UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea triennale in

ECONOMIA E COMMERCIO

PROGRAMMAZIONE LINEARE: UN CONTRIBUTO RILEVANTE ALL’ANALISI DI PROBLEMI ECONOMICI

LINEAR PROGRAMMING: A RELEVANT CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF ECONOMIC PROBLEMS

Relatore:

Prof. Serena Brianzoni

Rapporto Finale di:

Leonardo Marconi

Anno Accademico 2019/2020

INDICE

INTRODUZIONE

La seconda guerra mondiale fu senza dubbio un'esibizione di indicibile crudeltà. Di fronte a tanta spietata e inumana violenza spesso -e giustamente, nell'opinione di chi scrive- passano in secondo piano gli aspetti e le difficoltà organizzative che le potenze nazionali hanno dovuto affrontare durante quel cupo periodo; le risorse a disposizione degli stati erano poche e gli impegni bellici richiedevano un continuo approvvigionamento. L'impellente necessità era quindi quella di assegnare nella maniera più efficiente ed efficace possibile le scarse disponibilità alle diverse operazioni militari e alle varie attività all'interno di ciascuna di esse. In questo contesto venne applicato, per la prima volta in maniera sistematica, il metodo scientifico e matematico per la risoluzione di problemi di tipo organizzativo. Il successo dirompente di questo innovativo approccio ha permesso allo stesso di sopravvivere alla fine del conflitto, cominciando ad essere utilizzato per la gestione di qualsiasi tipo di struttura che necessitasse di una pianificazione logistica e dando vita alla vera e propria *ricerca operativa*.

Attualmente più che mai il problema della scarsità di risorse e del loro utilizzo efficiente rappresenta la sfida più grande e difficile che l'umanità deve affrontare; basti pensare alla crescente pressione demografica, ai cambiamenti climatici in atto e alla recente crisi sanitaria. Queste e altre situazioni critiche necessitano di un'intelligente e attenta gestione al fine di evitare catastrofi irreversibili e lo strumento della ricerca operativa può fornire un aiuto importante nella speranza di raggiungere un equilibrio sano, stabile e duraturo.

La presente trattazione si concentrerà sulla *Programmazione Lineare*, una branca della ricerca operativa che si occupa di problemi risolvibili, senza perdere troppa aderenza alla realtà, tramite modelli matematici che si limitano alla ottimizzazione di una funzione obiettivo soggetta ad una serie di vincoli, con la particolarità che sia la prima che i secondi hanno la caratteristica della linearità.

In particolare, il primo capitolo si aprirà descrivendo nella sua completezza il processo di ricerca operativa che circonda e dà significato all'esecuzione del procedimento puramente matematico, per poi proseguire con un'introduzione alla Programmazione Lineare tramite la definizione della terminologia di base e l'illustrazione del metodo grafico.

Nel secondo capitolo si affronterà il metodo del simplesso che, a differenza del suddetto metodo grafico, si caratterizza per essere una procedura puramente algebrica, nonostante si basi anch'esso su concetti di natura geometrica.

Infine, nel terzo ed ultimo capitolo si descriveranno la forma matriciale del suddetto metodo, che porterà alla definizione del metodo del simplesso rivisitato, e le possibili modifiche che la procedura previamente analizzata può subire al fine di affrontare la risoluzione di modelli con alcune differenze rispetto alla forma standard.

1.INTRODUZIONE ALLA PROGRAMMAZIONE LINEARE E METODO GRAFICO

1.1 Processo di ricerca operativa

Appare quindi necessario chiarire come si svolge il processo messo in atto da un gruppo di ricerca operativa, dal momento che tale procedimento può (e deve) essere applicato ai problemi che ricadono sotto l'ala della Programmazione Lineare.

Per quanto l'aspetto matematico sia di centrale importanza all'interno di un processo di ricerca operativa, esso non ha alcuna rilevanza se non è collocato all'interno di uno studio più completo, le cui fasi possono essere riassunte nei seguenti punti:

1. Definizione del problema e raccolta dei dati
2. Formulazione del modello matematico
3. Determinazione delle soluzioni del modello
4. Test e validazione del modello
5. Predisposizione di un sistema di supporto per l'applicazione del modello
6. Implementazione del sistema[1]

Per quanto riguarda il primo punto occorre evidenziare come la corretta definizione del problema, l'individuazione dei giusti obiettivi e la raccolta di dati sufficienti e appropriati sia fondamentale al fine di implementare, risolvere e testare un modello che sia il più possibile vicino alla realtà.

Sui seguenti due punti si tratterà ampiamente in seguito e in questa sede è sufficiente ricordare come un modello (matematico e non) sia un'astrazione della realtà e in quanto tale non la descrive alla perfezione. Lo stesso vale per la ricerca operativa, nell'ambito della quale è necessario porre particolare attenzione alla distanza che intercorre tra il modello e la realtà, e al fatto che essa rimanga accettabile. Assume quindi rilevante importanza l'analisi post-ottimale (effettuata cioè una volta individuata la soluzione ottimale del modello) che verifica come si modifica la conclusione alla quale si è giunti al variare delle condizioni del modello.

Conseguentemente, si procede testando il modello (processo di validazione) al fine di individuare e correggere eventuali errori e valutare se possono essere praticate delle migliorie. Questa parte del procedimento varia molto a seconda del tipo di problema che si sta affrontando; risulta quindi di poca utilità cercare di stabilire un procedimento standard da seguire qualsiasi sia il caso in esame.

L'intero procedimento si conclude con la predisposizione di un sistema di supporto per l'applicazione del modello - contenente il modello stesso, i processi per ottenere le soluzioni (con relativa analisi

[1] Chiaramente, in situazioni reali, il procedimento può differire dalle fasi qui elencate a seconda delle esigenze dei soggetti coinvolti.

post-ottimale), le metodologie per l'attuazione delle soluzioni - e con l'implementazione di tale sistema. Una volta che il nuovo sistema è in uso, esso va continuamente monitorato per intervenire in caso di sensibili modifiche delle condizioni iniziali considerate nella creazione del modello.

Da qui in poi ci si concentrerà sulla costruzione e soluzione dei modelli matematici relativi a problemi di Programmazione Lineare.

1.2 Definizione della terminologia

Un modello di Programmazione Lineare (PL) consiste in una *funzione obiettivo* che deve essere massimizzata o minimizzata e in diverse uguaglianze o disuguaglianze che rappresentano i vincoli ai quali ci si deve attenere. Questi ultimi si suddividono in *vincoli funzionali* (o *strutturali*) - del tipo $\boldsymbol{a_j x} \leq b_j$, $j = 1, \dots, m$ – e *vincoli di non negatività* – del tipo $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ [2].

Il modello può quindi essere scritto in questa maniera:

$$\text{max/min } \ Z = \boldsymbol{cx}$$

Soggetto a vincoli:

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Dove: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ e $\boldsymbol{A}$ è $m \times n$.

Si noti come in questo caso tutti i vincoli funzionali abbiano lo stesso verso di disuguaglianza $\leq$. Questa non è assolutamente una prerogativa: in alcuni casi si potrebbe avere un sistema di vincoli del tipo $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ax} > \boldsymbol{b}$ oppure vincoli con differenti versi di disuguaglianza l'uno dall'altro o ancora vincoli di uguaglianza. La forma sopra riportata, chiamata *forma standard*, è comunque la più comune. Inoltre è sempre possibile ricondurre un problema di PL alla forma standard, infatti un vincolo di uguaglianza può essere ricondotto a due di disuguaglianza, inoltre il verso di una disuguaglianza può essere sempre invertito moltiplicando ambo i membri per -1. Come pure un problema di massimo può ricondursi ad un problema di minimo (e viceversa) cambiando il segno della funzione obiettivo.

[2] Teoricamente i vincoli di non negatività potrebbero anche non essere presenti, sebbene in situazioni reali questo accada in casi rari (si pensi ad esempio al caso in cui una variabile decisionale rappresenti l'incremento di un tasso di produzione)

Le componenti del vettore $\boldsymbol{x}$ sono le *variabili decisionali* del modello, delle quali occorre trovare il livello ottimale al fine di massimizzare o minimizzare, a seconda del problema, la funzione obiettivo; le componenti dei vettori $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{b}$ che sono fornite in input sono chiamate *parametri*.

È inoltre opportuno stabilire una terminologia riguardante le soluzioni del modello:

- Una *soluzione* è una qualsiasi ennupla di numeri assegnati alle n componenti di $\boldsymbol{x}$.
- Una *soluzione ammissibile* è una soluzione che non viola nessun vincolo; per contrario una *soluzione non ammissibile* è una soluzione che viola almeno un vincolo.
- La *regione ammissibile* è l'insieme delle soluzioni ammissibili; la regione ammissibile può anche essere l'insieme vuoto e in tal caso il problema non ha soluzioni ammissibili. La regione ammissibile può essere limitata o non limitata.
- Una *soluzione ottima* è una soluzione ammissibile che fornisce il valore più alto (basso) della funzione obiettivo. Le soluzioni ottime se esistenti possono essere una o più; in tal caso si parla di *soluzioni ottime multiple*. La mancanza di soluzioni ottime si verifica in due circostanze:
    1. Non esistono soluzioni ammissibili
    2. La funzione obiettivo cresce (decresce) in maniera indefinita (in questo caso la regione ammissibile deve essere illimitata).
- Un *vertice ammissibile* è un vertice della regione ammissibile. Esiste una relazione tra vertici ammissibili e soluzioni ottime che sarà in seguito esposta.

Il più comune problema di Programmazione Lineare consiste nell'allocazione di risorse limitate a diverse attività. In questo caso si ha a che fare con m *risorse* ed n *attività*. Le variabili decisionali rappresentano i livelli delle diverse attività che, una volta fissati, determineranno la quantità di risorse che ad ognuna di esse dovrà essere assegnata. La funzione obiettivo Z viene qui denominata *misura globale di rendimento.*

1.3 Ipotesi della Programmazione Lineare

Le ipotesi che sottostanno ad un modello di programmazione sono, dal punto di vista matematico, molto semplici: la funzione obiettivo e le funzioni che rappresentano i vincoli devono essere tutte funzioni lineari. Tuttavia, queste assunzioni, che come detto, sembrano in prima analisi elementari, implicano che l'attività e i dati relativi al problema debbano avere delle particolari caratteristiche. Di seguito saranno elencate, quindi, queste ipotesi riguardanti la modellizzazione del problema.

- Proporzionalità. Il contributo di ogni attività alla funzione obiettivo deve essere proporzionale al livello della stessa attività. Questo, nel caso esemplificativo della massimizzazione di profitto, implica l'assenza o la trascurabilità di economie di scala che possano modificare l'apporto marginale di un'unità in più di prodotto via via che aumenta la produzione. Un effetto opposto alle economie di scala può derivare dai maggiori costi di marketing dovuti alla necessità di piazzare sul mercato la maggiore quantità di prodotto di cui si dispone. Occorre quindi porre attenzione a queste ed altre casistiche che possono influire sul contributo di ogni attività alla funzione obiettivo.

- Additività. Tutte le funzioni del modello (obiettivo e vincoli) devono essere costituite dalla somma dei contributi individuali delle singole attività. Dal punto di vista matematico, questa ipotesi fa sì che non siano presenti prodotti incrociati di diverse variabili decisionali. Tale eventualità si presenta, ad esempio, qualora il problema in analisi abbia a che fare con prodotti che siano complementari o concorrenti. Nel primo caso i prodotti incrociati hanno segno positivo in quanto l'aumento nella produzione di un articolo implica un vantaggio nella produzione di un altro; nel secondo caso il segno è negativo perché si verifica l'opposto.
- Divisibilità. Le variabili decisionali possono assumere qualsiasi valore reale, non per forza intero. Nel caso in cui questa ipotesi non sia rispettata si parla di programmazione intera.
- Certezza. I parametri del modello sono costanti note. In caso di violazione di tale ipotesi si ricade nel campo della programmazione statistica.

Nessuna delle suddette ipotesi è naturalmente verificabile in una situazione reale (eccezion fatta in alcuni casi per la divisibilità); tuttavia il team di ricerca operativa deve accertare che non ci si discosti in maniera troppo eclatante da esse, e se ciò accadesse deve ricorrere all'utilizzo di altri tipi di modelli come quelli sopra richiamati.

1.4 Metodo grafico

Il metodo grafico di risoluzione dei modelli di Programmazione Lineare è molto semplice ed efficace qualora ci si ritrovi a risolvere un problema con due (o al massimo tre, ma non con poche difficoltà) variabili decisionali. Nel proseguire con la trattazione si prenderà in esame il caso con due variabili che è estendibile al caso con tre con alcuni semplici accorgimenti che saranno in fondo descritti. Si prenda in esame il seguente modello:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Questa modalità risolutiva consiste nel disegnare sul piano cartesiano (x_1, x_2) la regione ammissibile del problema in esame. Per fare ciò si tracciano le rette delimitanti i semipiani che soddisfano i vincoli. Le equazioni di tali rette saranno del tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, oppure $x_1 = 0$. La parte di piano che risulta dall'intersezione di tali semipiani costituisce la regione ammissibile.

Ora basta notare che le curve di livello della funzione obiettivo rappresentano al variare di Z un fascio di rette parallele, la cui inclinazione è data da $\frac{c_1}{c_2}$ e trovare quale delle rette appartenenti al fascio che contengono almeno un punto della regione ammissibile fornisce il valore più alto della funzione obiettivo. L'insieme delle soluzioni ottimali è l'intersezione tra tale retta e la regione ammissibile che può essere a seconda dei casi un vertice (unica soluzione ottima) o un segmento (soluzioni ottime multiple) che congiunge due vertici che denomineremo *spigolo.*

Per estendere la metodologia in analisi al caso a tre variabili bisognerà far conto delle maggiori difficoltà grafiche e tener presente alcune variazioni dovute al passaggio da due a tre dimensioni:

- La regione ammissibile passa da poligono a poliedro.
- Le disequazioni che costituiscono i vincoli rappresentano semispazi e non più semipiani. Come conseguenza le equazioni che li delimitano saranno equazioni di piani e non di rette e la frontiera della regione ammissibile sarà composta da regioni di piano.
- In ultimo, anche la funzione obiettivo non rappresenterà più un fascio di rette, ma un fascio di piani paralleli e, conseguentemente, l'intersezione tra il piano, contenente almeno un punto della regione ammissibile, che fornisce il più alto - o il più basso - valore della funzione obiettivo e la regione ammissibile stessa può essere un vertice, uno spigolo, o una porzione di piano appartenente alla frontiera.

1.5 Esempio di risoluzione con il metodo grafico

Si consideri l'azienda *alpha* che produce due tipi di scarpe (A e B) utilizzando tre diversi inputs: stoffa, cuoio e gomma. La scarpa A viene creata utilizzando stoffa e gomma mentre per la scarpa B si utilizzano cuoio e gomma.

La *alpha* vuole decidere quale combinazione produttiva delle due scarpe A e B è quella che frutta il maggior profitto; per fare questo l'azienda costituisce un team di ricerca operativa per raccogliere i dati necessari e formulare un modello che sia in grado di rispondere alla questione.

Il suddetto team procede con l'identificazione e la successiva ricerca dei dati necessari per risolvere il problema:

- La quantità totale disponibile per ogni input della produzione
- La quantità di ogni input necessaria alla produzione di un lotto di scarpe del tipo A e quella necessaria per le scarpe B
- Il profitto associato ad ogni lotto di ciascuno dei due tipi di scarpe

Il risultato del procedimento di raccolta di questi dati può essere riassunto nella tabella sottostante:

Input	Quantità di input necessaria per ogni lotto di prodotto (in decine di kg)		Quantità totale disponibile per ogni input (in decine di kg)
	Scarpa A	Scarpa B	
Stoffa	1	0	4
Cuoio	0	2	12
Gomma	3	2	18
Profitto per lotto (in migliaia di euro)	3	5	

A questo punto è possibile procedere alla formalizzazione matematica del problema, fondamentale per la successiva risoluzione del modello:

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$x_1 \leq 4$$

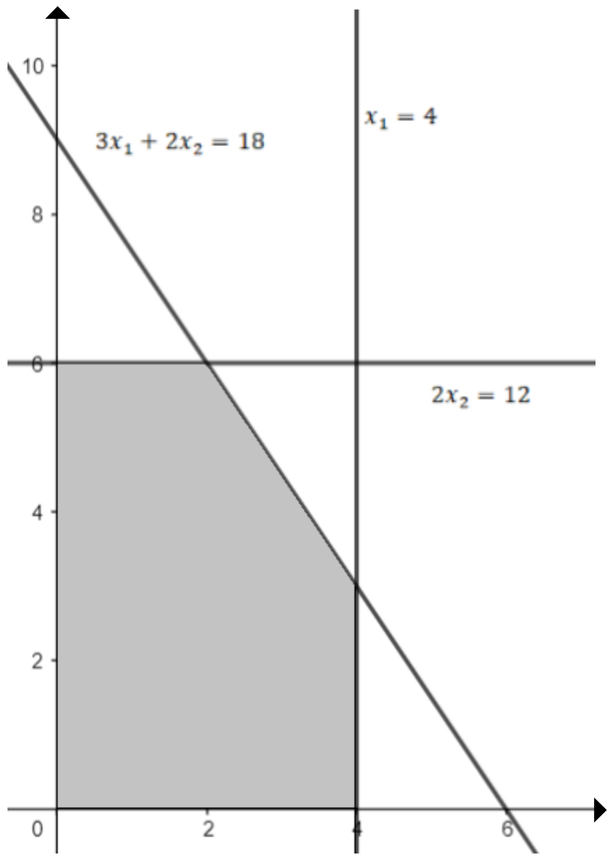
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Dove x_1 e x_2 rappresentano il numero di lotti di tipo A e B rispettivamente.

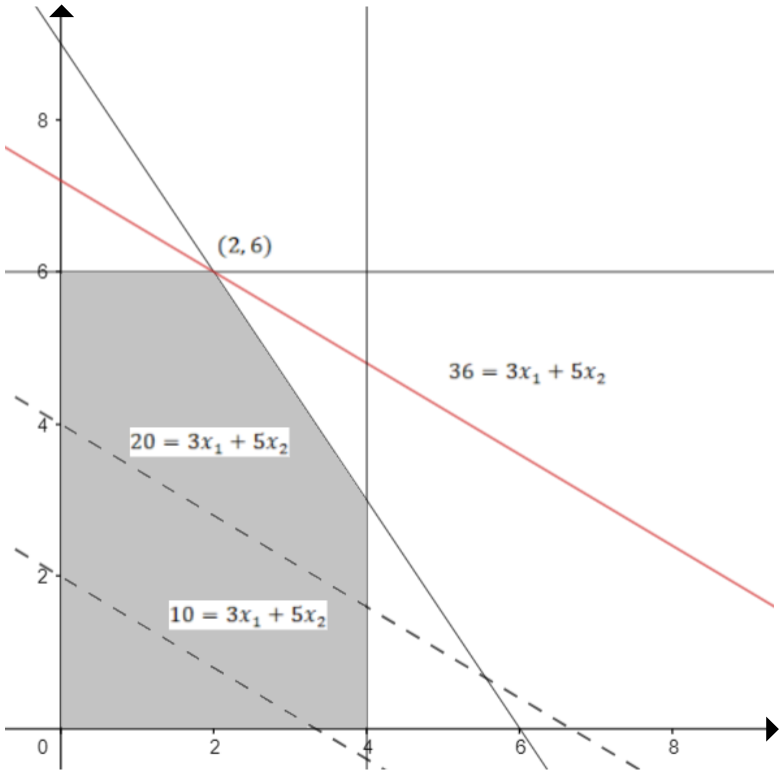
Occorre ora disegnare la regione ammissibile su di un piano cartesiano avente come assi cartesiani x_1 e x_2; per fare questo si tracciano le rette che delimitano la suddetta regione e si evidenzia la parte di piano che soddisfa contemporaneamente tutti i vincoli:



Una volta che la regione ammissibile è stata disegnata sarà sufficiente tracciare alcune delle rette che fanno parte del fascio rappresentato dalla funzione obiettivo per individuare quale di queste massimizza il profitto dell'azienda *alpha*.

Nella seguente figura sono state tracciate a titolo di esempio 3 diverse rette descritte dalle equazioni:

$$36 = 3x_1 + 5x_2, \qquad 10 = 3x_1 + 5x_2, \qquad 20 = 3x_1 + 5x_2$$



Come si può facilmente notare il valore di massimo profitto ottenibile senza fuoriuscire dalla regione ammissibile è 36, il quale si ottiene in corrispondenza della combinazione produttiva $(2,6)$. L' azienda *alpha* per raggiungere il profitto più alto possibile dovrà quindi produrre due lotti di scarpe del tipo A e sei lotti di scarpe del tipo B.

2.IL METODO DEL SIMPLESSO

Il metodo del simplesso è un procedimento generale per la risoluzione di modelli di PL. Nonostante i concetti alla base di detto procedimento siano di natura geometrica, la procedura si presenta come puramente algebrica, il che la rende estremamente utile per affrontare problemi di grandi dimensioni.

In questo capitolo si affronterà il metodo del simplesso relativo a modelli in forma standard (definita sopra) Si studieranno in primis i suddetti precetti geometrici che stanno alla base della procedura algebrica del metodo del simplesso, per poi proseguire con l'analisi del procedimento stesso.

2.1 Fondamenti geometrici

Data la linearità di tutte equazioni che descrivono il modello appare intuitivo come le soluzioni ottime per un qualsiasi tipo di problema di PL si trovino sulla frontiera della regione ammissibile (se questa è limitata). Occorre quindi definire cosa si intenda con *equazione della frontiera.*

Si dice equazione di frontiera, per ciascun vincolo, l'equazione dell'iperpiano che delimita la zona di $\boldsymbol{R}^n$ *che soddisfa il vincolo stesso.*

Tali equazioni si ottengono semplicemente sostituendo il segno $\leq$ o $\geq$ con il segno $=$.

Ci si è già imbattuti nel concetto di vertici ammissibili, ma in questa sede conviene darne una definizione che risulterà molto importante.

Si dice vertice ammissibile una soluzione ammissibile che non si trova su nessun segmento che connette altre due soluzioni ammissibili.

Ogni vertice ammissibile, essendo geometricamente identificabile come il vertice di un politopo a n dimensioni, è soluzione di un sistema di n equazioni di frontiera. Tuttavia, ciò non significa che qualsiasi gruppo di n equazioni, scelte tra quelle relative agli gli $n+m$ vincoli, sia capace di fornire un vertice ammissibile. In particolare, la soluzione del sistema potrebbe non essere compresa all'interno della regione ammissibile ed essere quindi identificabile come vertice non ammissibile.

Si dicono vertici adiacenti due vertici che condividono le frontiere di $n-1$ *vincoli.*

Ogni coppia di vertici è collegata da un segmento; il segmento che collega due vertici adiacenti si dice spigolo. Ogni vertice risulta quindi essere l'intersezione di n frontiere, ogni spigolo quella di $n-1$ frontiere.

Occorre ora definire qualche proprietà dei vertici che sarà utile in seguito:

1. Se esiste una sola soluzione ottima allora questa è un vertice; se esistono soluzioni ottime multiple (e la regione ammissibile è limitata) allora almeno due di esse sono vertici adiacenti. Della prima affermazione si fornirà ora una dimostrazione algebrica.

<u>Dimostrazione.</u> Si supponga per assurdo che il problema abbia un'unica soluzione ottima e che essa non sia un vertice. In questo caso sarà possibile trovare un segmento che collega altre due soluzioni ammissibili sul quale giace la nostra soluzione ottima. Sia $\boldsymbol{x}^*$ la soluzione ottima e $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ le due soluzioni ammissibili agli estremi del segmento e Z^*, Z^1, Z^2 i rispettivi valori della funzione obiettivo. Si avrà allora:

$$\boldsymbol{x}^* = \alpha \boldsymbol{x}^1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$$

Con $0 \leq \alpha \leq 1$. Essendo la funzione obiettivo lineare, risulta:

$$Z^* = \alpha Z^1 + (1-\alpha) Z^2$$

Dato che $\alpha + (1-\alpha) = 1$, considerando tutte le possibili relazioni d'ordine tra $Z^1\ e\ Z^2$ si ottiene:

$$Z^* = Z^1 = Z^2, \;\; Z^1 < Z^* < Z^2, \;\; Z^1 > \; Z^* > Z^2$$

La prima possibilità implica che anche $\boldsymbol{x}^1\ e\ \boldsymbol{x}^2$ siano soluzioni ottime, fatto che contraddice l'ipotesi di esistenza di un'unica soluzione ottima; le successive due possibilità contraddicono l'ipotesi che $\boldsymbol{x}^*$ sia una soluzione ottima.

c.v.d.

2. Il numero dei vertici ammissibili è finito; questo è vero perché ogni vertice è soluzione di un sistema di n delle $(m+n)$ equazioni di frontiera del modello. I vertici possono, di conseguenza, al massimo essere $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, ovverosia il numero di combinazioni semplici di $m+n$ elementi di classe n.

3. Se un vertice ammissibile non presenta vertici adiacenti che migliorano il valore della funzione obiettivo, allora nessun altro vertice fornisce un valore migliore. Questa proprietà deriva dal fatto che l'insieme di soluzioni che soddisfa un generico vincolo (sia esso di uguaglianza o disuguaglianza) è un insieme convesso. Questo fa sì che la regione ammissibile, essendo formata dall'intersezione di insiemi convessi, sia anch'essa un insieme convesso[3].

[3] Dimostrazione: Siano $X_1, X_2 \subseteq R^n$ due insiemi convessi e sia $X = X_1 \cap X_2$ la loro intersezione. Siano x ed y due vettori in X, allora $x, y \in X_1$ ed $x, y \in X_2$. Poiché X_1 ed X_2 sono insiemi convessi abbiamo che $[x, y] \subseteq X_1$ e che $[x, y] \subseteq X_2$. Ma allora $[x, y] \subseteq X$ e l'insieme X è convesso.

Utilizzando queste proprietà è possibile costruire un metodo geometrico iterativo di risoluzione dei problemi di PL in forma standard che sarà poi trasformato in una procedura puramente algebrica che rende fattibile la risoluzione di problemi di grande dimensione. Di seguito si descriveranno i passaggi di suddetto metodo geometrico:

1. Inizializzazione. Scegliere un vertice iniziale da esaminare. Quando possibile è conveniente scegliere l'origine come vertice iniziale; le ragioni di questa convenienza saranno più chiare una volta analizzata la procedura algebrica del metodo del simplesso. Questo passo è eseguito una sola volta all'inizio del procedimento.
2. Test di ottimalità. Verificare se il vertice in esame è una soluzione ottima. Per fare questo è sufficiente, grazie alla proprietà 3, controllare se esistono vertici adiacenti migliori.
3. Qualora il test di ottimalità fallisca nel giudicare il vertice in esame come una soluzione ottima occorre spostarsi lungo uno spigolo fino ad arrivare ad un vertice adiacente migliore. Per selezionare lo spigolo da percorrere si analizzano gli spigoli che partono dal vertice in esame al fine di trovare quello che presenta un tasso di miglioramento della funzione obiettivo più alto.
4. Fermarsi quando si incontra una nuova frontiera e concentrare l'attenzione sul vertice all'intersezione tra lo spigolo che si stava percorrendo e la nuova frontiera incontrata.
5. Ora si possono ripetere i passi 2-5 finché il test di ottimalità non giudichi il vertice in esame come soluzione ottima.

2.2 Definizioni

Prima di procedere con la trasformazione del metodo geometrico in metodo algebrico è necessario definire alcuni concetti chiave. In primo luogo, si noti che è possibile esprimere le disuguaglianze che definiscono i vincoli in maniera differente. Ciascuna disequazione può essere rappresentata come una coppia di espressioni algebriche formata da una uguaglianza ed una disuguaglianza. Si prenda ad esempio un vincolo funzionale di un modello in forma standard del tipo:

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x} \leq b_j \ , j = 1, .., m$$

Esso è equivalente a:

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x} + x_s = b_j \ \ , \ x_s \geq 0$$

Dove la variabile x_s viene chiamata *variabile slack.*

Un modello espresso tramite l'ausilio delle variabili slack viene chiamato modello in *forma aumentata, e si presenta in questo modo:*

$$Z = \boldsymbol{cx}$$

Soggetto a vincoli:

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

Dove $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_s \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{A}$ è $m \times n$ per cui $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m+n}, [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ è $m \times (m+n)$.

Si dice soluzione aumentata una soluzione alla quale sono aggiunti i valori delle variabili slack.

Naturalmente un valore negativo di una variabile slack indica che ci si trova all'esterno della regione ammissibile e di conseguenza la soluzione aumentata corrispondente è non ammissibile.

Si dice soluzione di base una soluzione aumentata che rappresenta un vertice, per cui un vertice al quale sono stati aggiunti i corrispondenti valori delle variabili slack.

Si dice soluzione di base ammissibile (da qui in poi BFS dall'inglese Basic Feasible Solution) una soluzione di base che si trova all'interno della regione ammissibile, per cui un vertice ammissibile al quale sono stati aggiunti i corrispondenti valori delle variabili slack.

Ricordando come un vertice sia soluzione di un sistema di n equazioni, occorre chiarire come sia possibile identificare le n equazioni che definiscono ciascun vertice. Per fare ciò si utilizza il concetto di *variabile indicatrice*.

Si dice variabile indicatrice per ciascun vincolo quella variabile che, qualora il suo valore sia 0, assicura che la soluzione in esame soddisfi l'equazione della frontiera del vincolo stesso.

Semplicemente osservando le diverse espressioni algebriche che definiscono i vincoli nella forma aumentata e tendendo presente il loro significato geometrico si possono fare le seguenti considerazioni:

- Per ogni vincolo di non negatività la variabile indicatrice è la stessa variabile presente nel vincolo. Prendendo infatti un vincolo del tipo $x_i \geq 0\,, i = 1, \dots, n$, qualora la variabile x_i assuma valore 0 è chiaro che tale soluzione soddisfa l'equazione di frontiera $x_i = 0$.
- Per ogni vincolo funzionale espresso in forma aumentata la variabile indicatrice è la variabile slack. Infatti, se la variabile x_s assume valore pari a 0, l'equazione $\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}x_i + x_s = b_j$ coincide con l'equazione che rappresenta la frontiera $\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}x_i = b_j$.

Di conseguenza, ponendo uguale a 0 il valore di una variabile indicatrice, eliminandola quindi dall'equazione, si ottiene la corrispondente equazione di frontiera. Perciò un sistema di n equazioni di frontiera avrà come soluzione (se essa esiste ed è unica) una soluzione di base nella quale n variabili hanno valore 0. Queste variabili sono denominate *variabili non di base*. Le restanti m variabili sono chiamate *variabili di base* e possono assumere qualsiasi valore reale. Perché la soluzione di base sia ammissibile le variabili di base devono assumere valori positivi. Qualora una o più variabili di base sia pari a 0 si parla di BFS *degenere*.

Così come due vertici possono essere adiacenti, anche le BFS che li rappresentano si dicono adiacenti. Per verificare se due BFS sono adiacenti basta ricordare che due vertici adiacenti condividono $n-1$ frontiere. Questo implica che due soluzioni di base ammissibili che rappresentano due vertici adiacenti avranno $n-1$ variabili non di base in comune e una variabile non di base diversa.

2.3 Procedimento del metodo del simplesso

Ora si ha familiarità con tutti gli strumenti necessari per comprendere appieno ed eseguire il procedimento algebrico che viene chiamato metodo del simplesso.

Occorre far chiaro che per lo svolgimento corretto della procedura devono essere presi due accorgimenti. In primo luogo, la funzione obiettivo deve essere trasformata nella forma $Z - \boldsymbol{cx} = 0$; inoltre per rappresentare il modello si utilizzerà un sistema contenente le equazioni rappresentanti i vincoli funzionali in forma aumentata e l'equazione della funzione obiettivo nella forma sopra specificata in questo modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Oppure non in notazione matriciale:

$$Z - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i + x_{n+1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{m,i} x_i + x_{n+m} = b_m$$

Di seguito si elencheranno e descriveranno i passi da seguire; si noterà come essi siano la traduzione algebrica dei punti sopra elencati, quando si parlava del metodo del simplesso dal punto di vista geometrico. Per effettuare questa "traduzione" si utilizzeranno i concetti appena espressi.

1. Inizializzazione. Si sceglie il primo vertice da analizzare; se questo è l'origine le variabili di base sono le variabili decisionali in quanto esse sono le variabili indicatrici dei vincoli di non negatività. A questo punto occorre calcolare i valori delle variabili di base ed è qui che si chiarisce la convenienza nella scelta dell'origine come vertice iniziale: le varabili slack (che sono le variabili di base per questo passaggio) hanno tutte coefficiente pari a $+1$, rendendo triviale la soluzione del sistema. Possiamo quindi scrivere la BFS corrispondente all'origine che sarà del tipo $(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, dove le prime n componenti (le variabili non di base) sono 0 e le successive m componenti (le variabili di base) possono assumere qualsiasi valore non negativo, dato che si tratta di una BFS.

2. Test di ottimalità. Ora è necessario verificare se la BFS in esame è una soluzione ottima controllando i coefficienti delle variabili non di base all'interno della funzione obiettivo. Se la funzione obiettivo (in tale forma) presenta uno o più coefficienti delle variabili non di base negativi significa che il valore della misura globale di rendimento può essere migliorato aumentando il valore di una o più delle variabili non di base che hanno coefficienti negativi.

3. Dato che è possibile scegliere quale tra le variabili a coefficiente negativo incrementare, è necessario stabilire un criterio di scelta. È intuitivo che risulti più conveniente ai fini della massimizzazione della funzione obiettivo scegliere quella variabile che ha il coefficiente maggiore in valore assoluto in modo da migliorare il valore della misura globale di rendimento al rateo maggiore. La variabile selezionata si dice *variabile entrante (in base).*

4. Ora che si è selezionata la variabile da aumentare occorre decidere quanto sia opportuno fermarsi. Per fare ciò si analizza come variano le variabili di base all' aumentare della variabile entrante. Si esprimano quindi i vincoli nella forma:

   $$x_{bj} = b_j - a_e x_e$$

   Dove x_{bj} indica j-esima variabile di base, b_j il j-esimo termine noto e $a_e x_e$ la variabile entrante moltiplicata per il relativo coefficiente nel vincolo in esame. Si noti che questa espressione è possibile perché il valore di qualsiasi altra variabile non di base presente nell'equazione è pari a 0 e rimane tale per tutta la durata di questa iterazione.

Perché la soluzione che si sta cercando rimanga ammissibile è necessario che il valore di tutte le variabili di base che subiscono modifiche al variare della variabile entrante sia non negativo. Inoltre, perché la nuova soluzione sia una soluzione di base occorre che una delle variabili di base diventi una variabile non di base, sostituendo la variabile entrante e assumendo, quindi, valore nullo. Queste due considerazioni fanno sì che l'aumento della variabile entrante si debba arrestare al momento in cui una variabile di base, per prima, assume valore 0. La variabile che si annulla prende il nome di *variabile uscente (di base)*. Per determinare la variabile uscente è sufficiente porre i vincoli nella nuova forma $x_{bj} = b_j - a_e x_e = 0$ e verificare quale equazione si annulla per il valore minore di x_e.
La x_{bj} relativa a tale equazione sarà la variabile uscente x_u e il valore della variabile entrante nella nuova BFS sarà $\frac{b_j}{a_e}$.

5. Con le informazioni finora ottenute è possibile calcolare la nuova BFS risolvendo il nuovo sistema dove x_u viene posta uguale a 0 mentre x_e entra a far parte delle variabili ignote alle quali assegnare un valore. Il metodo di risoluzione utilizza l'eliminazione gaussiana[4] per portare il nuovo sistema alla forma canonica (ovverosia portare tutti i coefficienti delle variabili di base a $+1$) e fare in modo che la variabile entrante abbia la stessa colonna dei coefficienti che aveva la variabile uscente (tutti 0 ad eccezione di un $+1$ in una delle equazioni dei vincoli). Si noti come nonostante le variabili non di base abbiano valore 0 nella soluzione, questo non significa che le operazioni algebriche tra le equazioni del sistema non modifichino i loro coefficienti; in altre parole le variabili non di base non spariscono dal sistema nonostante si sappia a priori che esse debbano assumere nella soluzione valore nullo.

6. Ripetere i passi 2-5 fino a che il test di ottimalità non fallisca nel trovare un coefficiente negativo nella funzione obiettivo. In questo caso la BFS in esame rappresenta un vertice ottimale e si è trovata la soluzione al problema.

È possibile che ci si trovi di fronte a situazioni particolari durante l'esecuzione del metodo del simplesso che rendono le fasi di scelta delle variabili entranti e uscenti di non immediata applicazione:

- Nella scelta della variabile entrante può accadere che i coefficienti delle variabili non di base nella funzione obiettivo abbiano lo stesso valore per cui non è possibile scegliere la variabile con il coefficiente maggiore in valore assoluto. In tal caso la scelta è arbitraria e il metodo del simplesso porterà comunque alla soluzione ottima.

[4] In questa sede il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan e l'eliminazione gaussiana vengono considerati come sinonimi nonostante tecnicamente presentino delle differenze

- Nel caso in cui l'indecisione si presenti al momento della scelta della variabile uscente il problema diventa più insidioso. Se è possibile scegliere tra due o più variabili per selezionare x_u significa che tutte queste si annullano contemporaneamente all'aumentare di x_e. Questo implica che una volta selezionata la variabile uscente le altre variabili candidate assumeranno valore nullo nonostante rimangano variabili di base, rendendo la BFS degenere. Se una di queste variabili rimane a 0 fino a che viene scelta come variabile uscente in una iterazione, il fatto che essa abbia in partenza valore nullo implica che la variabile entrante per tale iterazione non può aumentare senza far diventare la variabile uscente negativa. Si ha quindi il rischio che il metodo del simplesso entri in ciclo infinito ripetendo sempre le stesse soluzioni e non cercando attivamente la soluzione ottima. Questo caso sebbene teoricamente possibile è molto raro nei casi reali e qualora esso si verificasse sono state definite delle regole di scelta della variabile uscente al fine di evitare che il procedimento entri nel ciclo.
- Può accadere che al momento della scelta della variabile uscente non si trovi alcuna variabile idonea. Questo accade se la variabile entrante può essere incrementata all'infinito senza rendere negativa alcuna altra variabile tra quelle presenti nel modello. Dal punto di vista geometrico questo significa che la regione ammissibile è illimitata e x_e può essere aumentata all'infinito senza mai uscire dalla regione ammissibile. Sebbene il caso in questione è teoricamente possibile, dal punto di vista pratico esso solitamente è dovuto a errori computazionali, a vincoli non specificati o mal posti.
- Come descritto in precedenza un problema di PL può avere soluzioni ottime multiple. In questo caso le soluzioni sono infinite; due di esse devono essere vertici mentre le altre si presentano come *combinazione convessa* delle due soluzioni di vertice:
$$(x_1, \dots, x_n) = w_1(x_{v1,1}, \dots, x_{v1,n}) + (1 - w_1)(x_{v2,1}, \dots, x_{v2,n})$$
Dove $0 \leq w_1 \leq 1, (x_{v1,1}, \dots, x_{v1,n})$ è uno dei due vertici ammissibili e $(x_{v2,1}, \dots, x_{v2,n})$ è l'altro.
Se questo è vero, una delle variabili non di base ha coefficiente 0 nella funzione obiettivo al momento in cui si trova la prima BFS ottima. L'aumento di suddetta variabile non porterà ad un miglioramento del valore della funzione obiettivo, ma fornirà le altre funzioni ottime al pari di quella già trovata.

Oltre alla forma algebrica già presentata esistono ulteriori modi per rappresentare il metodo del simplesso che risultano più utili al fine della soluzione del problema o della comprensione di alcune proprietà del metodo stesso. Si illustreranno di seguiti due di queste metodologie: la forma tabellare (o tableau) e la forma matriciale.

2.4 Tableau

Con il termine tableau si intende una tabella di questo tipo (come esempio si prende un modello con 2 variabili decisionali e 2 variabili slack prima di qualsiasi manipolazione):

Variabili di base	**Eq.**	**Coefficienti**					**Termini noti**
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	0	1	c_1	c_2	0	0	b_1
x_{b1}	1	0	a_{11}	a_{12}	1	0	b_2
x_{b2}	2	0	a_{11}	a_{11}	0	1	b_3

Dove (leggendo le colonne da sinistra verso destra) si leggono: le variabili di base dell'iterazione corrente (che dovranno avere coefficiente 1 nella rispettiva equazione), l'enumerazione delle equazioni, i coefficienti di ogni variabile elencati nella colonna contrassegnata dal nome della variabile stessa e, in ultimo, i termini noti.

Tramite questo strumento lo svolgimento del metodo del simplesso si semplifica in maniera non indifferente, in quanto la tabella memorizza solo le informazioni necessarie allo svolgimento della procedura:

- Per individuare la variabile entrante è sufficiente individuare il coefficiente negativo con maggior valore assoluto nella riga 0. La colonna di appartenenza prende il nome di *colonna pivot*.
- Per trovare la variabile uscente si concentri l'attenzione sui coefficienti positivi della colonna pivot e tra questi selezionare quello a cui corrisponde il minor rapporto $\frac{b_j}{a_{jp}}$ (dove a_{jp} è il coefficiente della colonna pivot scelto); tale coefficiente prende il nome di *pivot*
- A questo punto il pivot individua la *riga pivot* che può essere utilizzata per le operazioni elementari del metodo dell'eliminazione di gauss al fine di ottenere la nuova forma canonica.

2.5 Esempio di risoluzione con il metodo del simplesso

Si consideri nuovamente l'azienda *alpha* produttrice di scarpe la cui situazione è stata analizzata nel primo capitolo tramite l'utilizzo del metodo grafico. Si procederà ora alla risoluzione dello stesso problema con il metodo del simplesso ed in particolare utilizzando la forma tabellare per semplificare l'esecuzione e la visualizzazione dei passaggi.

Per comodità si riporta di seguito la notazione formale del modello matematico:

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Prima di poter eseguire la procedura del metodo del simplesso occorre riscrivere il modello in forma aumentata inserendo tre variabili slack x_3, x_4, x_5:

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Dato che la regione ammissibile contiene l'origine, possiamo prendere quest'ultima come primo vertice da analizzare. Le variabili di base saranno conseguentemente le variabili slack mentre le variabili non di base saranno le variabili decisionali; possiamo quindi scrivere il tableau iniziale del problema:

Variabili di base	Eq.	Coefficienti						Termini noti
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	2	0	0	2	0	1	0	12
x_5	3	0	3	2	0	0	1	18

A questo punto si può procedere con il metodo del simplesso cominciando con il test di ottimalità. Si noti, quindi, che i coefficienti delle variabili non di base nella funzione obiettivo sono entrambi negativi per cui l'origine non rappresenta una soluzione ottima per il nostro problema.

Di conseguenza è necessario selezionare una variabile entrante in base selezionando il coefficiente negativo (automaticamente un coefficiente di una variabile non di base) con valore assoluto maggiore all'interno della funzione obiettivo. Nel caso in analisi naturalmente si tratta della variabile x_2 il cui coefficiente è -5. Questa operazione individua la colonna relativa alla variabile x_2 come la colonna pivot.

Occorre, conseguentemente, selezionare la variabile uscente chiedendosi quale tra le variabili di base sia la prima ad azzerarsi all'aumentare della variabile entrante. Per fare questo è sufficiente dividere il termine noto di ogni equazione per il coefficiente relativo alla variabile entrante ed individuare in quale delle equazioni tale valore è il minimo. La variabile di base per quella equazione sarà la variabile uscente e la riga stessa sarà la riga pivot. In questo caso si dovranno confrontare $\frac{12}{2} = 6$ e $\frac{18}{2} = 9$; ovviamente il valore relativo alla seconda equazione (6) è il più piccolo e, di conseguenza, si sceglierà x_4 come variabile uscente e la riga corrispondente come riga pivot. L'elemento all'incrocio tra la colonna e la riga pivot sarà il pivot di questa iterazione (in questo caso 2). Di seguito è riportato il tableau iniziale con evidenziati la riga, la colonna e l'elemento pivot:

Variabili di base	Eq.	Coefficienti						Termini noti
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	1	0	1	$\boxed{0}$	1	0	0	4
x_4	2	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	12
x_5	3	0	3	$\boxed{2}$	0	0	1	18

Per completare la prima iterazione non rimane che calcolare la nuova forma canonica del sistema utilizzando l'eliminazione gaussiana. Nel problema in esame è sufficiente dividere la riga pivot (riga 2) per l'elemento pivot (2) - ottenendo la serie di coefficienti $(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0)$ - sommare alla riga 0 la nuova riga 2 moltiplicata per 5 e sottrarre alla riga 3 due volte la nuova riga 2. In questo modo si arriva alla nuova forma canonica del sistema:

Z	0	1	-3	0	0	$-5/2$	0	30
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_5	3	0	3	0	0	-1	1	6

Si può quindi proseguire con un nuovo test di ottimalità. Come è facile notare, persiste un coefficiente di segno negativo all'interno della funzione obiettivo che evidenzia come la BFS attuale non sia ottima e risulti necessario proseguire con una nuova iterazione al termine della quale si otterrà il seguente risultato:

Z	0	1	-3	0	0	$-5/2$	0	30
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_5	3	0	3	0	0	-1	1	6
Z	0	0	0	0	0	$3/2$	1	36
x_3	1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_1	3	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2

A questo punto la BFS in analisi -$(2, 6, 2, 0, 0)$- supera il test di ottimalità in quanto tutti i coefficienti nella funzione obiettivo sono ≥ 0. Il metodo del simplesso può quindi terminare e la soluzione ottima che ricaviamo rappresenta la combinazione produttiva ricercata dalla azienda *alpha* che dovrà produrre 2 lotti di scarpe del tipo A ($x_1 = 2$) e 6 lotti di scarpe B ($x_2 = 6$).

3.METODO DEL SIMPLESSO RIVISITATO E MODELLI NON IN FORMA STANDARD

3.1 Forma matriciale

La forma matriciale risulta particolarmente utile per diversi motivi tra i quali si possono elencare l'implementazione informatica dei modelli di PL e una serie di attività relative all'analisi post-ottimale. Di seguito sarà illustrata che, grazie all'utilizzo delle matrici come metodologia di calcolo, porteranno a dei risultati importanti per tali scopi.

Si consideri quindi un modello:

$$\text{max/min } Z = \boldsymbol{cx}$$

Soggetto a vincoli:

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Che nella forma aumentata si può scrivere:

$$Z = \boldsymbol{cx}$$

Soggetto a vincoli:

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}] \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

Dove $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_s \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{A}$ è $m \times n$ per cui $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m+n}, [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ è $m \times (m+n)$.

Sia $\boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} x_{b1} \\ \vdots \\ x_{bm} \end{bmatrix}$ il *vettore delle varabili di base* ottenuto da $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix}$ tramite l'eliminazione delle variabili non di base e sia:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

la *matrice di base* (quadrata) ottenuta da $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I}]$ eliminando le colonne corrispondenti alle variabili non di base.

A questo punto ponendo il valore delle variabili non di base uguale a 0, si può scrivere:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{b}$$

e, dal momento che il metodo del simplesso introduce soltanto variabili di base per le quali $\boldsymbol{B}$ non è singolare, la risoluzione del sistema è molto semplice:

$$\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Ora sia $\boldsymbol{c}_b = \begin{bmatrix} c_{b1} \\ \vdots \\ c_{bm} \end{bmatrix}$ il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo relativi alle variabili di base; si può quindi calcolare il valore della funzione obiettivo:

$$Z = \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Con queste informazioni è inoltre possibile esprimere il sistema di equazioni che compongono il tableau ad ogni iterazione del metodo del simplesso. Data la forma di partenza:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Si possono esprimere i termini noti del sistema al termine di ogni iterazione (ricordando che nella forma canonica i termini noti coincidono con i valori delle variabili di base) come di seguito:

$$\begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

La matrice che premoltiplica il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ deve premoltiplicare anche il lato destro del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

In modo da ottenere il sistema di equazioni al termine di ogni iterazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Questo semplifica l'esecuzione del metodo del simplesso permettendo di calcolare solo i coefficienti che servono per l'esecuzione di ogni passo, ad esempio:

- Al momento della selezione della variabile entrante sono sufficienti i coefficienti delle variabili non di base nella funzione obiettivo; questo limita il calcolo alle due espressioni matriciali $\boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}$ per le variabili decisionali e $\boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}$ per le variabili slack dai risultati delle quali si selezionano poi i coefficienti che interessano.
- Per la scelta della variabile uscente si necessita solamente dei coefficienti della variabile entrante, che possono essere ricavati dalle due matrici $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}^{-1}$, e i termini noti delle equazioni $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Come si può notare è possibile ricavare qualsiasi informazione al termine di qualsiasi iterazione semplicemente conoscendo i dati iniziali e le variabili di base per l'iterazione a cui si è interessati. In particolare, si può giungere ad un risultato importante se si divide il sistema in questo modo:

riga 0: $[-\boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{0} \quad 0]+\boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}]$

righe 1-m: $\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}]$

e notando che $\boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}$ e $\boldsymbol{B}^{-1}$ sono i coefficienti delle variabili slack rispettivamente nella riga 0 e nelle righe da 1 a m alla fine dell'iterazione di interesse. Per cui utilizzando solamente il tableau iniziale e i coefficienti delle variabili slack si può scrivere il tableau completo al termine dell'iterazione che si desidera ed in particolare alla fine dell'intero procedimento.

3.2 Metodo del simplesso rivisitato

Il metodo del simplesso aggiorna ad ogni iterazione la matrice $\boldsymbol{B}^{-1}$ invece della matrice $\boldsymbol{B}$ rendendo tutto il procedimento meno pesante dal punto di vista computazionale e quindi più facilmente eseguibile da parte di un calcolatore.

Formalmente questo procedimento può essere espresso come di seguito. Sia x_e la variabile entrante, a_{ie} il coefficiente di x_e nella i-esima equazione, r il numero dell'equazione contenente la variabile uscente, ${\boldsymbol{B}^{-1}}_v$ la matrice da aggiornare e ${\boldsymbol{B}^{-1}}_n$ la matrice aggiornata; allora si può dire:

$$
{\boldsymbol{B}^{-1}}_n=\begin{cases} ({\boldsymbol{B}^{-1}}_v)_{ij}-\dfrac{a_{ie}}{a_{re}}({\boldsymbol{B}^{-1}}_v)_{rj}\,, & i\neq r \\ \qquad\qquad \dots & \\ \qquad\qquad \dots & \\ \dfrac{1}{a_{re}}({\boldsymbol{B}^{-1}}_v)_{ij}\,, & i=r \end{cases}
$$

O in forma matriciale:

$$\boldsymbol{B^{-1}}_n = \boldsymbol{EB^{-1}}_v$$

Dove $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{r-1} \quad \boldsymbol{\mu} \quad \boldsymbol{e}_{r+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e_m}]$ è la matrice identità nella quale l'r-esima colonna è stata sostituita dal vettore $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$ con $\mu_i = \begin{cases} -\frac{a_{ie}}{a_{re}}, \ i \neq r \\ \frac{1}{a_{re}}, \ i = r \end{cases}$.

3.3 Modelli non in forma standard

A questo punto non rimane che studiare come sia possibile adattare il metodo del simplesso al fine di risolvere modelli che non siano in forma standard.

Le principali differenze rispetto a quanto descritto in precedenza che un modello può presentare sono le seguenti:

1. Vincoli di uguaglianza
2. Vincoli nella forma $\geq$
3. Termini noti negativi
4. Minimizzazione della funzione obiettivo

Le difficoltà che si incontrano in ognuna di queste occasioni sono circoscritte alla definizione della BFS iniziale, in quanto una volta stabilita questa il metodo del simplesso è in grado di arrivare alla soluzione ottima (o ad una delle soluzioni ottime) senza problemi.

I concetti che si definiranno nel trattare queste problematiche porteranno infine alla definizione di un nuovo metodo per la risoluzione di problemi di PL chiamato *metodo delle due fasi*.

3.3.1 Vincoli di uguaglianza

Per affrontare il problema dei vincoli di uguaglianza occorre introdurre un nuovo tipo di variabile denominata *variabile artificiale*.

Si prenda un vincolo nella seguente forma:

$$\boldsymbol{a_j x} = b_j$$

In questo caso non è possibile sostituire questo vincolo con un sistema di due equazioni tramite l'introduzione di una variabile slack. Questo fa sì che il sistema iniziale di equazioni non sia in forma standard rendendo più difficoltosa la scelta della BFS iniziale.

Si introduce quindi una variabile artificiale che per ora chiameremo x_a e si esprime il vincolo in questo modo:

$$\boldsymbol{a_j x} + x_a = b_j \, , x_a \geq 0$$

Tuttavia, ora occorre fare in modo che tale variabile vada a 0 nella soluzione ottima in modo da essere certi che essa soddisfi il vincolo nella sua forma iniziale $\boldsymbol{a_j x} = b_j$; per fare ciò è sufficiente adattare la funzione obiettivo inserendo un nuovo termine:

$$Z = \boldsymbol{cx} - Mx_a$$

Dove $M >> 0$ simboleggia un numero molto grande.

In questo modo il metodo del simplesso, al fine di massimizzare la funzione obiettivo, farà in modo di minimizzare il termine Mx_a, cosa che accade in corrispondenza di $x_a = 0$.

Il procedimento sopra descritto viene chiamato *metodo del Big M.*

In alternativa, è possibile sostituire il vincolo di uguaglianza con due di disuguaglianza e trasformare poi il vincolo con il $\geq$ in $\leq$ (moltiplicando ambo i membri per -1), in altri termini si trasforma il modello in forma standard.

3.3.2 Vincoli nella forma $\geq$

Ora ci si concentrerà su vincoli del tipo:

$$\boldsymbol{a_j x} \geq b_j$$

Per affrontare questo tipo di vincoli si utilizza un approccio a due step:

1. Il primo step consiste nell'inserire un nuovo tipo di variabile, detta *variabile surplus*, definita come segue:

   $$x_+ = \boldsymbol{a_j x} - b_j$$

   Questo tipo di variabile, se sottratta al vincolo nella forma originaria, fa in modo di eliminare la parte in eccesso, se esistente, che rendeva la parte sinistra del vincolo $\boldsymbol{a_j x}$ maggiore del termine noto. Infatti:

   $$\boldsymbol{a_j x} - x_+ = \boldsymbol{a_j x} - \boldsymbol{a_j x} + b_j = b_j$$

2. A questo punto il vincolo è stato trasformato in un vincolo di uguaglianza e può essere trattato come sopra descritto.

Si noti che anche in questo caso è possibile procedere diversamente, scrivendo il problema in forma standard. Si trasforma il vincolo ($b_j \geq \boldsymbol{a_j x}$) e si introducono poi le variabili slack:

$$b_j \geq \boldsymbol{a_j x} + \boldsymbol{x_s}$$

si può, quindi, procedere come descritto nei paragrafi precedenti.

<u>3.3.3 Termini noti negativi e minimizzazione</u>

Le ultime due problematiche (termini noti negativi – problemi di minimo) vengono affrontate contemporaneamente per via della semplicità e similitudine delle modalità di adattamento del metodo del simplesso nei due casi.

In entrambe le situazioni è sufficiente moltiplicare per -1 entrambi gli estremi della equazione/disequazione per ovviare completamente al problema. In questo modo:

$$\min \; Z = \boldsymbol{cx}$$

è equivalente al seguente problema di massimo:

$$\max \; -Z = -\boldsymbol{cx}$$

e:

$$\boldsymbol{a_j x} \leq -b_j$$

diventa:

$$-\boldsymbol{a_j x} \geq b_j$$

3.4 Metodo delle due fasi

Quanto finora detto utilizza il coefficiente M per risolvere i problemi relativi a vincoli di uguaglianza o con il segno di $\geq$. Tuttavia, la presenza di un coefficiente che non sia specificato all'interno del modello può creare intoppi di tipo computazionale. Il metodo delle due fasi permette di ovviare a queste difficoltà tramite l'eliminazione di M.

Come suggerisce il nome, questo procedimento si articola in due momenti differenti:

1. Lo scopo del primo passo consiste nel trovare una BFS iniziale per poi svolgere il metodo del simplesso in maniera ordinaria. Questa prima fase consiste nella risoluzione di un modello “fittizio” che minimizza la somma delle variabili artificiali sottostando ai vincoli nella forma aumentata, modificati secondo gli accorgimenti sopra riportati. In questo modo si giungerà ad una BFS in cui le variabili fittizie siano pari a 0.
2. A questo punto si può risolvere il modello vero e proprio utilizzando la BFS ottenuta dalla prima fase. I vincoli di questa fase non presentano le variabili artificiali in quanto esse sono poste uguali a 0 e tali rimarranno per tutta la durata del procedimento.

3.5 Esempio di risoluzione con il metodo delle due fasi

Si consideri il modello:

$$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Per poter proseguire occorre in prima battuta aggiungere le variabili ausiliare e praticare le modifiche introdotte nel presente capitolo. Riscriviamo per cui il modello in questa maniera:

$$\max -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2 - Mx_4 - Mx_6$$

Soggetto ai vincoli:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 = 6$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \cdots, 6$$

Dove x_3 è una variabile slack, x_4 e x_6 sono variabili artificiali e x_5 è una variabile surplus.

È possibile inoltre dividere la nuova funzione obiettivo in due funzioni separate e procedere con il metodo delle due fasi semplificando l'esecuzione del procedimento algebrico:

Fase 1:

$$\max -Z = -x_4 - x_6$$

Soggetto ai vincoli:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 = 6$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \cdots, 6$$

Fase 2:

$$\max. -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$$

Soggetto ai vincoli:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 - x_5 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Dove le variabili artificiali sono state eliminate perché poste uguali a 0 grazie all'esecuzione della fase 1.

A questo punto non rimane che svolgere la procedura algebrica vera e propria per ottenere la soluzione ottima (o le soluzioni ottime multiple). Di seguito sono riportati i tableau delle due fasi della risoluzione:

Fase 1:

Variabili di base	Eq.	Coefficienti							Termini noti
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	0	-1	0	0	0	1	0	1	0
x_3	1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
x_4	2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
x_6	3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
Z	0	-1	-1.1	-0.9	0	0	1	0	-12
x_3	1	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
x_4	2	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
x_6	3	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
Z	0	-1	0	$-16/30$	$11/3$	0	1	0	-2.1
x_1	1	0	1	$1/3$	$10/3$	0	0	0	9
x_4	2	0	0	$1/3$	$-5/3$	1	0	0	1.5
x_6	3	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
Z	0	-1	0	0	$-5/3$	0	$-5/3$	$8/3$	-0.5
x_1	1	0	1	0	$20/3$	0	$5/3$	$-5/3$	8
x_4	2	0	0	0	$5/3$	1	$5/3$	$-5/3$	0.5
x_2	3	0	0	1	-10	0	-5	5	3

Z	0	-1	0	0	0	1	0	1	0
x_1	1	0	1	0	0	-4	-5	5	6
x_3	2	0	0	0	1	$3/5$	1	-1	0.3
x_2	3	0	0	1	0	6	5	-5	6

Dove il primo step si rende necessario poiché il sistema non si presenta in forma canonica (le variabili di base x_4 e x_6 non hanno coefficiente nullo nella funziona obiettivo), mentre nel penultimo tableau vi sono due possibili scelte per la variabile entrante (x_3 e x_5) ed in questo caso viene scelta x_3.

La BFS ottima di questa prima fase è quindi $(6, 6, 0.3, 0, 0, 0)$ o, dopo l'eliminazione di x_4 e x_6 per la fase 2, $(6, 6, 0.3, 0)$. A questo punto possiamo utilizzare questa come BFS iniziale per la fase 2:

Variabili di base	Eq.	Coefficienti					Termini noti
		Z	x_1	x_2	x_3	x_5	
Z	0	-1	0.4	0.5	0	0	0
x_1	1	0	1	0	0	-5	6
x_3	2	0	0	0	1	1	0.3
x_2	3	0	0	1	0	5	6
Z	0	-1	0	0	0	-0.5	-5.4
x_1	1	0	1	0	0	-5	6
x_3	2	0	0	0	1	1	0.3
x_2	3	0	0	1	0	5	6
Z	0	-1	0	0	0.5	0	-5.25
x_1	1	0	1	0	-5	0	7.5
x_5	2	0	0	0	1	1	0.3
x_2	3	0	0	1	5	0	4.5

La soluzione ottima che ne risulta è $(7.5, 4.5, 0, 0.3)$ per cui la combinazione ottimale delle variabili decisionali è $(7.5, 4.5)$.

CONCLUSIONE

Nel presente elaborato sono state trattate le caratteristiche e alcuni dei metodi di risoluzione dei modelli di Programmazione Lineare. Nel primo capitolo è stata introdotta la Programmazione Lineare come branca della ricerca operativa, analizzandone le principali proprietà, ed è stato affrontato il metodo grafico. Il secondo capitolo è stato concentrato sulla risoluzione di modelli in forma standard mediante l'utilizzo del metodo del simplesso, mentre il terzo ed ultimo capitolo ha introdotto una rivisitazione del suddetto metodo tramite l'utilizzo delle matrici e le modifiche necessarie per affrontare modelli che non si presentano nella forma standard, per sfociare infine nella definizione del metodo delle due fasi, che risulta utile in questi casi.

Gli esempi economici proposti evidenziano, inoltre, le potenzialità applicative della Programmazione Lineare nell'analisi di problemi di carattere economico e finanziario, percorrendo la strada della modellizzazione matematica (formalizzazione quantitativa del problema – risoluzione – interpretazione dei risultati).

In conclusione, gli strumenti introdotti in questa trattazione permettono al lettore di affrontare qualsiasi problema di Programmazione Lineare a prescindere dalla modalità con cui esso si presenta. Sebbene i metodi di risoluzione non siano esauriti ed il caso lineare sia solamente una parte dell'ampia famiglia dell'ottimizzazione vincolata e della ricerca operativa, quanto analizzato in queste pagine fornisce una solida base su cui costruire nuove conoscenze e competenze nell'ambito dell'applicazione delle tecniche matematico-scientifiche alla risoluzione di problemi di qualsiasi tipo e in qualsiasi ambito.

Come già accennato nell'introduzione, l'utilizzo della logica e dei metodi matematici è uno strumento molto potente che può fornire un approccio fresco, innovativo e razionale in campi dell'attività umana che ad un occhio poco allenato non hanno nulla a che fare con numeri, equazioni e funzioni, aiutando a gestire situazioni di difficile comprensione e ad affrontare problemi di ardua risoluzione. In un momento tanto complicato della storia umana, questo tipo di aiuto potrebbe risultare decisivo, ad esempio permettendo l'applicazione di nuove tecnologie in maniera efficiente o rendendo fattibili operazioni che altrimenti richiederebbero un'eccessiva quantità di volumi finanziari.

BIBLIOGRAFIA

1. D. Ambrosino, R. Leone, A. Sciomachen: *Ricerca operativa, Fondamenti*, nona ed., McGraw-Hill, Milano, 2010
2. http://www.dis.uniroma1.it/~roma/didattica/RONO/cap4-5.pdf