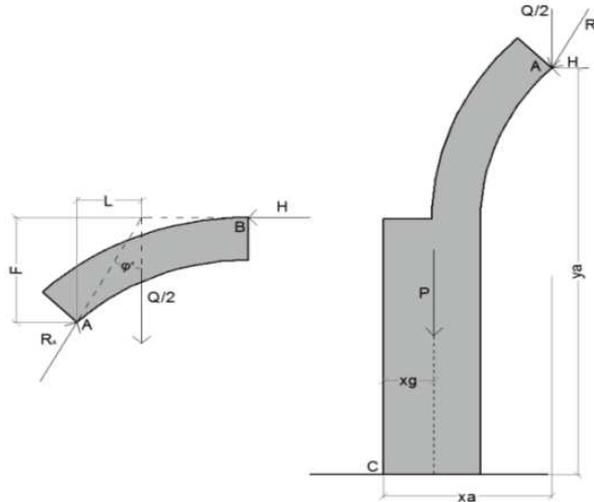


Figura 1.7: Schema illustrativo del metodo di dimensionamento Di L. Mascheroni

Venne analizzato metà arco: la risultante R_A era formata dalla composizione del peso proprio del concio $Q/2$ e della spinta orizzontale in chiave H e veniva applicata nella cerniera A . L'azione che il concio AB esercitava sul piedritto era determinata dalle due componenti, verticale $Q/2$ ed orizzontale H ; quest'ultima era definita come:

$$H = \frac{Q \tan \varphi'}{2} \quad \text{dove} \quad \tan \varphi' = \frac{L}{F} \quad (1.8)$$

Imponendo inoltre, l'equilibrio alla rotazione intorno al punto C , si otteneva:

$$H y_A - \frac{Q}{2} x_A - P x_G = 0 \quad (1.9)$$

Sostituendo la 1.8 nella 1.9 si trovava P :

$$P = \frac{Q y_A \tan \varphi' - x_A}{2 x_G} \quad (2.0)$$

Se il carico P risultava in tutti i punti dell'arco maggiore del secondo membro dell'equazione 2.0, si raggiungeva, secondo Mascheroni, la verifica dell'elemento.

1.3. DALLA CATENARIA ALLA FUNICOLARE DEI CARICHI (O CURVA DELLE PRESSIONI)

Robert Hooke nel 1676 introdusse il concetto di catenaria. Altro non è che la curva secondo la quale si dispone una fune che supponiamo omogenea, flessibile e non estendibile, appesa a due punti estremi, che sia lasciata pendere soggetta soltanto al proprio peso.

Tale configurazione in ogni suo punto sarà ovviamente sottoposta a sole forze di trazione, mentre se idealmente la ruotassimo di 180° le forze di trazione si trasformerebbero in sole forze di compressione dando origine così alla sua inversa, detta funicolare dei carichi o curva delle pressioni. Concetto essenziale della statica dell'arco.

La costruzione di quest'ultima può essere chiarita attraverso un semplice esempio:

Considerando una corda (figura 1.2) vincolata in A ed in B sottoposta a 3 forze verticali w_1 , w_2 , w_3 , a due reazioni vincolari R_1 e R_2 contrarie, il sistema risulta essere in equilibrio, poiché:

$$w_1 + w_2 + w_3 = R_1 + R_2 \quad (2.1)$$

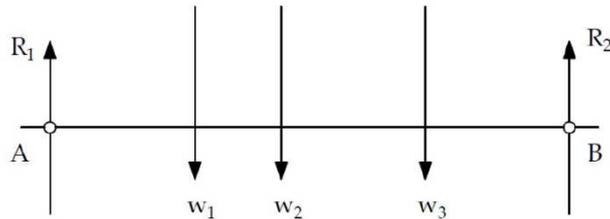


Figura 1.2: sistema corda sottoposto alle 3 forze ed alle 2 reazioni vincolari

Il profilo deformato della corda assumendo H come componente orizzontale di tensione di quest'ultima può essere noto in ogni sua porzione.

Ad esempio l'inclinazione AP (figura 1.3a) sarà data dalla risultante T_1 , ottenuta attraverso la sommatoria dei vettori R_1 ed H. Mentre l'inclinazione PQ sarà data da T_2 , ottenuta anch'essa dalla sommatoria dei due vettori H e $R_1 - H$ (figura 1.3b).

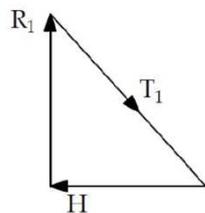


Figura 1.3a: inclinazione corda tratto AP

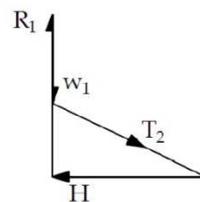


Figura 1.3b: inclinazione corda tratto PQ

Il profilo deformato complessivo risulta essere il seguente:

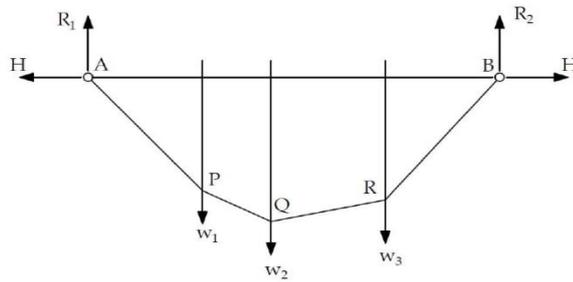


Figura 1.4: profilo deformato sottoposto a w_1, w_2 e w_3

Ruotandola di 180° come proposto da Hooke si ottiene la curva delle pressioni di un arco caricato da w_1, w_2 e w_3 .

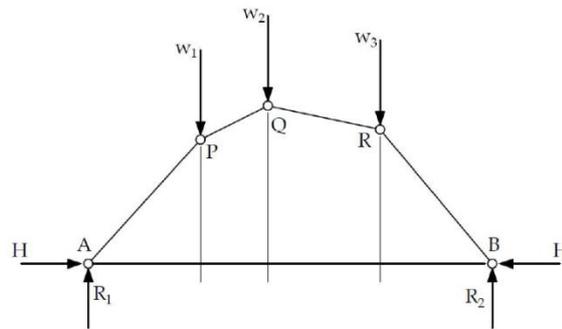


Figura 1.5: curva delle pressioni di un arco caricato da w_1, w_2 e w_3

Se quest'ultima ricadesse all'interno dello spessore dell'elemento, la struttura risulterà stabile, poiché tutte le porzioni dell'arco funzionerebbero a compressione piuttosto che a trazione.

1.4. METODO GRAFICO PER LA COSTRUZIONE DELLA CURVA DELLE PRESSIONI DI MÉRY

Il problema statico di un arco venne risolto da Méry, utilizzando un poligono di equilibrio a passaggio obbligato per due punti: il terzo medio inferiore nella sezione d'imposta e il terzo medio superiore nella sezione in chiave.

Esso però si basava su alcune ipotesi, tra cui, l'arco doveva risultare geometricamente simmetrico (condizione necessaria per la formazione delle cerniere in chiave e alle reni) e caricato e vincolato simmetricamente. In questo modo, noti i carichi esterni, era possibile ottenere l'andamento della curva delle pressioni.

Secondo Méry la stabilità dell'elemento era raggiunta se tale curva si manteneva compresa nella striscia dei terzi medi, mentre il centro di pressione in ogni sezione risultava interno al nocciolo centrale d'inerzia. Tutte le sezioni dell'arco sono quindi soggette, oltre che a modesti sforzi di taglio, a sola compressione.

Vedremo in seguito le varie fasi per la costruzione di tale curva su metà arco (nota la simmetria).

- *Fase 1: posizionamento grafico della risultante R*

É conveniente suddividere il semiarco in un certo numero di conci di uguali dimensioni e determinare in seguito l'aliquota di carico competente a ciascuno, ottenuta dalla sommatoria tra:

- Peso proprio G dei conci, passante per il baricentro di ognuno. Il suo modulo si ottiene moltiplicando il volume V del concio per il peso specifico γ_m della muratura.
- Carichi variabili.
- Carichi permanenti.

Si determinano così le varie risultanti $c_1, c_2 \dots c_{10}$.

Più è grande il numero delle suddivisioni, più precisi saranno i risultati.

Di queste risultanti si effettua prima il metodo punta coda per determinare l'intensità di R e poi il poligono funicolare per ritrovare graficamente la posizione di quest'ultima all'intero dell'arco.

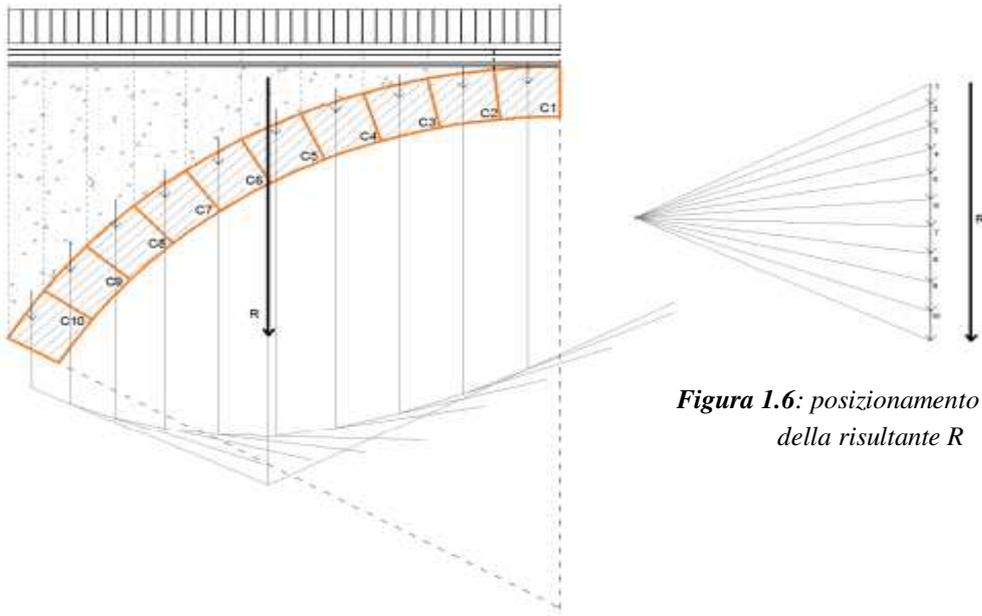


Figura 1.6: posizionamento grafico della risultante R

- *Fase 2: la scomposizione della risultante R*

Il prolungamento della retta di azione della spinta orizzontale S , perpendicolare alla sezione in chiave e applicata al terzo medio superiore, interseca la risultante R in un punto: la congiungente di tale punto con il terzo medio inferiore alla sezione d'imposta rappresenta la linea di azione della spinta H .

Scomponendo ora la risultante R , secondo tali direzioni, si ottengono le intensità di S e H .

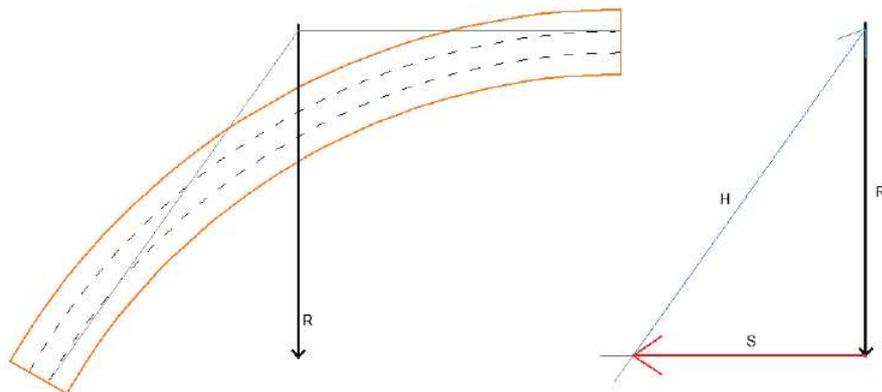


Figura 1.7: Scomposizione risultante R

- *Fase 3: Tracciamento della curva delle pressioni*

Assumendo il punto O come nuovo polo di proiezione ottenuto dall'intersezione della retta d'azione di S e della retta d'azione di H, si proietta nuovamente la retta delle forze. Si traccia in seguito il poligono di successive risultanti, o curva delle pressioni, che deve essere contenuta per tutto il suo sviluppo entro il terzo medio della sezione della volta, affinché questa risulti compressa in ogni sua porzione.

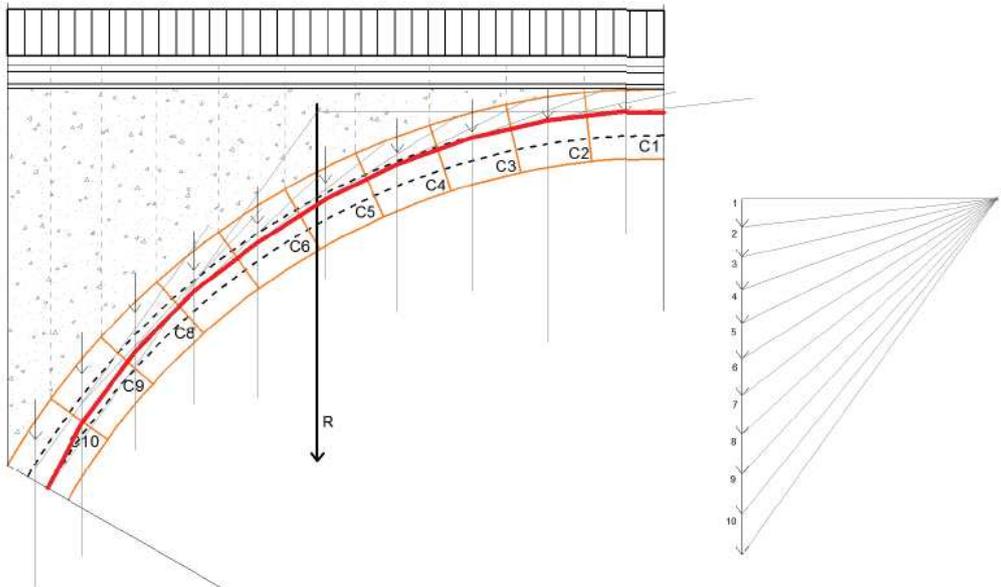


Figura 1.8: Tracciamento della curva delle pressioni

- *Fase 4: Controllo delle tensioni*

L'ultimo step per completare la verifica è controllare che la tensione di compressione massima per ogni concio sia inferiore alla tensione resistente del materiale costituente i conci dell'arco.

1.5. STABILITÀ DELL'ARCO SECONDO HEYMAN

Il concetto di duttilità e quindi della teoria plastica nato inizialmente per l'acciaio fu esteso anche alla muratura, iniziativa che risulterà alla base di questo nuovo sviluppo.

Infatti, le ipotesi fondamentali alla base della teoria di Heyman per il comportamento della muratura erano:

- Resistenza a trazione nulla (ipotesi a favore di sicurezza);
- Resistenza infinita allo scorrimento (escludeva perciò il collasso per slittamento, si supponeva che il coefficiente di attrito tra i conci sia sufficientemente elevato o che le pietre siano ben interconnesse tra loro);
- Infinita resistenza a compressione (si considerava che il collasso dunque avvenisse per l'apertura di fessure e non dovuto allo schiacciamento. In ogni caso, qualora fosse rigoroso, si poteva ridurre il valore del coefficiente di sicurezza o effettuare un controllo sul valore medio delle tensioni nelle sezioni).

Heyman riuscì a mostrare che un arco era in grado di supportare determinati carichi a patto che sia possibile individuare una curva delle pressioni che giace interamente all'interno del suo spessore, mentre, la condizione limite era raggiunta se tale curva intersecava la linea estradossale o intradossale dell'arco stesso, individuando una sezione critica con formazione di una cerniera plastica.

Heyman quindi trattò solamente un meccanismo di collasso per formazione di cerniere, considerando che sia più probabile avere problemi di stabilità legati alla disorganizzazione della struttura muraria rispetto a problemi di resistenza quali schiacciamento e scivolamento.

Grazie alle ipotesi fatte, egli dimostrò inoltre la validità dei due teoremi: teorema del limite superiore e teorema del limite inferiore. Il primo riguardava la determinazione di un carico di sicurezza e stabiliva che non si sarebbe avuto il collasso se, ad ogni incremento di carico si riusciva a trovare uno stato di sollecitazione ammissibile. Il secondo invece, consentiva di determinare valori di carico superiori o al più uguali a quello di collasso, ed in particolare esso stabiliva che, se si riusciva a trovare un meccanismo cinematicamente ammissibile allora si sarebbe verificata la crisi statica.

Tuttavia, per determinare il dominio ammissibile M-N (momento flettente, sforzo normale) Heyman suggerì di tener conto della resistenza a compressione della muratura:

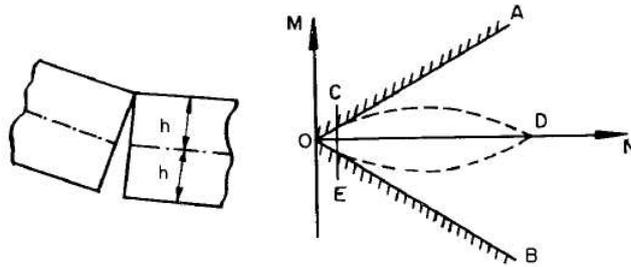


Figura 1.9:
*Dominio limite M-N di Heyman e condizione
di cerniera in un giunto*

Nella figura 1.9 la superficie AOB costituita da due rette descritte dall'equazione $M = \pm Nh$ intersecanti nell'origine sarà sostituita dalla curva OCDEO nel caso reale di limitata resistenza a compressione.

Tutti i punti P all'interno dell'angolo formato dalle due semirette erano rappresentativi di uno stato di sollecitazione accettabile, in quanto i due conci risultavano ancora in contatto. I punti al di fuori del dominio descrivevano uno stato di sollecitazione non ammissibile, ovvero la risultante delle forze interne R cadrebbe al di fuori della sezione e ciò non era accettabile per l'ipotesi di non resistenza a trazione del materiale.

CAPITOLO 2: STRATEGIE DI RINFORZO DI ARCHI E VOLTE IN MURATURA

2.1. PREMESSA

Gli interventi di consolidamento di archi e volte in muratura risultano tutt'oggi un tema delicato ed hanno l'obiettivo di eliminare situazioni di dissesto verificatesi ad esempio per eventi accidentali come scosse sismiche, o in altre situazioni, come scopo, hanno il rinforzo strutturale, incrementando così il range di carichi ammissibili.

Quando si opera una ristrutturazione a qualsiasi elemento è sempre conveniente trovare un giusto compromesso tra la necessità di intervenire e l'arrecare il minimo disturbo alla struttura e al contesto circostante.

In questo capitolo verranno esaminati i vari metodi più utilizzati al giorno d'oggi e verrà infine introdotto il concetto di "Arco Armato". Esso rappresenta una nuova tecnica di intervento che al giorno d'oggi è in grado di aumentare notevolmente la resistenza a rottura di un arco.

2.2. RINFORZO CON FRP

L'utilizzo degli FRP (Fiber Reinforced Polymer) per il rinforzo di archi e volte è ormai entrato nella prassi operativa di rinforzo.

Essi consentono di migliorare la capacità portante della struttura, sia in condizioni statiche che sismiche, senza incrementarne il peso.

I materiali fibro rinforzati sono costituiti da una fase continua detta *matrice* in cui è dispersa una fase discontinua: *le fibre*.

Quest'ultime rappresentano il rinforzo vero e proprio degli FRP in quanto hanno il compito di supportare i vari sforzi cui la struttura è sottoposta.

Nella realizzazione dei compositi le fibre possono essere continue o discontinue. Nel primo caso la loro disposizione è allineata a formare dei nastri, dei tessuti o delle lamine anche di grandi dimensioni; mentre nel secondo caso le fibre sono corte e la loro disposizione è usualmente casuale.

L'obiettivo del composito è quello di combinare le proprietà di entrambi i precedenti materiali pur risultando meno rigido rispetto alle fibre:

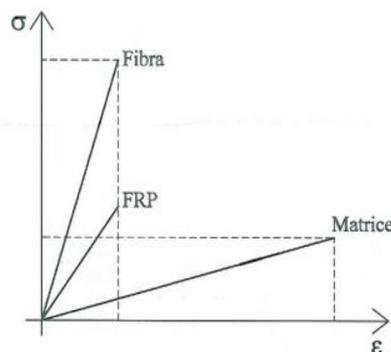


Figura 2.1:
*comportamento
intermedio dei materiali
fibro rinforzati*

Le fibre maggiormente più impiegate sono:

- *Fibre di vetro*: Presentano buone proprietà, quali un'ottima compatibilità con le matrici organiche, mentre hanno lo svantaggio di essere facilmente attaccate dagli alcalini e quindi, sono incompatibili con matrici cementizie;
- *Fibre aramidiche*: Presentano altissime prestazioni meccaniche, ed in genere, elevati valori di resistenza meccanica sia a trazione che a taglio;
- *Fibre di carbonio*: Visto i suoi notevoli valori del modulo elastico e di resistenza meccanica rientrano nelle fibre ad alta capacità resistente e risultano infatti una delle tipologie più utilizzate.

Le matrici, invece, nella maggior parte dei casi per la realizzazione di materiali compositi fibro rinforzati sono quelle di natura organica, ovvero le resine.

Le più utilizzate sono quelle polimeriche termoindurenti.

Tuttavia quest'ultime presentano bassa resistenza al fuoco, sensibilità all'umidità e limitate temperature di esercizio e oltretutto durante la fase di maturazione subiscono un processo chimico irreversibile e perciò non possono essere riforgiate.

In edilizia esistono anche matrici inorganiche ad esempio a base cementizia o costituite da leganti idraulici pozzolanici. Quest'ultime sono spesso utilizzate per il rinforzo di archi e volte, in quanto a seconda delle diverse possibilità e delle varie condizioni al contorno possono essere applicate all'estradosso e/o all'intradosso della struttura.

Poiché in una struttura ad arco i momenti flettenti associati all'eccentricità della curva delle pressioni variano lungo la luce, per trasformare la muratura in un corpo elastico resistente e perciò sopportare sia momento positivo che negativo, occorre applicare fibre resistenti a trazione sia all'estradosso che all'intradosso. Questa tipologia di intervento risulta essere raramente utilizzata poiché molto impegnativa ed invasiva per diverse ragioni:

- Le fibre poste all'intradosso quando entrano in trazione tendono a staccarsi dalla muratura. Per questa ragione è necessario prevedere connettori;
- Spesso l'intradosso delle volte risulta essere affrescato.

Detto ciò, la scelta ricade nell'apporre tali fibre nella parte estradosale.

Vediamo ora le diverse fasi di applicazione:

1. Eventuale demolizione dell'intonaco;
2. Pulizia delle superfici di intradosso e/o estradosso dell'arco, ed eventuale ripristino della continuità delle superfici;
3. Stesura sul supporto di uno spessore medio di 3-5mm di resina per successiva applicazione della fibra;
4. Posa in opera dell'elemento resistente a trazione (con sormonta tale da garantire il corretto funzionamento di quest'ultimo);
5. Inserimento di connettori a fiocco e conseguente secondo strato di resina.



Figura 2.2: Rinforzi intradosali ed estradosali

2.3. RINFORZO CON TIRANTE METALLICO INTRADOSSALE ED ESTRADOSSALE

I tiranti costituiscono un rinforzo essenziale per l'edilizia. È uno tra i più antichi metodi e ricade nella categoria degli interventi locali.

Essi, consolidano le volte, assorbendo la componente orizzontale della spinta, diretta in diagonale verso il basso.

Possono essere quindi utilizzati per due motivi; il primo: per contrastare le spinte degli archi o delle volte; il secondo: per unire tra loro le murature portanti.

In questo capitolo ci concentreremo sui vantaggi che arrecano ai sistemi archivoltati.

2.3.1 Tirante metallico intradossale

I piedritti come ben sappiamo sono elementi sottoposti a forze di ribaltamento e le catene di contrasto intradossali vengono aggiunte alla quota delle imposte, con l'obiettivo di opporsi a tali sollecitazioni.

I tiranti, possono essere di tipo attivo o passivo: nel primo caso, sono messi in opera applicando loro prima una presollecitazione pari alla spinta calcolata in fase di progetto per i soli carichi permanenti; nel secondo caso, essi, iniziano ad assorbire le sollecitazioni dopo aver subito un piccolo allungamento.

Quest'ultimi sono utilizzati maggiormente per contrastare gli effetti del sisma e soprattutto quando la volta o l'arco non ha ancora subito nella sua vita nominale delle fessurazioni.

Per evitare lo sfilamento vengono utilizzate delle piastre (o capo chiave) di ancoraggio, o, in alternativa, per motivi estetici o di confine con un'altra struttura si utilizzano degli ancoraggi iniettati con calza.



Figura 2.3:

a) Tirante posto all'intradosso

b) Ancoraggio con piastra o capochiave

L'ancoraggio ha inizio con la preparazione del foro che ovviamente viene eseguito a seconda del tipo di muratura e del contesto in cui si deve operare.

Successivamente è necessario l'inserimento all'interno dei fori di specifici tubi, di adeguato diametro.

In seguito, il tutto, viene completato con l'aggiunta di malta o resine, tali da far lavorare adeguatamente l'ancoraggio. Tale passaggio viene eseguito gradualmente fino a completa saturazione di quest'ultimo.

2.3.2 Tirante metallico estradossale

I tiranti metallici estradossali (simili agli intradossali) vengono utilizzati il più delle volte per ragioni di estetica oppure quando siano presenti elevate azioni verticali sulle murature perimetrali in grado di contrastare un'eventuale rotazione della sezione superiore del piedritto (in figura 2.3 i punti F e G).

Anch'essi come gli intradossali devono essere ancorati alla muratura con delle piastre o in alternativa con degli agganci iniettati.

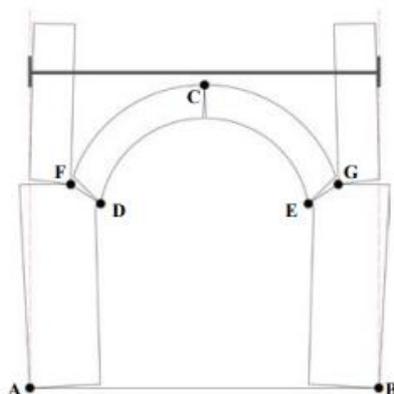


Figura 2.4:
*Tirante posto all'extradosso per contrastare la
formazione di cerniere plastiche*

2.4. RINFORZO MEDIANTE CAPPÀ ARMATA ESTRADOSSALE

Tale intervento ha come obiettivo di collegare la volta esistente ad una nuova controvolta estradossale in calcestruzzo chiamata cappa. Si crea dunque un'unica struttura resistente con spessore maggiorato.

Inizialmente la superficie della volta viene trattata con specifico primer per garantire la continuità strutturale.

In seguito, verrà messa in opera la rete elettrosaldata in acciaio, che dovrà essere opportunamente risvoltata lungo i bordi di circa 30-40 cm ed ancorata con appositi connettori.

Infine si esegue il getto, è preferibile l'utilizzo del cls alleggerito miscelato con resine specifiche, a più strati, sino al raggiungimento di uno spessore di 6-7 cm, garantendo ovviamente un adeguato copri ferro di 3 cm.

Questo intervento apporta un aumento di resistenza alla sezione della volta ma il notevole incremento di peso dovuto al materiale aggiunto può creare inconvenienti alle strutture verticali, piedritti, o alle fondazioni, oltre a maggiorare le sollecitazioni che entrano in gioco in caso di sisma.

Un'altra problematica della cappa armata è legata alla difficoltà nella maggior parte dei casi di conseguire un'effettiva collaborazione fra la cappa stessa e la volta esistente.

Insomma, questa metodologia di rinforzo presenta notevoli limiti, infatti ad essa vengono preferite altre metodologie.



Figura 2.5:
*Esecuzione del getto della cappa
con apposita rete elettrosaldata.*

2.5. RINFORZO MEDIANTE POSA IN OPERA DI RINFIANCHI CELLULARI

Il consolidamento mediante posa in opera di rinfianchi cellulari è una tecnica usata quando la volta ha una buona capacità portante e presenta modeste deformazioni.

L'intervento ha principalmente due scopi:

1. Alleggerire la spinta attraverso l'asportazione delle masse non strutturali del rinfianco;
2. Ristabilire l'equilibrio della curva delle pressioni attraverso la messa in opera di frenelli. Altro non sono che muretti leggeri e di modesto spessore disposti ortogonalmente alle generatrici delle falde, con lo scopo di limitare la deformazione flessionale nelle volte.

Questa tecnica riproduce, in modo meno invadente e con minore carico, il comportamento dei rinfianchi, senza ricorrere al riempimento degli spazi fra l'estradosso delle volte e i muri.

Le fasi lavorative sono quasi sempre le stesse: Inizialmente si rimuove il materiale di riempimento e si asportano le parti incoerenti, in seguito si realizza una sottile cappa con boiacca. A presa avvenuta, si dispongono i frenelli costituiti usualmente da mattoni pieni (è noto anche l'utilizzo di mattoni semipieni, di tufo o forati) fino al raggiungimento di un sistema cellulare. Per luci notevoli si dispone una seconda orditura di frenelli per impedire eventuali spostamenti laterali.

Un'interessante innovazione è quella del frenello armato con CFRP. Consiste nella realizzazione di un frenello in muratura armato con due nastri in CFRP; il primo è incollato sia all'estradosso della volta che alla base del frenello garantendo l'aderenza frenello-volta, il secondo disposto all'estradosso del frenello viene collegato alle murature d'ambito mediante fori.

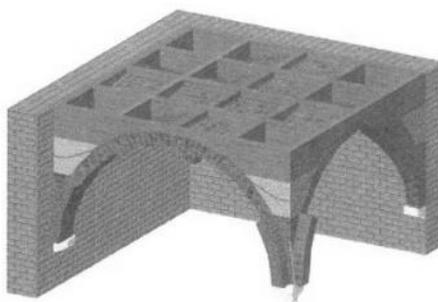


Figura 2.6:
Sistema cellulare di frenelli in laterizio

2.6. RINFORZO DEI PIEDRITTI MEDIANTE CONTRAFFORTI

I contrafforti altro non sono che sostegni di forma quadrangolare disposti a contatto con i piedritti con funzione di rinforzo e di contropinta.

In particolare essi contengono le sollecitazioni orizzontali delle volte i quali offrono un duplice effetto stabilizzante: aumentare il carico verticale agente alla base del piedritto e dall'altra incrementare la sezione al piede e quindi il braccio dei carichi verticali stabilizzanti.

È una soluzione efficace, ma piuttosto invasiva per ragioni di spazio. Inoltre resiste solo a compressione ed ha anche un notevole impatto visivo.

Per i sopracitati motivi non è una tecnica di rinforzo molto utilizzata al giorno d'oggi.

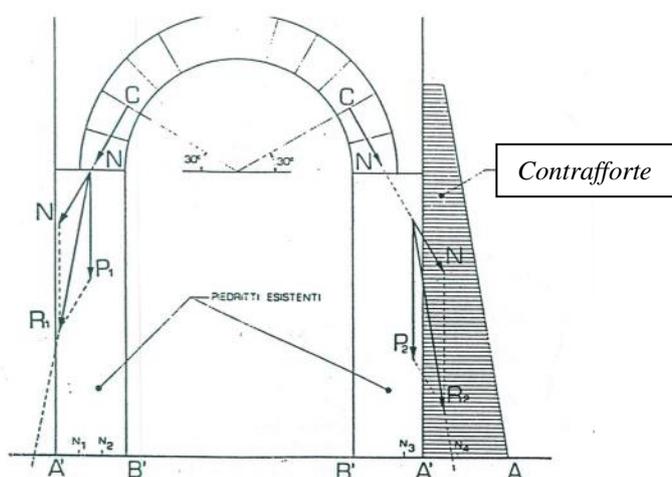


Figura 2.7:
*Contenimento della spinta
orizzontale dell'arco da parte
del contrafforte*

2.7. L'ARCO ARMATO

Il collasso di una volta, o di un arco, essendo resistenti maggiormente a compressione, avviene quando all'incrementarsi delle sollecitazioni la curva delle pressioni risulta tangente in più punti ai bordi dello spessore dell'arco stesso, dando luogo così a cerniere plastiche.

Quando si è a conoscenza della posizione di quest'ultime, risulta agevole calcolare il carico di collasso, in assenza, rimane il minimo tra i carichi cinematicamente ammissibili.

Alcune soluzioni viste, come ad esempio il consolidamento tramite FRP sia all'estradosso che all'intradosso (paragrafo 2.2), o cappa armata in calcestruzzo (paragrafo 2.4), entrambe i casi, rientrano nella famiglia dei rinforzi che vengono chiamati "passivi". Si limitano a collaborare con la struttura muraria dopo l'innescò del meccanismo di danno, con fessurazione a trazione tra concio e concio.

L'arco armato invece rientra fra i rinforzi "attivi" e come obiettivo ha di opporsi alla formazione delle cerniere, che si aprono in modo alternato all'intradosso e all'estradosso, posizionando un cavo tesato su uno dei lati dell'arco o della volta.

Il metodo prevede quindi la stesura di cavi metallici posti in tensione parallelamente all'arco da consolidare e ad esso opportunamente collegati i conci, così da renderli capaci di resistere a flessione.

Il cavo estradossale, il più facile da innestare, viene semplicemente appoggiato alla muratura. Può essere tesato anche dopo la messa in opera e fra esso e la superficie in muratura, di norma, si introducono dei cunei forzati.

Quello intradossale invece, deve essere puntualmente collegato ai singoli conci, tramite golfari o elementi appositamente predisposti.

Quando il cavo viene tesato il sistema diventa attivo da subito ed è in grado di applicare all'arco un sistema di forze, con direzione radiale, capace di rendere più baricentrica la curva delle pressioni e di conseguenza, capace di impedire la formazione delle cerniere.

Il più delle volte, quando si ha una scarsa stabilità dei piedritti, i cavi vengono prolungati fino alla base di quest'ultimi consolidando così l'intero sistema e non più solo la parte curvilinea dell'arco.



Figura 2.8:
Tecnica dell'arco armato: intradossale ed estradossale

CAPITOLO 3: METODO AGLI ELEMENTI FINITI

3.1. PREMESSA

Il metodo agli elementi finiti con la sua evoluzione esponenziale avvenuta negli ultimi anni, al giorno d'oggi, risulta essere uno dei migliori e più utilizzati strumenti di calcolo, per la soluzione di problemi strutturali.

Esso, permette di descrivere in termini matematici alcuni fenomeni fisici che si verificano nelle situazioni reali, rappresentando così un aspetto fondamentale nel campo dell'ingegneria.

Il F.E.M. dimostrò di avere diversi vantaggi rispetto al primo metodo ideato per lo studio dell'analisi numerica (metodo delle differenze finite F.D.M).

Quest'ultimo discretizza le equazioni differenziali del problema, lasciando inalterato il problema fisico e concepisce il dominio da analizzare come una serie di punti di un reticolo. Il F.E.M. invece, ha come aspetto fondamentale, di riuscire a lavorare con un dominio suddiviso in tanti sottodomini elementari.

Il metodo agli elementi finiti si evolse principalmente negli anni '50, anche se alcuni suoi aspetti erano già noti nell'antica Grecia. Veniva utilizzato per risolvere questioni matematiche complesse.

Nel corso degli anni diverse teorie di differenti studiosi si succedettero, tra i più importanti ricordiamo nel 1909 Walter Ritz e Rayleigh, che introdussero un approccio variazionale dell'analisi matematica, attraverso il cosiddetto metodo Ritz-Rayleigh. Concetto anch'esso alla base del metodo F.E.M.

In seguito, nel 1915, anche Galernik sviluppò un'altra importante teoria. Nota come metodo Galernik. Essa invece si basava sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali.

Nei prossimi capitoli si darà un'analisi teorica/matematica del metodo.

3.2. DESCRIZIONE DEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

Nella maggior parte dei casi la geometria e le condizioni al contorno sono troppo complicate per poter applicare procedimenti analitici, di conseguenza anche le equazioni si presenteranno sicuramente in una forma complessa.

Il metodo agli elementi finiti risulta essere quindi un procedimento finalizzato a risolvere un'equazione o un sistema di equazioni alle derivate parziali, in forma integrale su un dominio finito.

Il suo obiettivo è quello di ottenere delle soluzioni approssimate e per far ciò il dominio della struttura viene suddiviso in tanti sottodomini, detti appunto elementi finiti, riducendo così il problema ad un numero preciso di incognite.

Discretizzando la struttura in un certo numero di elementi, si definisce il campo incognito con una serie di funzioni approssimate, dette funzioni di forma.

I singoli elementi possono avere forme diverse: triangolari, quadrilateri, esaedri e tetraedri e possono essere monodimensionali, bidimensionali o tridimensionali.

Sono collegati tra loro da dei nodi. Gli spostamenti di quest'ultimi corrispondono ai gradi di libertà della struttura e rappresentano le nuove incognite da trovare.

All'aumentare del numero degli elementi finiti che compongono il dominio, dipendente dalla mesh di suddivisione utilizzata, il modello diventa più preciso.

Considerando quindi, il classico problema elastico formulato agli spostamenti, il processo di risoluzione attraverso il metodo degli elementi finiti può essere descritto nelle seguenti fasi:

1. Attraverso la meshatura si suddivide il corpo continuo in un certo numero di *elementi finiti*;
2. Come nuove incognite si considerano gli *spostamenti nodali*;
3. Attraverso le *funzioni di forma* si rappresentano gli spostamenti all'interno di ciascun elemento in funzione degli spostamenti nodali;
4. si definisce il *campo di deformazioni* e in seguito quello delle *tensioni* attraverso il legame costitutivo del materiale;
5. Si definisce un sistema di *carichi nodali*;
6. Gli *spostamenti nodali* sono contenuti in un nuovo sistema discreto;
7. Si risolve il sistema discreto attraverso passaggi algebrici arrivando alle soluzioni.

In commercio si trovano diversi codici di calcolo che hanno reso questo metodo accessibile. In particolare, in questa tesi è stato utilizzato il software ANSYS e la descrizione di esso sarà affrontata nel prossimo paragrafo (Paragrafo 3.4).

3.2.1. Discretizzazione del dominio in elementi finiti

Uno dei primi e più importanti passi dell'analisi strutturale è la fase di meshatura.

Come accennato precedentemente si suddivide il corpo continuo in un numero finito di elementi e tale procedura permette di passare dalla struttura reale a quella discretizzata, con lo scopo di ottenere una soluzione ingegneristica del problema.

Risulta essere una fase significativa, in quanto, le soluzioni finali dipenderanno da essa.

La mesh può essere effettuata utilizzando il comando automesh dell'apposito software oppure manualmente dall'utente. In questo lavoro si è optato per quest'ultima soluzione.

Nella maggior parte dei casi si sceglie in un primo momento di effettuare una meshatura approssimativa con il comando a disposizione, per poi andare a perfezionare manualmente tutti quei punti dell'elemento che risultano suddivisi in maniera errata o insufficiente.

È opportuno scegliere un dettaglio di suddivisione il più efficiente possibile poiché se si dovesse utilizzare una meshatura troppo fitta sarà necessario un tempo di calcolo molto elevato anche se le soluzioni risulteranno molto più attendibili.

Inoltre, è consigliabile suddividere in un numero elevato di elementi tutti quei punti dell'oggetto che potranno risultare staticamente critici al fine di ottenere un'analisi finale più accurata.

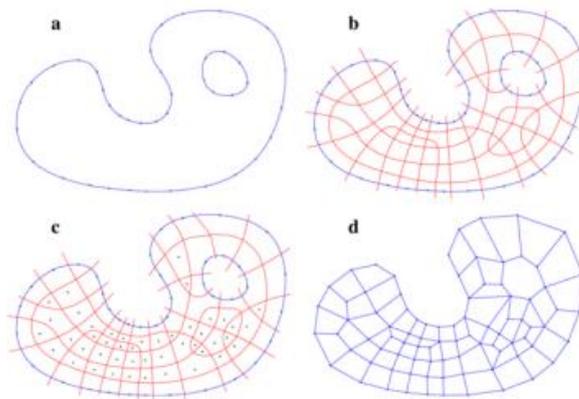


Figura 3.1:
Esempi di meshatura

3.2.2. Elemento nel sistema di riferimento locale

Nel metodo agli elementi finiti esistono tre sistemi di riferimento:

- *Sistema di riferimento locale* (x_1, x_2, x_3) relativo al singolo elemento in cui è stato suddiviso l'oggetto di studio attraverso la mesh;
- *Sistema di riferimento globale o struttura* (X_1, X_2, X_3) relativo all'intero elemento studiato;
- *Sistema di riferimento materiale* relativo ai materiali ortotropi.

Useremo solamente i primi due, infatti, le equazioni in prima istanza vengono formulate nel sistema di riferimento locale per poi essere risolte nel sistema globale.

Considerando quindi il sistema locale di un elemento generico e facendo riferimento al principio dei lavori virtuali (PLV) la configurazione iniziale è equilibrata se:

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{est} \quad (2.2)$$

Considerando applicati all'elemento:

- Carichi nodali $\{\mathbf{F}_N\}^{(e)}$;
- Carichi di volume $\{\mathbf{X}\}^{(e)}$;
- Carichi di superficie $\{\mathbf{p}\}^{(e)}$;

Che producono:

- Un campo di spostamenti nodali virtuali $\delta\{\mathbf{p}\}^{(e)}$;
- Un campo di spostamenti virtuali $\delta\{\mathbf{u}\}^{(e)}$;
- Un campo di deformazioni virtuali $\delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)}$;
- Un campo di tensioni reali $\{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)}$;

Facendo riferimento al campo di spostamenti in funzione delle variabili nodali, così determinato:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)} = [\mathbf{C}]^{(e)} (\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} - \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)} \quad (2.3)$$

Esplicitando la 2.3 nell'espressione 2.2 del \mathcal{L}_{int} avremo:

$$\mathcal{L}_{int} = \int_V \delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)} dV = \int_V \delta\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} \cdot [[\mathbf{C}]^{(e)} (\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} - \{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)}] dV \quad (2.4)$$

In cui:

- $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)}$ rappresenta lo stato di tensione residuo;
- $\{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)}$ rappresenta lo stato di deformazione residuo.

La relazione tra gli spostamenti all'interno dell'elemento e gli spostamenti nodali è:

$$\{\mathbf{u}\}^{(e)} = [\mathbf{N}]^{(e)} \{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (2.5)$$

Dove:

- $[\mathbf{N}]^{(e)}$ rappresenta la matrice contenente le funzioni di forma;
- $\{\mathbf{q}\}^{(e)}$ vettore degli spostamenti nodali.

Attraverso regole geometriche, una volta noto lo stato de formativo, è possibile stabilire il campo delle deformazioni:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\}^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}\{\mathbf{u}\}^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}[\mathbf{N}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} = [\mathbf{B}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (2.6)$$

In cui:

- $[\mathbf{V}]^{(e)}$ rappresenta la matrice contenente gli operatori differenziali;
- $[\mathbf{B}]^{(e)} = [\mathbf{V}]^{(e)}[\mathbf{N}]^{(e)}$ la matrice contenente le derivate delle funzioni di forma;

Sostituendo l'espressione 2.6 e svolgendo diversi passaggi algebrici l'espressione 2.4 diventa:

$$\mathcal{L}_{int} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \left(\int_V [\mathbf{B}]^{(e)}[\mathbf{C}]^{(e)}[\mathbf{B}]^{(e)} dV \{\mathbf{q}\}^{(e)} - \int_V [\mathbf{B}]^{(e)}[\mathbf{C}]^{(e)}\{\boldsymbol{\epsilon}_0\}^{(e)} dV + \int_V [\mathbf{B}]^{(e)}[\mathbf{C}]^{(e)}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}^{(e)} dV \right) \quad (2.7)$$

Esplicitando \mathcal{L}_{est} , avremo:

$$\mathcal{L}_{est} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^{(e)T} \{\mathbf{X}\}^{(e)} dV + \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^{(e)T} \{\mathbf{p}\}^{(e)} dS \quad (2.8)$$

Che sostituendo in essa la 2.5 si otterrà:

$$\mathcal{L}_{est} = \delta\{\mathbf{q}\}^{(e)T} \left(\{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{X}\}^{(e)} dV + \int_V [\mathbf{N}]^{(e)T} \{\mathbf{p}\}^{(e)} dS \right) \quad (2.9)$$

Eguagliando la 2.9 e la 2.7 avremo:

$$\{\mathbf{F}_N\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_V\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_S\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_{\sigma_0}\}^{(e)} + \{\mathbf{F}_{\epsilon_0}\}^{(e)} = [\mathbf{K}]^{(e)}\{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (3.0)$$

Dove:

- $\{\mathbf{F}_N\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali;
- $\{\mathbf{F}_V\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali di volume equivalenti;
- $\{\mathbf{F}_S\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali di superficie equivalenti;
- $\{\mathbf{F}_{\sigma_0}\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali equivalenti associati al campo di tensioni iniziali;
- $\{\mathbf{F}_{\epsilon_0}\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali equivalenti associati al campo di deformazioni iniziali;
- $[\mathbf{K}]^{(e)}$ rappresenta la matrice di rigidezza dell'elemento

Supponendo ora di considerare tra le forze di volume le forze di inerzia e indicando con ρ la densità, avremo:

$$\{\mathbf{X}\}^{(e)} = -\rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} \quad (3.1)$$

Tenendo conto la relazione tra gli spostamenti all'interno dell'elemento e gli spostamenti nodali la 3.1 diventa:

$$\{\mathbf{X}\}^{(e)} = -\rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} = -\rho [\mathbf{N}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} \quad (3.2)$$

Da cui il lavoro virtuale associato alle forze di inerzia sarà: (3.3)

$$\mathcal{L}_{int} = -\int_V \left(\delta \{\mathbf{u}\}^{(e)T} \rho \{\ddot{\mathbf{u}}\}^{(e)} \right) dV = -\delta \{\mathbf{q}\}^{(e)T} \int_V \left([\mathbf{N}]^{(e)T} \rho [\mathbf{N}]^{(e)} \right) dV \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} = -\delta \{\mathbf{q}\}^{(e)T} [\mathbf{M}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)}$$

In cui viene definita la matrice di massa dell'elemento:

$$[\mathbf{M}]^{(e)} = \int_V \left([\mathbf{N}]^{(e)T} \rho [\mathbf{N}]^{(e)} \right) dV \quad (3.4)$$

Quindi nel sistema locale di ogni singolo elemento si arriva ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie aventi come incognite gli spostamenti nodali:

$$\{\mathbf{F}\}^{(e)} = [\mathbf{M}]^{(e)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{C}]^{(e)} \{\dot{\mathbf{q}}\}^{(e)} + [\mathbf{K}]^{(e)} \{\mathbf{q}\}^{(e)} \quad (3.5)$$

Dove:

- $\{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(e)}$ rappresenta il vettore delle accelerazioni nodali;
- $\{\dot{\mathbf{q}}\}^{(e)}$ rappresenta il vettore delle velocità nodali;
- $\{\mathbf{F}\}^{(e)}$ rappresenta il vettore dei carichi nodali equivalenti;
- $[\mathbf{C}]^{(e)}$ rappresenta la matrice di smorzamento dell'elemento.

3.2.3. Elemento nel sistema di riferimento globale

Per determinare $[\mathbf{C}]^{(e)}$, $[\mathbf{K}]^{(e)}$, $[\mathbf{M}]^{(e)}$ è doveroso e necessario passare al sistema di riferimento globale, indicato con l'apice (g).

Effettuando un prodotto scalare delle varie matrici con un angolo indicato dalla matrice $[\boldsymbol{\lambda}]^{(e)}$ la 3.5 diventa:

$$\{\mathbf{F}\}^{(g)} = [\mathbf{M}]^{(g)} \{\ddot{\mathbf{q}}\}^{(g)} + [\mathbf{C}]^{(g)} \{\dot{\mathbf{q}}\}^{(g)} + [\mathbf{K}]^{(g)} \{\mathbf{q}\}^{(g)} \quad (3.6)$$

3.3. ASSEMBLAGGIO E SOLUZIONE

Prima di eseguire l'assemblaggio, che consiste nell'inserire nella matrice di rigidezza del sistema completo (matrice di connectivity) il contributo di rigidezza di ogni singolo elemento, bisogna verificare che siano soddisfatte due condizioni:

1. congruenza degli spostamenti (all'interno di ogni elemento è garantita dalle funzioni di forma);
2. equilibrio ai nodi tra azioni interne ed esterne.

In seguito si sommano le componenti di rigidezza relative ai medesimi gradi di libertà dei diversi elementi e si determina la struttura finale della matrice di rigidezza dell'intera struttura.

La matrice di massa viene stabilita con gli stessi passaggi.

Il sistema però risulta ancora non risolvibile poiché l'assenza di carichi fa sì che l'elemento studiato sia indeformabile.

Vincolando la struttura si arriva alla scrittura del sistema:

$$\begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{LL}] & [M_{LV}] \\ [M_{VL}] & [M_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_L\} \\ \{\dot{q}_V\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{LL}] & [C_{LV}] \\ [C_{VL}] & [C_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_L\} \\ \{q_V\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{LV}] \\ [K_{VL}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_L\} \\ \{q_V\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Dove:

- $\{R\}$ rappresenta il vettore delle reazioni vincolari;
- $\{q_L\}$ rappresenta il vettore dei gradi di libertà nodali non vincolati;
- $\{\dot{q}_L\}$ rappresenta il vettore delle velocità nodali relative ai gradi di libertà non vincolati;
- $\{\ddot{q}_L\}$ rappresenta il vettore delle accelerazioni nodali relative ai gradi di libertà non vincolati;

Le sopraelencate incognite possono essere stabilite risolvendo il sistema 3.7 e noti gli spostamenti nodali è possibile attraverso le equazioni 2.3, 2.5 e 2.6 determinare il campo di spostamento, deformazione e tensione in ogni punto della struttura.

Nonostante si arrivi a soluzioni accettabili bisogna considerare sempre la presenza di errori di modellazione o errori numerici.

3.4. CODICE DI CALCOLO ANSYS MECHANICAL APDL

3.4.1 Introduzione al programma

Il software Ansys Mechanical consente di risolvere problemi ingegneristici di vario genere attraverso un'analisi basata agli elementi finiti (FEA).

Nel seguente lavoro il programma verrà utilizzato per ottenere un'analisi strutturale.

Si ricorda infatti che lo scopo di ogni analisi è valutare la risposta del sistema in esame ad un certo tipo di eccitazione o sollecitazione.

Inizialmente viene realizzato un sistema approssimato, in CAD, che rappresenta un'idealizzazione di quello fisico reale; di quest'ultimo se ne effettua la suddivisione in elementi finiti generando la cosiddetta mesh o maglia, al fine di avere un modello matematico a cui applicare le equazioni descrittive del problema fisico e risolverle. L'affidabilità delle risposte dipende quindi da diversi fattori; tra questi ad esempio la bontà con cui il modello fisico è stato rappresentato e le ipotesi che vengono fatte. Ipotesi che possono riguardare il comportamento dei materiali impiegati e di conseguenza i valori assunti per affrontare il caso studio.

Ogni analisi si sviluppa secondo 4 fasi fondamentali:

1. *Decisioni preliminari*: si deve decidere che tipo di analisi effettuare tra le varie possibilità offerte da Ansys. Ad esempio vi sono analisi di tipo:
 - Strutturale;
 - Modale;
 - Termiche;
 - Elettromagnetiche;
 - Fluidodinamiche;
 - Statiche;
 - Dinamiche.

Inoltre bisogna definire in partenza se si effettuerà una valutazione di un modello bidimensionale (2D) o tridimensionale (3D).

2. *Preprocessing*: è la fase più delicata, in cui:
 - Si importa la geometria del modello e la si modifica per l'analisi scelta;
 - Si definiscono le varie proprietà dei materiali che si attribuiscono alle varie componenti;
 - Si genera la mesh, definendo la suddivisione in elementi finiti;
 - Si applicano i vincoli ed i carichi al modello;

- Si impostano le condizioni preliminari dell'analisi cercando di ottenere i risultati che si vogliono visualizzare.

Nel seguente caso, per semplicità, non è stato utilizzato il metodo automatico proposto dal software ma bensì è stata effettuata su CAD e poi importata su Ansys.

3. *Risoluzione del modello matematico*: come già detto, la velocità e la precisione di questa fase dipenderà dal punto precedente.
4. *Postprocessing*: in questa fase si controllano i risultati dell'analisi e la loro qualità, gli eventuali errori, ed infine i parametri che determinano l'accuratezza della soluzione presentata.

3.4.2 Interfaccia grafica del programma

Avviando il programma si aprirà la finestra *Output Window* che non sarà possibile chiudere. Rimarrà attiva in background ed in essa saranno presenti avvisi ed eventuali errori relativi al lavoro che si sta svolgendo.

```

Mechanical APDL 2023 R1 Output Window
TITLE =
32 KEYPOINTS DEFINED      MAX KEYPOINT NUMBER =      89
48 LINES DEFINED         MAX LINE NUMBER =         48
18 AREAS DEFINED        MAX AREA NUMBER =         36
1 VOLUMES DEFINED       MAX VOLUME NUMBER =        1
1 ELEM TYPES DEFINED    MAX ELEM TYPE NUMBER =     1
0 ELEMENTS DEFINED     MAX ELEMENT NUMBER =       0
0 NODES DEFINED        MAX NODE NUMBER =         0
1 MATERIALS DEFINED    MAX MATERIAL NUMBER =      1
0 REAL CONSTS DEFINED  MAX REAL CONST NUMBER =    0
0 SECTIONS DEFINED     MAX SECTION NUMBER =       0
0 COORD SYS DEFINED    MAX COORD SYS NUMBER =     0

ACTIVE COORDINATE SYSTEM      =      0 (CARTESIAN)
NUMBER OF DEFINED NODAL CONSTRAINTS =      0
NUMBER OF DEFINED NODAL LOADS =      0
NUMBER OF DEFINED ELEM SURFACE LOADS =      0
NUMBER OF DEFINED ELEM BODY LOADS =      0
NUMBER OF DEFINED NODE BODY FORCES =      0

INITIAL JOBNAME = materiali
CURRENT JOBNAME = materiali
ACTIVATING THE GRAPHICAL USER INTERFACE (GUI). PLEASE WAIT...

CUTTING PLANE SET TO THE WORKING PLANE

PRODUCE NODAL PLOT IN DSYS= 0
TURN OFF WORKING PLANE DISPLAY
    
```

Figura 3.2:
Finestra "Output Window"

In seguito si aprirà la finestra principale *Main Window*. La sua interfaccia (GUI) sarà riscontrabile in figura 2.8:

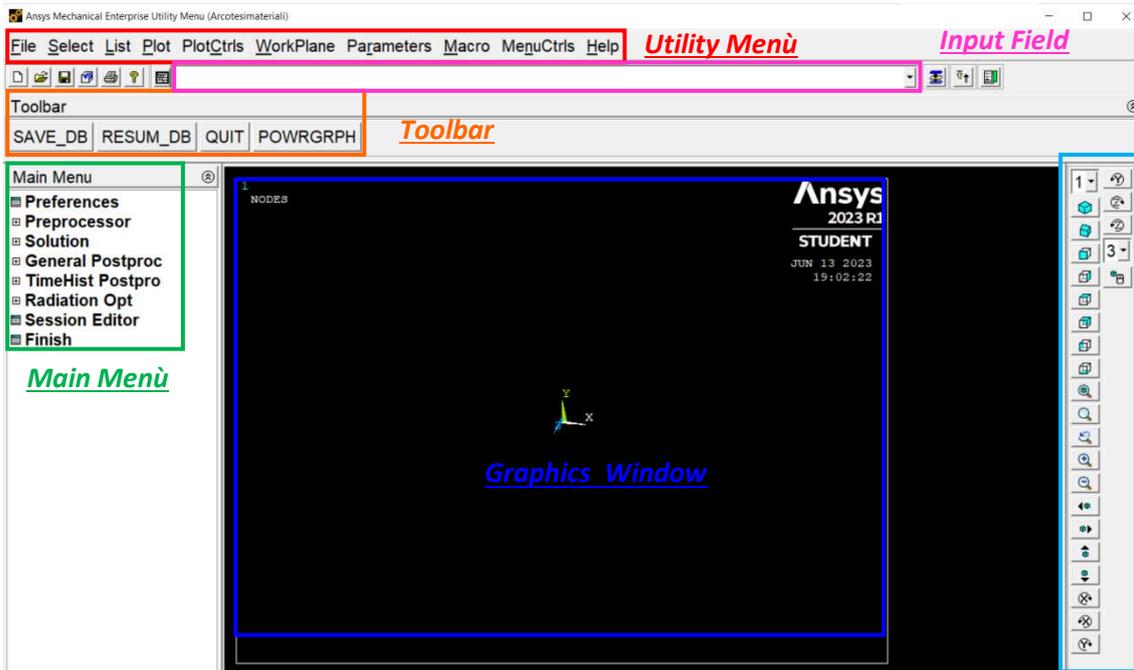


Figura 3.3:
Finestra “Main Window”

Ha 6 componenti distinti:

1. **Utility Menù:** contiene 10 elementi, ognuno dei quali richiama un menù a tendina di elementi secondari. È possibile eseguire operazioni di gestione del file, organizzazione di liste e visualizzazione di oggetti e opzioni di cambiamento di visualizzazione. Di seguito verrà eseguita una breve descrizione delle voci che lo compongono:

- **File:** Contiene diverse funzioni, ad esempio, la possibilità di cancellare il database corrente (*Clear & start new*), continuare un lavoro già iniziato (*Resume jobname.db*), cambiare la directory in cui i file vengono salvati (*Change Directory*), importare ed esportare file (*Import ed Esport*).

Bisogna però porgere attenzione al comando salva (*Save as o Save as jobname.db*), in quanto, il programma, utilizza un'estensione di salvataggio binaria (.DB). In essa, include il tipo di elemento modellato, le proprietà del materiale assegnato, la geometria, la mesh, e a fine analisi, anche i risultati ottenuti.

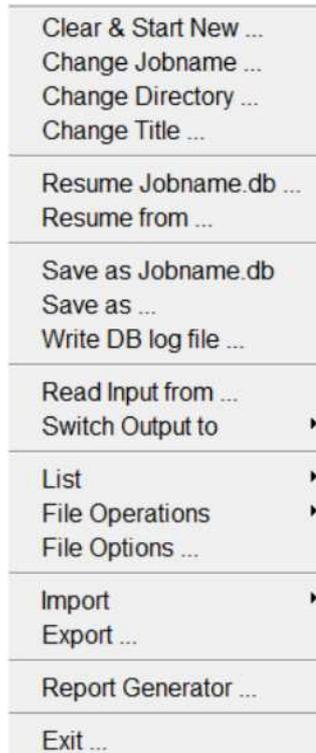


Figura 3.4:
Finestra "File"

- List: Include funzioni che consentono di selezionare i file di registro e di errore, di ottenere una lista di vari elementi come nodi, condizioni al contorno e dei carichi applicati.

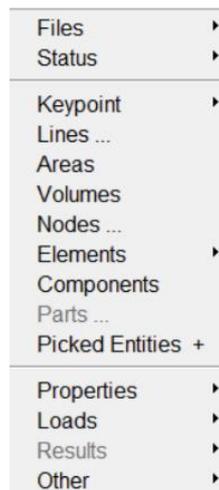


Figura 3.5:
Finestra "List"

- Select: Include funzioni che consentono di selezionare un sottoinsieme e permette di creare nuovi componenti.



Figura 3.6:
Finestra "Select"

- Plot: Consente di tracciare linee, aree, volumi, nodi ed elementi.

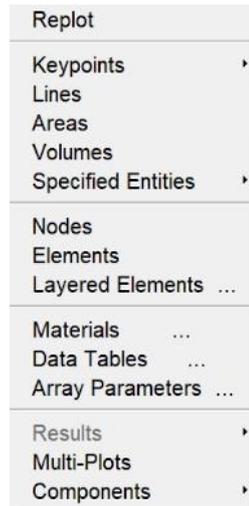


Figura 3.7:
Finestra "Plot"

- PlotCtrls: Contiene funzioni che controllano la vista, lo stile ed altre caratteristiche grafiche della modellazione, permette di selezionare le opzioni di numerazione e di cambiare gli stili.

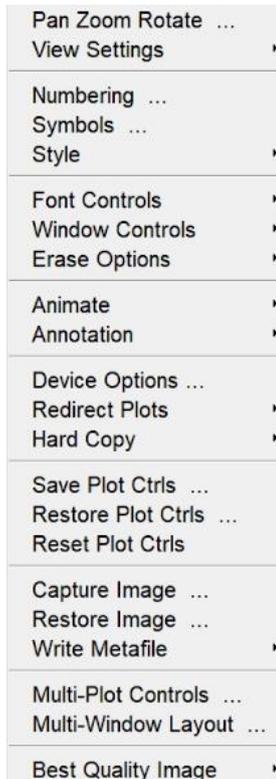


Figura 3.8:
Finestra "PlotCtrls"

- Workplane: Questa voce di menù permette di attivare e disattivare il piano di lavoro, di ruotarlo e spostarlo. Possono essere eseguite anche operazioni relative alle coordinate del sistema.

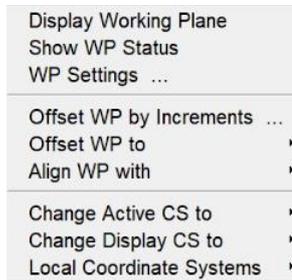


Figura 3.9:
Finestra "Workplane"

- Help: Apre il sistema di aiuto Ansys.



Figura 3.10:
Finestra "Help"

- Parameters: Contiene funzioni per definire, modificare ed eliminare scalari e parametri di matrice.

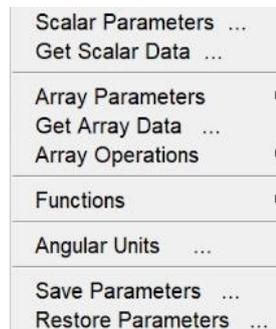


Figura 3.11:
Finestra "Help"

- Macro: Permette di manipolare la barra degli strumenti e di creare cartelle Macro e Data.

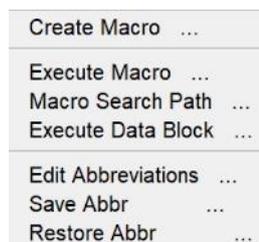
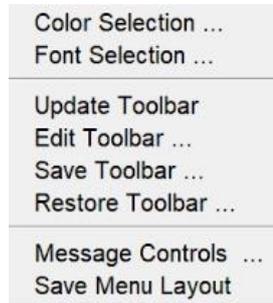


Figura 3.12:
Finestra "Macro"

- MenuCtrls: Consente di formattare i menù.



*Figura 3.13:
Finestra "MenuCtrls"*

2. **Main Menu**: Contiene i comandi principali per la modellazione. Ha una struttura ad albero dove menù e sottomenù possono essere espansi e compressi. Vediamo la sua struttura:

- Preprocessor:



*Figura 3.14:
Finestra "Preprocessor"*

Suddiviso in:

- *Scelta dell'elemento (Element type)*: C'è la possibilità di scegliere fra diversi tipi di elementi, ognuno dei quali ha un suo codice. Tra i più utilizzati ricordiamo : beam, combination, contact, fluid, hyperelastic,

infinite, link, mass, matrix, pipe, plane, shell, solid, source, surface, target, user, interface, viscoelastic (or viscoplastic).

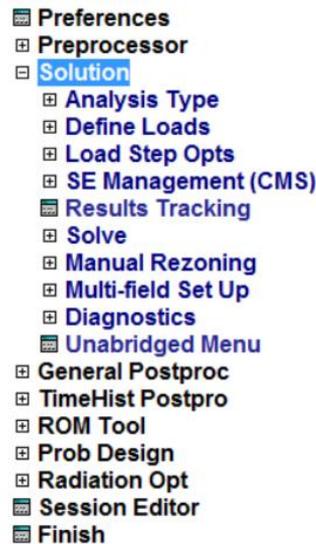
- *Definizione delle costanti reali (Real Constants)*: Permette di definire le proprietà dell'elemento che si sta studiando. Area, momento d'inerzia, altezza, deformazione iniziale ecc. ecc. Non tutti gli elementi presenti nella libreria Ansys richiedono questa definizione.
- *Definizione proprietà materiale (Material Props)*: Consente di definire se l'oggetto che si sta analizzando abbia proprietà lineari o non, se si tratta di un materiale isotropo, anisotropo o ortotropo.
- *Creazione geometria (Modeling)*: Permette di creare attraverso gli appositi comandi proposti da Ansys (linea, area, volumi ecc ecc) un modello che approssima la geometria dell'elemento. Si può optare per diverse soluzioni: modellazione solida, generazione diretta, proposte entrambe dal software, oppure, svolgerla su CAD e poi importarla.
- *Definizione della Mash (Meshing)* : Consente di suddividere il modello in più elementi. Anche in questa fase per avere una suddivisione il più esatta possibile è conveniente eseguirla prima manualmente, su un programma CAD, per poi andare ad inserire all'interno del programma il numero di volumi in cui è stato suddiviso l'elemento e i sottoelementi che ne fanno parte.

Un'altra possibile soluzione è utilizzare il comando DESIZE per ottenere una rete libera.

Per produrre invece una maglia di migliore qualità è possibile utilizzare la funzione Smartsize

- *Vincoli e carichi (Loads)*: Permette di caricare il modello analizzato. Ansys mette a disposizione sei categorie di carichi.

- Solution:



*Figura 3.15:
Finestra “Solution”*

Con questo comando è possibile scegliere il tipo di analisi da effettuare (*Analysis Type*) e scegliere la metodologia di calcolo con cui svolgerla. Permette inoltre di visualizzare i risultati, attraverso il comando *Solve*.

- Postprocessing:

Per esaminare i risultati ottenuti Ansys mette a disposizione le due finestre visualizzabili in figura 4.1. dove il comando *General Postprocessor* viene utilizzato per esaminare tutto il modello, mentre il *TimeHist Postprocessor* viene utilizzato per esaminare i risultati in punti specifici del modello.

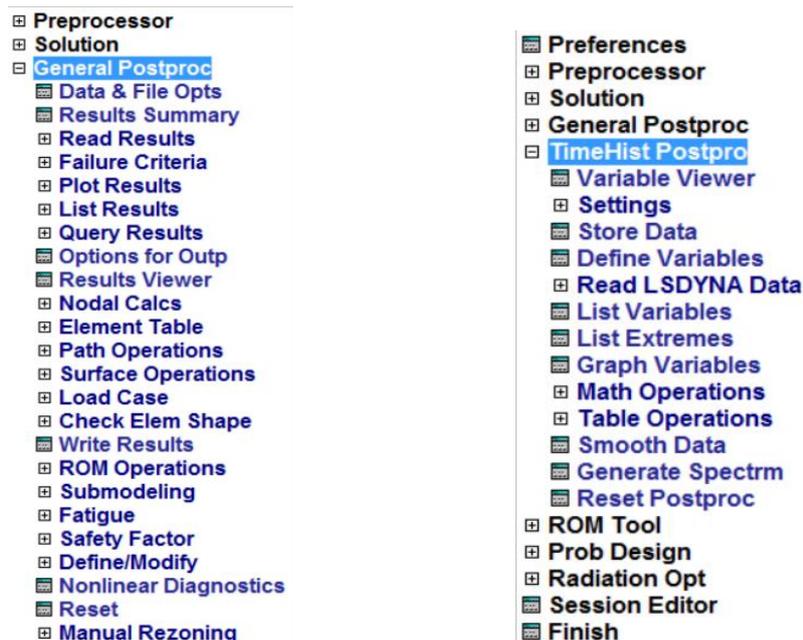


Figura 3.16:

a) Finestra “General Postprocessor”, b) Finestra “TimeHist Postprocessor”

3. **Toolbar:** Nella barra degli strumenti sono presenti comandi di uso frequente.
 - *Save_DB.*
 - *Resume_DB.*
 - *Quit.*
 - *Powrgrph.*
4. **Input Field:** Consente all'utente di eseguire una modellazione più rapida. Infatti permette di digitare direttamente i comandi che si vogliono utilizzare senza ricorrere alla ricerca all'interno di ogni menù o sottomenù.
5. **Graphic Window:** In esso può essere visionata la modellazione che si sta svolgendo e possono essere visionati i vari grafici ottenuti dall'analisi.

Ansys mette a disposizione vari **comandi per eseguire diverse viste del modello:** Vista isometrica (*Isometric View*), Vista obliqua (*Oblique View*), Vista frontale (*Front View*) ecc ecc.

CAPITOLO 4: MODELLAZIONE DELL'ARCO

4.1. PRIMA MODELLAZIONE DELL'ARCO IN MURATURA NON RINFORZATO

Nel capitolo seguente si descriveranno i vari passaggi delle diverse analisi eseguite con il software Ansys Mechanical APDL, con lo scopo di raggiungere risultati il più verosimili a quelli sperimentali, contenuti nella tesi “*Rinforzo di arco in muratura con GFRP*” di Serena Mandozzi, relatore Prof. Ing. Roberto Capozucca, svolta presso l'Università Politecnica delle Marche, corso di Laurea magistrale in Ing. Edile-Architettura, A.A. 2011-2012.

4.1.1. Definizione delle proprietà dei materiali

Inizialmente si importa l'arco nel software Ansys (file .IGES), precedentemente modellato in CAD: **File > Import > IGES > “Arco non rinforzato”**.

Anche la geometria di esso è nota nella tesi precedentemente citata.

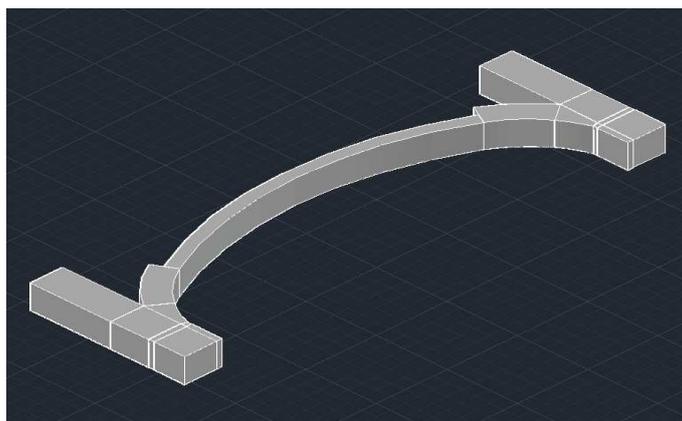


Figura 4.1:
Modellazione dell'arco in AutoCAD

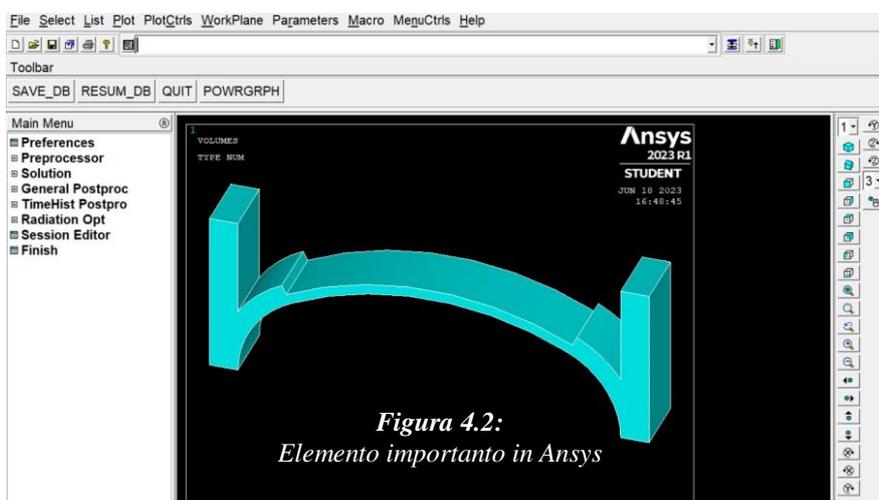


Figura 4.2:
Elemento importato in Ansys

In seguito, si definiscono le caratteristiche dell'elemento che si dovrà modellare: **Preprocessor > Element type > Add/Edit/Delete > Add > Solid > 20node186 o Concret65** in quanto quest'ultimo viene utilizzato per materiali fragili.

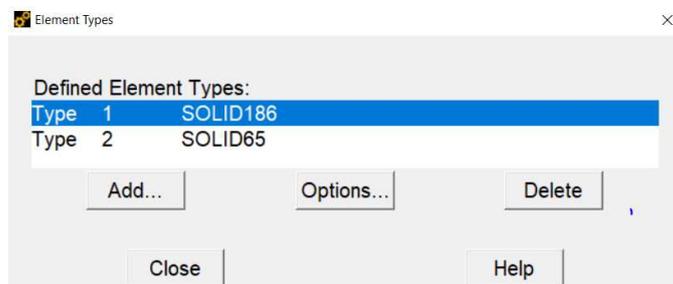


Figura 4.3:
Finestra "Element Type"

Dovendo definire le proprietà strutturali del materiale quest'ultime sono state selezionate attraverso i seguenti comandi: **Material props > Material Models > Structural**.

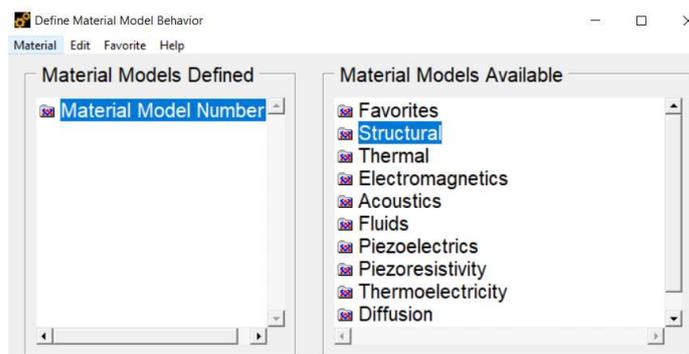


Figura 4.4:
Finestra "Material Model"

Verranno determinati tre materiali, con caratteristiche differenti per le diverse parti dell'arco.

Di seguito verranno descritti i passaggi per la determinazione del **materiale 1**. Ovviamente, esso, avrà caratteristiche strutturali lineari e non lineari.

Partendo dalle prime: **Linear > Elastic > Isotropic** verranno inseriti valori relativi a:

- *Coefficiente di Poisson*: scelto pari a 0,15. Nel software, questo valore, verrà aggiunto nella voce "PRXY", come si riscontra in figura 5.5.
- *Modulo Elastico*: Per questa modellazione è stato scelto un valore di 1500 N/mm². Nel software, questo valore, verrà invece inserito nella voce "EX".

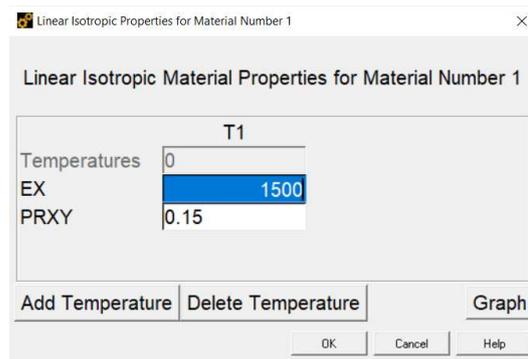


Figura 4.5:
Finestra “Isotropic”.
“EX” voce relativa al Modulo
elastico, “PRXY” voce
relativa al coefficiente di
Poisson.

Per le proprietà non lineari del materiale bisogna selezionare: **Non Linear > Inelastic > Rate Independent > Isotropic Hardening Plasticity > Mises Plasticity > Multilinear.**

Bisogna costruire ora per punti la curva che descrive il comportamento non lineare della muratura. È una curva σ - ε simile al calcestruzzo, ovviamente con molta meno deformazione, che comporta un valore ultimo a rottura più basso. Bisogna fare attenzione però ad un aspetto importante, in quanto, se la pendenza di tale curva non coincidesse con il coefficiente di Poisson opportunamente scelto l’analisi si blocca.

Per trovare i punti della curva si è adoperato un foglio Excel, mentre le equazioni utilizzate per ottenerli sono le seguenti:

$$f = \frac{E_c \varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2f_c}{E_c}$$

$$E_c = \frac{f}{\varepsilon}$$

Figura 4.6:
Equazioni utilizzate per trovare i punti
appartenenti alla curva σ - ε

Come primo valore si deve inserire il valore del modulo elastico, scelto precedentemente, ovvero di 1500 N/mm².

In seconda istanza si considera la resistenza a compressione della muratura, che corrisponde in normativa pari a 3,45 Mpa.

In seguito bisogna analizzare il valore del limite elastico della muratura. Quest'ultimo viene determinato attraverso:

$$\varepsilon = \sigma/E = f^c/E = 3,45/1500 = 0,0023$$

Come ultimo valore, bisogna considerare il valore ultimo della muratura, che per questa analisi si è considerato pari a 0,0035.

I valori trovati e conseguentemente inseriti nel software sono riscontrabili in figura 4.7

	T1	0
	STRAIN	STRESS
1	0.0001	0.15
2	0.0002	0.29943
3	0.0003	0.44809
4	0.0004	0.5955
5	0.0005	0.74124
6	0.0006	0.88494
7	0.0007	1.0262
8	0.0008	1.1648
9	0.0009	1.3002
10	0.001	1.4323
11	0.0011	1.5608
12	0.0012	1.6853
13	0.0013	1.8058
14	0.0014	1.922
15	0.0015	2.0337
16	0.0016	2.141
17	0.0017	2.2436
18	0.0018	2.3415
19	0.0019	2.4346
18	0.0018	2.3415
19	0.0019	2.4346
20	0.002	2.5231
21	0.0021	2.6067
22	0.0022	2.6857
23	0.0023	2.76
24	0.0024	2.76
25	0.0025	2.76
26	0.0026	2.76
27	0.0027	2.76
28	0.0028	2.76
29	0.0029	2.76
30	0.003	2.76
31	0.0031	2.76
32	0.0032	2.76
33	0.0033	2.76
34	0.0034	2.76
35	0.0035	2.76

Figura 4.7:
Valori di tensione e deformazione inseriti in Ansys del materiale muratura.

Il grafico che si ottiene rappresenta il comportamento del materiale muratura.

Esso è caratterizzato da una prima fase, detta campo elastico, in cui il materiale è in grado di subire delle deformazioni reversibili e una successiva fase denominata campo plastico, in cui la muratura riesce solamente ad incrementare la sua capacità deformativa. Infatti, come si può notare in figura 4.8, il valore del carico σ una volta superato il limite elastico, 0,0023, rimane costante, mentre la deformazione aumenta, fino a raggiungere il valore 0,0035, che rappresenta la deformazione ultima. Dopodiché si avrà il collasso.

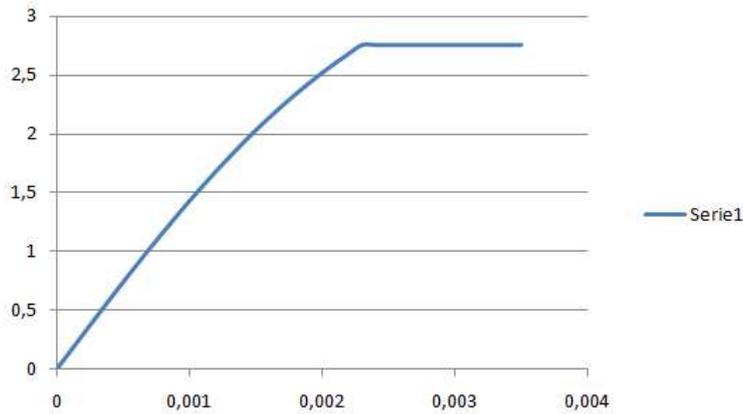


Figura 4.8:
Legame
costitutivo
della muratura

Poiché il materiale muratura appartiene alla famiglia di materiali fragili, bisogna attribuire ad esso una rottura che rispecchi questa caratteristica: **Material models > Non metal plasticity > Concrete.**

Concrete for Material Number 1

	T1
Temperature	0
Open Shear Transfer Coef	0.3
Closed Shear Transfer Coef	0.7
Uniaxial Cracking Stress	0.345
Uniaxial Crushing Stress	3.45
Biaxial Crushing Stress	0
Hydrostatic Pressure	0
Hydro Biax Crush Stress	0
Hydro Uniax Crush Stress	0
Tensile Crack Factor	0.9

Figura 4.9:
Finestra "Concrete"

In cui:

- Alla voce *Open Shear Transfer Coef* (Trasferimento dell'azione di taglio quando le fessure sono aperte) è stato attribuito il coefficiente di 0,3 che corrisponde ad un trasferimento della sollecitazione pari al 30%;
- Alla voce *Closed Shear Transfer Coef* (Trasferimento dell'azione di taglio quando le fessure sono chiuse) è stato attribuito il valore di 0,7 che corrisponde ad un trasferimento della sollecitazione pari al 70%;
- Alla voce *Uniaxial Cracking Stress* (Resistenza a trazione) è stato attribuito il valore di 0,345;
- Alla voce *Uniaxial Crushing Stress* (Resistenza a compressione) è stato attribuito il valore stimato precedentemente, ovvero di 3,45.

Ai mancanti invece, si attribuiscono valori pari a 0, tranne alla voce *Tensile Crack Factor* a cui è stato dato un valore pari a 0,9.

Al **materiale 2** sono state rimosse le caratteristiche di non linearità (*Multilinear*) e di fragilità (*Concrete*), mentre al **materiale 3** sono state mantenute solo le caratteristiche di Linearità (*Linear-Elastic*) e Non linearità (*Multilinear*).

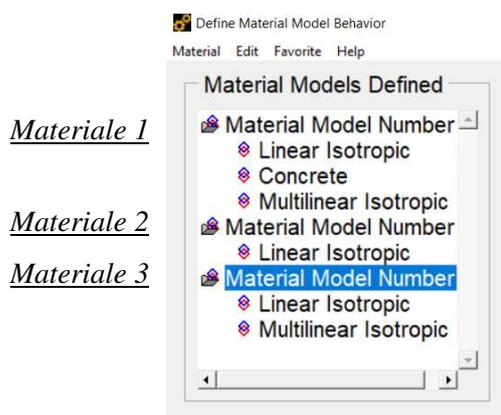
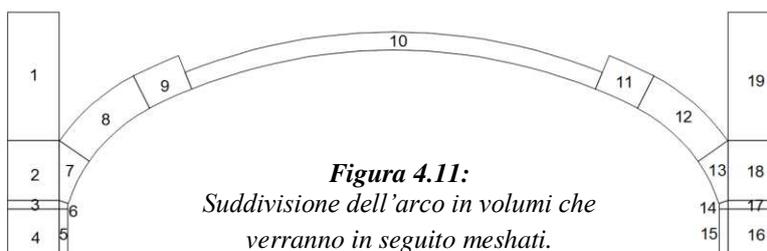


Figura 4.10:
Finestra dei 3 materiali

4.1.2. Fase di Meshatura

Poiché l'elemento è già stato modellato in volumi (figura 4.11), si passa alla fase di meshatura.



Questa fase risulta essere delicata, in quanto si suddividono i 19 volumi in più elementi ed i nodi, vertici degli elementi, tra un volume e l'altro devono assolutamente coincidere. Inoltre, all'interno di ogni volume gli elementi finiti devono essere tutti di uguale dimensione.

Per tali ragioni, si è optato per una suddivisione su CAD:

- Volumi 1 e 19: suddivisi in 450 elementi di dimensioni 19 x 19 mm;
- Volumi 2 e 18: suddivisi in 210 elementi di dimensioni 19 x 19 mm;
- Volumi 3 e 17: suddivisi in 30 elementi di dimensioni 19 x 19 mm;
- Volumi 4 e 16: suddivisi in 180 elementi di dimensioni 19 x 18 mm;

- Volumi 5 e 15: suddivisi in 30 elementi di dimensione 19 x 18 mm;
- Volumi 6 e 14: suddivisi in 10 elementi di forma tetraedrica;
- Volumi 8 e 12: suddivisi in 180 elementi;
- Volumi 7 e 13: suddivisi in elementi di forma triangolare;
- Volumi 9 e 11: suddivisi in 100 elementi;
- Volume 10: suddiviso in 450 elementi.

Importando il modello su Ansys si procede: **Preprocessor > Meshing > Mesh Tool**

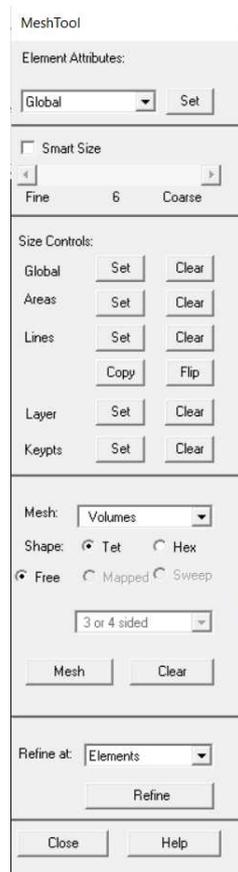


Figura 4.12:
Finestra "MeshTool"

In prima istanza attraverso: **Element Attributes > Set** si sceglie il tipo di elemento da attribuire (*Element type number*, Solid 186 o Solid65) e il numero del materiale (materiale 1, 2 o 3, Figura 4.13) rispettivamente al volume che si vorrà meshare.

Si è scelto:

- Il materiale numero 2 per i volumi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 17, 16, 15, 14;
- Il materiale numero 3 per i volumi 7, 13;
- Il materiale numero 1 per i volumi olumi 8, 9, 10, 11, 12.

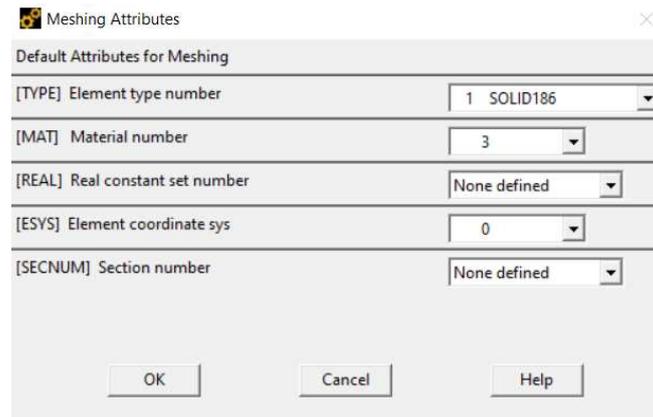


Figura 4.13:
Finestra "Meshing attributes"

In seguito attraverso **Size Controls > Lines > Set** si dividono i volumi in elementi finiti con le dimensioni elencate precedentemente.

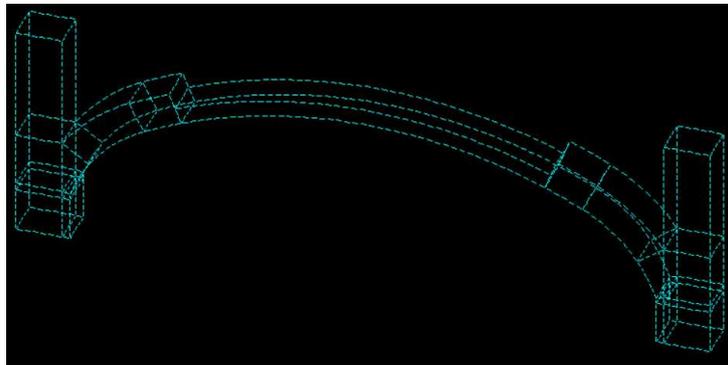


Figura 4.14:
Volumi suddivisi

Infine, con il comando **Mesh** si esegue la Meshatura dell'arco.

Ricordando che per effettuare una meshatura triangolare si utilizza il comando *Tet*, mentre per una meshatura cubica il comando *Hex*.

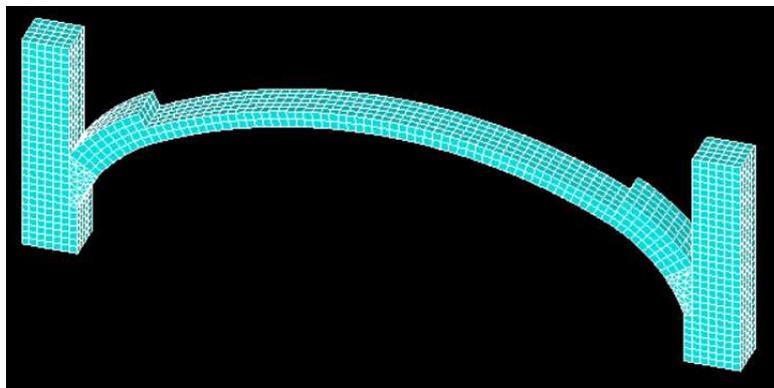


Figura 4.15:
Mesh dell'elemento arco

4.1.3. Applicazione dei carichi e dei vincoli

Si vincola la struttura, stabilendo in partenza che le imposte laterali alla base funzionino come incastrati perfetti: **Preprocessor > Load > Define Load > Apply > Structural > Displacement > On Nodes > All DOF.**

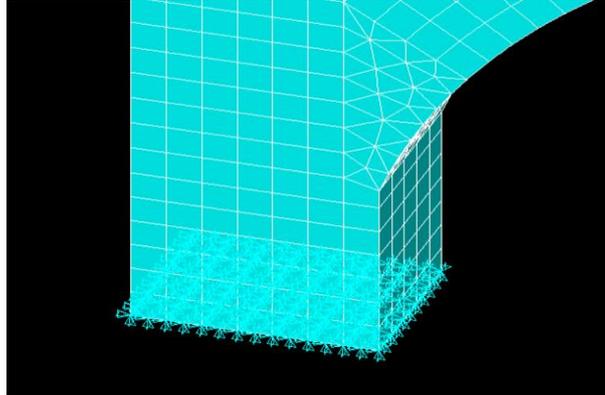


Figura 4.16:
Applicazione del vincolo alla base
di un'imposta

Il carico di superficie di entità pari a circa 30 N/mm^2 viene applicato ad $\frac{1}{4}$ della luce dell'arco.

Questo valore essendo una pressione, è determinato attraverso il rapporto fra il carico massimo, 1040 N , e l'area su cui esso agisce, $41,24 \text{ mm}^2$.

I comandi utilizzati sono: **Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On element.**

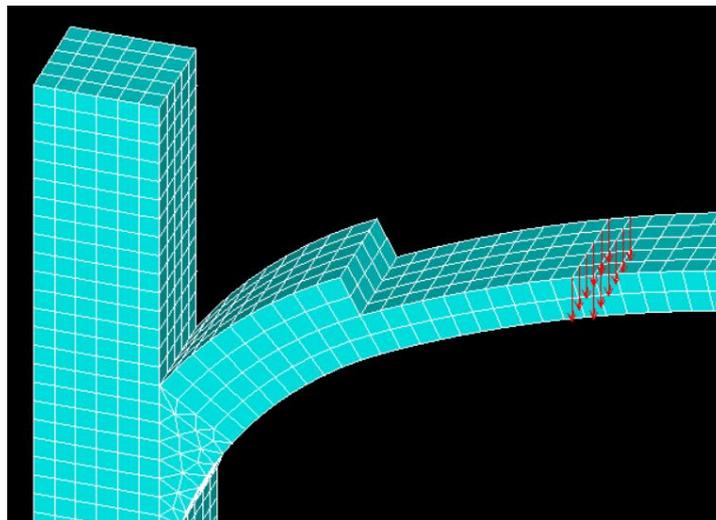


Figura 4.17:
Applicazione del carico di 30 N/mm^2
ad $\frac{1}{4}$ della luce.

4.1.4. Analisi della struttura

Alla fine della modellazione e della mesh si imposta l'analisi della struttura.

Questa fase si basa sull'ipotesi di uguaglianza tra tempo e carico applicato, in cui quest'ultimo partendo da nullo arriva massimo alla fine del processo.

Questa ipotesi permette di impostare l'analisi della struttura secondo una concezione step by step.

Essa viene lanciata attraverso il comando: **Solution > Analysis type > Sol'n controls.**

Di seguito sono allegate le varie finestre che permettono di determinare le caratteristiche di questa fase.

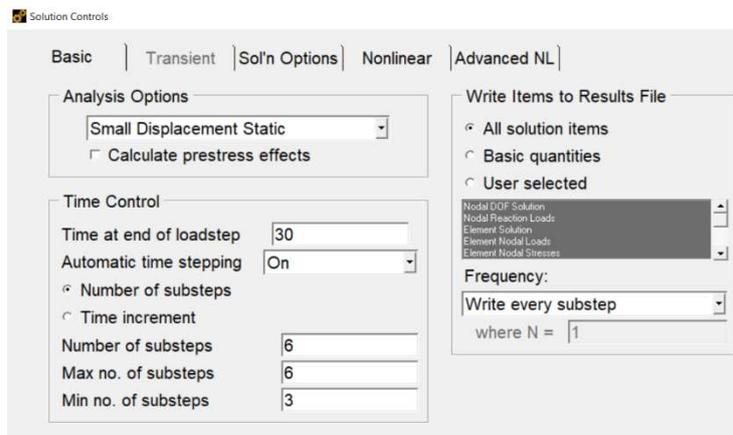


Figura 4.18:
Finestra "Basic-Solution Controls"

Small Displacement Static permette di eseguire un'analisi statica ai piccoli spostamenti. È stato impostato il valore del tempo (*Time at the end of loadstep*) pari a 30, ovvero uguale al massimo valore di carico applicato.

Inoltre, sono stati inseriti anche i valori di minimo e massimo incremento per ogni step, rispettivamente di 6 e 3.

Successivamente, selezionando *Solution Options*, si definisce la modalità di risoluzione delle equazioni che descrivono il modello agli elementi finiti.

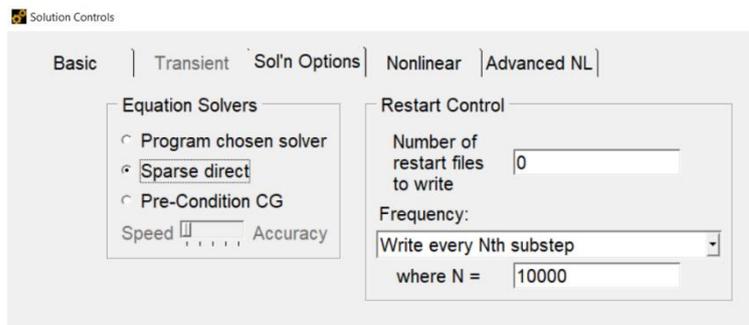


Figura 4.19:
Finestra "Sol'n Options-
Solution Controls"

Il metodo selezionato è *Sparse direct* in quanto è utilizzato per modelli 3D ad elementi finiti di grandi dimensioni.

I parametri della voce “*Non linear*” permettono di modificare le impostazioni della fase non lineare dell’analisi.

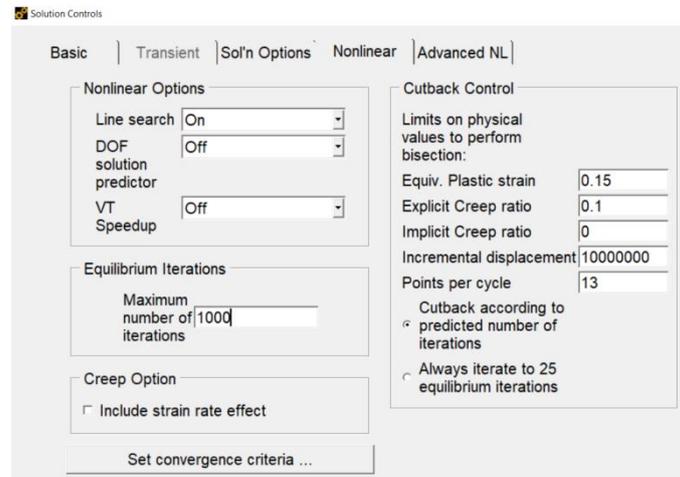


Figura 4.20:
Finestra “*Nonlinear-Solution Controls*”

Il comando *Set convergence criteria* permette di definire i criteri di convergenza in quanto si aggiunge un parametro dipendente dallo spostamento.

Quest’ultimo viene indicato come *Displacement U* ed i valori di tolleranza del parametro *Tolerance about value* di 0.001.

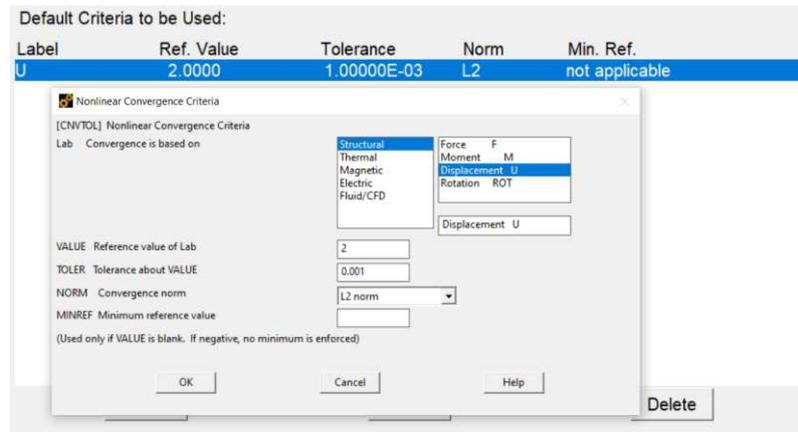


Figura 4.21:
Criteri di convergenza

Nell’ ultima finestra è possibile definire la modalità con cui il processo di calcolo deve terminare: in questo caso viene richiesto che il calcolo sia portato a termine nonostante sia stata superata la condizione di non convergenza.

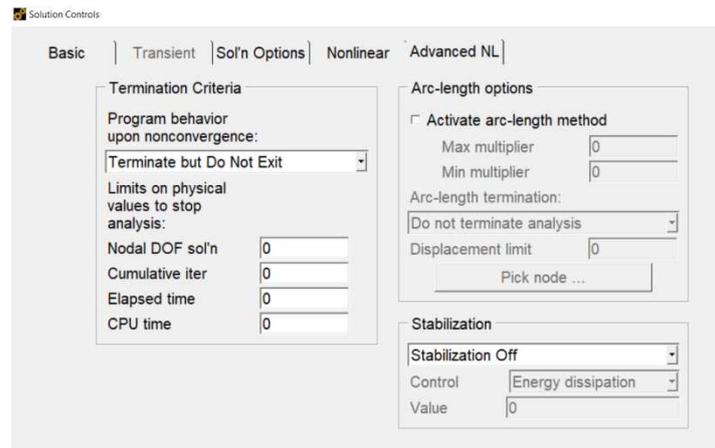


Figura 4.22:
Finestra “Advanced NL-Solution Controls”

È possibile ora lanciare l’analisi: **Solve > Current LS**.

4.1.5. Risultati dell’analisi

Lanciando l’analisi con i valori precedentemente scelti, il software riscontra un errore relativo alla fase di mesh e pertanto l’analisi si blocca.

Per tale ragione sono state opportunamente scelte alcune variazioni della modellazione, modificando il modulo elastico del materiale muratura e la tecnica con cui viene eseguita la mesh nella porzione ad arco. Quest’ultime potranno essere visionate nei prossimi paragrafi.

4.2. SECONDA MODELLAZIONE DELL'ARCO IN MURATURA NON RINFORZATO

4.2.1 Descrizione modellazione

In questa seconda modellazione sono state eseguite differenti variazioni, ovviamente non verranno descritti i vari comandi del software utilizzati ma bensì si analizzerà la bontà dei risultati che si otterranno, confrontandoli con quelli della sperimentazione.

Come prima modifica si è deciso di eliminare il Concrete 65, mantenendo come unico tipo di elemento per tutto l'arco il Solid186.



Figura 4.23:
Finestra "Element Type"

In tal caso verranno determinati due materiali, con caratteristiche differenti per le diverse parti dell'arco.

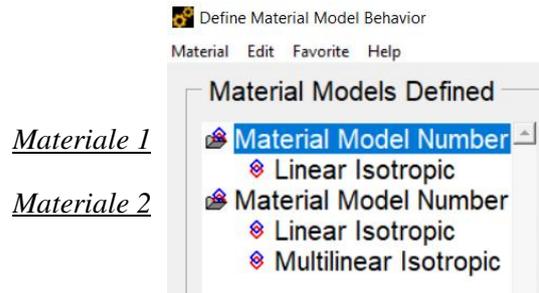


Figura 4.24:
Finestra "Material Model"

In cui:

- Alle proprietà lineari (*Linear Isotropic*), precisamente ai valori del modulo elastico e del coefficiente di Poisson sono stati attribuiti rispettivamente i valori di 4375 N/mm² e 0,15.

Il primo, implica ovviamente una variazione del limite elastico della muratura, passando da 0,0023 dell'analisi precedente a 0,0027.

La relazione con cui quest'ultimo è stato calcolato è la seguente:

$$\varepsilon = \sigma/E = f'c/E = 12/4375 = 0,0027$$

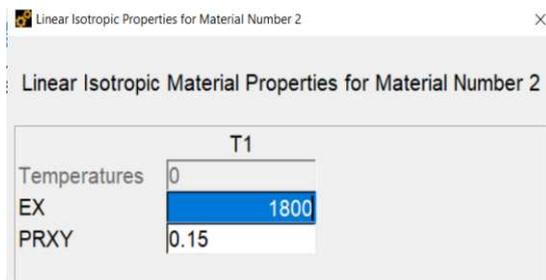


Figura 4.25:
Finestra "Isotropic".
"EX" voce relativa al nuovo
modulo elastico, "PRXY"
voce relativa al coefficiente di
Poisson.

- Alle proprietà non lineari (*Multilinear Isotropic*) sono stati attribuiti i seguenti valori, riscontrabili in figura 4.26, calcolati anch'essi con il foglio Excel precedentemente descritto. Per la resistenza a compressione della muratura si è preferito utilizzare un valore pari a 12 Mpa anziché di 3,45 Mpa.

	T1	0		T1	0
	STRAIN	STRESS		STRAIN	STRESS
1	0.0001	0.4375	18	0.0018	7.1095
2	0.0002	0.87384	19	0.0019	7.4221
3	0.0003	1.3086	20	0.002	7.7234
4	0.0004	1.7407	21	0.0021	8.0132
5	0.0005	2.1695	22	0.0022	8.2914
6	0.0006	2.594	23	0.0023	8.5581
7	0.0007	3.0134	24	0.0024	8.8131
8	0.0008	3.4271	25	0.0025	9.0566
9	0.0009	3.8343	26	0.0026	9.2885
10	0.001	4.2343	27	0.0027	9.509
11	0.0011	4.6265	28	0.0028	9.51
12	0.0012	5.0103	29	0.0029	9.51
13	0.0013	5.3851	30	0.003	9.51
14	0.0014	5.7505	31	0.0031	9.51
15	0.0015	6.106	32	0.0032	9.51
16	0.0016	6.4512	33	0.0033	9.51
17	0.0017	6.7858	34	0.0034	9.51
18	0.0018	7.1095	35	0.0035	9.51

Figura 4.26:
Nuovi valori di tensione e deformazione inseriti in Ansys del
materiale muratura.

Si è scelto:

- Il materiale numero 2 per i volumi 7, 8, 9, 10, 17.
- Il materiale numero 1 per i volumi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15,16.

La suddivisione in volumi e la determinazione in sottodomini è rimasta la stessa, mentre per la mesh si è optato di eseguirla cubica per le imposte mentre a triangoli per tutto l'arco.

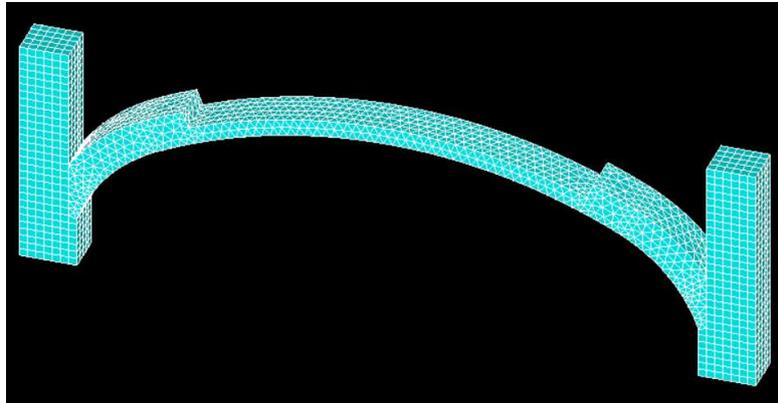


Figura 4.27:
Nuova mesh dell'elemento arco

Si vincola la struttura, stabilendo in partenza che le imposte laterali alla base funzionino come incastri perfetti.

A differenza della precedente analisi le imposte sono state vincolate lateralmente e nel retro bloccando quindi lo spostamento lungo X e Z.

Lo spostamento lungo Z è stato bloccato anche a tutto l'arco.

Il carico invece è stato scelto come forza ed inserito all'interno del software per un valore di circa 21N. Esso è stato stabilito suddividendo il carico massimo di 1040N per il numero di nodi che sono stati selezionati nell'area su cui esso agisce. L'applicazione è rimasta ad $\frac{1}{4}$ della luce.

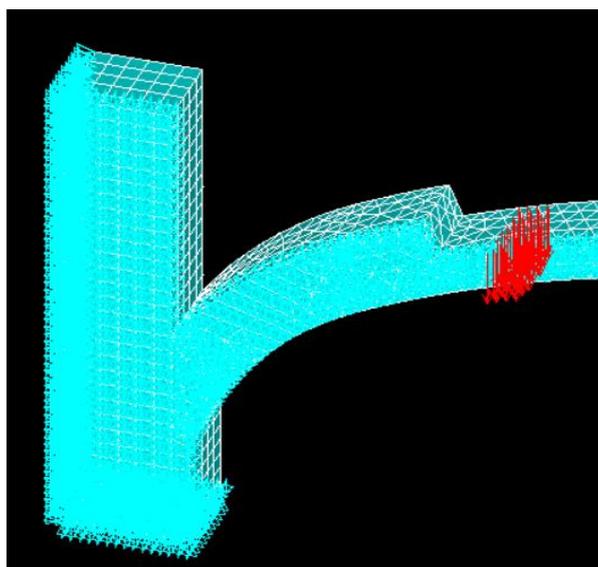


Figura 4.28:
*Applicazione del carico di 21 N/mm²
ad $\frac{1}{4}$ della luce.*

L'analisi rimane essenzialmente la stessa, l'unica finestra in cui sono stati cambiati alcuni valori è *Basic-Solution Controls*:

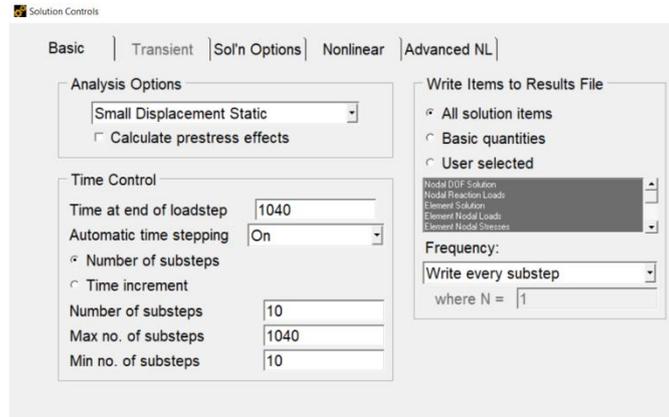


Figura 4.29:
Finestra “Basic-Solution Controls”
con i nuovi valori.

Lanciando l'analisi **Solution > Solve > Current LS** si ottengono i seguenti risultati:

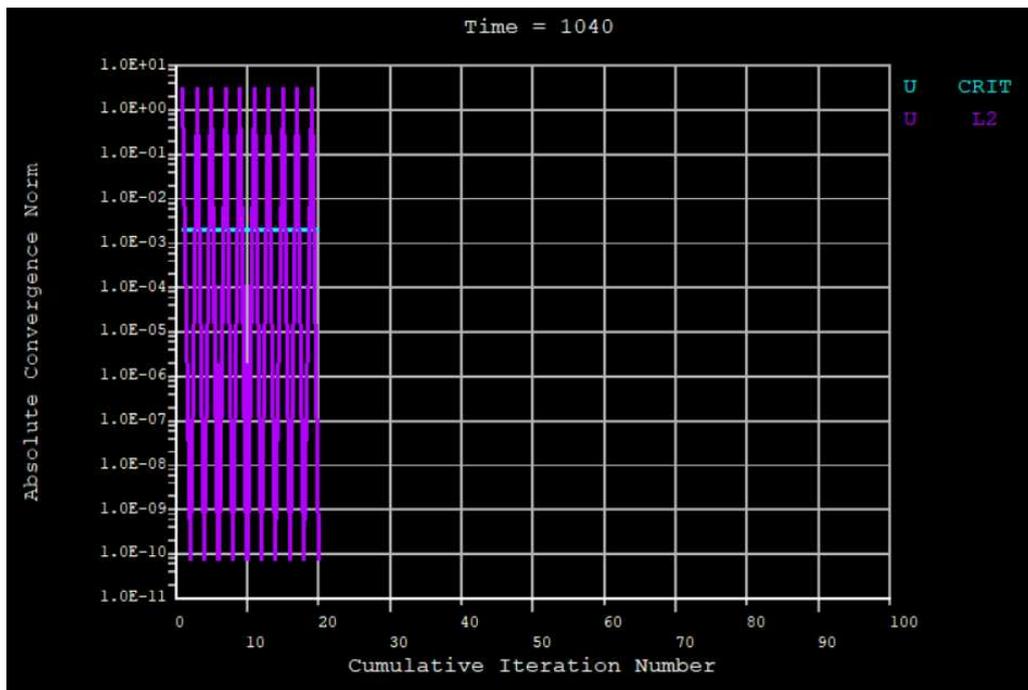


Figura 4.30:
Risultato dell'analisi

In cui, la voce *Time* ricorda l'uguaglianza dell'analisi tra tempo e carico applicato. Infatti, quest'ultimo, è pari al carico massimo, mentre il grafico, composto dalle curve viola, rappresenta l'andamento della ricerca.

Attraverso **GeneralPostprocessor > Read Result > By pic** si possono riscontrare i valori dei vari carichi ad ogni substep.

Results File: finale.rst

Available Data Sets:

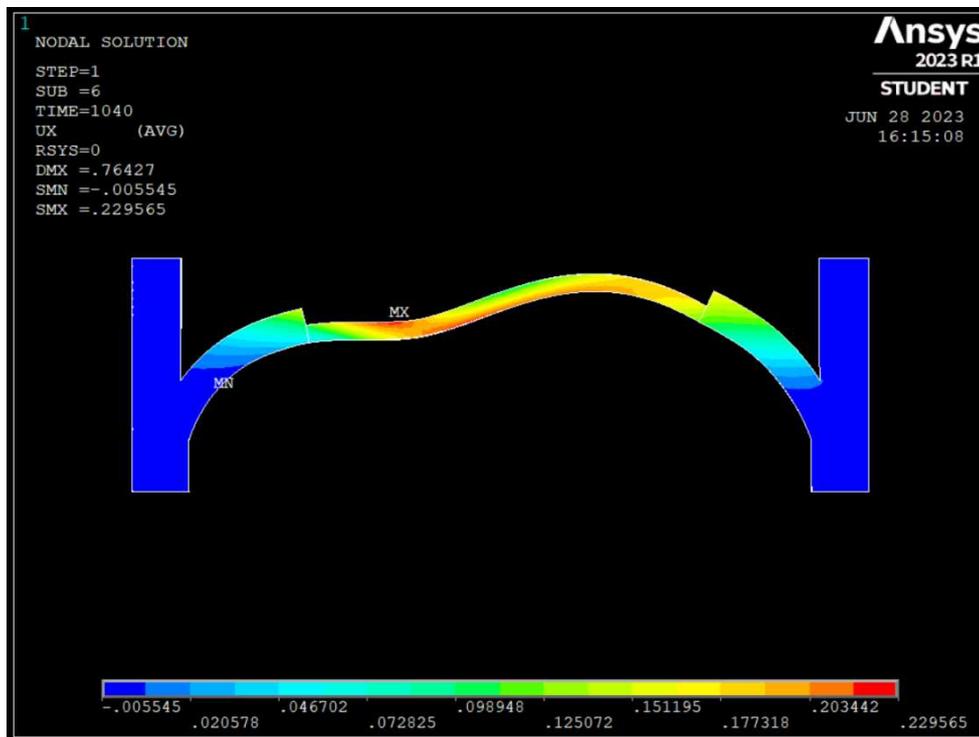
Set	Time	Load Step	Substep	Cumulative
1	104.00	1	1	2
2	208.00	1	2	4
3	312.00	1	3	6
4	416.00	1	4	8
5	520.00	1	5	10
6	624.00	1	6	12
7	728.00	1	7	14
8	832.00	1	8	16
9	936.00	1	9	18
10	1040.0	1	10	20

Figura 4.31:
Valori dei carichi ad ogni substep

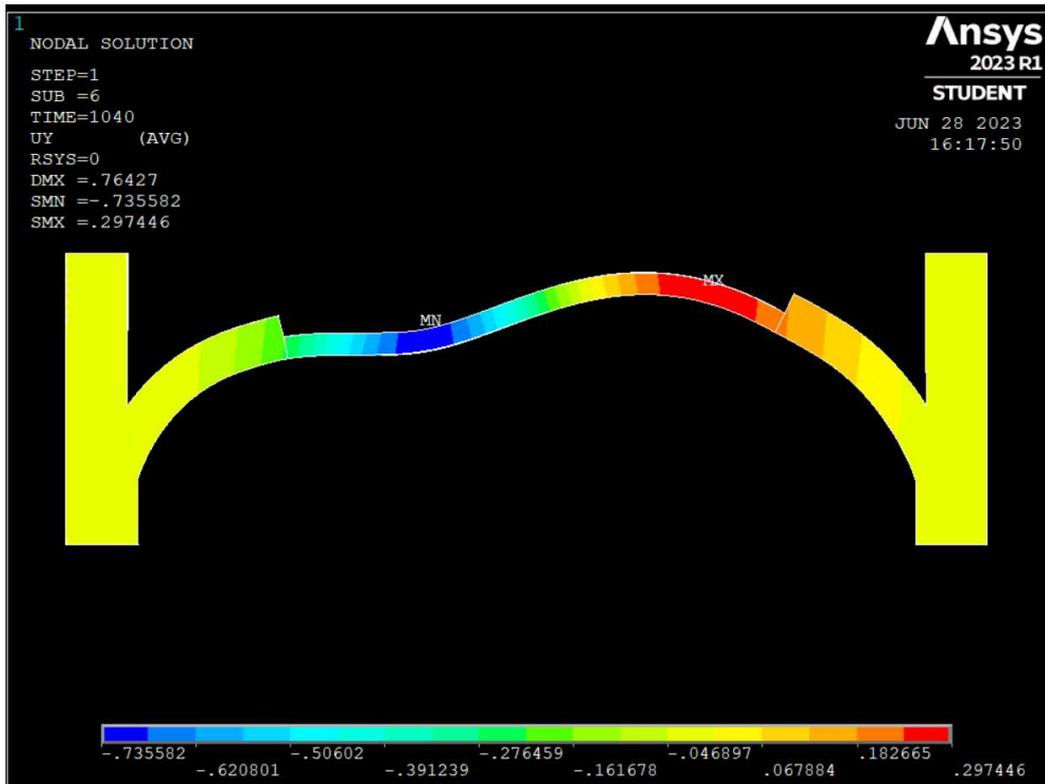
Mentre attraverso la voce **Time History Postprocessor** si possono visualizzare le deformazioni, tensioni e spostamenti di ogni nodo in una delle tre direzioni principali dello spazio, X, Y o Z.

Selezionando il comando *DOF Solution* si visionano le componenti di spostamento.

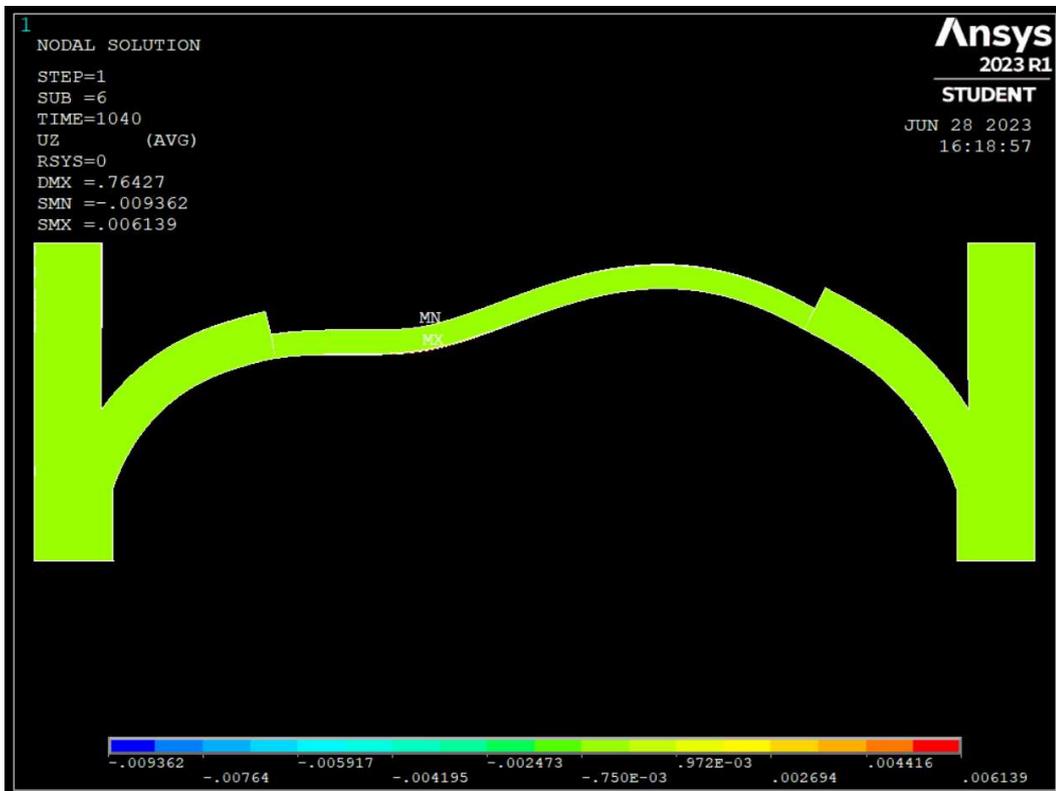
- Componente X di spostamento (*X component of displace*):



- Componente Y di spostamento (*Y component of displace*):

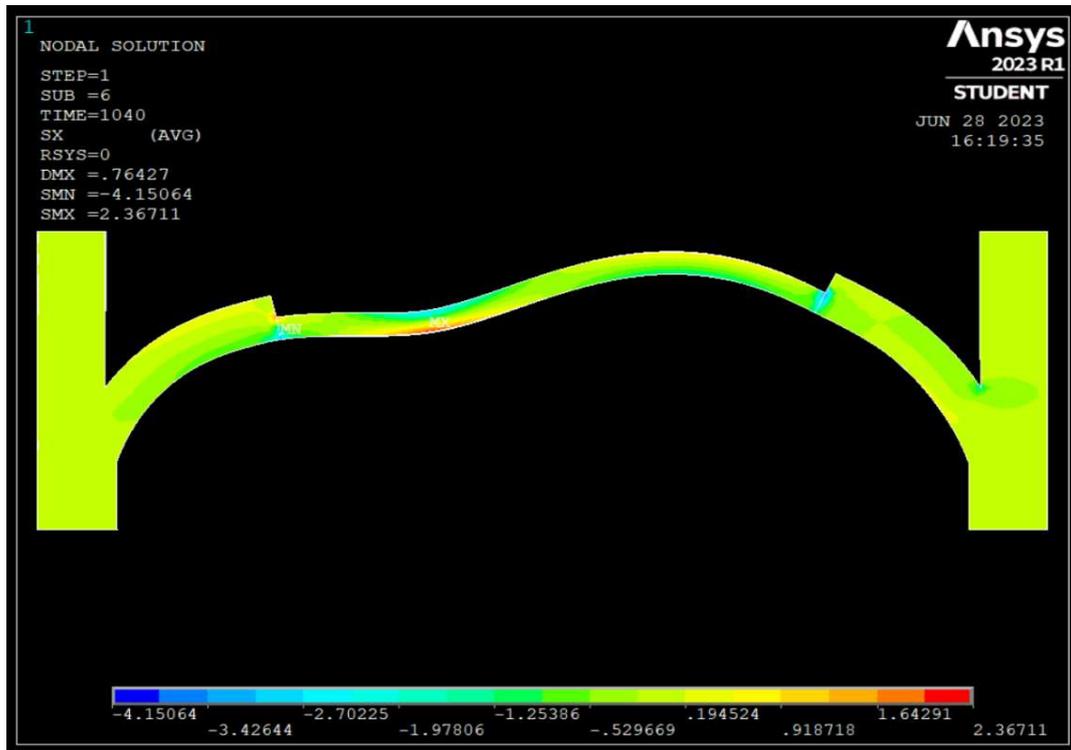


- Componente Z di spostamento (*Z component of displace*)

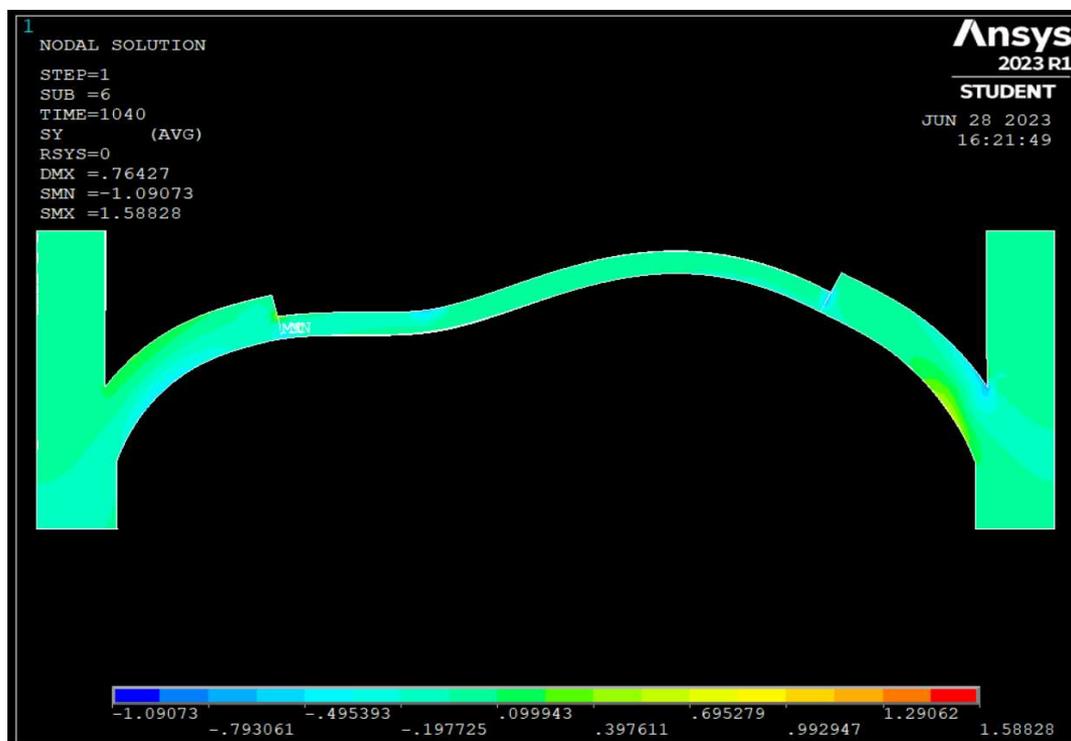


Selezionando il comando *Stress*:

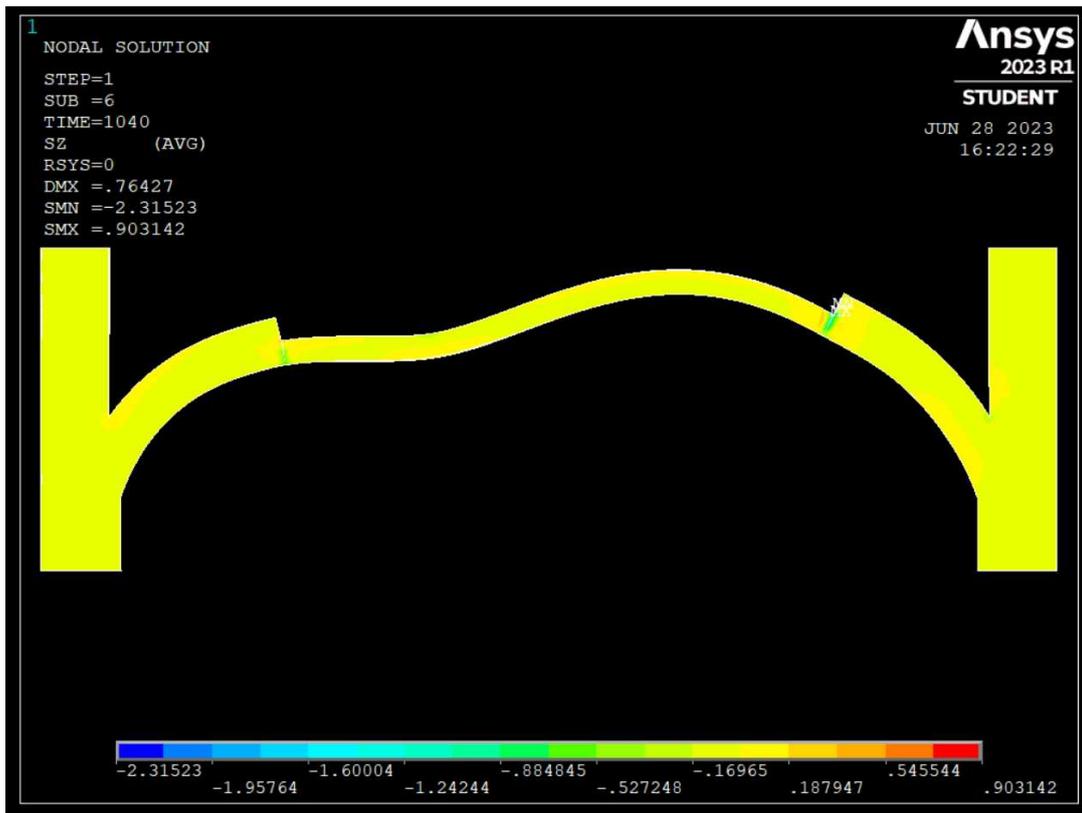
- Componente X dello stress (*X component of stress*):



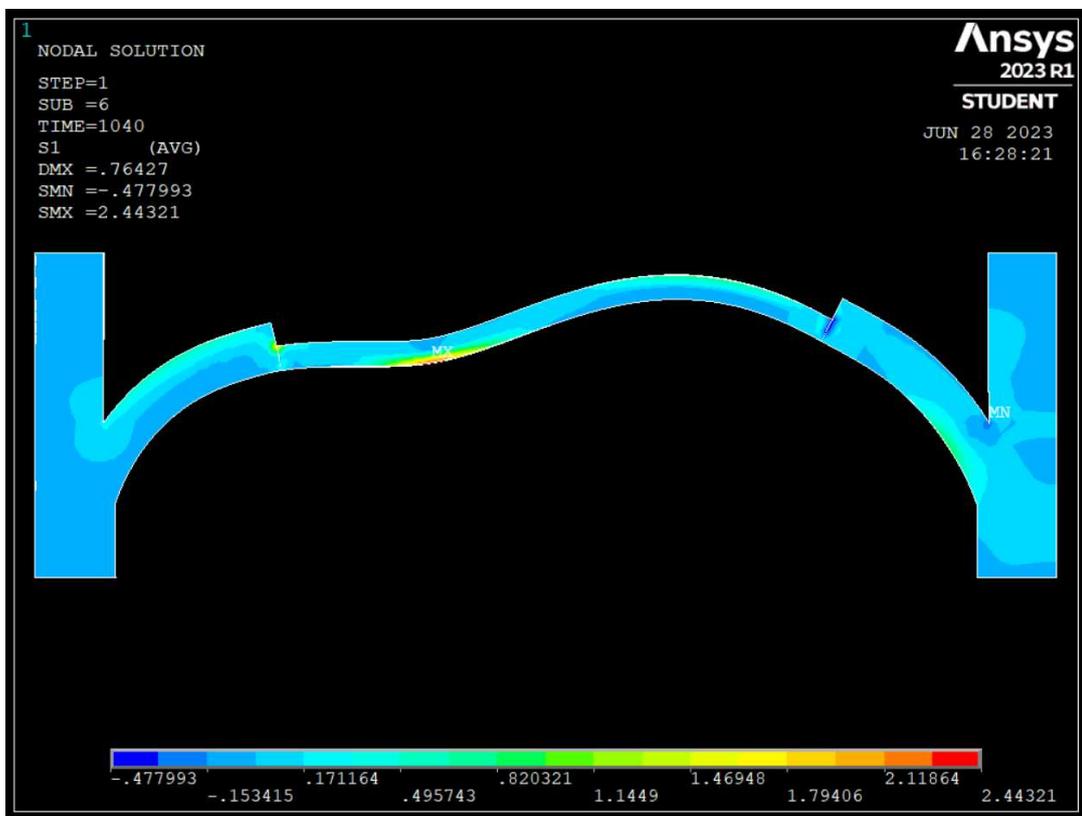
- Componente Y dello stress (*Y component of stress*):



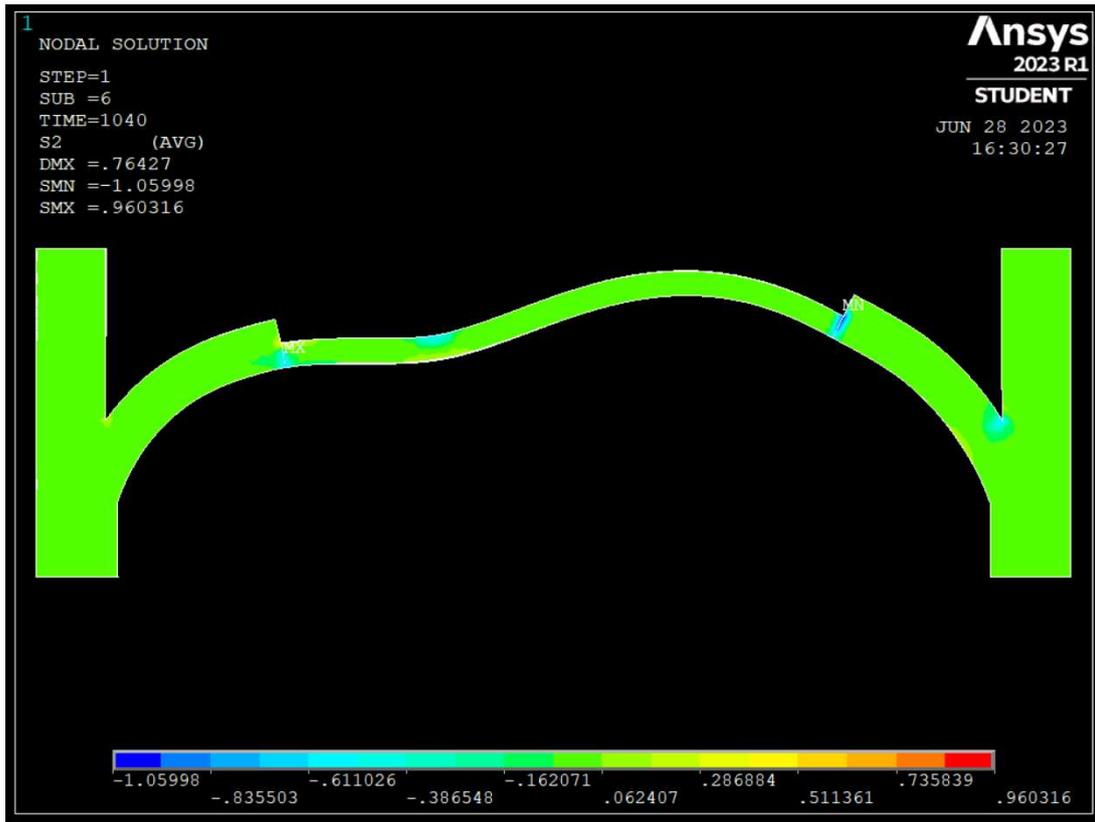
- Componente Z dello stress (*Z component of stress*):



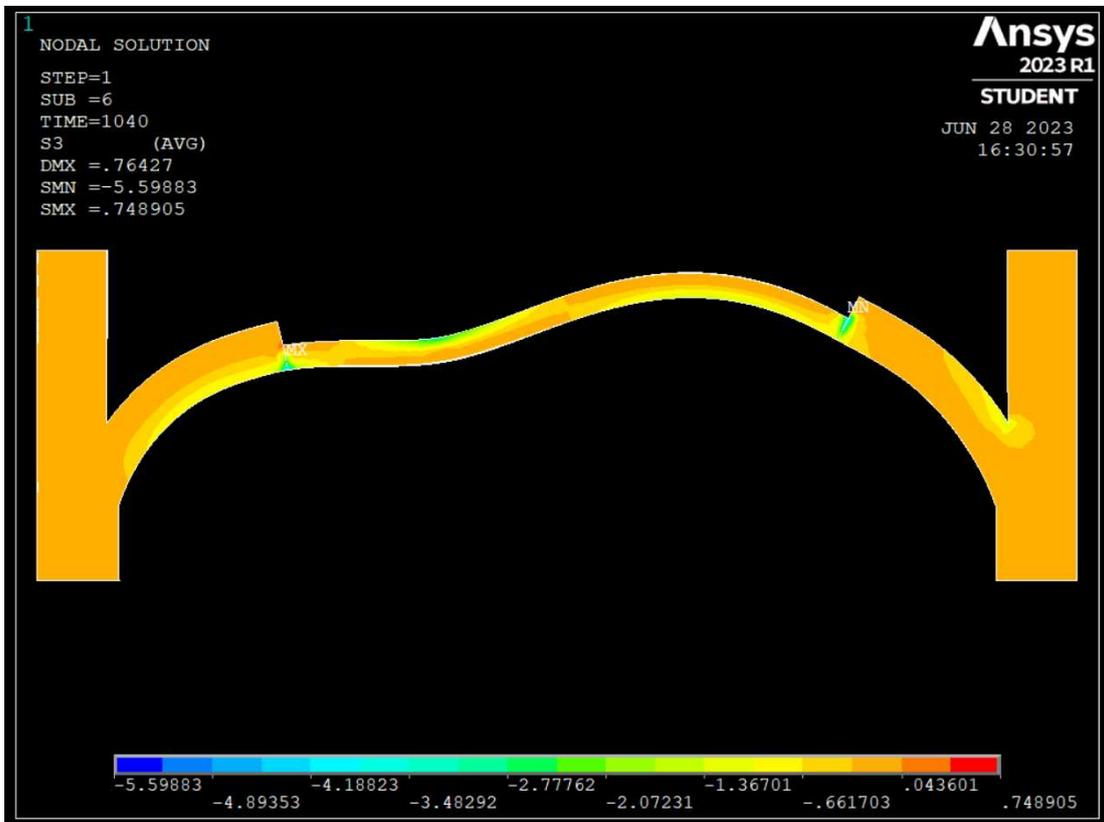
- Prima direzione principale di stress (*1st Principal stress*):



- Seconda direzione principale di stress (*2st Principal stress*):

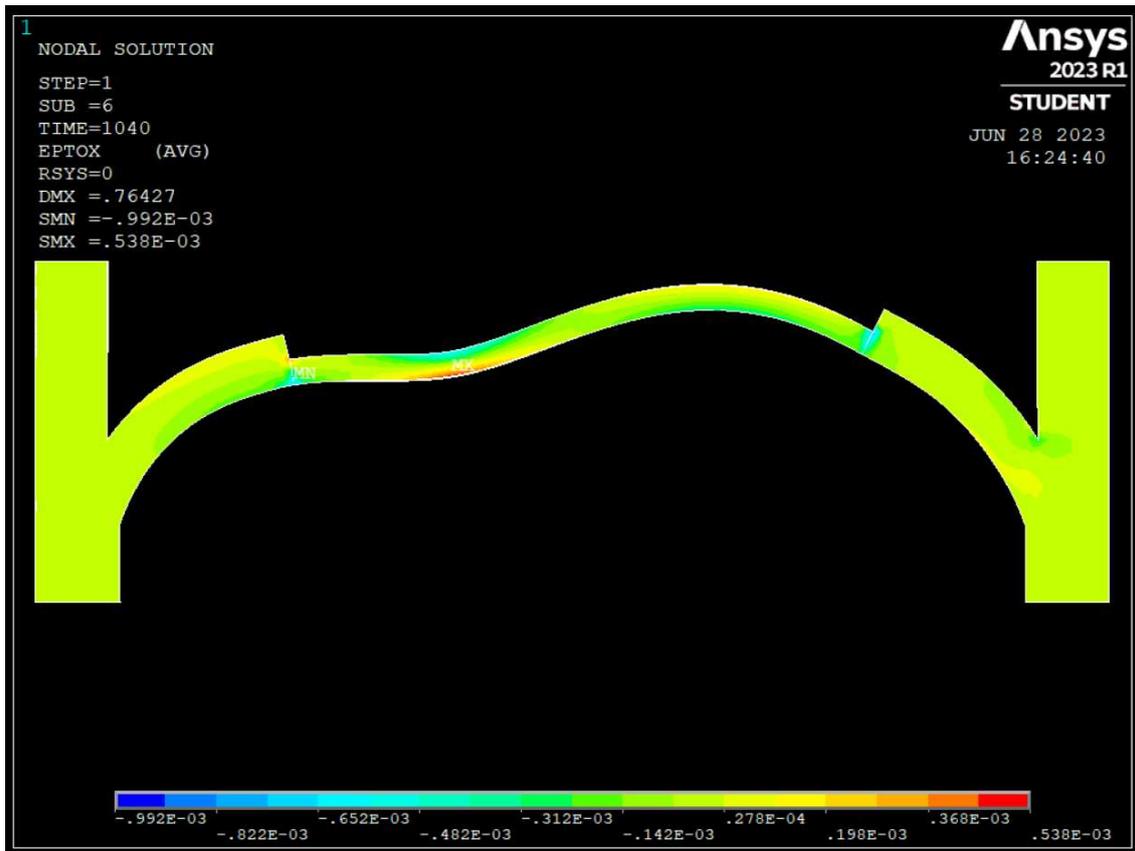


- Terza direzione principale di stress (*3st Principal stress*):

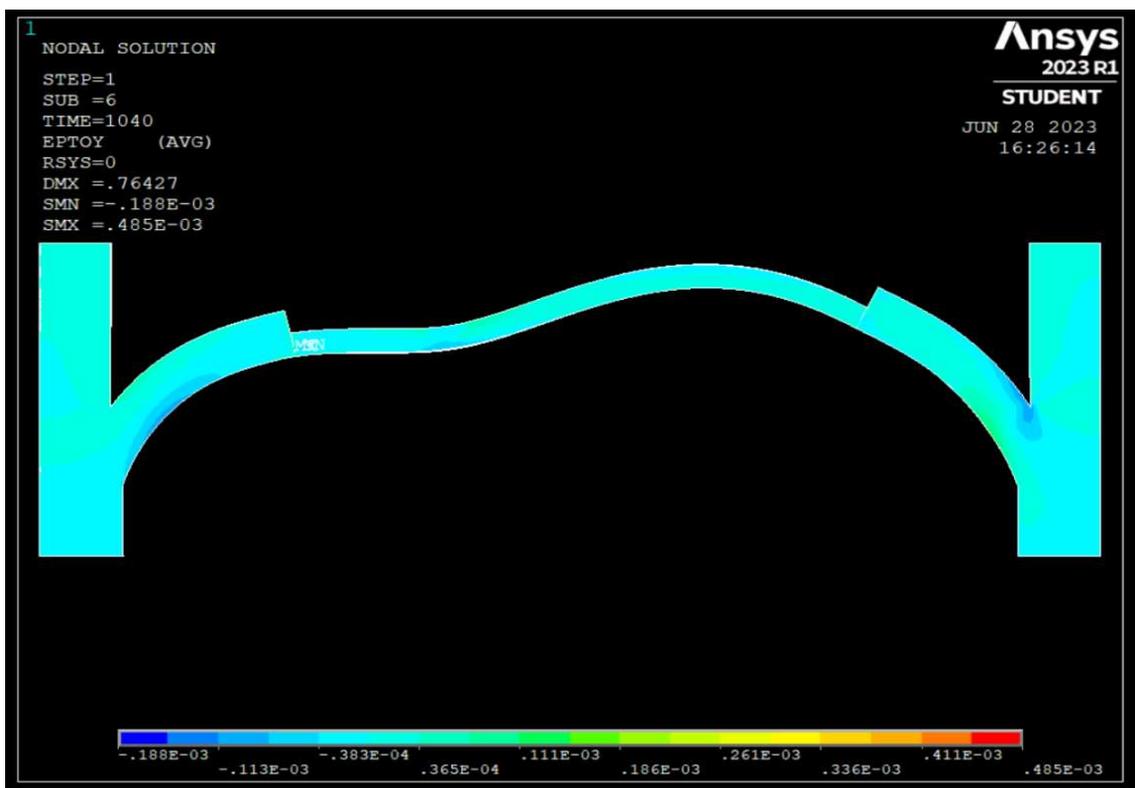


Selezionando *Total mechanical strain* si visualizzano le deformazioni.

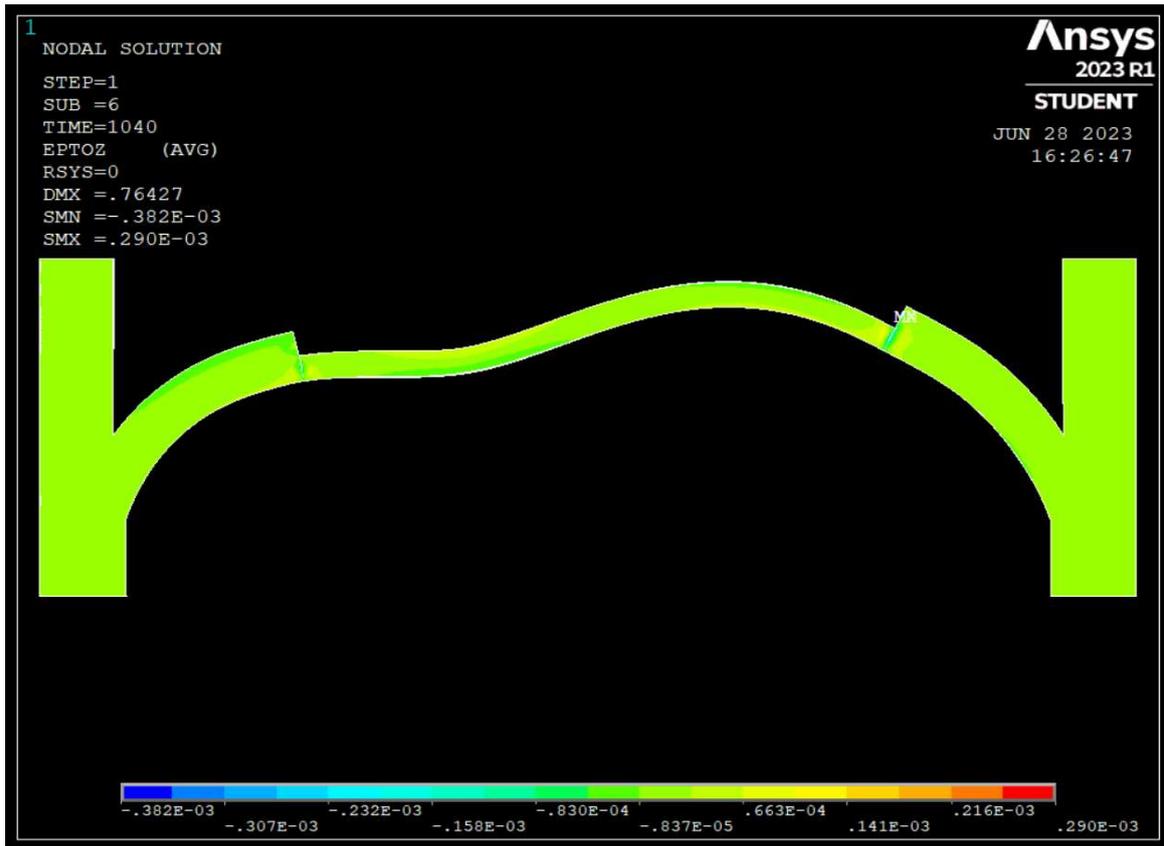
- Componente X della deformazione meccanica totale:



- Componente Y della deformazione meccanica totale:



- Componente Z della deformazione meccanica totale:



4.2.2. Risultati dell'analisi

In seguito si sono confrontati i risultati ottenuti dall'analisi con quelli della sperimentazione, valutando gli spostamenti dei nodi nelle sezioni in cui sono stati applicati i 7 trasduttori. Le sezioni e la posizione di quest'ultimi sono riscontrabili in figura 4.32.

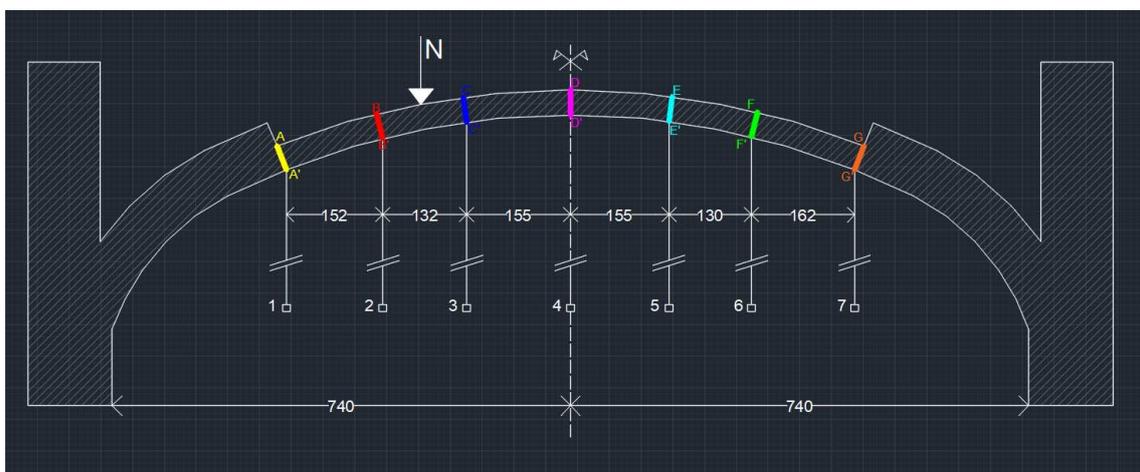
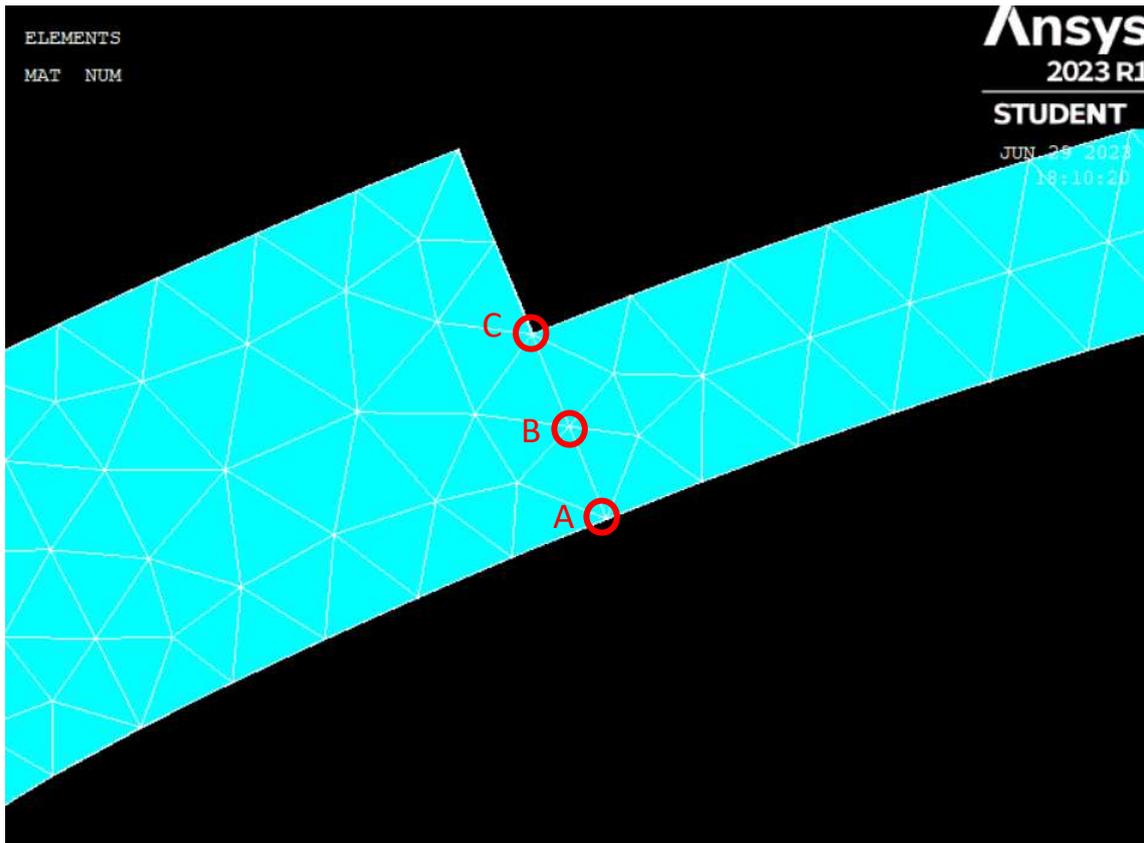


Figura 4.32:
Posizione dei vari trasduttori

La bontà dei risultati è stata valutata mediante un confronto fra delle curve, realizzate con Excel, indicando in rosso le curve relative agli spostamenti valutati durante la sperimentazione (Curve EXP), in blu, le curve relative agli spostamenti valutati durante l'analisi (Curve FEM). Quest'ultime sono state eseguite facendo la media dei vari spostamenti dei 3 nodi presenti nelle sezioni considerate.

- **Trasduttore 1: Sezione A-A'**



*Figura 4.33:
Posizione dei 3 nodi nella sezione A-A'*

Come detto precedentemente attraverso la voce **Time History Postprocessor** si possono visualizzare gli spostamenti relativi ad ognuno di esso:

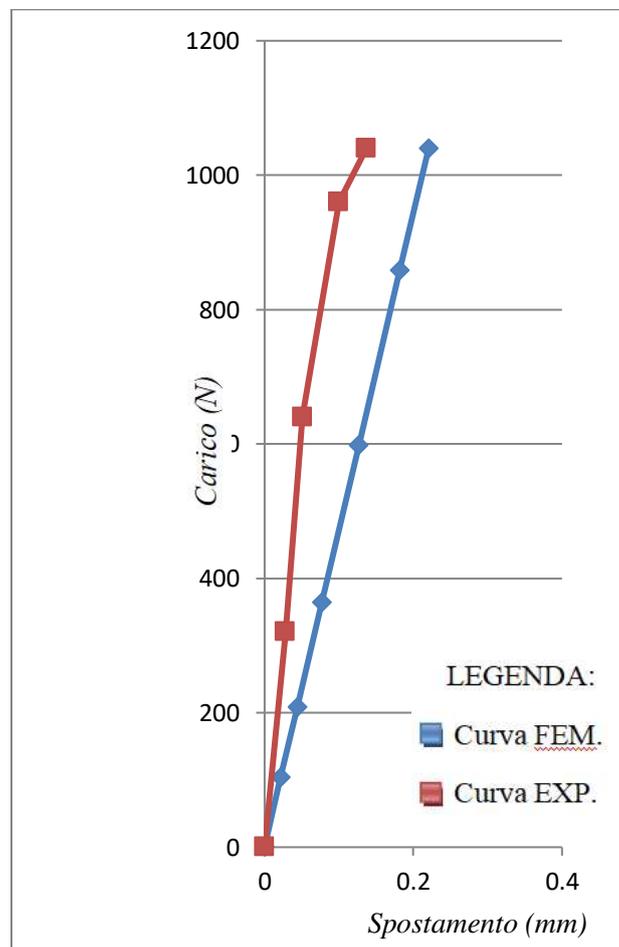
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.023
2° substep	208	0.047
3° substep	364	0.083
4° substep	598	0.136
5° substep	858	0.195
6° substep	1040	0.237

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)	Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0		0	0
1° substep	104	0.022	1° substep	104	0.02
2° substep	208	0.044	2° substep	208	0.041
3° substep	364	0.077	3° substep	364	0.071
4° substep	598	0.126	4° substep	598	0.118
5° substep	858	0.181	5° substep	858	0.169
6° substep	1040	0.22	6° substep	1040	0.205

Fra essi, si esegue la media ad ogni substep di carico e si considerano anche i valori sperimentali:

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)	Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0		0	0
1° substep	320	0.028	1° substep	104	0.0217
2° substep	640	0.051	2° substep	208	0.0440
3° substep	960	0.100	3° substep	364	0.0770
4° substep	1040	0.137	4° substep	598	0.1267
			5° substep	858	0.1817
			6° substep	1040	0.2207

Si costruiscono infine le due curve:



- **Trasduttore 2: Sezione B-B'**

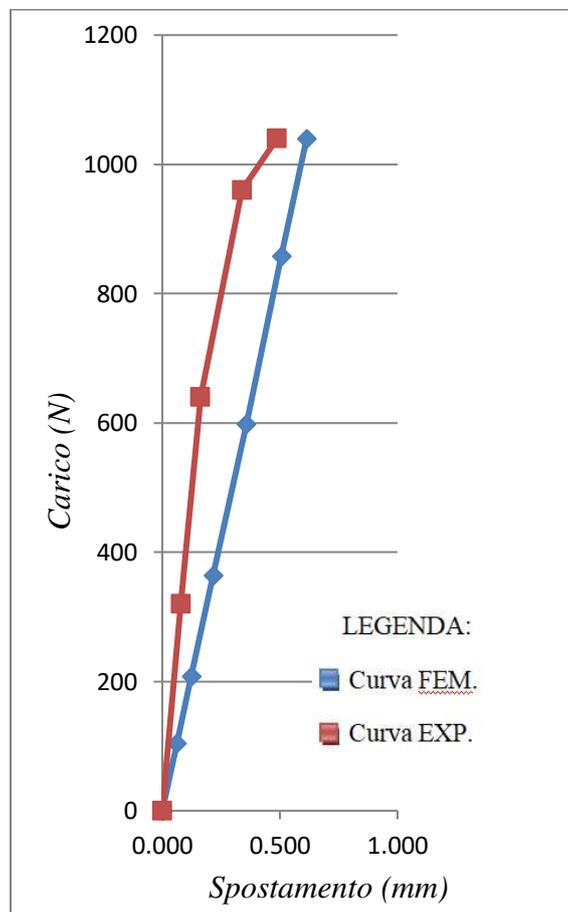
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.063
2° substep	208	0.126
3° substep	364	0.22
4° substep	598	0.365
5° substep	858	0.523
6° substep	1040	0.643

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.061
2° substep	208	0.123
3° substep	364	0.215
4° substep	598	0.353
5° substep	858	0.507
6° substep	1040	0.615

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.061
2° substep	208	0.122
3° substep	364	0.214
4° substep	598	0.352
5° substep	858	0.506
6° substep	1040	0.613

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	104	0.062
2° substep	208	0.124
3° substep	364	0.216
4° substep	598	0.357
5° substep	858	0.507
6° substep	1040	0.614

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	320	0.08
2° substep	640	0.163
3° substep	960	0.339
4° substep	1040	0.488



- **Trasduttore 3: Sezione C-C'**

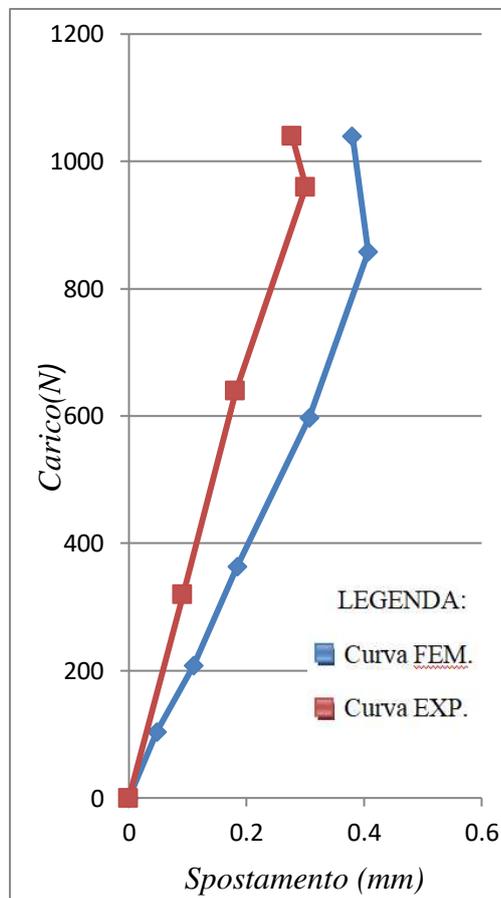
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.048
2°substep	208	0.116
3°substep	364	0.19
4°substep	598	0.311
5°substep	858	0.5
6°substep	1040	0.381

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.047
2°substep	208	0.114
3°substep	364	0.16
4°substep	598	0.306
5°substep	858	0.354
6°substep	1040	0.371

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.048
2°substep	208	0.1
3°substep	364	0.204
4°substep	598	0.305
5°substep	858	0.367
6°substep	1040	0.388

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.048
2°substep	208	0.110
3°substep	364	0.185
4°substep	598	0.307
5°substep	858	0.407
6°substep	1040	0.380

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	320	0.092
2°substep	640	0.182
3°substep	960	0.301
4°substep	1040	0.278



- **Trasduttore 4: Sezione D-D'**

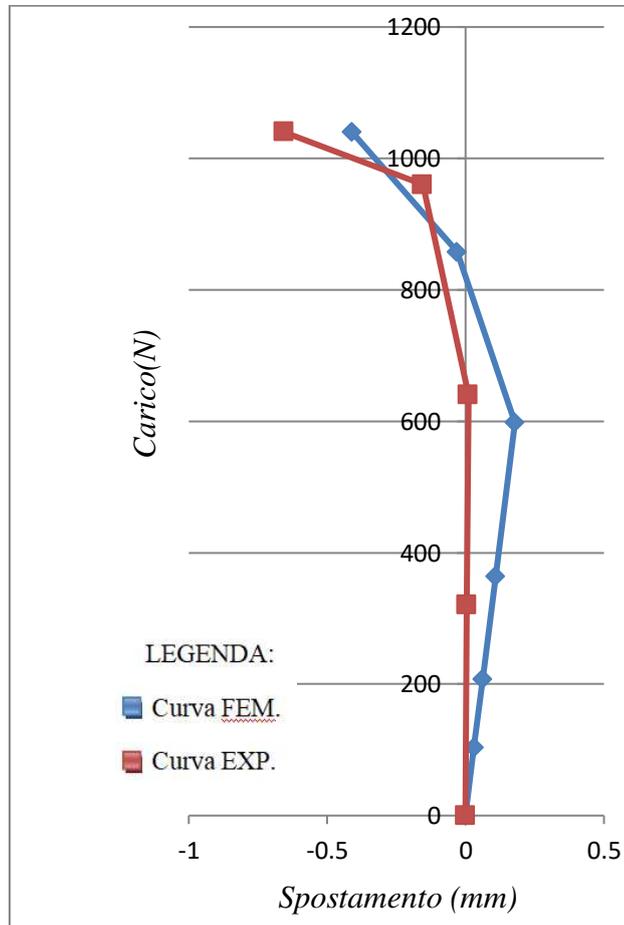
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.031
2° substep	208	0.062
3° substep	364	0.108
4° substep	598	0.178
5° substep	858	-0.02
6° substep	1040	-0.411

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.03
2° substep	208	0.061
3° substep	364	0.108
4° substep	598	0.178
5° substep	858	-0.032
6° substep	1040	-0.409

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.031
2° substep	208	0.062
3° substep	364	0.109
4° substep	598	0.179
5° substep	858	-0.04
6° substep	1040	-0.411

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	0.031
2° substep	208	0.062
3° substep	364	0.108
4° substep	598	0.178
5° substep	858	-0.031
6° substep	1040	-0.410

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	320	0.005
2° substep	640	0.011
3° substep	960	-0.155
4° substep	1040	-0.656



- **Trasduttore 5: Sezione E-E'**

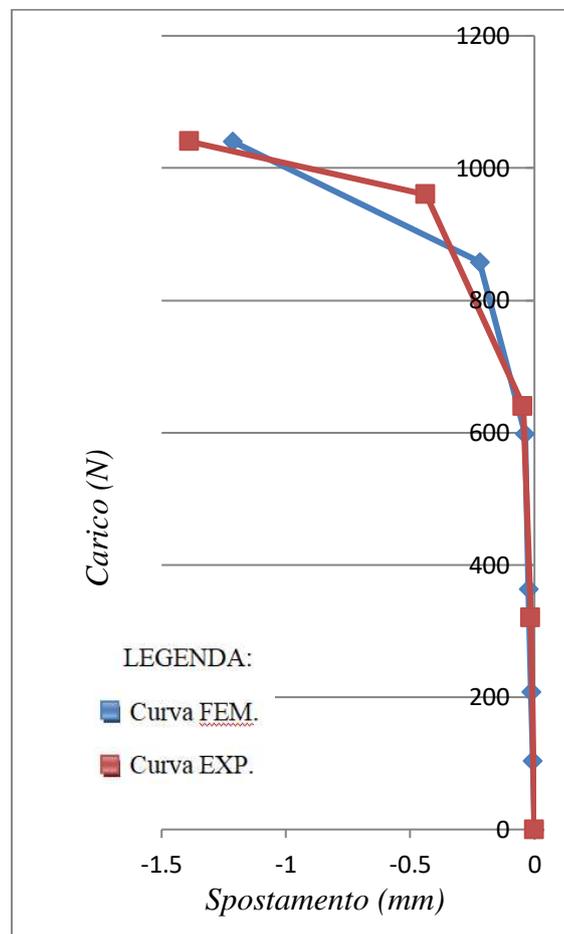
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.0075
2°substep	208	-0.015
3°substep	364	-0.026
4°substep	598	-0.043
5°substep	858	-0.2
6°substep	1040	-1.18

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.0067
2°substep	208	-0.013
3°substep	364	-0.023
4°substep	598	-0.038
5°substep	858	-0.22
6°substep	1040	-1.2

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.006
2°substep	208	-0.012
3°substep	364	-0.021
4°substep	598	-0.034
5°substep	858	-0.24
6°substep	1040	-1.26

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.007
2°substep	208	-0.013
3°substep	364	-0.023
4°substep	598	-0.038
5°substep	858	-0.220
6°substep	1040	-1.213

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	320	-0.014
2°substep	640	-0.046
3°substep	960	-0.437
4°substep	1040	-1.387



- **Trasduttore 6: Sezione F-F'**

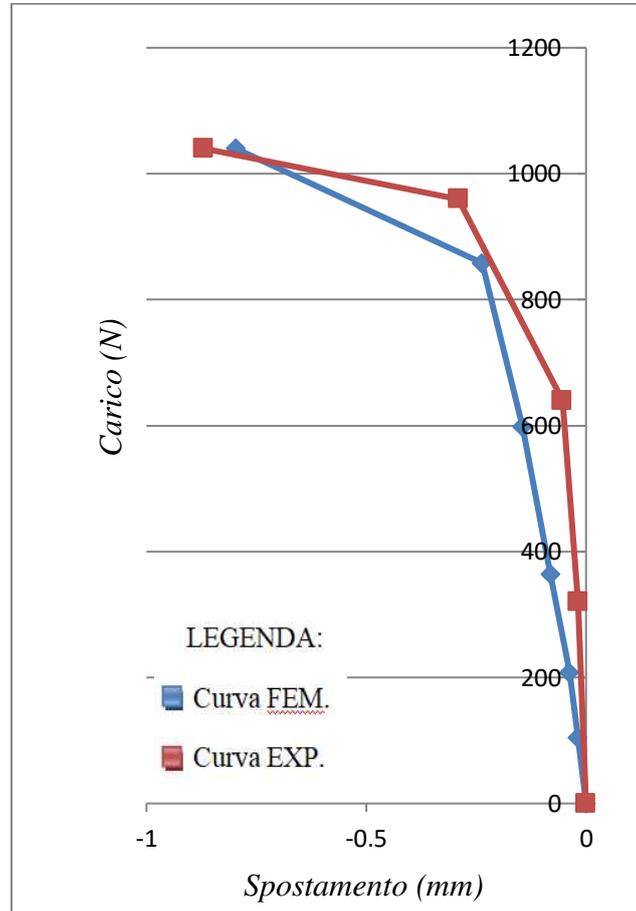
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.018
2°substep	208	-0.037
3°substep	364	-0.1
4°substep	598	-0.145
5°substep	858	-0.237
6°substep	1040	-0.7

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.018
2°substep	208	-0.038
3°substep	364	-0.098
4°substep	598	-0.142
5°substep	858	-0.233
6°substep	1040	-0.82

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.019
2°substep	208	-0.038
3°substep	364	-0.044
4°substep	598	-0.147
5°substep	858	-0.24
6°substep	1040	-0.87

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.018
2°substep	208	-0.038
3°substep	364	-0.081
4°substep	598	-0.145
5°substep	858	-0.237
6°substep	1040	-0.797

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	320	-0.018
2°substep	640	-0.054
3°substep	960	-0.29
4°substep	1040	-0.87



- **Trasduttore 7: Sezione G-G'**

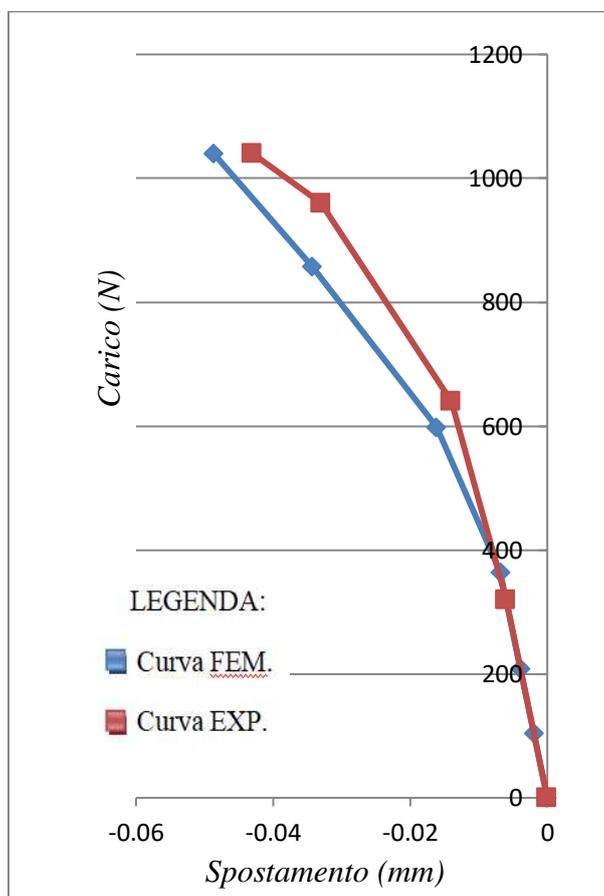
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.002
2° substep	208	-0.004
3° substep	364	-0.007
4° substep	598	-0.0115
5° substep	858	-0.029
6° substep	1040	-0.046

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.0019
2° substep	208	-0.0039
3° substep	364	-0.0068
4° substep	598	-0.018
5° substep	858	-0.034
6° substep	1040	-0.048

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.0019
2° substep	208	-0.0038
3° substep	364	-0.0066
4° substep	598	-0.019
5° substep	858	-0.04
6° substep	1040	-0.052

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	104	-0.002
2° substep	208	-0.004
3° substep	364	-0.007
4° substep	598	-0.016
5° substep	858	-0.034
6° substep	1040	-0.049

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	320	-0.006
2° substep	640	-0.014
3° substep	960	-0.033
4° substep	1040	-0.043



Infine, prendendo in considerazione la prima tensione ideale è stato costruito anche lo stato fessurativo dell'arco a pieno carico (1040N) . A seguito della formazione delle 3 cerniere plastiche l'elemento raggiungerà il collasso. Quest'ultime evidenziabili in figura 4.34:

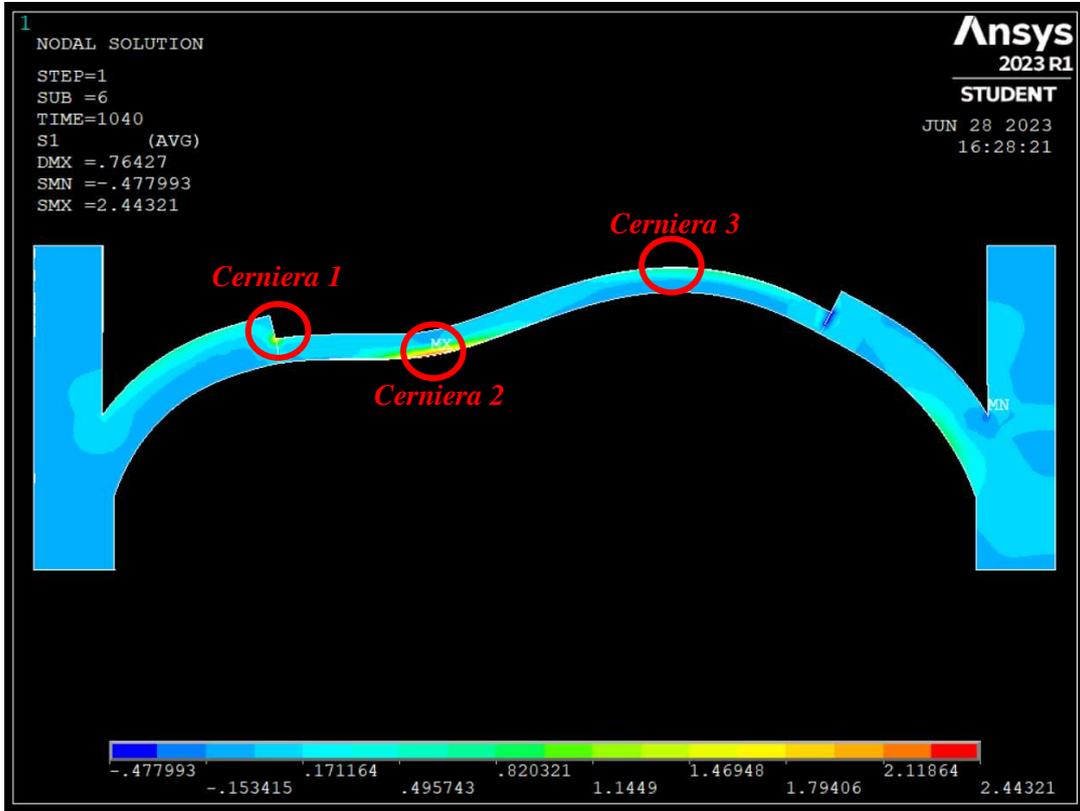


Figura 4.34:
 Finestra della prima tensione ideale.
 Individuazione delle 3 cerniere plastiche

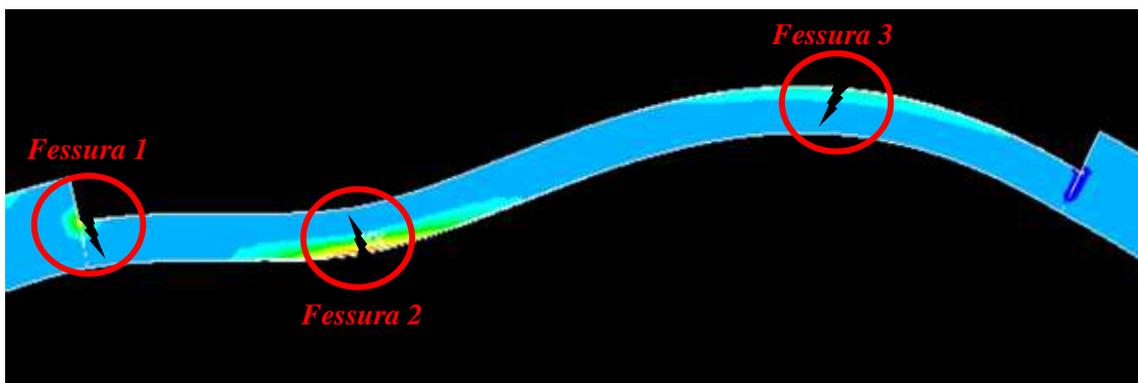


Figura 4.35:
 Quadro fessurativo

4.3. MODELLAZIONE DELL'ARCO IN MURATURA RINFORZATO:

4.3.1. Descrizione della modellazione

In quest'ultimo paragrafo viene descritta la modellazione dell'arco rinforzato.

Il rinforzo è stato aggiunto per l'intera larghezza dell'intradosso dell'elemento ed il materiale scelto è un composito in fibra di vetro (GFRP).

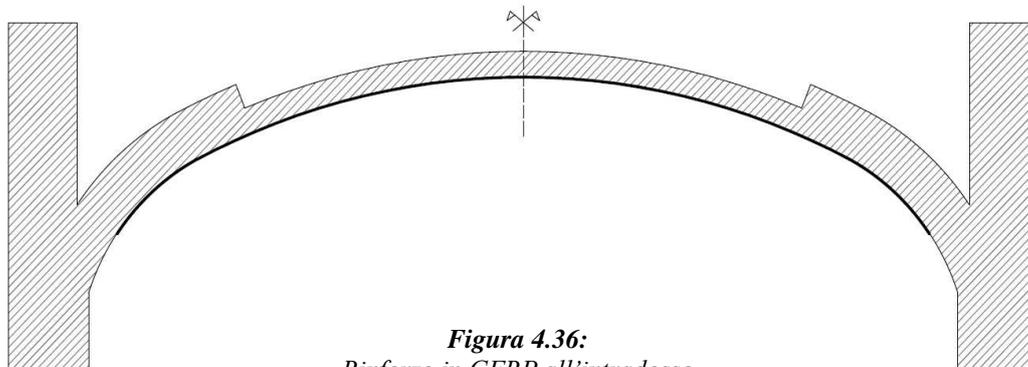


Figura 4.36:
Rinforzo in GFRP all'intradosso
Dell'arco

Anche in tal caso non verranno descritti i comandi utilizzati all'interno del programma, bensì si descriveranno i passaggi e le scelte effettuate, analizzando alla fine la bontà dei risultati che si otterranno confrontandoli con quelli della sperimentazione.

Si è mantenuto come unico tipo di elemento per tutto l'arco il *Solid186*:

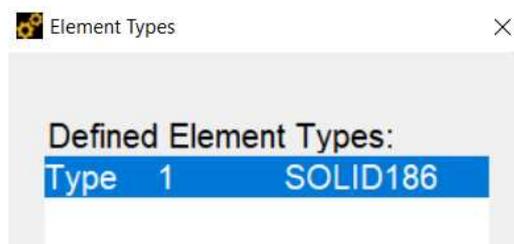


Figura 4.37:
Finestra "Element Type"
dell'arco rinforzato

In tal caso verranno determinati tre materiali, con caratteristiche differenti per le diverse parti dell'arco:

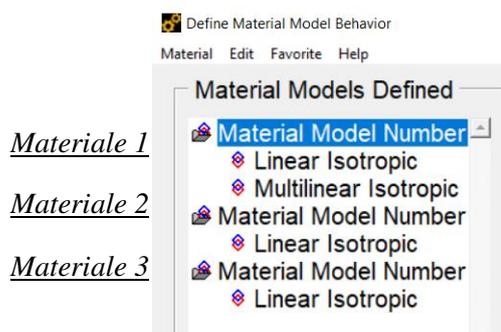


Figura 4.38:
Finestra "Material Model"

I materiali 1 e 2 sono stati utilizzati per le medesime parti dell'arco della modellazione precedente, per tale ragione i valori delle proprietà lineari e non rimangono invariati.

Il materiale 3 invece viene attribuito al rinforzo. Si è scelto un modulo elastico di quest'ultimo pari a 64000 Pa e un coefficiente di Poisson pari a 0,1. Valori riscontrabili in figura 4.39.

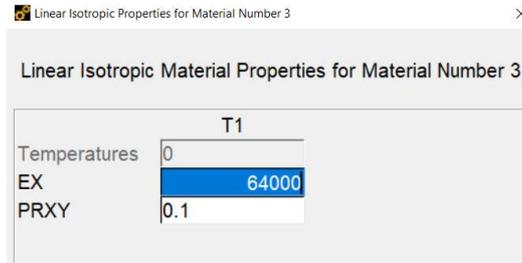


Figura 4.39:
Finestra "Isotropic".
"EX" voce relativa al modulo elastico del rinforzo, "PRXY" voce relativa al coefficiente di Poisson del rinforzo.

La fase di meshatura per la muratura è rimasta invariata, mentre il rinforzo è stato meshato come 5 diversi volumi. Quest'ultimi sono stati suddivisi in sottodomini con gli stessi criteri della muratura.

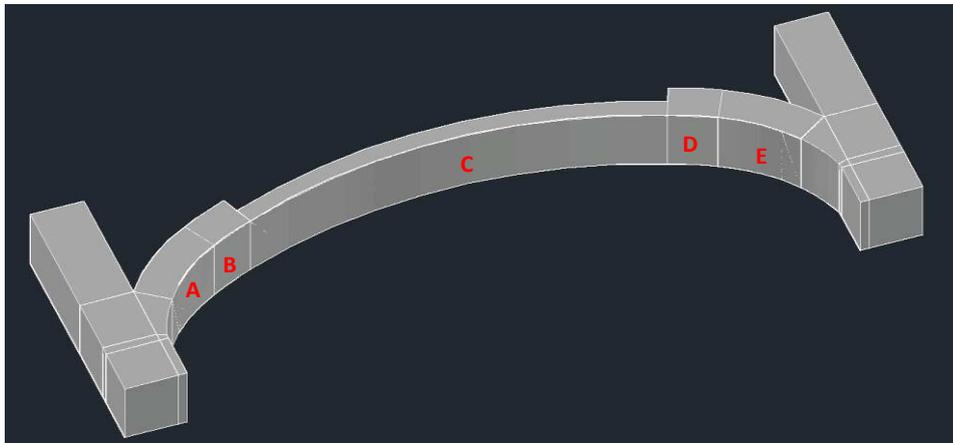


Figura 4.40:
Volumi in cui è stato suddiviso il rinforzo in GFRP.

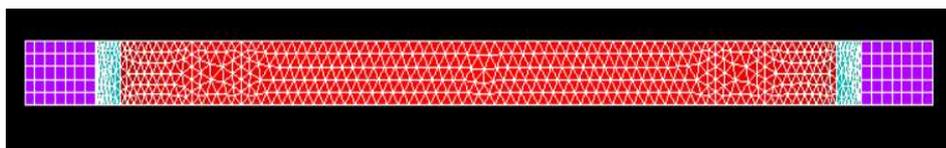


Figura 4.41:
Mesh del rinforzo, evidenziabile in rosso.

Anche in questa modellazione si vincola la struttura, stabilendo in partenza che:

- Le imposte laterali alla base funzionino come incastri perfetti, oltre ad essere vincolate lateralmente e nel retro, bloccando quindi lo spostamento lungo X e Z.
- Lo spostamento lungo Z bloccato a tutto l'arco.

Il carico invece è stato scelto come forza, ed inserito all'interno del software per un valore di circa 160N. Esso è stato stabilito suddividendo il carico massimo di 8000N per il numero di nodi che sono stati selezionati nell'area su cui esso agisce. L'applicazione è rimasta ad $\frac{1}{4}$ della luce.

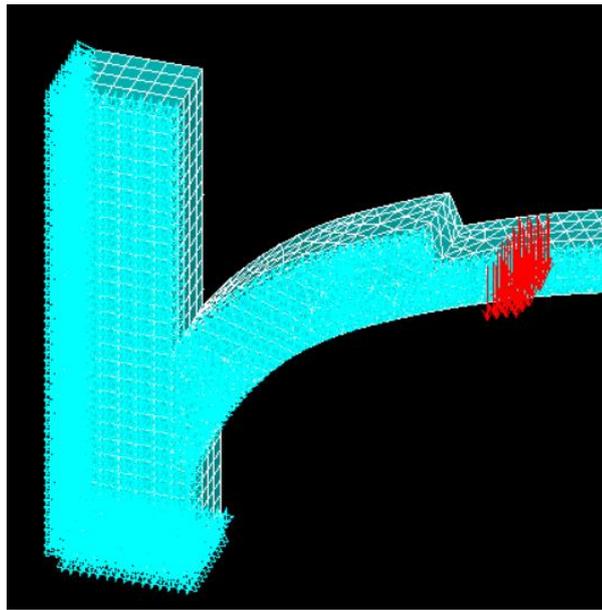


Figura 4.42:
Applicazione del carico di 160 N/mm²
ad $\frac{1}{4}$ della luce.

L'analisi rimane anche in tal caso essenzialmente la stessa, l'unica finestra in cui sono stati cambiati alcuni valori è *Basic-Solution Controls*:

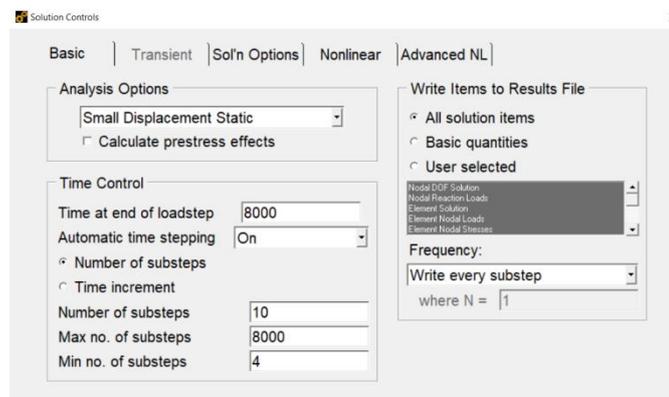


Figura 4.43:
Finestra "Basic-Solution Controls"
con i nuovi valori.

Lanciando l'analisi si ottengono i seguenti risultati:

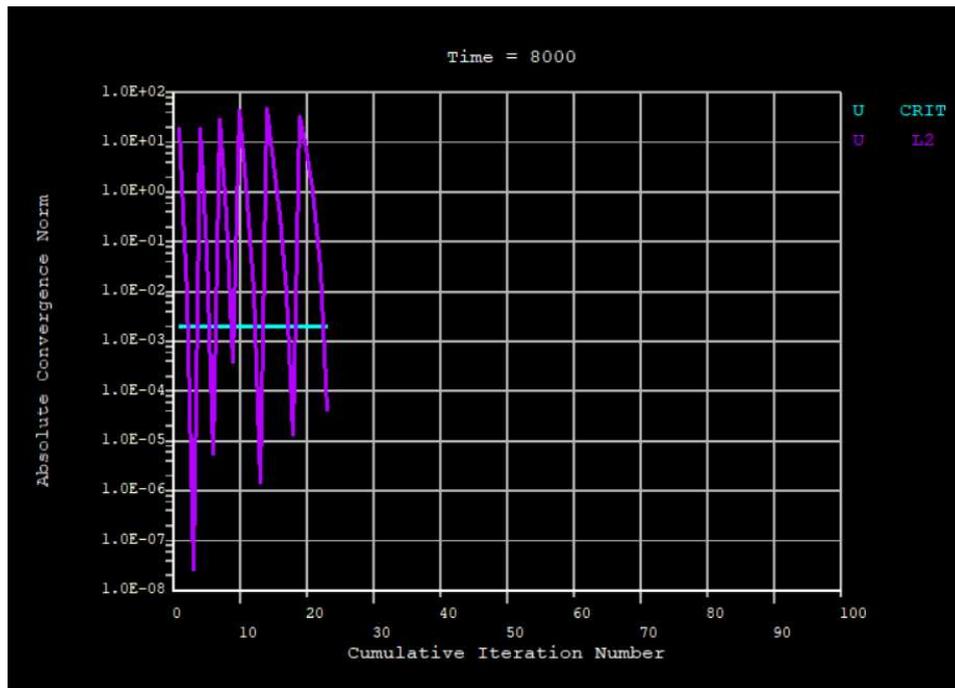


Figura 4.44:
Risultato dell'analisi

In cui, la voce *Time*, è pari al carico massimo, ovvero 8000 N.

Attraverso *GeneralPostprocessor* si possono riscontrare i valori dei vari carichi ad ogni substep.

Results File: finali.rst

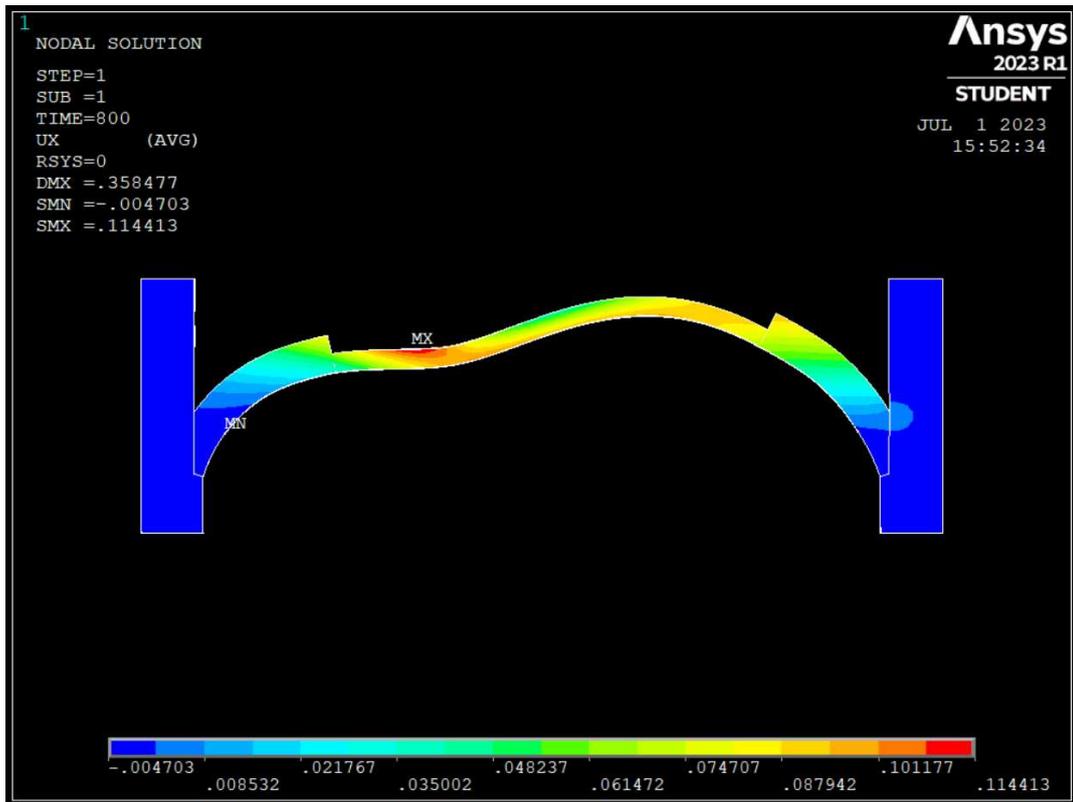
Available Data Sets:				
Set	Time	Load Step	Substep	Cumulative
1	800.00	1	1	3
2	1600.0	1	2	6
3	2800.0	1	3	9
4	4600.0	1	4	13
5	6600.0	1	5	18
6	8000.0	1	6	23

Figura 4.45:
Valori dei carichi ad ogni substep

Attraverso la voce *Time History Postprocessor* si possono visualizzare le deformazioni, tensioni e spostamenti di ogni nodo dell'arco rinforzato in una delle tre direzioni principali dello spazio, X, Y o Z.

Selezionando il comando *DOF Solution* si visionano le componenti di spostamento.

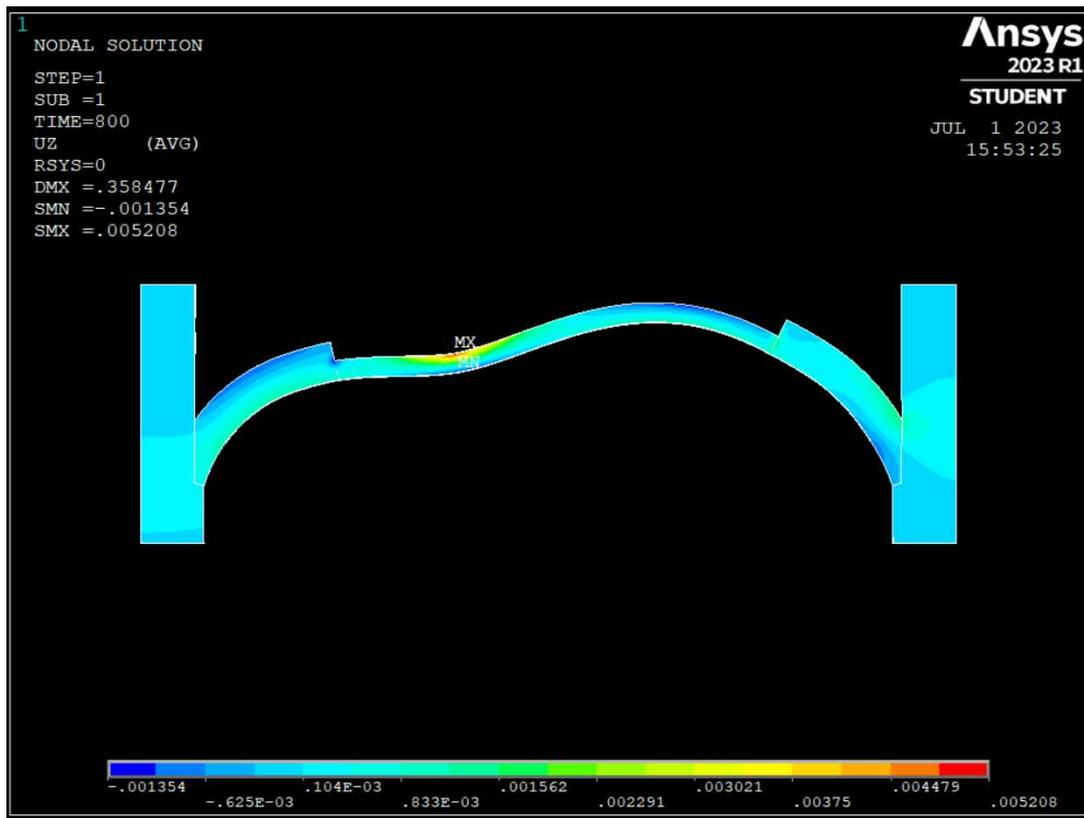
- Componente X di spostamento (*X component of displace*):



- Componente Y di spostamento (*Y component of displace*):

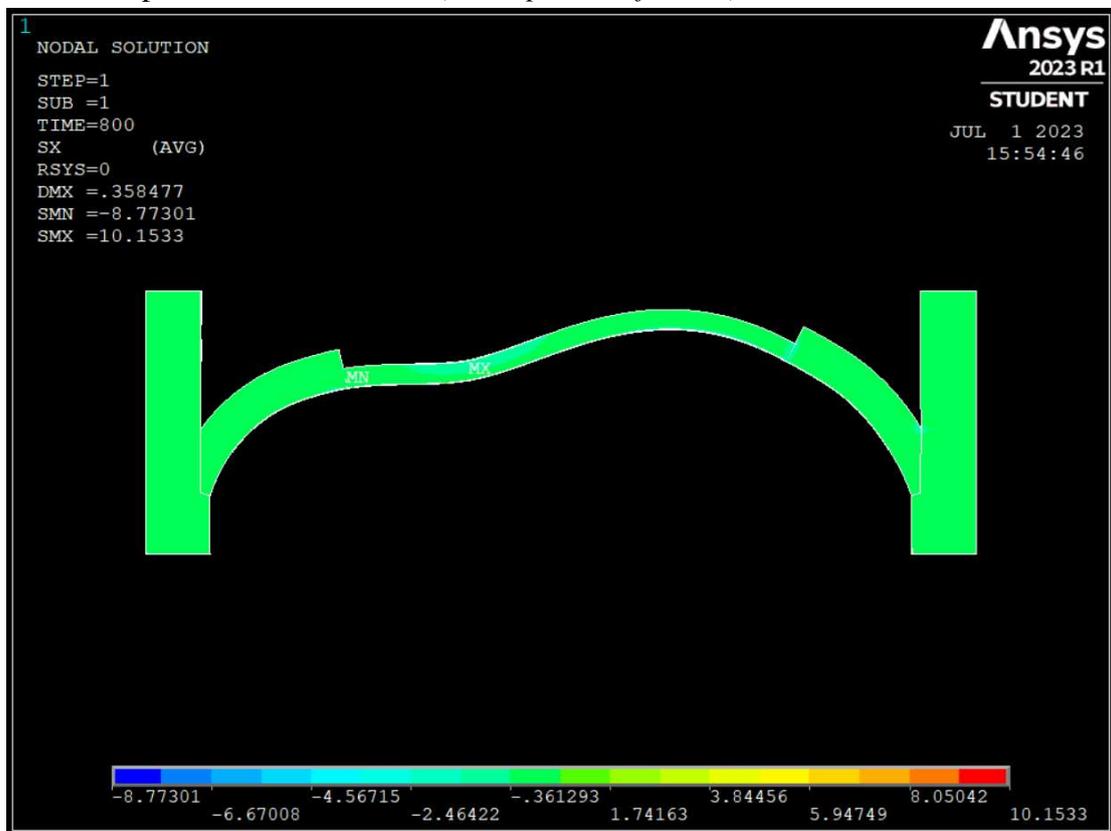


- Componente Z di spostamento (*Z component of displace*)

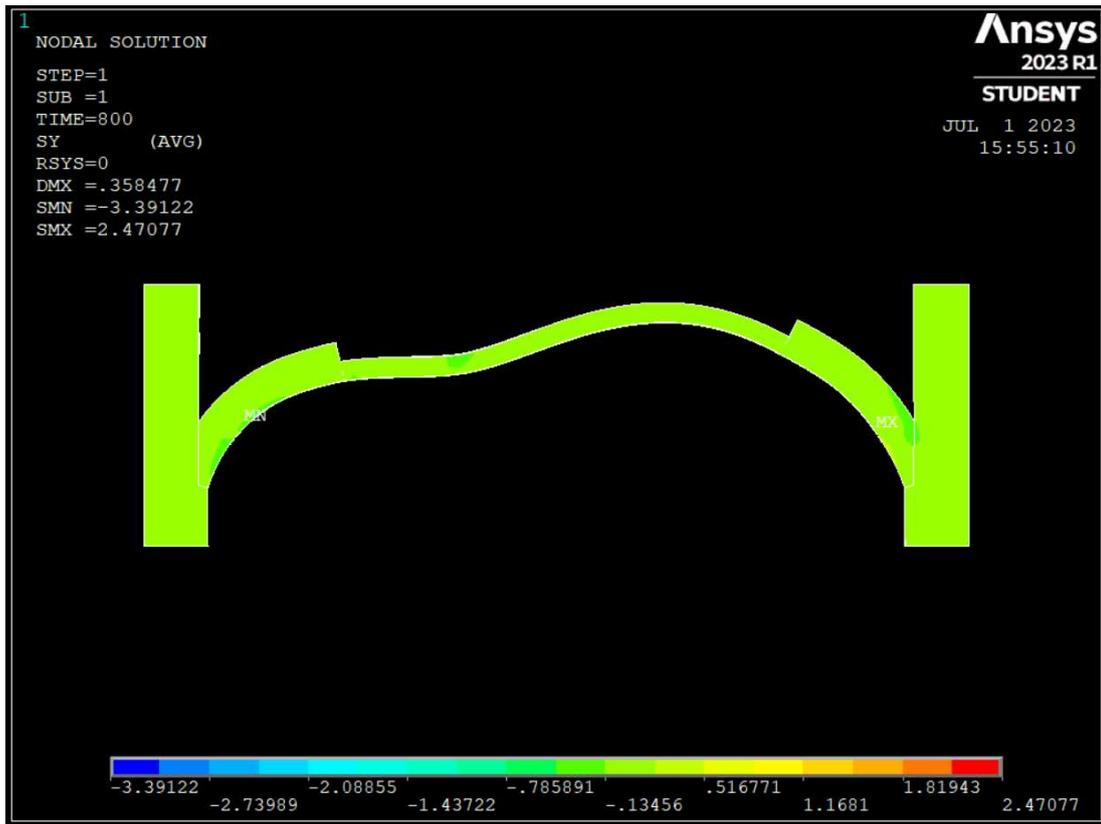


Selezionando il comando *Stress*:

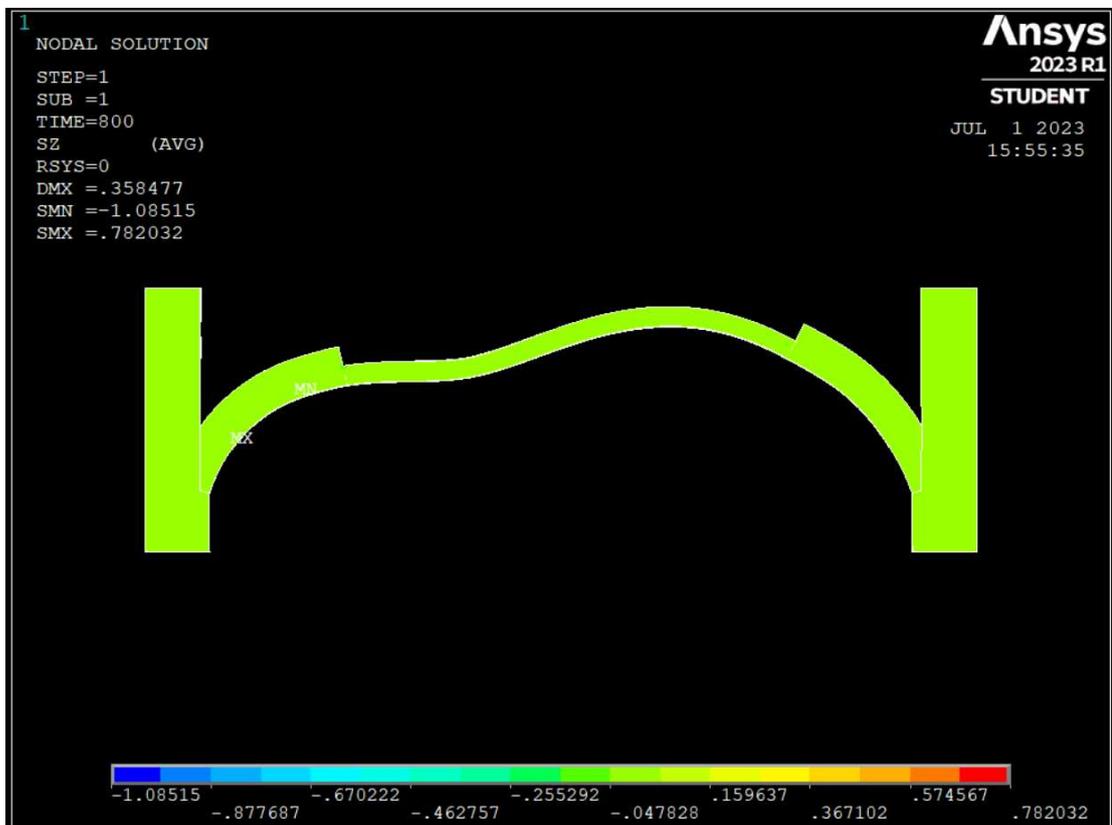
- Componente X dello stress (*X component of stress*):



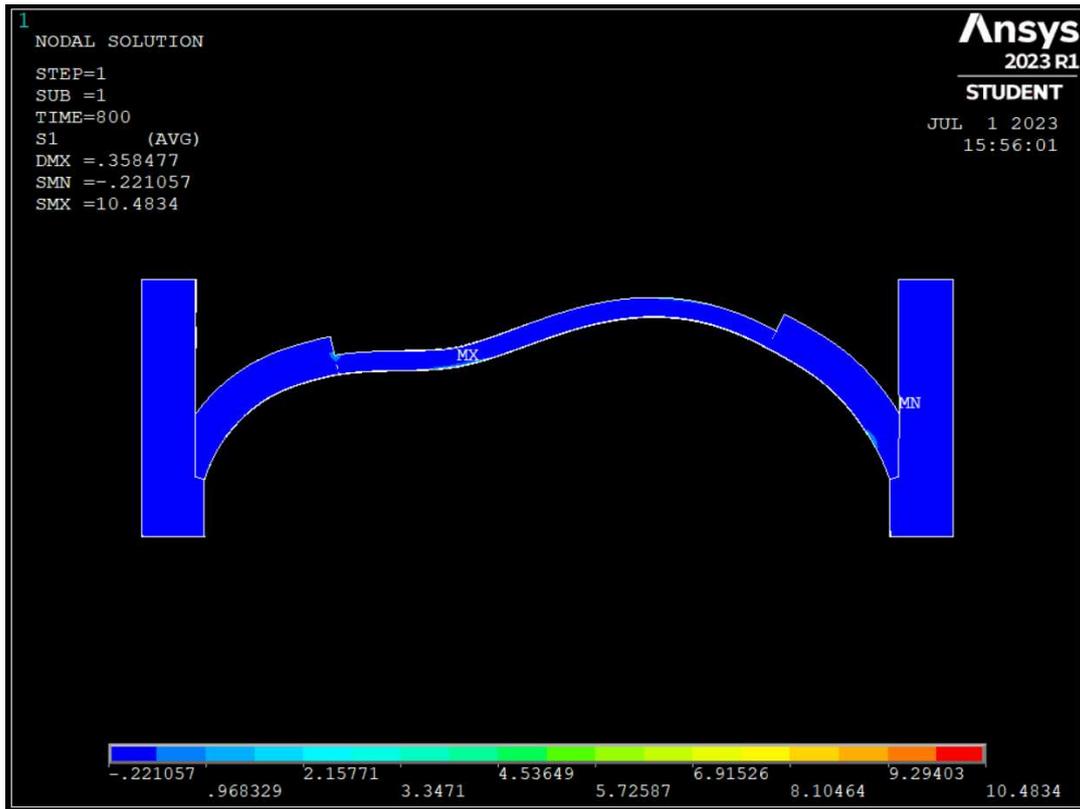
- Componente Y dello stress (*Y component of stress*):



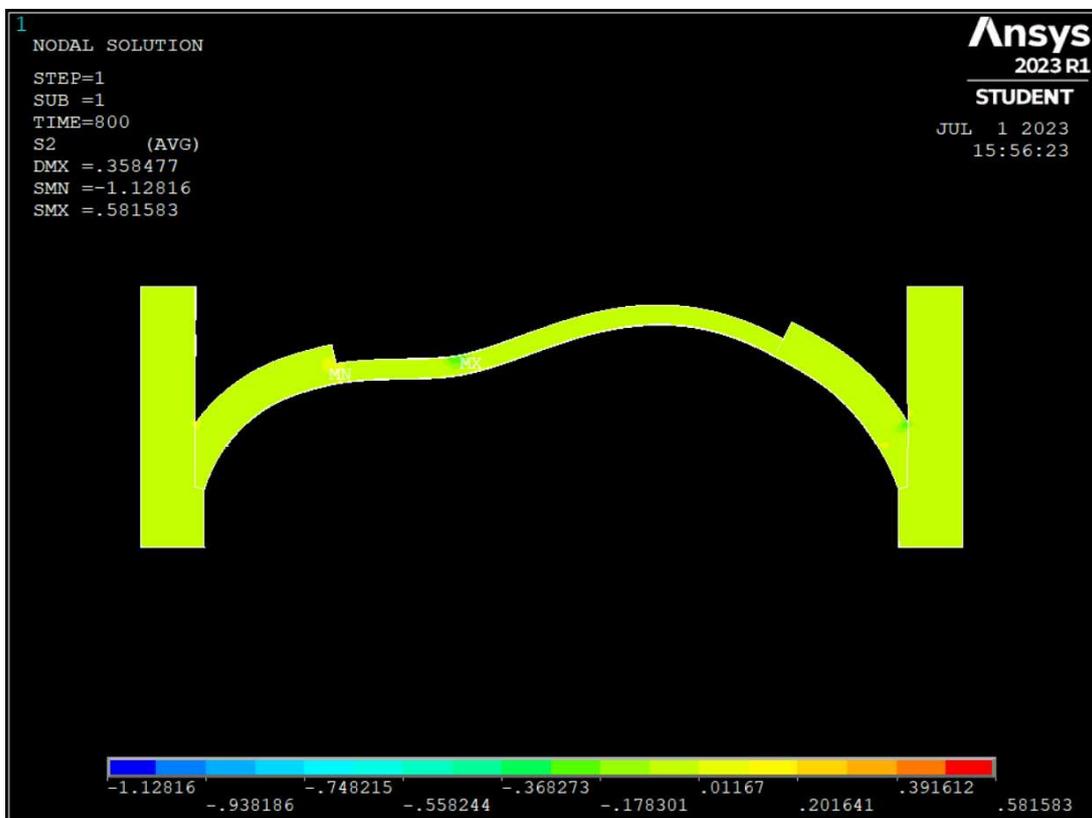
- Componente Z dello stress (*Z component of stress*):



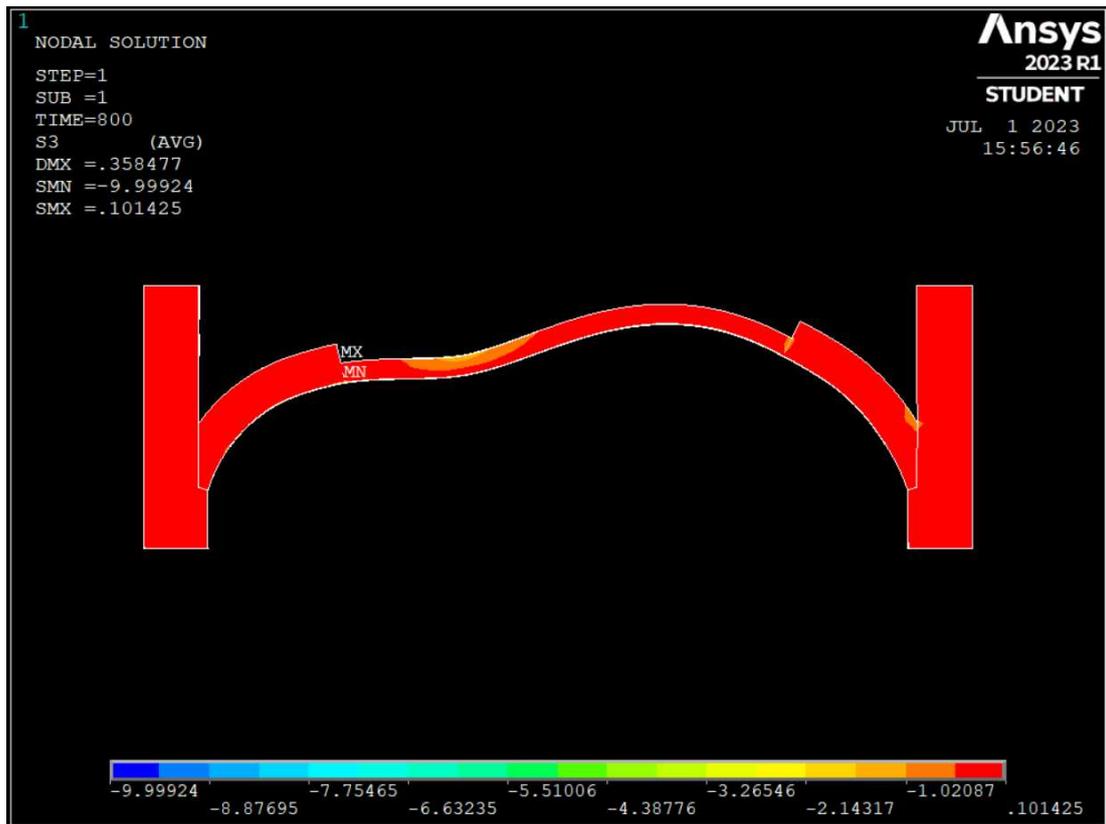
- Prima direzione principale di stress (*1st Principal stress*):



- Seconda direzione principale di stress (*2st Principal stress*):

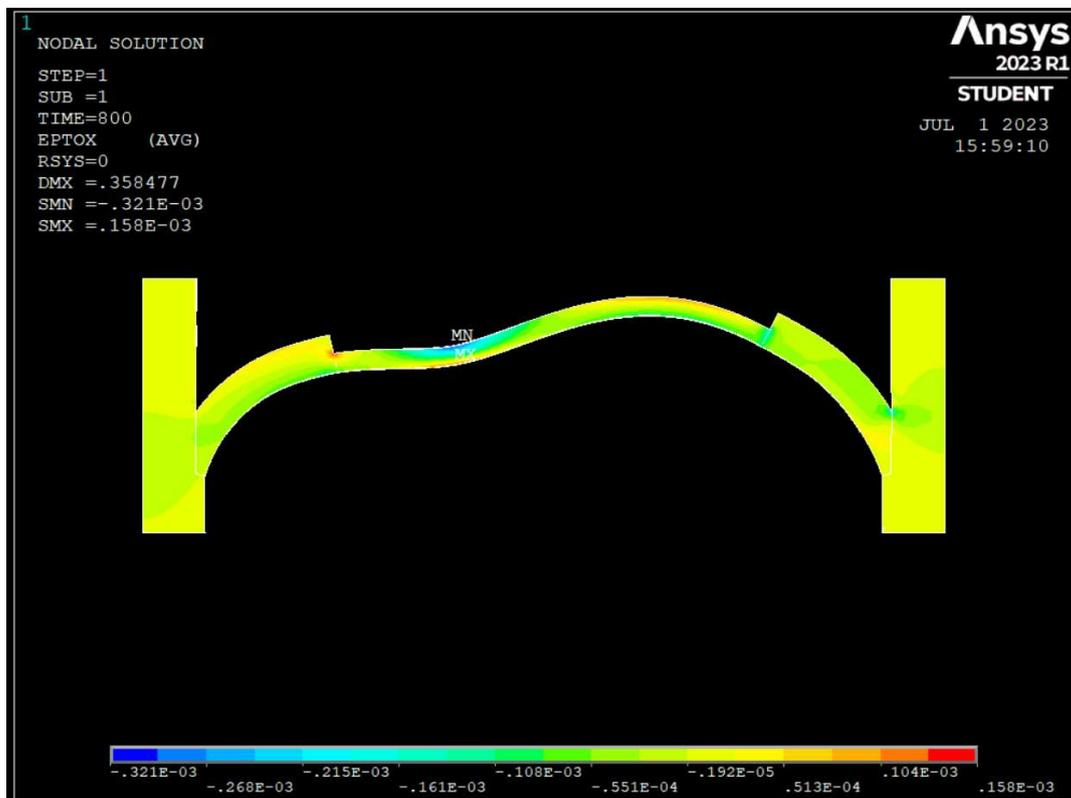


- Terza direzione principale di stress (*3st Principal stress*):

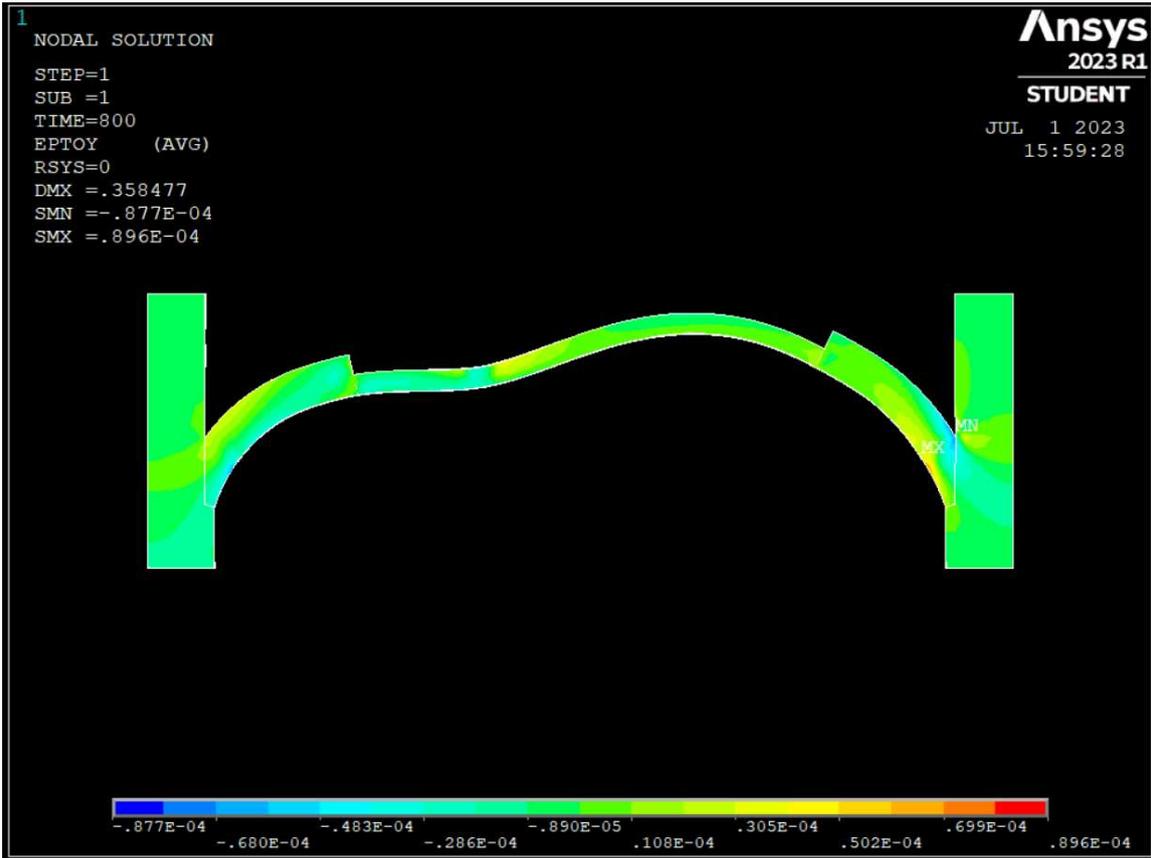


Selezionando *Total mechanical strain* si visualizzano le deformazioni.

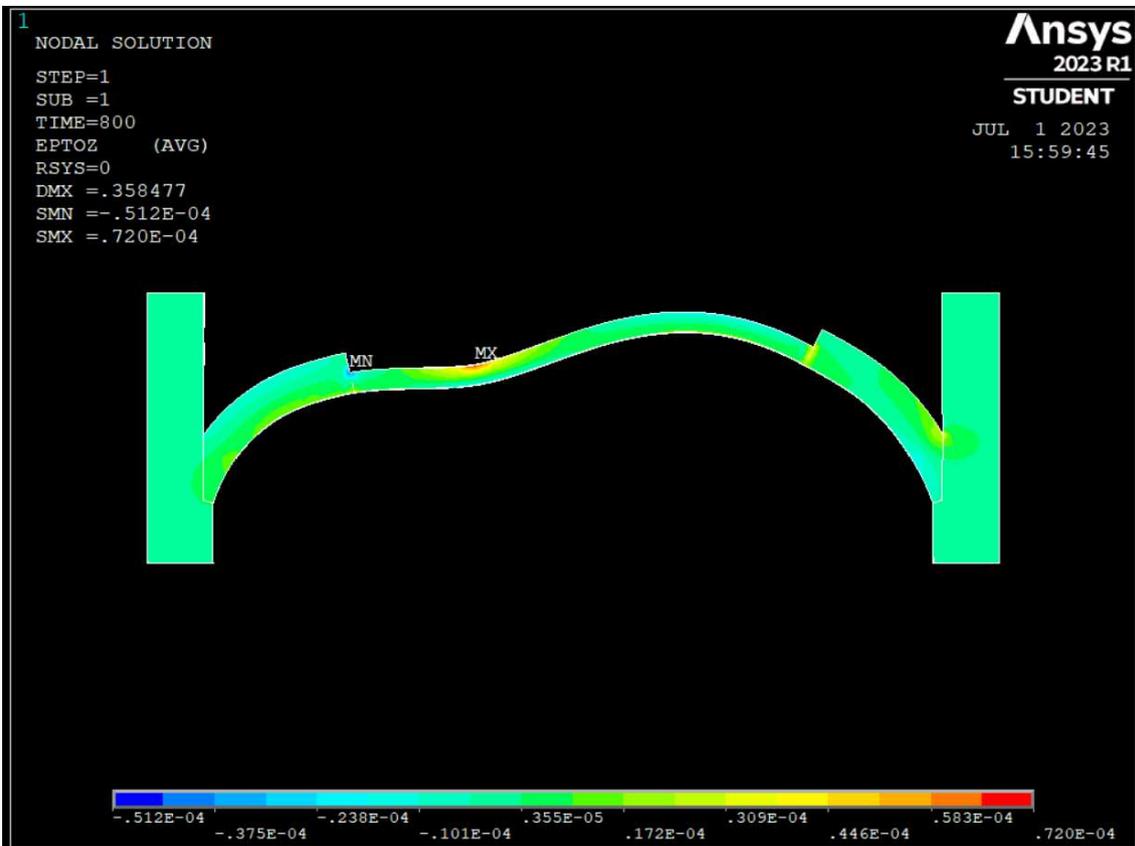
- Componente X della deformazione meccanica totale:



- Componente Y della deformazione meccanica totale:



- Componente Z della deformazione meccanica totale:



4.3.2. Risultati dell'analisi:

Infine si sono confrontati i risultati ottenuti dall'analisi con quelli della sperimentazione, valutando gli spostamenti dei nodi nelle sezioni in cui sono stati applicati i 5 trasduttori. Le sezioni e la posizione di quest'ultimi sono riscontrabili in figura 4.46.

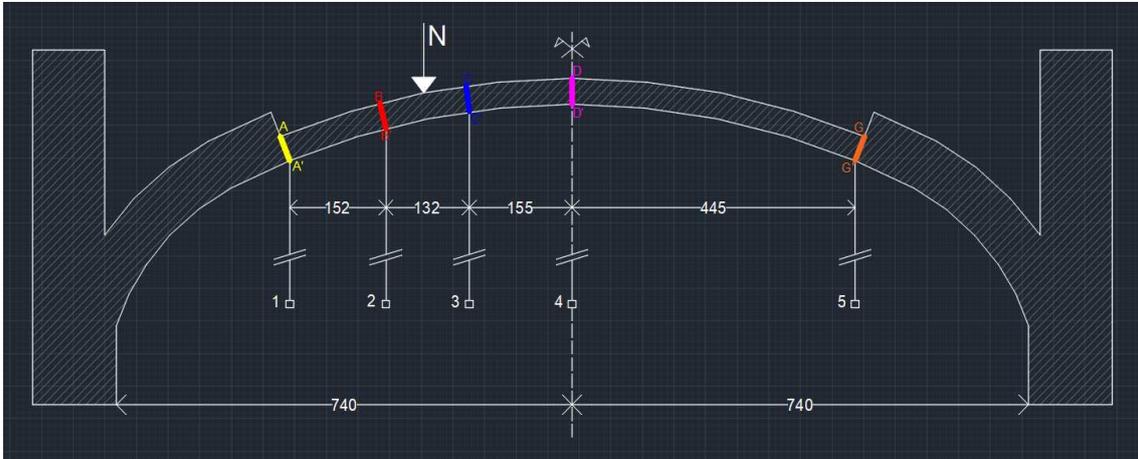


Figura 4.46:
Posizione dei vari trasduttori

Nelle pagine seguenti verranno allegate le tabelle e i grafici relativi ad ogni trasduttore.

- **Trasduttore 1: Sezione A-A'**

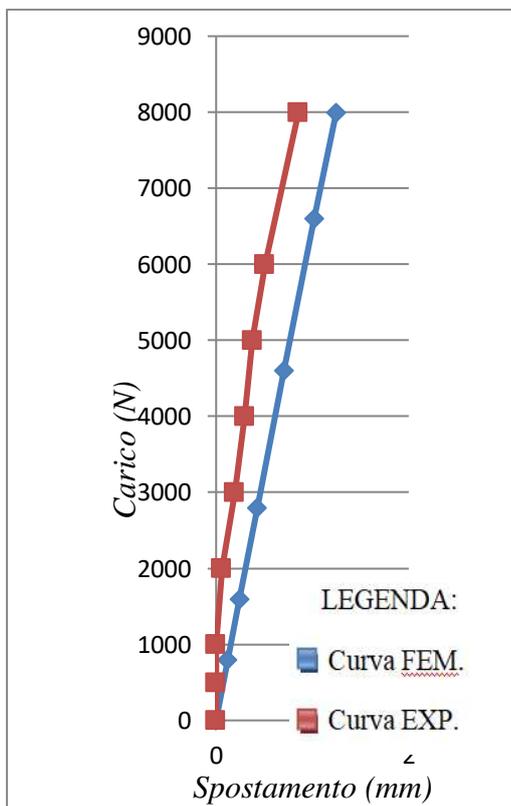
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.129
2° substep	1600	0.258
3° substep	2800	0.453
4° substep	4600	0.747
5° substep	6600	1.080
6° substep	8000	1.325

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.121
2° substep	1600	0.243
3° substep	2800	0.427
4° substep	4600	0.705
5° substep	6600	1.017
6° substep	8000	1.245

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.115
2° substep	1600	0.229
3° substep	2800	0.402
4° substep	4600	0.664
5° substep	6600	0.959
6° substep	8000	1.174

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	800	0.122
2° substep	1600	0.243
3° substep	2800	0.427
4° substep	4600	0.705
5° substep	6600	1.019
6° substep	8000	1.248

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	500.14	0
2° substep	1000	0
3° substep	1996.35	0.059
4° substep	3000	0.194
5° substep	3996.91	0.297
6° substep	5000	0.378
7° substep	6000	0.509
8° substep	8000	0.856



- **Trasduttore 2: Sezione B-B'**

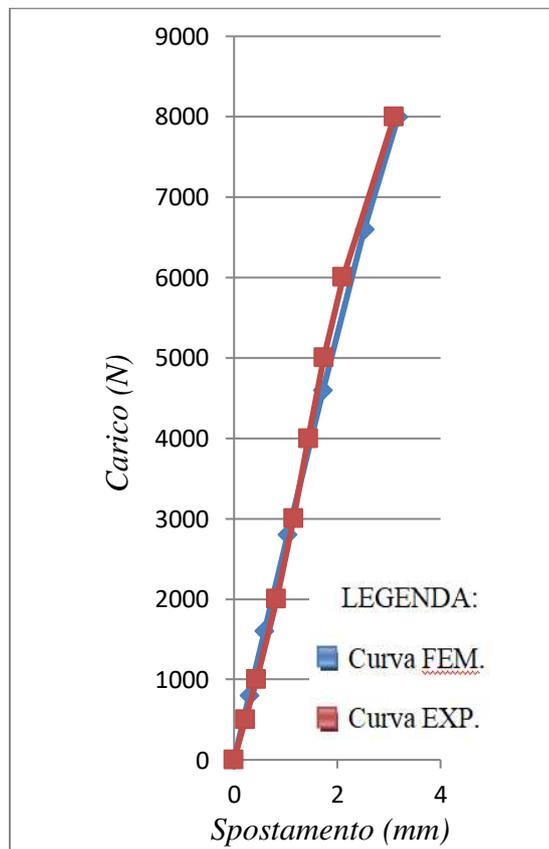
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.297
2° substep	1600	0.596
3° substep	2800	1.047
4° substep	4600	1.738
5° substep	6600	2.550
6° substep	8000	3.210

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.297
2° substep	1600	0.596
3° substep	2800	1.047
4° substep	4600	1.740
5° substep	6600	2.554
6° substep	8000	3.222

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.288
2° substep	1600	0.578
3° substep	2800	1.016
4° substep	4600	1.686
5° substep	6600	2.470
6° substep	8000	3.107

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	800	0.294
2° substep	1600	0.590
3° substep	2800	1.037
4° substep	4600	1.721
5° substep	6600	2.525
6° substep	8000	3.180

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	500.14	0.218
2° substep	1000	0.437
3° substep	1996.35	0.822
4° substep	3000	1.153
5° substep	3996.91	1.444
6° substep	5000	1.740
7° substep	6000	2.112
8° substep	8000	3.103



- **Trasduttore 3: Sezione C-C'**

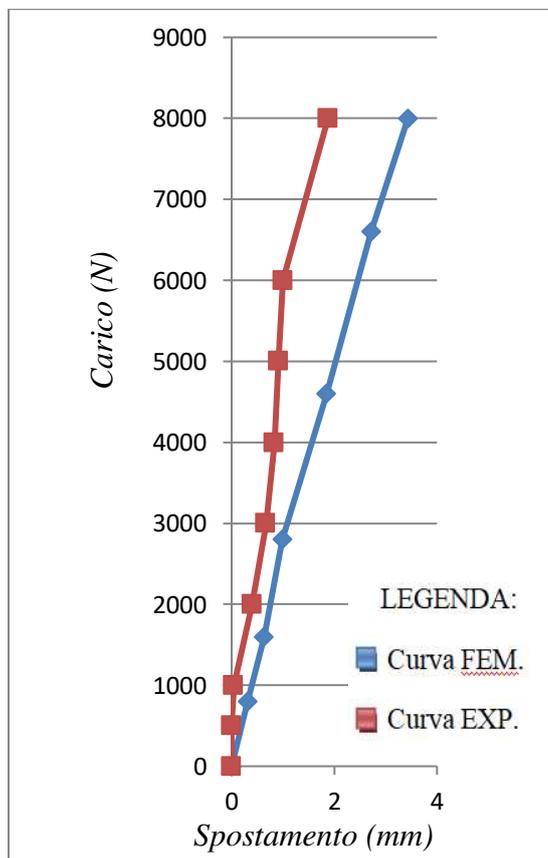
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.312
2° substep	1600	0.626
3° substep	2800	0.925
4° substep	4600	1.829
5° substep	6600	2.687
6° substep	8000	3.391

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.319
2° substep	1600	0.640
3° substep	2800	0.950
4° substep	4600	1.873
5° substep	6600	2.756
6° substep	8000	3.489

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.315
2° substep	1600	0.632
3° substep	2800	1.100
4° substep	4600	1.846
5° substep	6600	2.711
6° substep	8000	3.424

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	800	0.315
2° substep	1600	0.633
3° substep	2800	0.992
4° substep	4600	1.849
5° substep	6600	2.718
6° substep	8000	3.435

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	500.14	0.003
2° substep	1000	0.044
3° substep	1996.35	0.403
4° substep	3000	0.668
5° substep	3996.91	0.831
6° substep	5000	0.918
7° substep	6000	1.000
8° substep	8000	1.878



- **Trasduttore 4: Sezione D-D'**

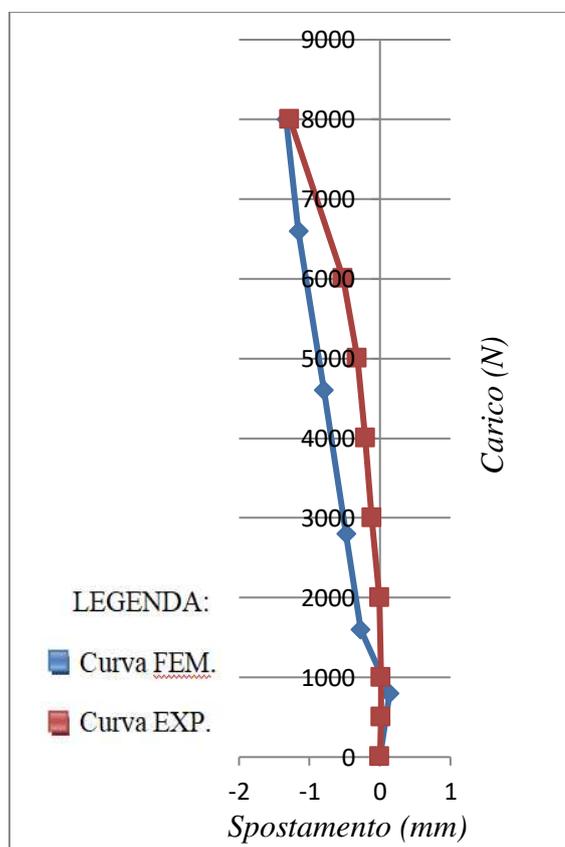
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.137
2° substep	1600	0.274
3° substep	2800	-0.482
4° substep	4600	-0.797
5° substep	6600	-1.159
6° substep	8000	-1.432

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.136
2° substep	1600	0.273
3° substep	2800	-0.480
4° substep	4600	-0.793
5° substep	6600	-1.153
6° substep	8000	-1.142

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	0.136
2° substep	1600	0.273
3° substep	2800	-0.479
4° substep	4600	-0.792
5° substep	6600	-1.152
6° substep	8000	-1.423

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	800	0.136
2° substep	1600	-0.273
3° substep	2800	-0.480
4° substep	4600	-0.794
5° substep	6600	-1.155
6° substep	8000	-1.332

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	500.14	0.016
2° substep	1000	0.016
3° substep	1996.35	-0.004
4° substep	3000	-0.115
5° substep	3996.91	-0.206
6° substep	5000	-0.322
7° substep	6000	-0.522
8° substep	8000	-1.278



- **Trasduttore 5: Sezione E-E'**

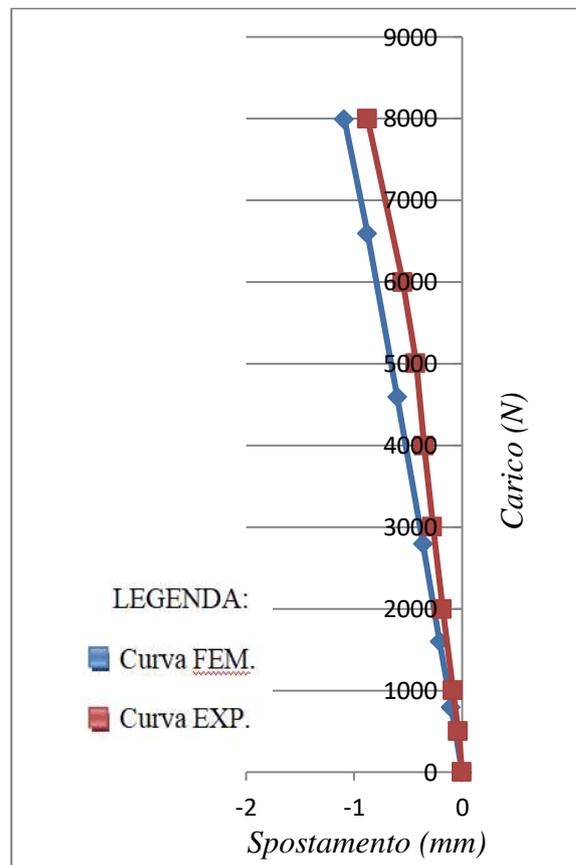
Nodo A	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	-0.106
2° substep	1600	-0.212
3° substep	2800	-0.372
4° substep	4600	-0.617
5° substep	6600	-0.900
6° substep	8000	-1.121

Nodo B	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	-0.103
2° substep	1600	-0.206
3° substep	2800	-0.362
4° substep	4600	-0.600
5° substep	6600	-0.876
6° substep	8000	-1.090

Nodo C	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0.000
1° substep	800	-0.100
2° substep	1600	-0.200
3° substep	2800	-0.352
4° substep	4600	-0.584
5° substep	6600	-0.852
6° substep	8000	-1.061

Media	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	800	-0.103
2° substep	1600	-0.206
3° substep	2800	-0.362
4° substep	4600	-0.600
5° substep	6600	-0.876
6° substep	8000	-1.091

Sperim.	Time (N)	Spostamento (mm)
	0	0
1° substep	500.14	-0.034
2° substep	1000	-0.081
3° substep	1996.35	-0.181
4° substep	3000	-0.269
5° substep	3996.91	-0.35
6° substep	5000	-0.425
7° substep	6000	-0.547
8° substep	8000	-0.875



CONCLUSIONI

Il seguente caso studio ha consentito di valutare il comportamento di un arco rinforzato in muratura storica sottoposto ad un carico puntuale non simmetrico.

Le modellazioni in campo elastico non lineare tramite il programma Ansys Mechanical APDL hanno fornito dati che hanno permesso di comprendere a pieno gli scopi dell'esercitazione.

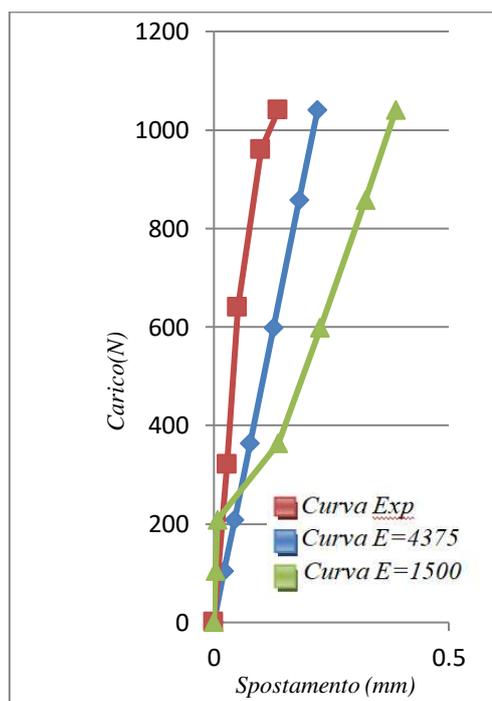
Gli studi effettuati quindi, hanno stabilito l'importanza dell'utilizzo dei materiali compositi nell'edilizia odierna. Infatti, aggiungendo quest'ultimi all'elemento si sono riscontrati numerosi vantaggi relativi alla resistenza meccanica e deformativa, nonostante si applichi nel tempo un incremento di carico.

A fine modellazione si possono dunque trarre diverse importanti conclusioni.

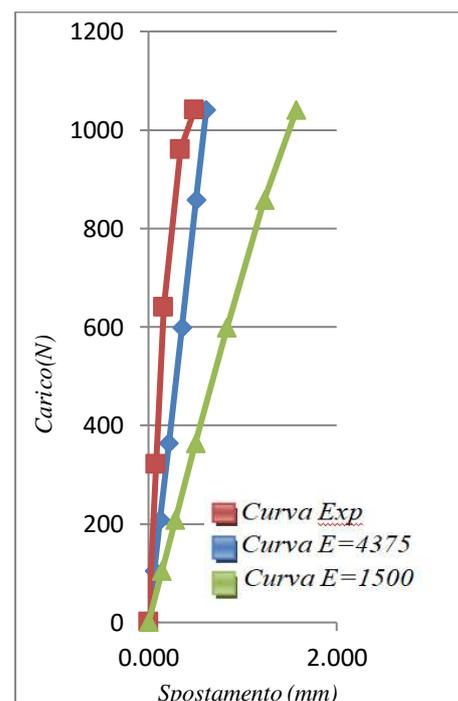
Per questa geometria durante la fase di meshatura si dimostrano più validi gli elementi tetraedrici anziché gli elementi brick. Infatti, come descritto nel capitolo 4 paragrafo 4.1. l'analisi effettuata con quest'ultimi è risultata bloccata.

Il modulo elastico del materiale muratura, se considerato come in normativa, l'analisi fornisce un comportamento incongruo rispetto ai dati sperimentali, perciò la scelta è ricaduta su un valore di E pari a 4375 N/mm².

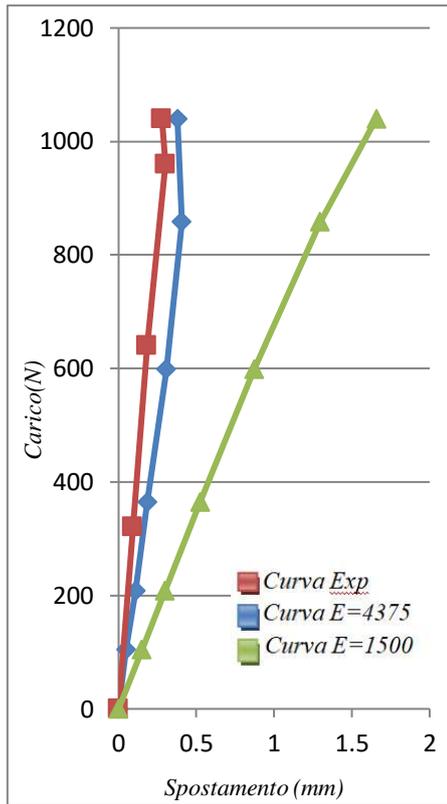
In seguito vengono allegate le diverse curve dei 7 trasduttori con i due moduli elastici scelti in precedenza.



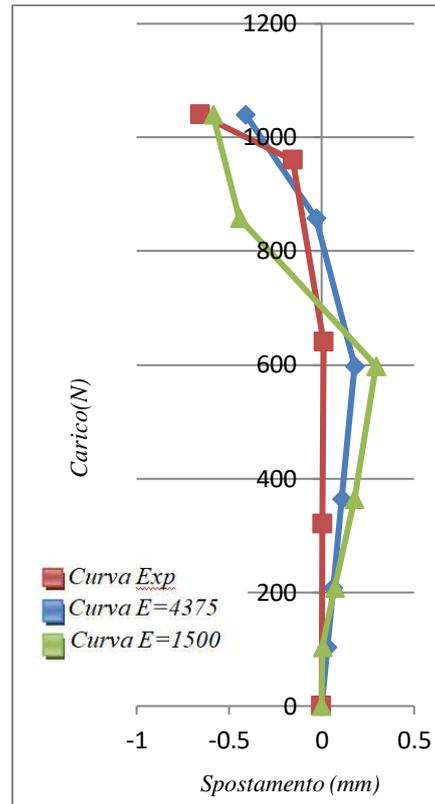
Trasduttore 1



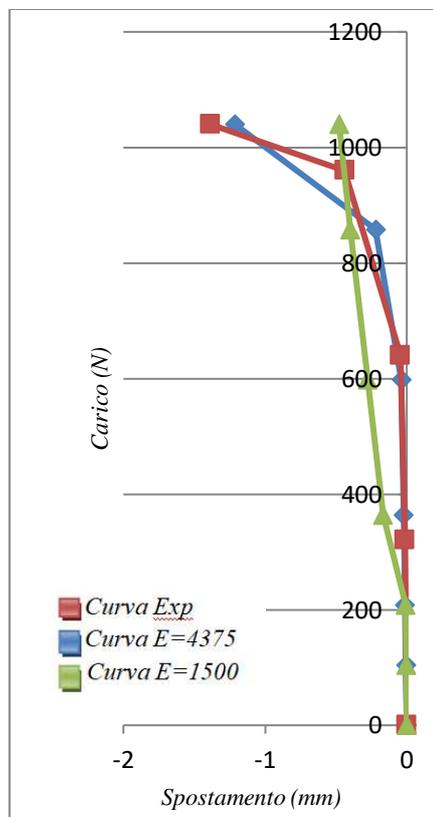
Trasduttore 2



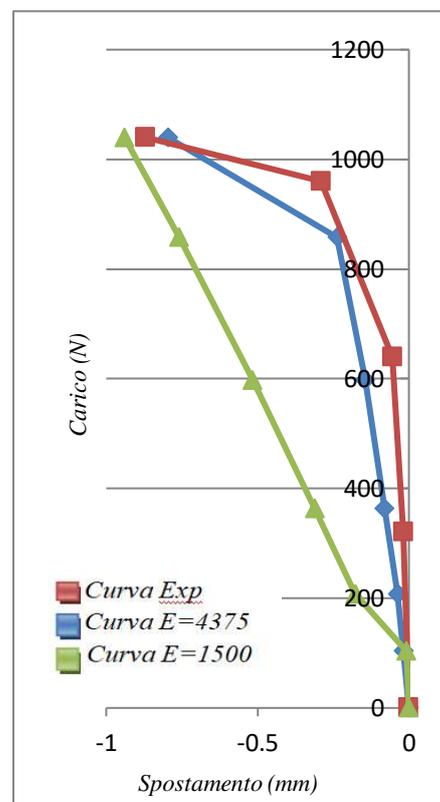
Trasduttore 3



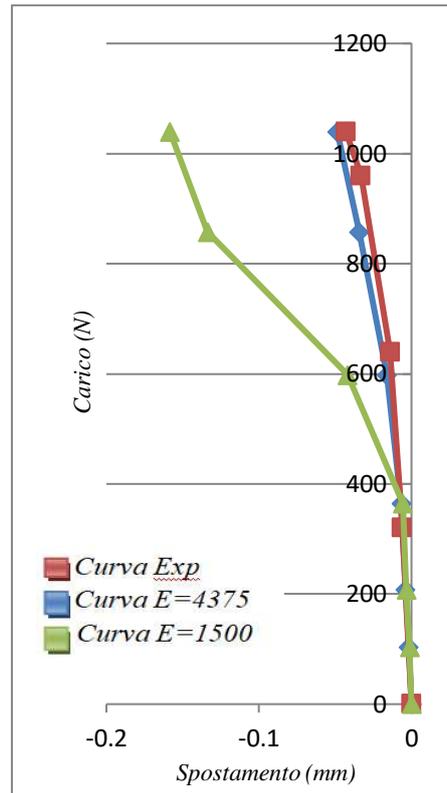
Trasduttore 4



Trasduttore 5



Trasduttore 6



Trasduttore 7

Si riscontra che le curve verdi, costruite con un modulo elastico pari a 1500 N/mm² discostano notevolmente dalle curve in rosso sperimentali.

Le curve blu invece, si avvicinano alle curve che descrivono il comportamento della muratura.

La deformazione massima lungo Y si raggiunge nel trasduttore 5, con una freccia di -1,387 mm, mentre gli spostamenti lungo X e Z non si verificano, poichè la struttura in tali direzioni è stata opportunamente vincolata.

Il quadro fessurativo, raggiunto con un livello di carico pari a 1040 N, ha mostrato chiaramente la formazione di un meccanismo di 3 cerniere plastiche, la crisi è raggiunta quindi per labilità.

Nonostante l'arco in muratura sia una struttura che lavora esclusivamente a compressione, rinforzandolo all'intradosso con materiale composito in fibra di vetro si raggiunge che esso ammetta anche sollecitazioni di trazione.

Applicando quindi un carico di 8000 N la deformazione massima lungo Y si raggiunge nel trasduttore 3 con una freccia di 3,43 mm ed il quadro fessurativo a pieno carico non ha determinato nessun collasso della struttura.

RINGRAZIAMENTI

Giunto alla fine del mio percorso universitario desidero ringraziare coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questo traguardo.

Alla **Prof.ssa Magagnini**, che aldilà del ruolo ricoperto e dei preziosi consigli durante la stesura della mia tesi, ha rappresentato per me una vera e propria guida.

Ai miei **genitori**, i punti fermi della mia vita. Mi hanno sostenuto e permesso di percorrere e concludere questo cammino. È a loro che devo la persona che sono oggi e la realizzazione di questo obiettivo.

Ai miei **fratelli**, le mie due più grandi certezze. So che in qualsiasi momento della mia vita troverò sempre, in entrambi, un sostegno sul quale contare. Il bene che ci lega è preziosissimo.

Alla mia **numerosa famiglia**: ai miei nonni, per l'amore che mi hanno saputo donare e per l'appoggio che non mi hanno mai fatto mancare, ai miei zii ed alle mie cugine, che mi sono stati sempre accanto ad ogni mio passo di questa avventura, spronandomi e insegnandomi di non accontentarsi in qualsiasi situazione.

Ai miei **compagni di studio**, ai nuovi, ma in particolar modo ai vecchi.

A tutti coloro che sono entrati nella mia vita. A chi è entrato per rimanerci e a chi lo ha soltanto promesso, a chi è entrato in punta di piedi e a chi lo ha fatto in maniera dirompente.

Grazie a chi non c'è più ma vorrei qui per questo mio passo importante.

Grazie alle persone che non ci sono mai state, perché mi hanno fatto capire che quello che ho è già moltissimo e non potrei chiedere di più.

Infine, un piccolo ringraziamento lo voglio dedicare a me stesso. Ho cercato, con non poche difficoltà, di far andare di pari passo lo studio con le mie aspirazioni e passioni personali.

Ho sempre sostenuto che sono le passioni il motore della propria realizzazione. Che il sacrificio paga, anche se in ritardo. Mi sono buttato con entusiasmo e oggi, finalmente, posso raccogliere uno dei tanti, spero, frutti di questa intraprendenza.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

[1] D'arrigo D. (2013/2014) – *Analisi strutturale non lineare di volte in muratura: Il caso di palazzo Franchetti a Pisa* - Tesi di Laurea in Ingegneria delle Costruzioni Civili, Università degli studi di Padova.

[2] Alberto Pecchenino (2015) – *Le volte in muratura. Analisi, modellazione e rinforzo con FRP*. Graffil.

[3] Antonio C. & Flavio S. (2019) – *Statica per l'edilizia storica*. Corso di Laurea Magistrale in Architettura, Università degli studi di Cagliari. A.A. 2016/2017.

[4] Roberto Capozucca (1997) – *Analysis of thin composite masonry vaults*. Mason Int, 11, 19-25.

[5] Roberto Capozucca (2014) – *Teoria e Tecnica delle Strutture in Muratura*. Pitagora Editrice, Bologna.

[6] Roberto Capozucca (2017) – *Experimental response of historic brick masonry under biaxial loading*, *Construction and Building Materials*, 154:539-556.

[7] Giglio M. (2008) – *Consolidamento di archi e volte in muratura mediante la tecnica dell'arco armato* – Tesi di Laurea Magistrale, Univeristà Politecnico di Milano.

[8] *Rinforzo strutturale con fasce-tiranti di acciaio mediante il "Metodo e Dispositivo Massimo Mariani."* (2021, October 18). Ingenio.

<https://www.ingenio-web.it/articoli/rinforzo-strutturale-con-fasce-tiranti-di-acciaio-particolari-costruttivi-e-metodo-dispositivo-massimo-mariani>.

[9] Lorenzo J. (1999) – *Una tecnica di consolidamento attivo per archi e muratura*. Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano.

[10] Lorenzo J. – *Tecniche di cerchiatura nel consolidamento di archi e di colonne in muratura*. Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano.

[11] Spiezia P. (2005) – *I materiali compositi fibrorinforzati nel recupero nel recupero di edifici storici*. Tesi di Dottorato, Università di Napoli.

[12] Luca Bertolini & Maddalena Carsana (2014) – *Materiali da costruzione. Volume 1, Struttura, proprietà e tecnologie di produzione*. Hoepli.

[13] Di Miceli E. (2017) – *Ipotesi ricostruttive di volte in muratura crollate con valore archeologico impiegando appoggi attritivi, con applicazione al caso studio della Galleria delle Volte crollate a Roma*. Tesi di Dottorato, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Sapienza Università di Roma.

[14] Tortone M. (2019) - *Analisi agli elementi finiti del ponte anteriore di un mezzo telescopico* - Tesi di Laurea Magistrale, Università Politecnico di Torino.

[15] Tesi di Laurea “*Rinforzo di arco in muratura con BFRP*”. Relatore: Prof. Ing. Roberto Capozucca. Laureanda: Camilla Sanviti. Università Politecnica delle Marche, Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura, A.A. 2011-2012.

[16] Tesi di Laurea “*Rinforzo di arco in muratura con GFRP*”. Relatore: Prof. Ing. Roberto Capozucca. Laureanda: Serena Mandozzi. Università Politecnica delle Marche, Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura, A.A. 2011-2012.

[17] Capozucca R., Cerri M. N. *An experimental model for the analysis of cylindrical masonry vaults*. In Proc. 5th Int. Seminar Masonry for Developing Countries, 1994, 620-629.

[18] Capozucca R., *Comportamento di volte in muratura: analisi e modellazione sperimentale*. Meccanica della muratura tra teoria e progetto, 1996, 167-176.

[19] Capozucca R.; Gerboni D. *Computer modelling and experimental tests on a cylindrical masonry vault model*. In Proc. STREMAH97, 1997, 83-92.

[20] Capozucca R. *Collapse load response of a barrel masonry vault model*. In Proc. 5th I.M.C. of B.M.S., 1998, 220-226.

[21] Capozucca R., Cerri M.N. *Analisi di un modello di volta in muratura danneggiato e rinforzato con CFRP*. In Proc. 1st National Symposium Mechanics of Masonry Structures Strengthened with FRP-materials, 2000, 129-140.

[22] Capozucca R. Cerri M.N. *Analisi di un modello sperimentale di volta in muratura danneggiato e rinforzato con CFRP*. In Proc. Meccanica delle strutture in muratura rinforzate con FRP-materials, 2000, 129-140.