UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

FACOLTÀ DI ECONOMIA “GIORGIO FUÀ”

Corso di Laurea triennale in

ECONOMIA E COMMERCIO

TEORIA DEI GIOCHI: UNA RASSEGNA DEGLI SVILUPPI RECENTI

GAME THEORY: REVIEW OF RECENT DEVELOPMENTS

Relatore:	Rapporto Finale
di: Prof. Matteucci Nicola	Cocci Raffaele

Anno Accademico 2018/2019

Indice

INTRODUZIONE

Alla base di questo studio, effettuato sulla teoria dei giochi, sull'evoluzione del pensiero e delle metodologie di applicazione della stessa che si sono sviluppate a partire dal XX secolo, c'è la volontà di approfondire tale strumento di analisi della realtà economica, che permette di effettuare previsioni sul comportamento degli agenti oggetto delle analisi; la duttilità della teoria dei giochi permette di applicare i concetti di soluzione analizzati agli ambiti inerenti gli studi economici e non.

Nel capitolo 1 vengono mostrati i maggiori contributi del XX secolo che hanno permesso una formalizzazione matematica della teoria, partendo dai lavori di John Von Neumann e Oskar Morgenstern, che poggiano le basi di una prima formalizzazione degli strumenti e delle modalità con cui rappresentare i possibili giochi esistenti.

Successivamente verrà mostrato come il matematico John Nash abbia rivoluzionato l'approccio alla teoria dei giochi, proponendo un concetto di equilibrio oggi noto come equilibrio di Nash, con un approfondimento orientato a mostrare come tale equilibrio e la procedura che permette di raggiungere tale equilibrio siano stati formalizzati.

L'importanza delle conclusioni raggiunte da Nash sono fondamentali per il successivo sviluppo della teoria, proprio per questo i successivi studi analizzati all'interno del capitolo, essenzialmente i contributi di John Harsanyi e Reinhard Selten, sono introdotti come perfezionamenti dell'equilibrio di Nash, per sottolineare come tali elaborati vengano prodotti per rispondere alle limitazioni e alle problematiche per cui l'equilibrio di Nash risulta inadatto, o porti a delle conclusioni considerate poco attendibili.

Per comprendere al meglio la teoria dei giochi si sia evoluta nel tempo inoltre sono stati introdotti esempi pratici e definizione formali delle diverse tipologie di giochi che è possibile analizzare.

Il capitolo 2 continua il processo di descrizione dell'evoluzione della teoria dei giochi; una volta definita la struttura formale dei giochi, la volontà di adattare nella maniera migliore possibile la rappresentazione dei giochi alla realtà abbia portato allo sviluppo del cosiddetto approccio epistemico alla teoria dei giochi: tale approccio introduce delle ipotesi sulle gerarchie di credenze e sulla conoscenza comune, considerate da tale approccio fondamentali per definire metodologie di analisi dei giochi più realistiche.

Verranno quindi analizzate le modalità con cui rappresentare tali gerarchie di credenze, introducendo sia la formalizzazione di Harsanyi, basata sui tipi, sia la formalizzazione di Kripke e Aumann, fondata sugli stati del mondo.

Nell'analisi dell'approccio epistemico risulta fondamentale andare a definire il concetto di credenza comune nella razionalità; nel farlo verranno presi in esame i lavori di BÖge e Eisele, Pearce, Bernheim, Aumann e di Brandenburger e Dekel.

Lo scopo finale dell'elaborato è quello di mostrare l'evoluzione della teoria, e allo stesso tempo capire in che direzione verrà sviluppata in futuro.

CAPITOLO I. EVOLUZIONE DELLA TEORIA DEI GIOCHI

I.1. RASSEGNA DELLA TEORIA DEI GIOCHI

I.1.1. Introduzione

La teoria dei giochi è una disciplina relativamente giovane, che solo di recente ha acquisito una configurazione relativamente stabile, la quale continua a svilupparsi; tale sviluppo opera sia sul piano cumulativo, sia sul cambiamento della prospettiva della teoria stessa.

Già in alcuni scritti di matematici ed economisti del XVIII e XIX secolo possono essere rintracciati esempi di analisi di specifici giochi, ma è solamente nel 1928, con la pubblicazione del matematico ungherese von Neumann del saggio *"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"* che viene presentata la prima trattazione generale e sistematica dell'argomento; qui viene mostrato come rappresentare matematicamente le regole di qualunque gioco, e viene definito in maniera formale il concetto di strategia, e viene dimostrata l'esistenza di una soluzione unica per tutti i giochi con due giocatori e somma delle vincite costanti, definiti finiti e antagonistici.

Il contributo di Von Neumann viene arricchito con la pubblicazione di "*Theory of games"*, in collaborazione con l'economista Oskar Morgenstern, in cui vengono distinti i giochi antagonistici da tutti gli altri giochi; per questi ultimi si propone un'analisi di tipo cooperativo, in cui l'oggetto dell'indagine è la formazione di coalizioni che ridistribuiscono tra i propri membri la massima vincita complessiva che è possibile ottenere agendo in modo coordinato.

L'impostazione data da von Neumann e Morgenstern presenta però delle problematiche per l'applicazione della teoria alla scienza economica: i giochi antagonistici, la cui analisi risulta dominante all'interno del saggio, sono di limitato interesse per gli economisti; inoltre l'analisi cooperativa trascura le problematiche relative all'incentivazione e alla comunicazioni all'interno delle coalizioni; il concetto di soluzione proposto risulta poco trattabile e poco compatibile con quelli utilizzati nell'analisi di specifici giochi economici.

I.1.2. L'equilibrio di Nash

All'inizio degli anni cinquanta il matematico John Nash propone un concetto di equilibrio non cooperativo applicabile a tutte le situazioni di gioco.

Data l'ipotesi di razionalità dei giocatori, l'equilibrio di Nash si fonda sull'idea che ogni giocatore vada a scegliere la migliore strategia possibile tra tutte quelle che può attuare, ritenendo che ogni altro giocatore utilizzi lo stesso ragionamento per selezionare la strategia da adottare.

Quindi, dato un gioco $[N,S_i,\pi_i(s)]$ il risultato $\hat{s} = (s_1,s_2,\ldots,s_N)$ con $\hat{s}_i \in S_i\ \forall i \in N$, è un equilibrio di Nash se:

$$\pi_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{i-1}) \geq \pi_i(s_i, \hat{s}_{i-1})\ \forall s_i \neq \hat{s}_i,\ s_i \in S_i$$

Ovvero la strategia $\hat{s}_i$ è una strategia di un equilibrio di Nash per il giocatore *i* se, dato il comportamento $\hat{s}_{i-1}$ posto dagli altri giocatori, la strategia $\hat{s}_i$ massimizza il pay-off del giocatore *i*; il conseguente risultato $\hat{s}$ è un equilibrio di Nash se nessun giocatore migliora il proprio pay-off adottando unilateralmente una strategia diversa da $\hat{s}_i$.

Possiamo ora definire l'enunciato del teorema di esistenza dell'equilibrio di Nash:

Ogni gioco $[N,S_i,\pi_i(s)]$ finito possiede almeno un equilibrio di Nash in strategie miste.

Uno degli esempi più utilizzati in letteratura per dimostrare come l'equilibrio di Nash opera per individuare l'equilibrio di un gioco è il dilemma del prigioniero, il quale rientra nella categoria dei giochi ad informazione completa.

Nei giochi ad informazione completa i giocatori hanno tutte le informazioni sulle regole del gioco, sulle strategie da adottare e sui pay-off attesi, sia propri sia su quelli degli altri giocatori; il gioco è il seguente: due individui, che indicheremo con A e B, vengono arrestati dopo aver commesso una rapina in banca. Una volta portati in caserma, vengono chiusi in due stanze separate per essere interrogati. Ognuno dei due individui è costretto ad effettuare una scelta: confessare il crimine o non confessare. Nel caso in cui solo uno dei due confessi, colui che ha confessato eviterà il carcere per aver collaborato, mentre l'altro, che non ha collaborato, sarà costretto a passare 6 anni in carcere.

Nel caso in cui entrambi confessino, dovranno scontare una pena di 4 anni ciascuno per aver commesso il crimine.

Nel caso in cui entrambi decidano di non confessare sconteranno una pena di 2 anni relativa al possesso di armi, poiché non potrebbero essere accusati del crimine. Rappresentiamo il gioco in forma normale nella tabella 1:

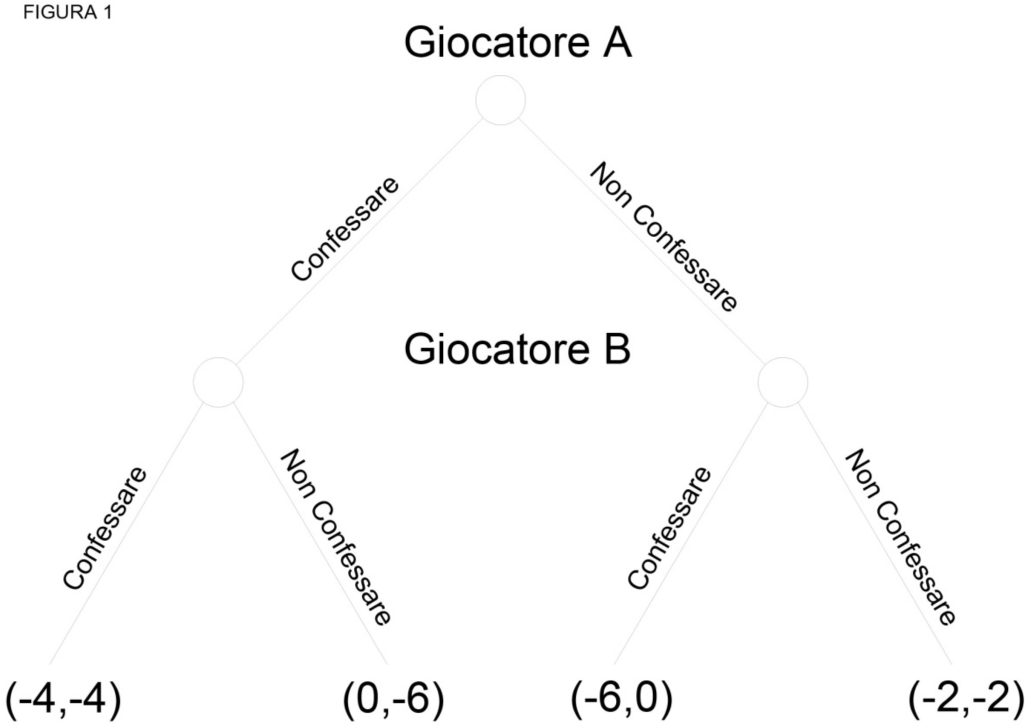
TABELLA 1

		Giocatore B	
		Confessare	Non Confessare
Giocatore A	Confessare	(-4,-4)	(0,-6)
	Non Confessare	(-6,0)	(-2,-2)

Fonte: nostro elaborato

Mentre la rappresentazione in forma estesa è quella indicata in figura 1:

FIGURA 1



Fonte: nostro elaborato

In questo particolare gioco la decisione “Confessare” risulta dominante per entrambi i giocatori A e B, ed infatti l’equilibrio di Nash, che per definizione indica la situazione in cui nessuno dei due giocatori può migliorare la propria utilità senza che l’altro modifichi la propria decisione, è individuato nella strategia “il giocatore A confessa, il giocatore B confessa”.

È evidente come l’equilibrio di Nash in questo particolare caso non ottimizzi l’utilità risultante dalla somma tra le utilità dei singoli giocatori: se entrambi confessassero infatti potrebbero diminuire a 2 anni ciascuno gli anni di carcere a cui verrebbero condannati, ma ciò non risulta un equilibrio di Nash poiché non è un equilibrio stabile: infatti nel caso in cui uno dei due giocatori ritenga che l’altro possa decidere di non confessare, sceglierà di confessare così da evitare il carcere.

L’equilibrio di Nash può essere applicato sia ai giochi a somma variabile che ai giochi a somma costante, in questi ultimi l’equilibrio di Nash coincide con l’equilibrio di massiminimo; L’equilibrio proposto da Nash è quindi un concetto unificante, che comprende come casi specifici la soluzione di maxmin di von Neumann e alcuni concetti di equilibrio oligopolistico come quelli analizzato da Cournot; Nash propone la formazione di coalizioni e la stipulazione di accordi che possono essere analizzate con l’approccio non cooperativo e quindi con il concetto di equilibrio strategico.

Nell’applicazione ai giochi spesso è possibile trovare più di un equilibrio di Nash, ponendosi di conseguenza il problema di capire quale degli equilibri individuati adottare; il problema della molteplicità degli equilibri di Nash ha generato molti tentativi di raffinamenti dell'equilibrio di Nash nel corso degli anni, i quali hanno la finalità di selezionare dagli equilibri individuati quello che venga effettivamente giocato.

Uno dei criteri di raffinamento dell'equilibrio di Nash è il criterio di dominanza, che da origine ad un equilibrio in strategie dominanti.

La strategia $\check{s}_i \in S_i$ è dominante rispetto al giocatore *i* se massimizza il suo pay-off $\pi_i\,(\check{s}_i,s_{-i})$ indipendentemente dal comportamento s_{-i} degli altri giocatori, ovvero se:

$$\pi_i\,(\check{s}_i,s_{-i}) \geq \pi_i\,(s_i,s_{-i}) \quad \forall\ s_i \neq \check{s}_i\ ,\ \ s_i \in S_i$$

Se la disuguaglianza vale con il segno > la strategia è detta strettamente dominante, altrimenti è detta debolmente dominante.

Di conseguenza se tutti i giocatori possiedono una strategia dominante e la adottano il risultato sarà un equilibrio in strategie dominanti; dato un gioco $[N,S_i,\pi_i(s)]$ il risultato $\check{s} \equiv (\check{s}_1,\check{s}_2,\ldots,\check{s}_N)$ con $\check{s}_i \in S_i\ \forall i \in N$ è un equilibrio in strategie dominanti se:

$$\pi_i\,(\check{s}_i,s_{-i}) \geq \pi_i\,(s_i,s_{-i}) \qquad \forall i \in N$$

L'equilibrio in strategie dominanti richiede che l'individuo *i* decida di giocare la strategia che gli permette di massimizzare il proprio pay-off, qualunque sia l'insieme delle strategie utilizzate dagli altri giocatori.

Proprio per questo il criterio di dominanza risulta più esigente del criterio di equilibrio di Nash. Infatti non tutti gli equilibri di Nash sono in strategie dominanti, mentre tutti gli equilibri in strategie dominanti sono equilibri di Nash.

I.1.3. Perfezionamenti dell'equilibrio di Nash

Il programma di Nash con cui la teoria dei giochi viene ricondotta a un approccio non cooperativo basato sull'equilibrio strategico è oggi prevalente, ma è l'approccio cooperativo che domina la teoria negli anni cinquanta e sessanta; gli studi del periodo producono risultati nella determinazione dell'equilibrio economico concorrenziale, ottenibile come soluzione limite quando le azioni di ogni agente economico sono trascurabili rispetto alla dimensione del mercato; tale approccio risulta oggi meno considerato, ma rimane una componente importante anche per le sue numerose applicazioni all'economia e alle scienze politiche.

L'approccio non cooperativo trova limitazioni nell'assunto per cui tutti i giocatori siano consapevoli delle regole del gioco e delle preferenze altrui sui possibili esiti, poiché tale considerazione risulta eccessiva per molte applicazioni, e nel fatto che l'equilibrio strategico non tiene conto in maniera adeguata degli aspetti dinamici del gioco, risultando compatibile con promesse ritenute non credibili.

Tali limiti vengono parzialmente superati grazie ai contributi di John Harsanyi (1967) e Reinhard Selten (1965, 1975).

Selten affronta il problema della credibilità proponendo un equilibrio definito perfetto, per cui le strategie devono definire un comportamento razionale per tutte le istanze del gioco, anche quelle che secondo l'equilibrio non si dovrebbero verificare; egli elabora un raffinamento dell'equilibrio di Nash rappresentato dal concetto di equilibrio perfetto nei sottogiochi, che può essere così definito:

Dato un gioco $[N,S_i,\pi_i(s)]$ il risultato ş≡(ş$_1$, ş$_2$,…, ş$_N$) con ş$_i$ $\in S_i$ $\forall i \in N$ è un equilibrio perfetto nei sottogiochi se induce un equilibrio di Nash in ogni sottogioco del gioco originale.

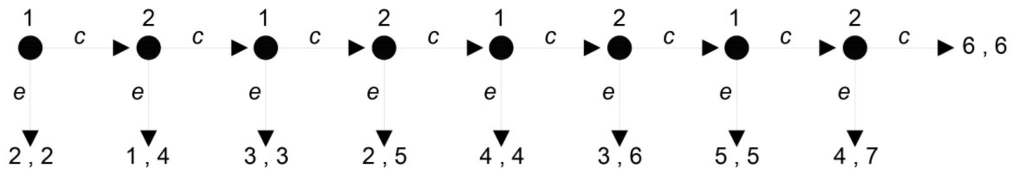
Utilizzando tale definizione nell'analisi di un caso concreto, essa afferma che per identificare un equilibrio perfetto nei sottogiochi è sufficiente determinare se le strategie che concorrono all'equilibrio siano non dominate.

Per determinare un equilibrio perfetto nei sottogiochi possiamo utilizzare il metodo della backward induction, o induzione a ritroso, partendo dai nodi terminali di un gioco in forma estesa.

Possiamo vedere come l'equilibrio in strategie dominanti sia una condizione sufficiente affinché l'equilibrio sia perfetto nei sottogiochi; al contrario se abbiamo un equilibrio perfetto nei sottogiochi non è detto che esso sia un equilibrio anche in strategie dominanti; inoltre un se esiste un solo equilibrio di Nash esso è perfetto nei sottogiochi, se ne esiste più di uno o non esistono strategie dominanti, e quindi tutti gli equilibri sono perfetti nei sottogiochi, o esistono strategie dominanti, che vanno ad individuare quale tra gli equilibri di Nash trovati sono perfetti nei sottogiochi.

Non sempre il metodo della backward induction però comporta conclusioni attendibili: un esempio è il gioco del centipede, caratterizzato da informazione perfetta e completa, presentato per la prima volta da Rosenthal nel 1981 e qui rappresentato in forma estesa nella figura 2:

FIGURA 2



Fonte: Organizzazione Industriale, Garella P., Lambertini L., pagina 238

In questo gioco i giocatori 1 e 2 hanno a disposizione 2 strategie *u* (uscire) e *c* (continuare); se ad un qualsiasi nodo colui che deve decidere sceglie di uscire il gioco termina e i giocatori ricevono i pay-off associati alla mossa, se invece decide diversamente il gioco continua al massimo fino al nodo terminale in cui il pay-off ricevuto è pari a 6 per entrambi.

Risolviamo il gioco per induzione a ritroso: partendo dal nodo terminale, il giocatore 2 che deve decidere sceglierà di uscire poiché il pay-off derivante pari a 7 è maggiore di quello derivante dal decidere di continuare il gioco, che è pari a 6; essendo il gioco ad informazione perfetta, il giocatore 1 nel nodo precedente deciderà di uscire, poiché sapendo cosa deciderà di fare il giocatore 2 il pay-off derivante dallo scegliere uscire è pari a 5, mentre quello derivante dallo scegliere continuare è pari a 4; questo ragionamento si ripete fino al nodo iniziale del gioco, il quale rappresenta l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi, in cui il giocatore 1 decide di uscire immediatamente dal gioco, così da ricevere un pay-off pari a 2, che è maggiore del pay-off derivante dallo scegliere la strategia continuare, pari a 1, nonostante il pay-off derivante sia inferiore a tutti quelli successivi ad esclusione di quello associato al secondo e al quarto stadio del gioco (in cui è uguale); in questo caso la razionalità massimizzante del criterio e il comportamento non cooperativo impediscono di raggiungere un equilibrio migliore per entrambi.

Harsanyi introduce un modello formale con cui rappresentare i possibili stati di conoscenza dei giocatori, includendo le loro conoscenze e credenze sulle conoscenze e credenze altrui, introducendo il concetto di equilibrio bayesiano, che modifica l'equilibrio strategico per tener conto dell'incompleta conoscenza delle regole del gioco e delle preferenze altrui.

Questi nuovi concetti di equilibrio permettono di organizzare uno schema di riferimento, e sviluppare al tempo stesso tutti i lavori sul comportamento delle aste e dei mercati con informazione asimmetrica prodotti tra gli anni sessanta e settanta.

Le applicazioni dell'equilibrio strategico bayesiano e perfetto a partire dagli anni ottanta fa emergere la consapevolezza che l'analisi di equilibrio incorpora ipotesi sulle credenze che i giocatori hanno sulle informazioni e le strategie dei loro avversari e sul modo in cui possono essere modificate durante lo svolgimento del gioco; da un lato si ritiene necessario introdurre ulteriori ipotesi che permettano di apporre una selezione tra i molteplici esiti di equilibrio dei modelli applicati, dall'altro tali ipotesi vengono messe in questione, comportando modelli di soluzione più deboli dell'equilibrio strategico bayesiano perfetto.

I.2 TASSONOMIE E TIPOLOGIE DI GIOCHI

I.2.1 Introduzione

La teoria dei giochi descrive i giochi utilizzando concetti matematici di natura insiemistica e di natura economico-quantitativa; nel farlo può essere adotta la forma estesa con cui poter definire tutti gli aspetti essenziali del gioco e delle sue regole, andando a specificare gli elementi che la compongono: i giocatori; le storie (sequenze di azioni permesse dalle regole del gioco) che possono essere parziali o terminali; le regole, che determinano dopo ogni storia parziale il giocatore che farà la mossa successiva e l'insieme delle azioni possibili; una funzione che determina per ogni storia terminale il payoff dei giocatori; per ogni storia terminale z e ogni giocatore i risulterà assegnata una utilità che è funzione della storia; il gioco sarà definito antagonistico se ci sono due giocatori e la somma delle loro utilità è costante.

Secondo von Neumann è sufficiente analizzare una rappresentazione più parsimoniosa del gioco, definita forma strategica o normale.

Definendo la strategia del giocatore i come una funzione che specifica una delle azioni permesse a i per ogni storia parziale immediatamente seguita da una mossa *i*, un giocatore potrebbe scegliere una strategia prima che cominci il gioco ed eseguirla; l'insieme delle strategie di ogni giocatore produce una particolare storia terminale e quindi un profilo di utilità che è funzione delle utilità dei singoli giocatori, la forma strategica specifica per ogni giocatore *i* l'insieme delle strategie a cui corrisponde l'utilità *i*.

Per capire come il gioco venga o debba essere giocato è necessario formulare ipotesi sulle conoscenze dei giocatori sulle regole de gioco e sulle preferenze altrui; un gioco viene definito ad informazione completa se le regole del gioco sono e le preferenze dei giocatori sono di comune conoscenza, altrimenti l'informazione risulta incompleta; i giochi propriamente detti sono un esempio di giochi ad informazione completa.

Altra distinzione viene effettuata tra i giochi non cooperativi e i giochi cooperativi: se è possibile stipulare un qualunque accordo vincolante sulle strategie da adottare si dice che il gioco è cooperativo, se non è possibile stipulare tale tipologia di accordi il gioco è detto non cooperativo.

Non è sempre possibile comunicare prima del gioco, e non sempre la comunicazione se presente permette di stipulare accordi vincolanti; se gli accordi vincolanti fossero possibili si può, seguendo il programma di Nash, analizzare un meta-gioco cooperativo in cui le regole sono date dalla contrattazione e gli esiti son gli accordi stessi; ciò può portare alla conclusione che l'analisi non cooperativa risulti fondamentale rispetto a quella cooperativa ma, nonostante la focalizzazione della moderna teoria giochi confermi tale conclusione, per molte applicazioni l'analisi di tipo cooperativo risulta essere la più adatta.

La teoria delle decisioni è una teoria a se stante i cui risultati sono utilizzabili nella teoria dei giochi; essa determina quali strategie siano razionali, e permette di definire il giocatore *i* come razionale se sceglie una strategia che massimizza la sua utilità attesa calcolata assegnando probabilità ai possibili valori assumibili dalle variabili non controllate da *i*, in base alle informazioni di cui *i* dispone, mentre la teoria dei giochi considera le credenze soggettive come variabili endogene.

Per questo motivo in un contesto interattivo la teoria delle decisioni non è sempre applicabile: la privazione di una delle possibilità di scelta comporta un peggioramento della situazione del giocatore, mentre in tale contesto ridurre le proprie opzioni può avere un valore strategico.

I.2.2. Equilibrio E Concetti Di Soluzione

Una volta formulate le regole del gioco e le preferenze dei giocatori sugli esiti viene applicato al problema il concetto di equilibrio, o soluzione: corrispondenza S che associa ad un gioco G un suo sottoinsieme S(G) di profili strategici che soddisfano proprietà desiderabili.

Nei giochi antagonistici la molteplicità degli equilibri è irrilevante: essi danno la stessa utilità ai giocatori, quella derivante dalle soluzioni di maxmin di von

Neumann, mentre nei giochi non antagonistici possono essere presenti molteplici equilibri non equivalenti.

L'equilibrio di Nash è giustificato tramite alcune argomentazioni informali: se esiste un modo ovvio di giocare, esso è un equilibrio, perché altrimenti verrebbe violata l'ipotesi di razionalità di almeno un giocatore; se i giocatori cercano di accordarsi prima del gioco ma l'accordo non è vincolante, allora una condizione affinché l'accordo giocare un profilo strategico $s*$ è che esso sia un equilibrio.

Il paradigma oggi dominante della teoria dei giochi viene sviluppato alla fine degli anni ottanta per coordinare i contributi di Nash Harsanyi e Selten e organizzare in un corpus teorico e coerente le varianti usate in applicazioni specifiche; tra i vari tentativi assumono particolare rilevanza gli studi effettuati da alcuni docenti del Massachusetts Institute of Technology, che potrebbero essere definiti una "vulgata cantabrigense".

La "vulgata" ha come oggetto di studio principalmente i giochi con informazione quasi perfetta, composti da uno o più stadi da cui dal secondo in poi si osservano le mosse degli stadi precedenti; tra questi vengono distinti quattro tipi, ad ognuno dei quali è associata una variante dell'equilibrio strategico di Nash, come riassunto nella tabella 2:

Tabella 1

Giochi	con informazione completa	con informazione incompleta
statici (uno stadio)	equilibrio di Nash	equilibrio bayesiano
dinamici (più stadi)	equilibrio perfetto	equilibrio bayesiano perfetto

Fonte: Giochi, teoria dei, Battigalli P., enciclopedia Treccani

Nei giochi statici i giocatori scelgono una sola volta e simultaneamente, quindi le strategie coincidono con le azioni possibili; una delle applicazioni tipiche dei giochi statici ad informazione completa è il famoso dilemma del prigioniero.

Nei giochi dinamici con informazione completa la situazione immediatamente successiva a ogni storia parziale *h* corrisponde ad un gioco, detto sottogioco con radice *h*; è possibile rimuovere le minacce le promesse non credibili eliminando gli equilibri per cui non è soddisfatta la seguente condizione: un equilibrio s* si dice perfetto nei sottogiochi se per ogni storia parziale *h*, s* induce un equilibrio nel sottogioco con radice *h*.

In molti giochi dinamici con un numero finito di stadi esiste un unico equilibrio perfetto che può essere calcolato con un algoritmo chiamato procedura di induzione a ritroso: dato un gioco G si determinano tutte le storie parziali per cui il gioco si conclude con una sola ulteriore mossa; per ogni storia detta terminale si associa l'azione a(h) che massimizza l'utilità del giocatore attivo, e l'esito viene associato alla storia *h*, determinando il gioco ridotto G', su cui si ripete l'operazione, procedendo a ritroso fino alla radice dell'albero.

L'induzione a ritroso permette di determinare un unico equilibrio necessariamente perfetto in quasi tutti i giochi con azioni osservabili senza mosse simultanee; per l'applicazione a tali giochi con mosse simultanee è necessario che per ogni storia quasi terminale il corrispondente sottogioco abbia un unico equilibrio.

L'induzione a ritroso non è applicabile ai giochi con durata infinita, ad esempio ai giochi infinitamente ripetuti, ottenuti dalla ripetizione infinita di un gioco statico detto gioco costituente in cui l'utilità associata a una storia completa è una media delle utilità risultanti in ogni stadio; ciò implica che se i giocatori sono sufficientemente pazienti, vi sono molti equilibri perfetti oltre a quello prescritto dall'equilibrio statico.

Nei giochi ad informazione incompleta risulta necessario rappresentare le conoscenze e le credenze dei giocatori in modo da ottenere la forma estesa del gioco per poter definire un appropriato concetto di equilibrio; l'approccio al problema viene effettuato nella teoria dei giochi basandosi sul contributo di Harsanyi.

La letteratura orientata allo scopo di eliminare gli equilibri poco plausibili può essere divisa tra coloro che ritengono essenziale analizzare la forma estesa del gioco e coloro che invece seguendo von Neumann, ritengono sufficiente analizzare la forma strategica.

L'articolo di Selten rientra nella prima di queste due categorie, ma il suo contributo risulta fondamentale per entrambe.

L'idea centrale di Selten è che per eliminare gli equilibri poco plausibili sia necessario perturbare il gioco assumendo che tutte le scelte abbiano una probabilità minima positiva, anche se molto piccola; ciò permette di eliminare equilibri basati su minacce non credibili postulando piccole probabilità di errore nella scelta delle strategie. Così facendo le strategie di equilibrio specificano le azioni che i giocatori intendono scegliere, ma le scelte effettive possono risultare differenti, ma gli errori in differenti stati del gioco sono tra loro indifferenti (quando i giocatori osservano deviazioni le attribuiscono ad errori che quasi certamente non si ripeteranno in futuro).

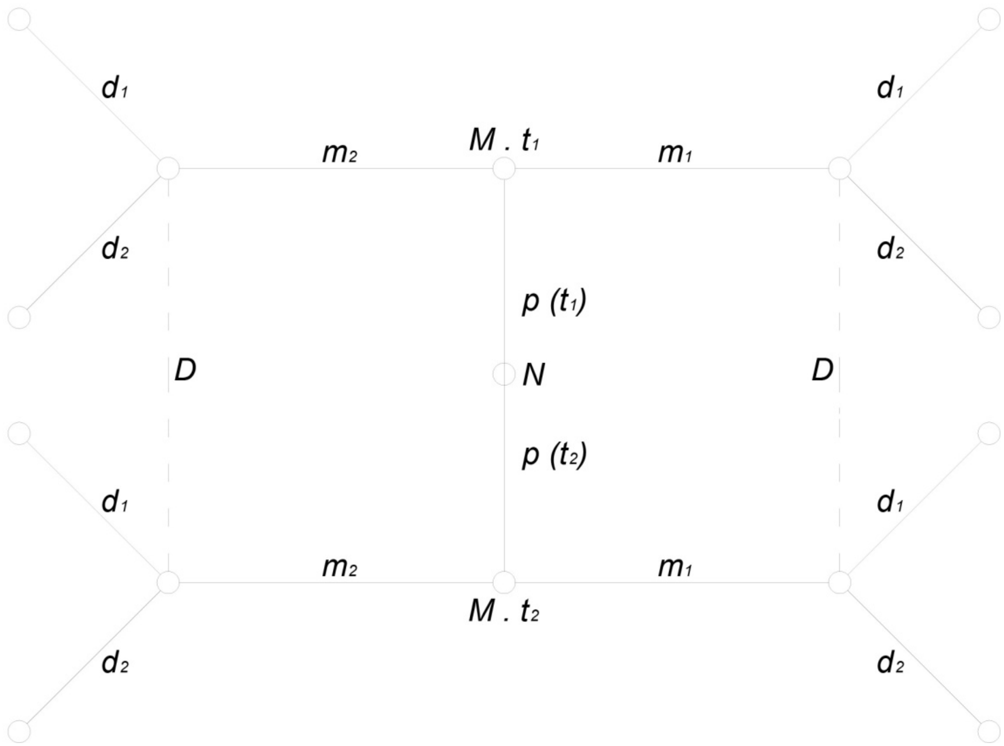
Nei giochi a più stadi con azioni osservabili e informazione completa, ma anche in quelli ad informazioni incompleta con due giocatori, il "*trembling hand perfect equilibrium*"(ovvero il raffinamento proposto da Selten) è quasi equivalente all'equilibrio perfetto nei sottogiochi.

L'applicazione della teoria ai giochi con informazione incompleta da vita a modelli che hanno la struttura di giochi di segnalazione, tipicamente rappresentati tramite la forma estesa, e così chiamati perché il giocatore informato M decide per primo dando informazioni al giocatore D sulla sua informazione privata.

In questa particolare classe di giochi abbiamo due giocatori che indicheremo come Mittente (M) e Destinatario (D); il Mittente ha un'informazione privata, che quindi il Destinatario non conosce, ad esempio sulla natura che può assumere; indicheremo i tipi possibili che il Mittente può assumere con t_1, t_2, che possono essere assunti secondo il Destinatario con probabilità $p(t_1)$ e $p(t_2)$; il Mittente può decidere se effettuare le mosse m_1,m_2 e in base a ciò che sceglie manda un messaggio che contiene informazioni sulla sua natura al Destinatario, che potrà scegliere tra effettuare le mosse d_1 o d_2; ad ogni storia terminale sarà associato un pay-off per il Mittente e per il Destinatario; le strategie D specificano quindi cosa fa il Destinatario una volta osservato il messaggio inviato dal Mittente.

La rappresentazione del gioco in forma estesa è quella indicata in figura 3:

FIGURA 3



Fonte: nostro elaborato

Nei giochi di segnalazione è possibile effettuare ragionamenti basati sull'induzione in avanti che permettono di scartare la maggior parte degli equilibri bayesiani perfetti che si vengono a formare: D considererà possibili soli i tipi T_i per cui la scelta effettuata da I non è irrazionale.

II. APPROCCIO EPISTEMICO ALLA TEORIA DEI GIOCHI

II.1 GERARCHIE DI CREDENZE E LORO RAPPRESENTAZIONE

L'approccio epistemico alla teoria dei giochi analizza il ragionamento strategico esplicitando con un linguaggio formale le ipotesi sulle conoscenze dei giocatori sulle regole del gioco, sulle conoscenze altrui e sulle gerarchie di credenze, che permettono di descrivere le credenze che i giocatori hanno sulle conoscenze degli altri giocatori, le credenze che i giocatori hanno sulle credenze delle conoscenze degli altri giocatori, e così via; già Morgenstern (1935) evidenziò l'importanza delle gerarchie di credenze per effettuare analisi economiche più realistiche.

La prima formalizzazione delle gerarchie di credenze fu effettuata da Harsanyi nel 1962, il quale alcuni anni dopo applicò tale formalizzazione alla classe dei giochi ad informazione incompleta.

Il lavoro di Harsanyi (1967-1968) svolge un ruolo fondamentale nello sviluppo dell'approccio epistemico alla teoria dei giochi, poiché mostra come riassumere le gerarchie di credenze, che possono essere infinite, in modo semplice e compatto: ogni giocatore i nel modello di Harsanyi è caratterizzato da un tipo chiamato (a,b), determinato da una funzione di utilità a_i e una gerarchia di credenze infinita b_i. Ogni tipo per ogni giocatore i specifica una credenza sui tipi degli avversari; perciò si possono specificare solo il numero di tipi per ogni giocatore e per ogni tipo una funzione di utilità e le credenze probabilistiche sugli avversari.

Lo state based approach, sviluppato da Kripke (1963) e Aumann (1976), può essere utilizzato come modello alternativo per descrivere le gerarchie di credenze.
Il modello si basa sull'assunto per cui possiamo derivare i possibili stati di relazione da una serie di stati del mondo; ogni stato del mondo descrive un diverso modo in cui è lo stato delle cose, ma un giocatore potrebbe non sapere come lo stato del mondo sia effettivamente: in ogni stato del mondo ώ specifichiamo per ogni giocatore l'insieme degli stati ritenuti possibili in ώ; Kripke consente a questo set di stati di contenere o meno l'effettivo stato delle cose, mentre Aumann richiede la presenza all'interno degli stati ritenuti possibili dell'effettivo stato delle cose.
Per ciascun giocatore possiamo derivare in ogni stato ώ: una gerarchia completa che descrive quale stato l'individuo ritiene possibile, ciò che ritiene possibile in ώ in base agli insiemi di stati che gli avversari ritengono possibili e così via, ovvero un'infinta gerarchia di credenze come stabilito nel modello basato sul tipo di Harsanyi; assegnando una distribuzione di probabilità sugli stati che ogni giocatore ritiene possibili in ώ possiamo determinare un'infinita gerarchia di credenze per ogni giocatore, rendendo il modello di natura problematica.
Prima Brandenburger e Dekel (1993) poi Tan e Werlang (1992) e Tsakas (2012) fanno notare come i modelli di Harsanyi e quelli di Kripke Aumann sono di natura molto simile: i tipi di Harsanyi svolgono lo stesso ruolo degli stati del mondo nel modello di Kripke e Aumann; lo stesso Aumann ha affermato che Harsanyi ha

svolto un ruolo importante nello sviluppo del suo modello di rappresentazione della conoscenza.

II.2 CREDENZA COMUNE

II.2.1 Introduzione

L'approccio epistemico alla teoria dei giochi tenta di porre restrizioni plausibili alle gerarchie di credenze, per distinguere le credenze ragionevoli da quelle non ragionevoli; i concetti espressi cercano di selezionare per ogni giocatore una famiglia di gerarchie di credenze plausibili se dovesse ragionare con tali concetti.

La maggior parte di questi concetti presuppone la conoscenza comune di un modello di ragionamento degli avversari: ogni giocatore ragiona in questo modo, ogni giocatore crede che ogni giocatore ragioni in questo modo e cosi via.

Esempi importanti e largamente utilizzati dall'approccio epistemico alla teoria dei giochi di tali concetti sono la credenza e la conoscenza comune, definiti da Friedell, (1967,1969) Lewis (1969) e Aumann (1976) con approcci differenti tra loro.

Friedell definisce l'evento (Ax) come l'evento in cui una persona A crede nell'evento x, l'evento (ABx) è l'evento in cui A crede che B crede in x, generando le credenze di ordine superiore in modo simile; quindi definisce l'evento $Co_{a,b}$ come la credenza comune dell'evento comune x, per i che va da 1 ad infinito come: $Co_{a,b}=(\bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cap B)^{i})x$

Friedell inoltre distingue la credenza dalla conoscenza: un individuo crede in un evento x che può non essere vero, mentre conoscere un evento x implica che esso sia vero; in questo contesto un evento di conoscenza comune x tra due persone A e B è definito come un evento conosciute da A e B necessariamente vero.

Anche Lewis, nel suo libro Convention (1969), analizza e cerca di definire situazioni plausibili che possono generare una conoscenza comune.

Secondo Lewis la conoscenza comune tra le persone A e B dell'evento x si ha quando esiste un evento y tale che: sia A che B hanno motivo di credere che y sia valido; l'evento y indica ad A e B che sia A che B hanno motivo di credere che y sia valido; l'evento y indica ad A e B che l'evento x sia valido.

Aumann afferma che in un dato stato di ώ esiste una conoscenza comune di un evento E tra due persone A e B se sia A che B ritengono possibili in ώ stati solo in E, se in ώ A e B ritengono possibili stati in cui A e B considerano possibili stati in E e cosi via all'infinito; a differenza di Friedell e Lewis, Aumann utilizza un quadro semantico per dare la sua definizione di conoscenza comune, e non definisce situazioni che potrebbero generare conoscenza comune tra gruppi di persone.

II.2.2. Credenza comune nella razionalità

Il concetto di credenza comune nella razionalità costituisce uno fondamenti dell'approccio epistemico alla teoria dei giochi; tutti gli altri concetti scaturiti da tale approccio possono essere considerati delle varianti o dei raffinamenti della credenza comune nella razionalità.

L'ipotesi di comune credenza nella razionalità permette di determinare una gerarchia di credenze nel gioco in cui tutti i giocatori credono che i loro avversari scelgano razionalmente, che tutti i giocatori credano che tutti i giocatori credano che i loro avversari scelgano razionalmente e così via all'infinito; applicando i modelli esaminati nel paragrafo precedente la credenza comune nella razionalità si può esprimere come l'evento in cui i giocatori credono che i loro avversari scelgano razionalmente e abbiano una credenza comune dell'evento per cui i giocatori credano che i loro avversari scelgano razionalmente; tale concetto permette di effettuare restrizioni sul risultato del ragionamento del giocatore, ma non necessariamente sul ragionamento stesso.

Tra i primi documenti che forniscono una definizione formale di credenza comune nella razionalità in un contesto generale troviamo quelli di Böge e Eisele (1979).

Facendo riferimento a tale lavoro, un sistema di riflessioni complete su R1 è composto da: un set R dato dalle possibili combinazioni di tipi (intesi come i tipi definiti da Harsanyi); un set R_0 contenente le possibili scelte e funzioni di utilità per i giocatori; una mappatura *p* che assegna ad ogni combinazione di tipo in R una combinazione di scelte (c) e di funzioni di utilità per i giocatori in R_0, e che assegna ad ogni combinazione di tipi in R una credenza probabilistica delle combinazioni dei tipi in R per ogni giocatore; quindi per ogni combinazione di tipo r e per ogni giocatore *i* la scelta indotta *c* deve essere ottimale per il giocatore *i*, data la funzione di utilità derivante e la sua convinzione circa le scelte degli avversari.

Possiamo dimostrare che queste condizioni implicano che ogni tipo in R esprime credenza comune nella razionalità:

presa una combinazione di tipi *r* in R e alcuni giocatori *i*, il tipo *i* del giocatore in *r* assegna solo probabilità positive alle combinazioni di tipi *r'* in R; per ogni avversario *j* la scelta indotta *cj(r')* è ottimale data la sua funzione di utilità indotta e la sua convinzione sulle scelte degli avversari, ovvero il tipo di giocatore in *r* assegna solo probabilità positive ai tipi di avversario per i quali la scelta indotta è ottimale, data la sua funzione di utilità indotta e la sua convinzione.

Alcuni anni dopo Bernheim (1984) e Pearce (1984) svilupparono un loro concetto di razionalizzazione, il quale nonostante venga sviluppato in maniera indipendente è assimilabile al concetto di credenza comune nella razionalità.

Tale concetto nasce come risposta ad una critica mossa verso i concetti di soluzione previsti dall'equilibrio di Nash, ritenuti un criterio poco adatto a giudicare un profilo di strategie, poiché fondato su ipotesi non necessariamente determinanti riguardo i criteri di decisione o sulle convinzioni dei giocatori.

Bernheim e Pearce danno entrambi una diversa definizione di razionalizzazione, ma tali definizioni danno lo stesso insieme di scelte per ogni giocatore, e possono quindi essere considerate equivalenti.

Bernheim parte definendo un sistema coerente di credenze Σ costituito da una sequenza di giocatori $(i,i_1,..,i_k)$ e un sottoinsieme di scelta (Di_k) per l'ultimo giocatore, che esiste per ogni sequenza di giocatori, in cui i crede che i_1 creda che i_2 creda che … che i_k scelga da Di_k, detta convinzione di ordine k del giocatore i.
Una credenza di ordine k è giustificata dalle credenze $k+1$ di ordine $(i,i_1,\dots,i_k,j,D_j)$, per ogni giocatore j diverso da i_k se ogni scelta ci_k in Di_k è ottimale per una certa convinzione del giocatore i_k sulle scelte degli avversari che per ogni avversario j assegna solo probabilità positive alle scelte in D_j. Se è giustificata ogni credenza di ordine k il sistema Σ è definito coerente.
Bernheim definisce la scelta c_j razionalizzabile per il giocatore j se esiste un sistema coerente di credenze in Σ e alcune credenze $(i,i_1,..,i_{k-1},D_j)$ in Σ, tale che c sia compreso in D_j.
Pearce definisce la razionalizzazione con modalità diverse: introduce una procedura di eliminazione ricorsiva, e chiama scelta razionalizzabile la scelta che sopravvive a tale procedura.
Sia Bernheim che Pearce presumono che la convinzione di un giocatore nelle scelte degli avversari debba essere indipendente tra gli avversari nel caso ci siano due o più giocatori, definendo il concetto risultante razionalità correlata; essendo la procedura di Pearce quasi identica a quella utilizzata da Böge e Eisele e allo steso tempo equivalente alla formulazione di Bernheim, quest'ultima corrisponde anche alla procedura ricorsiva di Böge e Eisele.

Successivamente sia Aumann (1987), sia Brandenburger e Dekel (1987) modellano le gerarchie di credenze dei giocatori sulle scelte attraverso il modello basato sullo stato di Kripke e Aumann già mostrato. Le condizioni poste implicano una comune convinzione nella razionalità, e anzi richiedono che le scelte dei giocatori debbano essere ottimali per essere valide in ogni stato del modello e non solo in quelli rilevanti per una specifica gerarchia di credenze.

Gli stessi Brandenburger e Dekel successivamente (1993), esaminano gli assiomi sulla credenza comune e sulla conoscenza comune mediante la logica proposizionale modale; una conclusione generale del documento è che l'assiomatizzazione della credenza comune non richiede sistemi di credenza individuale così forti come si pensava originariamente

La sezione 5 dello stesso articolo spiega un'altra inoltre che nonostante la credenza comune sia caratterizzata da una gerarchia infinita, i sistemi assiomatici analizzati nel documento ammettono le procedure di decisione effettive, ovvero possono essere effettivamente utilizzati nel processo di decisione, e il loro utilizzo comporta una decisione logica e non irrazionale.

CONCLUSIONI

La teoria dei giochi costituisce un riferimento concettuale formato da modelli e linguaggi matematici che permettono di analizzare le situazioni decisionali interattive e adattarle ai casi specifici che vengono esaminati da coloro che la utilizzano.

Trattandosi di una disciplina relativamente recente, il processo di evoluzione della teoria dei giochi è tutt'ora in corso, in un programma di ricerca continua orientato a risolvere i problemi di natura pratica tipici del contesto economico in cui la teoria dei giochi viene applicata.

La teoria dei giochi non costituisce un modello unitario in cui catalogare tutte le situazioni decisionali interattive, ma un linguaggio che può essere utilizzato per spiegare e ricercare soluzioni relative a tali problematiche; i risultati raggiunti devono sempre essere messi a confronto con l'evidenza empirica per essere validi.

Di conseguenza tutti coloro che utilizzano tale strumento devono sfruttare la ricchezza delle nozioni a disposizione per poter costruire modelli che permettano di capire e prevedere alcuni aspetti dell'interazione economica.

In questo lavoro sono stati analizzati gli sviluppi recenti della teoria andando a mostrare come tali sviluppi nascano non solo dall'evoluzione di concetti già teorizzati dagli studiosi precedenti, ma anche andando a teorizzare nuovi approcci alla teoria stessa; tali sviluppi hanno permesso, in un processo di miglioramento continuo, di superare le problematiche note, e allo stesso tempo di ampliare la gamma degli strumenti da utilizzare, per poter comprendere meglio le dinamiche in oggetto e andare a migliorare la ricerca negli ambiti ancora poco approfonditi.

L'approccio epistemico permette di effettuare analisi sulle credenze dei giocatori che partecipano alle iterazioni analizzate; tutte le analisi che ne scaturiscono permettono di formalizzare strumenti matematici che riescono a rappresentare tali gerarchie infinite di credenze con assiomi finiti; da questo approccio nascono quindi strumenti che permettono di aprire nuovi orizzonti nello studio dei comportamenti degli individui, ad esempio andando a sviluppare concetti che si basano su elementi di razionalità limitata, o anche di irrazionalità, per poter adattare al meglio la teoria dei giochi alle evidenze empiriche che vengono riscontrate dagli studiosi nella realtà economica.

BIBLIOGRAFIA

BATTIGALLI,P., *giochi, teoria dei,* enciclopedia del Novecento III,Treccani, Roma, 2004.

GARELLA P., LAMBERTINI L., *Organizzazione Industriale,* pp.227-238, Carocci editore,Roma, 2002.

PEREA,A., *From Classical To Epistemic Game Theory,* International game theory review, Vol.16, no1, 2013.

LEONARD, R., From Parlor Game sto social science: von Neumann, Morgenstern, and the creation of Game Theory, Journal of economic literature, Vol.XXXIII, pp. 730-761, 1995.