UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

VALUTAZIONE DELL'ERRORE DI CALIBRAZIONE NELL'APPLICAZIONE DELLA TECNICA DIC 3D

EVALUATION OF THE CALIBRATION ERROR IN THE APPLICATION OF THE 3D DIC TECHNIQUE

Relatore:

Prof. Marco Sasso

Correlatore:

Prof. Gianluca Chiappini

Laureando:

Giovanni Salerno

Anno academico: 2018/2019

Indice

Introduzione.....3

Spostamenti e deformazioni.....5

2.1 Tensore delle piccole deformazioni:.....5

2.2 Piccole deformazioni:.....7

2.3 Grandi deformazioni.....10

2.4 Tensori della deformazione:.....12

Digital image correlation (D.I.C.).....14

3.1 Immagini speckle.....14

3.2 Tecniche correlazione immagini.....16

3.3 Correlazione a campo intero.....19

3.4 Stereo visione e 3-D D.I.C......21

Calibrazione stereoscopica.....23

4.1 Modello pinhole della telecamera.....23

4.2 Modello generale.....26

4.3 Visione stereoscopica.....29

4.4 Ricostruzione tridimensionale.....31

4.5 Calibrazione.....34

Algoritmo di calcolo D.I.C. utilizzato......37

5.1 Procedimento di calcolo.....37

5.2 Descrizione dell'algoritmo......38

5.3 Definizione della maschera.....41

5.4 Calcolo degli spostamenti e deformazioni.....42

Prove sperimentali.....44

6.1 Setup delle prove.....45

6.2 Analisi immagini.....48

6.3 Risultati ottenuti.....49

6.4 Considerazioni finali.....60

Bibliografia.....61

Ringraziamenti.....62

Capitolo 1

Introduzione

In questi anni si stanno affermando sempre di più tecniche di misura ottica, quindi "senza contatto", che trovano largo utilizzo nell'ambiente ingegneristico; soprattutto ultimamente, grazie allo sviluppo tecnologico, si riescono a ottenere risultati molto soddisfacenti con l'utilizzo di queste tecniche all'avanguardia. Le applicazioni principali sono i calcoli di deformazioni, e quindi anche spostamenti, e del rilievo di forma.

Il rilievo di forma è ampiamente utilizzato nell'ingegneri industriale, soprattutto per quanto riguarda il controllo qualità degli oggetto prodotti, ma anche per la creazione di modelli da inserire in ambienti creati attraverso la realtà virtuale. Per il rilievo di forma le tecniche "a contatto" riscontrano ancora maggiore successo rispetto alle più moderne tecniche senza contatto, perché non vengono influenzate dai fenomeni atmosferici, e sono utilizzabili su un maggior numero di materiali. Si avvalgono di una sonda analogica di diametro noto che muovendosi sulla superficie permette di acquisire i punti della stessa in base alla deflessione della sonda; risulta molto utile per le superfici verticali, però se il materiale non è abbastanza duro si possono avere misurazioni alterate, inoltre l'esecutore della misura deve avere un certo livello di esperienza.

Le tecniche ottiche invece sfruttano i principi della triangolazione, dell'interferometria, e della proiezione della luce. Sono molto più recenti, e al giorno d'oggi sono al centro dello studio per gli interessati al settore; inoltre la loro diffusione è agevolata dallo sviluppo informatico, grazie ai moderni sensori infatti si riescono ad acquisire anche migliaia di frame al secondo, che risultano fondamentali per lo studio di determinati fenomeni, e grazie ai moderni pc si riescono ad analizzare i dati ottenuti.
Il fattore che ci spinge a continuare ad investire sullo studio e sviluppo di queste tecniche, è la bassissima percentuale di errore; si parla addirittura di un incertezza

relativa dell'ordine di 10^{-4}, quindi sicuramente trascurabile rispetto alla misura stessa. Bisogna però ammettere che ci sono ancora vari problemi, come ad esempio nell'acquisizione di superfici troppo riflettenti, oppure poco illuminate.

Tra queste tecniche una delle più utilizzate è la correlazione delle immagini, sfruttata sia nel caso bidimensionale che nel caso tridimensionale; si basa sull'acquisizione di un dato numero di immagini durante il fenomeno fisico da studiare, e poi nell'analisi di queste. Per analisi in intende definire un'immagine di riferimento (in genere la prima, quindi prima dell'inizio del fenomeno), e confrontare le altre immagini a questa per comprendere le variazioni che ci sono state.

È una tecnica largamente usata per la misurazione di deformazioni e spostamenti infinitesimi; infatti risulta chiara l'utilità che ha nell'ottenere informazioni sullo stato deformativo del provino durante la prova di deformazione. Altri vantaggi che si hanno sono la versatilità di applicazione, la semplicità e il basso costo delle attrezzature, e soprattutto una certa velocità nel ricevere i dati; inoltre i dati ottenuti sono totalmente indipendenti dal materiale della prova.

Solitamente per la correlazione delle immagini si sfruttano superfici "speckle", cioè con delle macchioline perché sono facilmente rilevabili, viene delimitata l'area di interesse, vengono dati i parametri all'algoritmo e infine si esegue la correlazione e l'analisi delle immagini.

In questa tesi viene dapprima illustrata la metodologia di acquisizione e analisi di immagini, sviluppata su MATLAB, per il calcolo di spostamenti e deformazioni; infine vengono mostrate le prove svolte da noi in laboratorio sugli spostamenti.

Capitolo 2

Spostamenti e deformazioni

Ogni corpo soggetto a sollecitazioni esterne si deforma, ovvero subisce spostamenti tali da modificare la forma e la dimensione del corpo stesso, ciò vuol dire semplicemente che la configurazione finale è diversa dalla configurazione iniziale. Quindi bisogna abbandonare il modello del corpo rigido, che può dare risposte esaurienti solo per ciò che riguarda l'aspetto statico. Quando si tratta di deformazioni è doveroso fare una distinzione tra le deformazioni in campo elastico, chiamate anche "piccole deformazioni", e quelle in campo plastico, chiamate anche "grandi deformazioni". Quando il materiale si trova in campo elastico la relazione tra tensione (σ) e deformazione (ε) è lineare, ed è spiegata dalla legge di Hooke (σ =Eε), inoltre siccome le deformazioni sono molto piccole posso essere trascurate. Se invece ci troviamo nel campo plastico le deformazioni sono più significative, e di conseguenza la trattazione non può essere approssimata.

2.1 Tensore delle piccole deformazioni:

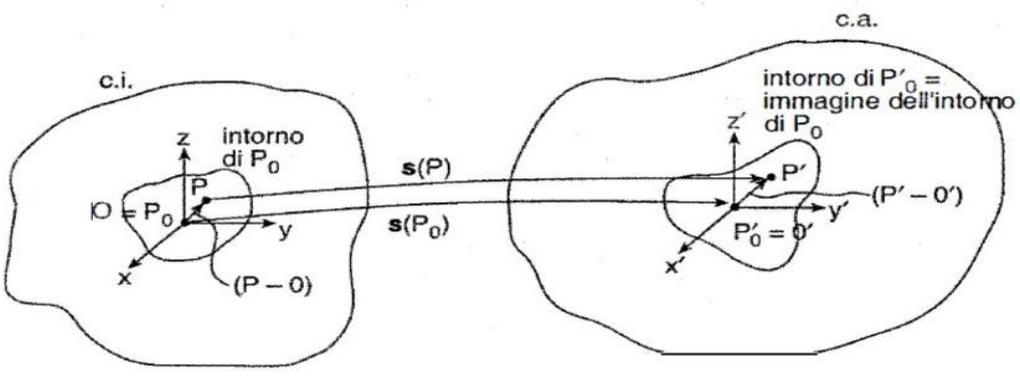


Figura 2.1

L'ipotesi di piccoli spostamenti suggerisce di studiare in dettaglio ciò che avviene nell'intorno di un generico punto P_0 della configurazione indeformata (c.i.) **(**figura 2.1) dove si posiziona l'origine del sistema di riferimento, per una semplificazione dei conti, P_0 = O =(0,0,0). Osservando la figura si può notare che vale la relazione:

$$(P' - O') = (P - O) + s(P) - s(O) \qquad (2.1)$$

Siccome P=(x,y,z) è vicino ad O, il suo spostamento può essere calcolato a partire da quello di O mediante lo sviluppo in serie di Taylor, trascurando i termini di ordine superiore al primo, usando una notazione più compatta e facendo lo stesso per *v* e *w*, si ottiene:

$$u(P) = u(x,y,z) = u(0) + \frac{\partial u}{\partial x}x + \frac{\partial u}{\partial y}y + \frac{\partial u}{\partial z}z + \dots$$

$$v(P) = v(x,y,z) = v(0) + \frac{\partial v}{\partial x}x + \frac{\partial v}{\partial y}y + \frac{\partial v}{\partial z}z + \dots$$

$$w(P) = w(x,y,z) = w(0) + \frac{\partial w}{\partial x}x + \frac{\partial w}{\partial y}y + \frac{\partial w}{\partial z}z + \dots \qquad (2.2)$$

e in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \dots \qquad (2.3)$$

dove la matrice 3x3 indicata con ∇s è il gradiente di $s(P)$ calcolato in *O.* Tale matrice chiamata comunemente jacobiana ($\boldsymbol{J_s}$). Questa matrice inoltre può essere data dalla somma di due matrici: una che tiene conto della deformazione presente nell'intorno del punto, l'altra degli spostamenti rigidi che non producono alcuna deformazione. Quindi è possibile separare *Js* nella somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica, che chiamiamo rispettivamente E e W:

$$E = \frac{1}{2}\left(J_s + J_s^T\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{2}\,(J_s - J_s^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Quindi dalla (2.1) possiamo scrivere:

$$s(P) = s(O) + W(P - O) + E(P - O) + \ldots \qquad (2.5)$$

dove s(P) rappresenta la traslazione rigida, W(P - O) la rotazione rigida, ed E(P - O) la deformazione. Definiamo W tensore delle piccole rotazioni, ed E tensore delle piccole deformazioni.

2.2 Piccole deformazioni:

Consideriamo, nell'intorno di un generico punto P_0 del corpo (figura 2.2), un segmento infinitesimo di lunghezza iniziale l_i (configurazione iniziale), lungo la direzioni individuata dal versore *n*. In seguito ad una deformazione tale segmento avrà lunghezza finale l_f (configurazione attuale), in generale diversa da l_i, perché avendo rimosso l'ipotesi di rigidità, si ammette che le lunghezze possano variare. Possiamo quindi introdurre il coefficiente di dilatazione lineare, che lungo una generica direzione *s* è definito come:

$$\varepsilon_s = \frac{l_f - l_i}{l_i} \qquad (2.6)$$

e quindi:

$$l_f = l_i(1 + \varepsilon_s) \qquad (2.7)$$

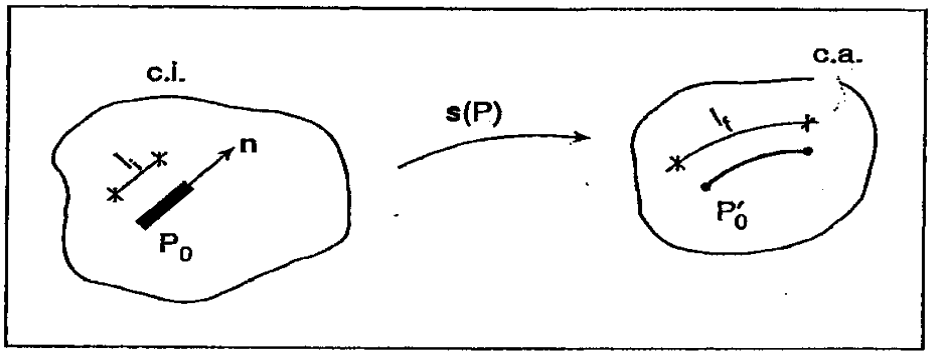


Figura 2.2

che misura la variazione di lunghezza relativa. Da notare che è un coefficiente quindi è adimensionale, è positivo per gli allungamenti e negativo per gli accorciamenti, siccome trattiamo piccole deformazione sarà un numero molto piccolo.

Per il calcolo di tale coefficiente lungo x, si faccia riferimento alla figura 2.3:

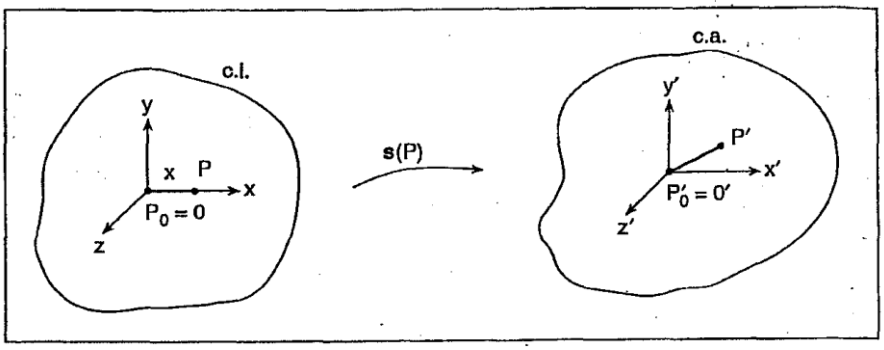


Figura 2.3

Assumendo *(P - O)* = $\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, ripartendo dalla matrice gradiente di spostamento avremo:

$$(P' - O') = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} x + \dots \qquad (2.8)$$

La lunghezza finale al quadrato di tale segmento vale quindi (trascurando i termini di grado superiore al primo per ipotesi di piccoli spostamenti):

$$l_f^2 = |P'\text{-}O'|^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] x^2 = \left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right) x^2 \qquad (2.9)$$

Facendo un confronto con la (**numero formula**)

$$l_f^2 = (1 + 2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2) x^2 = (1 + 2\varepsilon_x + \cdots) x^2 \qquad (2.10)$$

Si può notare che il coefficiente di dilatazione lineare lungo *x* è:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.11)$$

E di conseguenza i coefficienti lungo *y* e *z* sono pari a:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.12)$$

Queste espressioni mettono in relazione spostamenti e deformazioni. Dalla comparazione con i termini che costituiscono la matrice jacobiana, si può affermare che

i termini sulla diagonale principale non sono altro che la misura della variazione di lunghezza lungo gli assi del sistema di riferimento.

Con queste sollecitazioni esterne, oltre alle lunghezze, possono variare gli angoli. Facendo riferimento alla figura 2.4 notiamo che in questo caso sono necessari due punti, e di conseguenza due direzioni, quindi consideriamo anche il punto Q sull'asse delle y. L'angolo iniziale è $\alpha_i = {}^{\pi}/_{2}$, l'angolo finale è α_f come mostrato in figura.

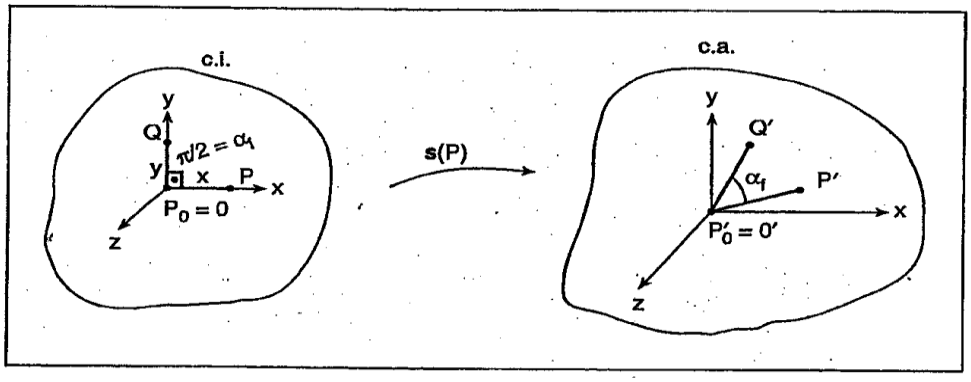


Figura 2.4

Definiamo il coefficiente di scorrimento angolare:

$$\gamma_{st} = \alpha_i - \alpha_f \qquad (2.13)$$

anche questo coefficiente è adimensionale, è positivo per angoli che si chiudono e negativo per angoli che si aprono, dipende da entrambe le direzioni *s* e *t,* e siccome trattiamo piccole deformazioni è un numero molto piccolo.

Volendo definire questo coefficiente in funzione dello spostamento dei punti, consideriamo sempre i due punti di figura 2.4, abbiamo che:

$$(Q - O) = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.14)$$

e dalla relazione di spostamento:

$$(Q' - O') = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} y + \ldots \qquad (2.15)$$

Per determinare l'angolo α_f *= (P'O'Q')* si ricorre alle proprietà del prodotto scalare:

$$(P' - O') \times (Q' - O') = |P' - O'|\ |Q' - O'| \cos \alpha_f \qquad (2.16)$$

Avendo già definito che:

$$|P' - O'| = l_f = (1+\varepsilon_x)x$$

$$|Q' - O'| = l_f = (1+\varepsilon_y)y$$

$$\alpha_f = \alpha_i - \gamma_{xy} = \pi/2 - \gamma_{xy} \Rightarrow \cos\alpha_f = \cos(\pi/2 - \gamma_{xy}) = \operatorname{sen}\gamma_{xy} = \gamma_{xy} + \dots$$

Il prodotto scalare diviene:

$$(P' - O') \times (Q' - O') = (1+\varepsilon_x)x(1+\varepsilon_y)y\,\gamma_{xy} + \dots = xy\gamma_{xy} + \dots \quad (2.17)$$

Operando ora lo stesso calcolo per componenti, e operando un confronto:

$$(P' - O') \times (Q' - O') = xy\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] = xy\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \dots \quad (2.18)$$

Si giunge ad affermare che:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.19)$$

Analogamente si ottengono le relazioni che misurano le variazioni di angoli tra gli assi del sistema di riferimento:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.20)$$

Osservando le relazioni appena descritte, possiamo notare che i coefficienti di scorrimento angolare non sono altro che la metà dei termini fuori diagonale della matrice J_s:

$$E_{12} = \frac{\gamma_{xy}}{2}; \quad E_{13} = \frac{\gamma_{xz}}{2}; \quad E_{23} = \frac{\gamma_{yz}}{2} \quad (2.21)$$

Si può concludere quindi che il tensore della deformazione può essere riscritto al modo seguente:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Che costituisce a tutti gli effetti una notazione alternativa.

2.3 Grandi deformazioni

Fin ora sono state trattate piccole deformazioni partendo dalle componenti del vettore spostamento dalla posizione iniziale alla posizione finale. Nella teoria dei continui tutto

quello che accade tra le due configurazioni non è rilevante, è sufficiente la conoscenza delle configurazioni iniziale e finale. Per quanto riguarda le deformazioni plastiche invece, è necessario specificare il comportamento attraverso il quale il corpo si deforma e seguirne la storia istante per istante, in pratica è necessario studiare il moto dei punti nel continuo.

si può analizzare il fenomeno con quattro tipi di approcci, tutti basati sulla cinematica non relativistica classica.

- Descrizione materiale: le variabili indipendenti sono i punti materiali X e il tempo t, l'equazione del moto:

  x=x(X,t)

  determina la posizione x occupata dal punto materiale al tempo t.
- descrizione referenziale: le variabili indipendenti sono la posizione x del punto materiale X, in una assegnata configurazione di riferimento, generalmente si considera come riferimento la configurazione indeformata, al tempo *t*=0. Questa descrizione è anche detta descrizione Lagrangiana. L'equazione del moto è la seguente:

  x=x(X,t)

  che nel riferimento cartesiano diventa:

  x_r=x_r(X_1, X_2, X_3,*t)*

  dove X_1, X_2, X_3 sono le coordinate del punto materiale nella configurazione di riferimento, mentre le xr sono le coordinate spaziali al tempo *t*.
- descrizione spaziale: le variabili indipendenti sono la posizione attuale x occupata dal punto materiale al tempo *t*, e il tempo *t* stesso. In questa descrizione l'attenzione è focalizzata su una fissata regione in cui avviene lo spostamento. Tale descrizione è anche chiamata descrizione Euleriana.
- descrizione relativa: le variabili indipendenti sono la posizione attuale x del punto materiale e il tempo t impiegato dal punto materiale per assumere una nuova posizione.

Tramite queste modalità di descrizione possiamo individuare due modi per definire le grandi deformazioni:

- definizioni in termini di configurazione *indeformata*,

- definizioni in termini di configurazione *deformata*.

La prima utilizza le coordinate materiali nella configurazione indeformata, e viene anche chiamata formulazione Lagrangiana; la seconda si basa sulle coordinate spaziali nella configurazione deformata, e viene anche chiamata formulazione Euleriana.

2.4 Tensori della deformazione:

Per definire il tensore gradiente di deformazione partiamo dal considerare un generico punto P, che all'istante iniziale si trova alla posizione X, dopo un tempo t si troverà ad un'altra posizione x, che può essere definita sia secondo la formulazione Lagrangiana, che secondo quella Euleriana, rispettivamente:

$$x = (X, t) \Longrightarrow x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$X = (x, t) \Longrightarrow X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (2.23)$$

Il gradiente di deformazione è, in entrambi i casi, il gradiente delle funzioni che figurano al primo membro. Le componenti del gradiente si possono scrivere come $\frac{\partial x_k}{\partial X_k}$, dove con i pedici in minuscolo e maiuscolo si indicano rispettivamente la configurazione attuale, ovvero deformata, e quella iniziale, ovvero indeformata. Il gradiente di deformazione si indica con F, e il suo trasposto con F^T; quindi F è un tensore le cui coordinate parziali sono le derivate parziali $\frac{\partial x_k}{\partial X_k}$, che permettono la trasposizione di un qualsiasi vettore infinitesimo dX di X, nel corrispondente dx di x:

$$dx = F \cdot dX \qquad o \qquad dx = dX \cdot F^T \qquad (2.24)$$

Bisogna ricordare che le componenti del gradiente di deformazione sono grandezze "finite" e quindi esprimono la deformazione in un intorno infinitesimo del punto materiale considerato.

A questo punto è possibile definire i tensori della deformazione che si dividono in due categorie, quelli di Almansi-Hemel e quelli di Cauchy-Green; la differenza risiede nel fatto che i primi determinano il cambiamento dalla lunghezza al quadrato di un vettore materiale. Nel prosieguo della trattazione ci serviremo solo del tensore C, meglio detto tensore destro di Cauchy, definito come:

$$C = F^T \cdot F \qquad (2.25)$$

In generale possiamo distinguere per qualunque spostamento generico di un corpo due contributi, uno derivante da uno spostamento rigido, e l'altro derivante da una deformazione pura, con variazione di forma e/o dimensioni. In particolare la trasformazione di un punto descritta dal tensore F è data dalla composizione di una rotazione rigida dell'intorno e una deformazione pura. Definendo R come il tensore ortogonale descrittore della rotazione, possiamo scrivere:

$$F = R \cdot C \qquad (2.26)$$

Il tensore destro di Cauchy costituisce il tensore degli allungamenti λ, in particolare gli autovalori ad esso associati sono gli allungamenti principali (λ_1; λ_2; λ_3). Come tutti i tensori simmetrici del secondo ordine anche il tensore destro possiede 3 valori principali, di conseguenza tre direzioni principali e tre invarianti; se scritto in forma matriciale, la matrice che ne permette una descrizione avrà termini tutti positivi, questo quindi implica che i valori principali di C siano positivi da cui:

$$C \cdot N_k = \lambda_k^2 \cdot N_k \qquad (2.27)$$

Dove gli N_k sono gli autovalori, che costituiscono le direzioni principali, elevazione al quadrato degli allungamenti principali. Per quanto riguarda la descrizione degli spostamenti, si può quindi concludere, che quando operiamo in campo elastico questi sono molto piccoli e di conseguenza una trattazione lineare è più che sufficiente, quando invece, si studia la plasticità, questi assumono valori sensibili per i quali non è possibile praticare una tale approssimazione.

Capitolo 3

Digital image correlation (D.I.C.)

La correlazione di immagini è una tecnica ottica basata sulla misura di spostamenti e/o deformazioni senza contatto. È stata sviluppata negli anni ’80 da un gruppo di ricerca dell’*University of South Carolina.* Questa tecnica utilizza una fotocamera che acquisisce varie immagini durante la trasformazione subita dal provino al fine di confrontarle e poter definire tale trasformazione. La superficie dell’oggetto deve essere caratterizzata da varie macchioline (speckels), in genere in scala di grigi, ottenute semplicemente con una bomboletta spray nera su sfondo bianco o, se necessario anche da una bomboletta bianca per aumentare il contrasto. Di solito le camere hanno un sensore in bianco e nero, il cui segnale viene poi convertito in scala di grigi, che va da 0 (nero) a 255 (bianco), e correlano gli stessi punti di immagini diverse per ottenere lo spostamento subito da ogni punto. Per rilevazioni in 2-D è sufficiente una sola telecamera, invece per rilevazioni in 3-D sono necessarie almeno due telecamere. Negli ultimi anni questa tecnica viene utilizzata molto più spesso, anche grazie allo sviluppo si nuovi software dalle elevatissime prestazioni capaci di rilevare differenza anche al livello di sub-pixel.

3.1 Immagini speckle

Per immagine speckle si intende un’immagine come quella in figura 3.1; come abbiamo accennato è necessaria una distribuzione casuale di macchioline in bianco e nero utilizzando una bomboletta spray, quindi la preparazione del provino è semplice e veloce, e al massimo richiede un paio di tentativi per ottenere sulla superficie macchioline di dimensioni più omogenee.

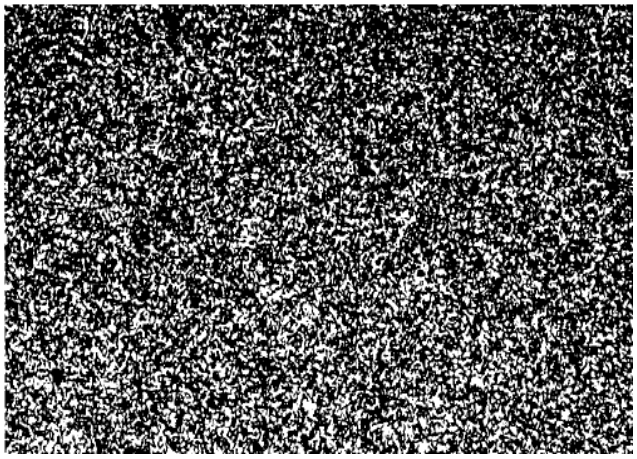


Figura 3.1

Un'alternativa consiste nell'utilizzare una luce bianca da laboratorio posizionata in modo che il fascio risulti radente alla superficie. Le naturali rugosità (necessarie in questo caso), producono un campo speckle formato dall'alternanza di zone illuminate e zone di ombra.

Con la realizzazione di queste immagine si vuole riuscire ad assegnare ad ogni punto *p* della superficie un valore di intensità luminosa, quindi di rappresentare un elemento materiale di dimensioni L_1, L_2 attraverso una funzione *f(X,Y)* il cui valore sia pari all'intensità della luce riflessa dall'intorno del punto *p(x,y)*. Introduciamo a questo punto il valore dell'intensità luminosa che chiamiamo "*g*", associato ad ogni punto, che varia quindi da 0 (nero) a 255 (bianco). Grazie alla distribuzione casuale di macchioline riusciamo a definire la funzione *f(X,Y)=g,* su ogni punto della superficie; ora si comprende che con una superficie dalla colorazione omogenea sarebbe impossibile individuare i diversi valori di grigio, e associarli ad un punto. Come primo passo bisogna stabilire una corrispondenza *"c"* tra i punti materiali *p(x,y),* e i punti dell'immagine digitale *P(X,Y);* poi grazie alla funzione *f(X,Y)=g,* si associa il valore dell'intensità luminosa.

$$p(x,y) \xrightarrow{c} P(X,Y) \xrightarrow{f(X,Y)} g \qquad (3.1)$$

Si definisce sull'immagine la grandezza risoluzione, cioè il numero di pixel, e la risoluzione spaziale, cioè il numero di pixel per unità di lunghezza. L'immagine speckle sarà quindi caratterizzata da un certo numero di elementi N_x, N_y di dimensione predefinita l_X, l_Y pari alla dimensione del pixel. Ciò vuol dire che l'operatore *c* assocerà

ad ogni punto materiale di dimensioni l_x, l_y, un pixel di dimensioni l_X, l_Y. La corrispondenza non potrà essere biunivoca ma, grazie alla distribuzione casuale di macchioline, possiamo selezionare sulla superficie aree di dimensioni $x_a \times y_a$ composte da $N_x \times N_y$ pixel, aventi un determinato valore *g*, questa può essere rappresentata da una matrice M_a(g). Questo significa che la funzione *f(X,Y)* non è una funzione continua, ma è una funziona discreta F($n_x n_y$), con $n_x \leq N_x$ e $n_y \leq N_y$; tali che l'immagine, o una sua parte, sono rappresentabili dalla matrice *M(F(n_x, n_y))*. Il valore di *F* viene determinato nel momento in cui l'immagine digitale viene acquisita ed è funzione delle caratteristiche ottiche della telecamera digitale.

3.2 Tecniche correlazione immagini

La tecnica di correlazione di immagini si è diffusa negli ultimi 20 anni circa, e si basa sul confronto tra due, o più, immagini raffiguranti la stessa superficie prese in istanti diversi durante la deformazione. In genere si considera come stato di riferimento la prima immagine che corrisponde alla configurazione iniziale, quindi indeformata; che verrà confrontata con le altre immagini acquisite durante la deformazione, per fare ciò si utilizzano funzioni di *cross-correlazione C.* Ovviamente posso studiare l'evoluzione di un fenomeno fisico nel tempo, analizzando una serie di immagini e confrontandole con l'immagine dello stato iniziale. Come abbiamo già visto, possiamo definire la matrice M che esprime il valore di grigio con la funzione *f(X,Y)=g,* per ogni valore di *X* e di *Y,* quindi per ogni punto. Consideriamo quindi un punto *p* nell'immagine indeformata (Im_0) in un intorno S_0, a cui è associato un pixel *P*. in seguito ad uno spostamento s(P)= $\begin{Bmatrix} u(P) \\ v(P) \end{Bmatrix}$, in un'immagine successiva(*Im$_d$*) il pixel si troverà in una posizione *P'* appartenente all'intorno *S'*.

Le intensità dei punti P e P' sono:

$$f(P)=f(X_0, Y_0) \; ; \quad f'(P')=f'(X_0+u(P), Y_0+v(P)) \tag{3.2}$$

con:

$$X_0'=X_0+u(P); \quad Y_0'=Y_0+v(P) \tag{3.3}$$

Siccome i punti P e P' appartengono a immagini diverse, anche lo spostamento è visto su immagini diverse, ma lo calcoliamo come se i punti si trovassero sulla stessa immagine. Se facciamo lo stesso ragionamento per un secondo punto Q appartenete sempre allo stesso intorno S_0, di coordinate *(X_0+dX_0,Y_0+dY_0),* le intensità dei due punti sono:

$$f(Q)=f(X_0+dX_0,Y_0+dY_0);\quad f'(Q')=f'(X_0+u(Q)+dX_0,\ Y_0+v(Q)+dY_0) \tag{3.4}$$

dove *u(Q)* e *v(Q)* sono le componenti dello spostamento del punto Q. La deformazione subita determina delle differenza tra le immagini Im_0 e Im_d, e quindi due matrici M_0 e M_d diverse, ma l'intensità locale non varia. Quindi possiamo affermare che:

$$f(P)=f'(P')\ ;\quad f(Q)=f'(Q') \tag{3.5}$$

Come visto in precedenza per la teoria delle piccole deformazioni, il gradiente dello spostamento può essere approssimato con lo sviluppo di Taylor, fermandoci al primo termine:

$$u(P) - u(Q) = \frac{\partial u(P)}{\partial x}x+\frac{\partial u(P)}{\partial y}y + \dots$$

$$v(P) - v(Q) = \frac{\partial v(P)}{\partial x}x+\frac{\partial v(P)}{\partial y}y + \dots \tag{3.6}$$

Supponendo che l'intorno S_0 sia abbastanza piccolo da considerare che i segmenti di retta rimangano costanti dopo la deformazione in S_d, le coordinate del punto Q nella configurazione deformata sono *(X_0'+d X_0', Y_0'+dY_0'),* dove:

$$dX_0' = dX_0 + u(Q) - u(P) = \left(1 + \frac{\partial u(P)}{\partial x}\right) x_0 + \frac{\partial u(P)}{\partial y} y_0$$

$$dY_0' = dY_0' + v(Q) - v(P) = \frac{\partial v(P)}{\partial x}\, x_0 + \left(1 + \frac{\partial v(P)}{\partial y}\right) y_0 \tag{3.7}$$

facendo riferimento alla (3.3) possiamo scrivere:

$$Q' = \left\{X_0 + u(P) + \frac{\partial u(P)}{\partial x}x + \frac{\partial u(P)}{\partial y}y + dX_0;\ Y_0 + v(P) + \frac{\partial v(P)}{\partial x}x + \frac{\partial v(P)}{\partial y}y + dY_0\right\} \tag{3.8}$$

Che permette di scrivere la 3.4 nel modo seguente:

$$f'(Q') = f(Q) = f'\left\{X_0 + u(P) + \frac{\partial u(P)}{\partial x}x + \frac{\partial u(P)}{\partial y}y + dX_0;\ Y_0 + v(P) + \frac{\partial v(P)}{\partial x}x + \frac{\partial v(P)}{\partial y}y + dY_0\right\} \tag{3.9}$$

Quindi noto lo spostamento del punto P e calcolate le derivate $\frac{\partial s(P)}{\partial x}, \frac{\partial s(P)}{\partial y}$, può essere determinata la posizione di qualunque punto Q_i', tramite la (3.8). Viceversa, per assegnati valori di *u(P), v(P),* $\frac{\partial s(P)}{\partial x}, \frac{\partial s(P)}{\partial y}$, si possono stimare le posizioni dei punti P', e di qualunque punto Q' che si trova nell'intorno S'(P'). Determiniamo così le variabili di correlazione V_c:

$$u(P),\ v(P),\ \frac{\partial u(P)}{\partial x},\ \frac{\partial u(P)}{\partial y},\ \frac{\partial v(P)}{\partial x},\ \frac{\partial v(P)}{\partial y} \qquad (3.10)$$

per un determinato punto P, centrato nell'intorno d'interesse S, permette il calcolo degli spostamenti e quindi delle deformazioni per tutti i punti appartenenti ad S. Il calcolo delle variabili di correlazione si ottiene a partire dalla differenza fra le matrici M, M'. Se dall'analisi delle due immagini Im_0, Im_d si riescono ad identificare due intorni S_0, S_d tali che questi risultino con buona approssimazione sovrapponibili, allora la differenza fra la posizione assunta da S prima e dopo la deformazione è pari allo spostamento subito dal punto P. In pratica si confronta l'intensità $f(X_0,Y_0)$ di un intorno S_0 di $P(X_0,Y_0)$ con quella $f'(X_0',Y_0')$ dell'intorno S' di $P'(X_0',Y_0')$. Il confronto fra i due intorni si ottiene introducendo una *funzione di cross-correlazione C*, che può essere espressa nella seguente forma:

$$C\left(u(P),\ v(P),\ \frac{\partial u(P)}{\partial x},\ \frac{\partial u(P)}{\partial y},\ \frac{\partial v(P)}{\partial x},\ \frac{\partial v(P)}{\partial y}\right) = \frac{\int_{S_0'} f(X_0,Y_0) f'(X_0+\xi Y_0+\mu) dIm}{\sqrt{\int_{S_0}[f(X_0,Y_0)]^2 dIm \int_{S_0'}[f'(X_0+\xi Y_0+\mu)]^2 dIm}} \qquad (3.11)$$

Con:

$$\xi = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + v + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\ ;\ \ \mu = u + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + v + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y \qquad (3.12)$$

I valori delle V_c che massimizzano la funzione di cross-correlazione *C* sono i valori locali della deformazione nell'intorno *S(P)*. Inizialmente sono considerate variabili le componenti spostamento *u(P)* e *v(P),* poi si procede alla determinazione delle $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, mantenendo *u* e *v* costanti pari a $[u(P), v(P)]$ e nulli gli scorrimenti angolari $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$; si procede allo stesso modo per la determinazione dell'allungamento nella direzione degli assi *X,Y*; e infine si passa alla determinazione dei valori di γ mantenendo costanti *u(P), v(P),* ε_x, ε_y. Questa procedura viene ripetuta per un certo numero di valori di *(u,v),* scelti

intorno a *S(P)*, per valori fissati delle altre variabili, e si ripete finché le differenze dei valori per ciascuna variabile sono minori di specifici valori di riferimento.

Questa procedura può essere replicata su altri elementi superficiali, per determinare spostamenti e deformazioni su un'area di interesse. Questa tecnica viene migliorata di anno in anno, ma si basa sempre sulla prima idea sviluppata da *Sutton* negli anni '80, dove sono considerati spostamenti lineari e planari e deformazioni costanti nell'intorno analizzato.

Per come abbiamo definito la funzione intensità in precedenza, questa assume valori discreti *F, F'*, i quali ovviamente non risultano vantaggiosi nella nostra trattazione, siccome gli spostamenti possono assumere valori pari anche a frazioni di pixel; inoltre considerando un punto Q in un intorno S_i, andando a calcolare *f(Q)* dalla (3.9) difficilmente i valori delle coordinate di *Q* saranno interi. Sarebbe conveniente ricostruire la matrice M_i, per ogni intorno di calcolo. Introduciamo quindi una funzione continua *I* dell'intensità, ottenuta interpolando i valori *F* che essa assume in un certo campo di interesse, tale da creare una corrispondenza biunivoca tra lo spazio delle coordinate *x, y* sulla superficie materiale e quelle corrispondenti *X, Y* sull'immagine.

Ci sono più modi per effettuare l'interpolazione, e la scelta incide notevolmente sulla correlazione, riportiamo di seguito un'espressione polinomiale per *I*:

$$\begin{cases} I_{px} = a_{x00} + a_{x10}F_x + a_{x01}F_y + a_{x11}F_xF_y + \cdots + a_{xnn}F_x^nF_y^n \\ I_{py} = a_{y00} + a_{y10}F_x + a_{y01}F_y + a_{y11}F_xF_y + \cdots + a_{ynn}F_x^nF_y^n \end{cases} \quad (3.13)$$

Maggiore è alto il grado del polinomio maggiore risulta l'accuratezza del calcolo, tuttavia aumentano i problemi di convergenza, al contrario per n=1, si rischia di introdurre un errore nella correlazione confrontabile con la misura stessa.

3.3 Correlazione a campo intero

L'analisi svolta finora vale solo per gli intorni isolati all'interno della zona di interesse, se voglio estendere il calcolo a tutta l'immagine, ci sono vari approcci; qui proponiamo la tecnica di griglia (figura 3.2), che è alla base del codice utilizzato. Con questa tecnica si suddivide la ROI (region of interest) in un certo numero di elementi indipendenti,

ottenuti sovrapponendo una griglia sulle immagini Im_0 e Im'. La griglia è costituita da un certo numero di elementi semplici, generalmente a 4 nodi (a 8 nodi per un numero minore di elementi di ordine superiore); la correlazione si basa sulla definizione di funzioni di forma che permettano la trasposizione dei nodi dall'immagine di riferimento Im_0, alle immagini deformate Im_i, ovvero permettano di rendere i nodi sovrapponibili in termini di intensità luminosa *g*.

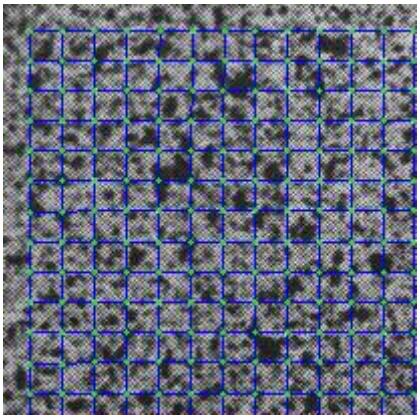


Figura 3.2

Dal punto di vista matematico, il problema si riduce ad un problema ai minimi quadrati della differenza tra i contenuti degli elementi nelle due configurazioni. L'errore da minimizzare può assumere una forma del tipo:

$$E^2 = \sum[Im_i(x_i, y_i) - Im_i(x_0, y_0)]^2 \qquad (3.14)$$

Dove con x_0, y_0, x_i, y_i, sono indicate le coordinate di un generico pixel, rispettivamente in un immagine deformata e nell'immagine di riferimento; la sommatoria sta ad indicare che il calcolo deve essere esteso ad ogni pixel per il quale si trova corrispondenza tra le immagini. In seguito si associa ad ogni elemento della griglia una sotto-immagine di forma quadrata, con dimensioni non per forza uguali all'intorno di partenza. Su ciascuna sotto-immagine, attraverso una funzione di forma prospettica, si riporta il contenuto dell'elemento, in termini di livello di grigio. La funzione di forma prospettica, è quindi una trasformazione geometrica fra due piani che permette di creare una corrispondenza tra le coordinate del generico punto *p*(*x*,*y*) e quelle del punto *p*' di coordinate *x*', *y*', secondo la formula:

$$\begin{cases} x' = (a_0 + a_1 x + a_2 y)/(c_0 x + c_1 y + c_2) \\ y' = (b + b_1 x + b_2 y)/(c_0 x + c_1 y + c_2) \end{cases} \qquad (3.15)$$

dove i coefficienti delle variabili *x* e *y* sono numeri reali. I punti sono ottenuti interpolando con una funzione biunivoca i livelli di intensità luminosa; le sotto-immagini così definite sono facilmente confrontabili anche se hanno forma e dimensioni differenti. A questo punto l'espressione dell'errore riferite ad un immagine intera può essere semplificata al campo delle sotto-immagini:

$$E^2 = \sum \| s_i(X_i, Y_i) - s_0(X_0, Y_0) \|^2 \qquad (3.16)$$

Dove la somma è eseguita su un particolare elemento del reticolo a cui viene associata una sotto-immagine s_i. Tutte le sotto-immagini sono funzione delle coordinate dei nodi X_i, Y_i, X_0, Y_0, che costituiscono le variabili incognite attraverso cui cercare la migliore approssimazione del contenuto con il metodo dei minimi quadrati. Raggiunta la convergenza la soluzione è un vettore che definisce la nuova posizione dei nodi nella griglia. Tale vettore viene determinato per ogni elemento del reticolo, in modo da determinare tutti i punti della regione di interesse sull'immagine. In questo modo si calcola in maniera continua gli spostamenti, quindi le deformazioni nell'intera area esaminata.

3.4 Stereo visione e 3-D D.I.C.

Per passare dalla versione 2-D della tecnica D.I.C. alla versione 3-D, praticamente basta utilizzare due telecamere al posto di una, per il resto il concetto di base è lo stesso. Una singola telecamera posizionata in un generico punto "C" come in figura (3.3), non può distinguere le differenze tra punti che giacciono sullo stesso raggio di proiezione come Q ed R; solo introducendo una seconda telecamera, posta in C', si riesce ad estrapolare informazioni aggiuntive sufficienti, a distinguere la posizione reale di questi punti nello spazio. In generale la soluzione 3-D è assai più complessa da effettuare rispetto al caso piano perché subentrano una serie di problematiche dovute al posizionamento. È richiesta l'introduzione di funzioni di forma del secondo ordine; e per operare una corretta associazione delle immagini sono necessarie operazioni di rettifica delle coordinate e operazioni di triangolazione stereoscopica. Prima di ciò tuttavia è doveroso operare una accurata calibrazione dei dispositivi che permetta di utilizzarli insieme.

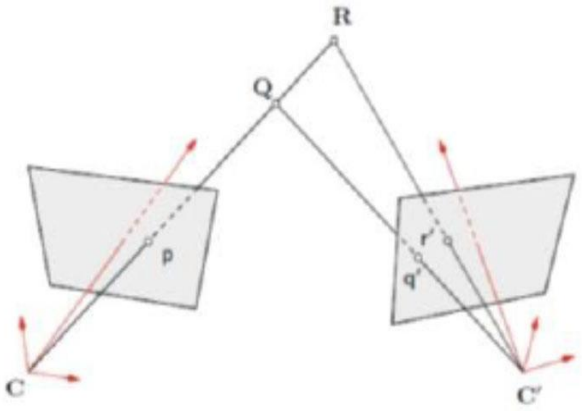


Figura 3.3

Capitolo 4

Calibrazione stereoscopica

La ricostruzione spaziale, è sostanzialmente la trasposizione dal dominio 2D al dominio 3D delle immagini acquisite dalle telecamere, tramite la stereoscopia, tecnica basata sulla geometria epipolare. Innanzitutto bisogna introdurre i modelli matematici che descrivono il processo di acquisizione delle immagini. Partiamo dall' illustrazione del modello pinhole per una singola telecamera, con la conseguente definizione dei parametri caratterizzanti, per poi passare ai principi della stereoscopia, e infine arrivare alla calibrazione stereoscopica che consiste nell' estrapolazione dei parametri ottici in una coppia di telecamere.

4.1 Modello pinhole della telecamera

Il modello pinhole considera una telecamera come una scatola con un piccolo foro frontale da cui entra la radiazione luminosa riflessa dagli oggetti del mondo esterno; tali raggi creano un'immagine rovesciata che viene raccolta su un piano chiamato piano immagine (figura 4.1).

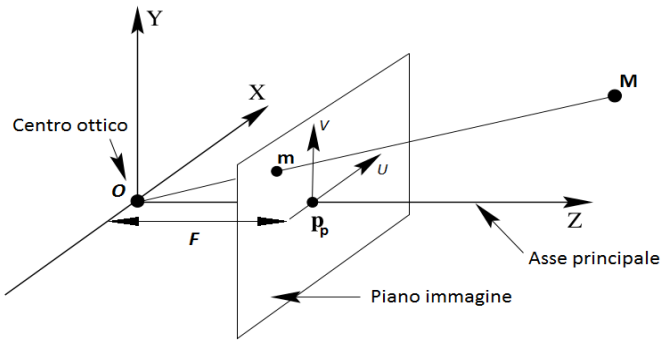


Figura 4.1

Qualsiasi punto della scena inquadrata è proiettato sull'immagine mediante l'intersezione tra il piano immagine e la retta passante per il punto stesso e il foro. Per semplicità consideriamo il piano immagine di fronte al foro, questo permette di ottenere

una modellazione matematica equivalente con una struttura reale semplificata. Gli elementi caratteristici del sistema sono i seguenti:

- centro ottico (O): rappresenta il punto dove è situato il foro ed è anche detto *fuoco*;
- il piano immagine è il piano su cui viene proiettata l'immagine;
- l'*asse ottico* (o *principale*) è la retta che interseca il centro ottico ed è perpendicolare al piano immagine;
- il punto principale (Pp) è il punto d'intersezione tra il piano immagine e l'asse ottico;
- la lunghezza focale (F) è la distanza tra il centro ottico e il piano immagine.

Per l'analisi di questo modello abbiamo bisogno di utilizzare due diversi sistemi di riferimento; il primo, relativo alla telecamera, è centrato nel fuoco e consente di esprimere in coordinate cartesiane i punti della scena come M=$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$, questo sistema ha l'asse Z coincidente con l'asse ottico ed entrante nel piano immagine. Il secondo invece è centrato nel punto principale, è bidimensionale e gli assi U e V hanno le stesse direzioni degli assi X e Y; questo sistema consente di esprimere le coordinate dei punti come *m*=$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, (figura 4.1).

Consideriamo ora un punto P che ha coordinate *P*=$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$, nel primo sistema di riferimento, avrà coordinate *P'*=$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ nel secondo sistema. Facendo riferimento al piano *XZ* (figura 4.2) si può notare la similitudine tra i triangoli *ΔOzP* e *ΔOFP'*; e avviene lo stesso se consideriamo il piano *YZ*, tra i triangoli *ΔOZy* e *ΔOFv*. Quindi ricordando le leggi sulla similitudine tra triangoli, otteniamo che:

$$\begin{cases} u = \frac{F}{z}x \\ v = \frac{F}{z}y \end{cases} \qquad (4.1)$$

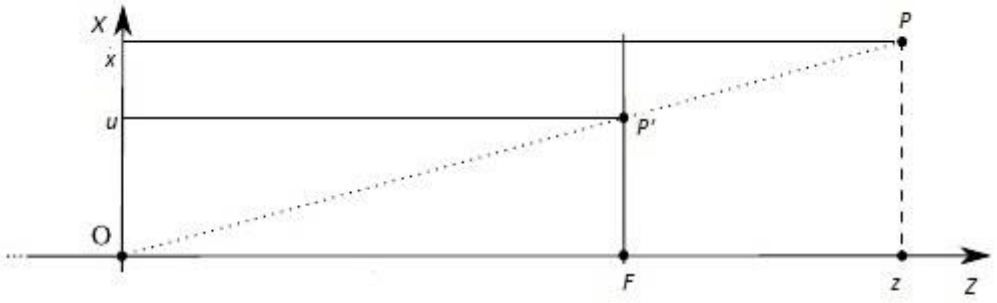


Figura 4.2

In genere F è dato in metri, quindi bisognerebbe trovare un modo per esprimerlo in pixel; si definisce quindi il *pinch (k),* come fattore di conversione tra i due sistemi di misura. Note le dimensioni del sensore per le due direzioni (forniti dai costruttori), sia in millimetri (W_{mm}, H_{mm}) che in pixel (W_{pixel}, H_{pixel}), possiamo affermare che:

$$\begin{cases} k_u = \frac{W_{mm}}{W_{pixel}} \\ k_v = \frac{H_{mm}}{H_{pixel}} \end{cases} \tag{4.2}$$

e quindi otteniamo la distanza focale in pixel come:

$$\begin{cases} f_u = \frac{F}{k_u} \\ f_v = \frac{F}{k_v} \end{cases} \tag{4.3}$$

Si noti adesso che la posizione dei pixel è data rispetto a un origine che non è esattamente coincidente con il punto principale, ma subisce effetti di quantizzazione e difetti di costruzione. Ho dunque una traslazione delle coordinate immagine (termini di offset):

$$\begin{cases} u = \frac{f_u}{z} x + c_u \\ v = \frac{f_v}{z} y + c_v \end{cases} \tag{4.4}$$

c_u e c_v sono chiamati termini di offset. A questo punto si aggiunge un altro, e ultimo, termine che rappresenta la misura dell'inclinazione degli assi, che idealmente dovrebbero essere perdendicolari. Potrebbero esserci quindi pixel non perfettamente rettangolare, bensì distorti come in figura (4.3). Si può notare che la coordinata *u* dipende da *v,* proporzionalmente allo scostamento *s* del punto principale:

$$\Delta u = s\Delta v \tag{4.5}$$

Si ottiene dalle relazioni trigonometriche tra i lati del pixel e gli assi:

$$s=\frac{1}{k_v}tan(\alpha) \tag{4.6}$$

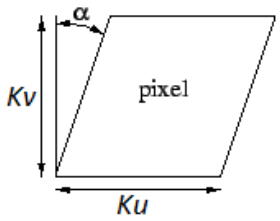


Figura 4.3

Definiamo quindi il parametro skew $\delta = f_V\, tan(\alpha)$, ottenendo la relazione corretta:

$$\begin{cases} u = \frac{f_u x + \delta y}{z} + c_u \\ v = \frac{f_v}{z} y + c_v \end{cases} \tag{4.7}$$

I parametri appena descritti vengono chiamati parametri estrinseci, e possono essere rappresentati da una matrice, chiamata appunto matrice dei parametri estrinseci:

$$\psi = \begin{bmatrix} f_u & \delta & c_u \\ 0 & f_v & c_v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

4.2 Modello generale

Le coordinate dei punti nel sistema di riferimento della telecamera (che abbiamo appena descritto), non necessariamente coincidono con le coordinate dei punti nella scena reale, nel sistema di riferimento "mondo", siccome quest'ultimo può essere scelto arbitrariamente in base alla situazione. Di conseguenza è doveroso svolgere un'analisi geometrica generale e ottenere le relazioni che legano i due sistemi di riferimento.

Innanzitutto diamo una breve descrizione dei possibili movimenti di un corpo rigido. Considerando il mondo reale come uno spazio euclideo tridimensionale E^3, si ha che un qualsiasi movimento è sempre scomponibile in una traslazione e una rotazione. Una

qualsiasi traslazione è esprimibile tramite un vettore T di E^3 del tipo $T=\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix}$; per ogni punto P dello spazio quindi che subisce una traslazione in un altro punto P', possiamo scrivere:

$$P' = P + T = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Una rotazione è invece esprimibile tramite un'isometria, ossia una relazione che permette di mantenere inalterati angoli e lunghezze; le rotazioni quindi sono realizzate da una matrice ortogonale, cioè una matrice tale per cui: $RR^T=I_d$. il generico punto P, dopo aver subito una rotazione si trasforma in P' definito in questo modo:

$$P' = RP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Andiamo ora a definire come passare da un sistema all'altro. Consideriamo due sistemi di riferimento A e B, definiamo un punto di coordinate $P_A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$ nel sistema A, vogliamo determinare le sue coordinate nel sistema B. Possiamo avere due casi: i sistemi hanno la stessa origine ma sono ruotati, e la rotazione è esprimibile dalla matrice R, oppure sono orientati allo stesso modo, ma il secondo è ottenuto traslando il primo di un vettore T, ovviamente è possibile anche una combinazione dei casi.

Nel primo caso, dato P_A, definiamo le sue coordinate nel secondo sistema di riferimento:

$$P_B = R^{-1}P_A \quad (4.11)$$

Nel secondo caso invece avremo:

$$P_B = P_A - T \quad (4.12)$$

Unendo le due espressioni è possibile definire qualsiasi movimento rigido dei due sistemi, ottenendo quindi:

$$P_B = R^{-1}(P_A - T) = \Omega P_A - t \quad (4.13)$$

Dove $\Omega=R^{-1}$, $t=\Omega T$. Applicando quanto detto al nostro caso è possibile considerare le coordinate mondo come un qualsiasi sistema arbitrario ottenuto traslando di T e ruotando di R il sistema di riferimento telecamera. È possibile dunque esprimere un

punto *P* dato in coordinate telecamera tramite le coordinate mondo, applicando la trasformazione:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

La matrice di rotazione e il vettore di traslazione sono spesso chiamati *parametri estrinseci* della telecamera, a identificare la loro indipendenza dalla telecamera stessa. Tutti questi parametri sono incogniti e dipendono sia dal tipo di telecamera e sensore, ma anche dal posizionamento nello spazio e dall'obiettivo. Dalle relazioni precedenti si nota che il legame tra i punti mondo e i punti immagine non è lineare, quindi introduciamo le coordinate omogenee. Queste permettono una semplice descrizione delle trasformazioni proiettive e dei punti impropri. Praticamente un N-upla di coordinate omogenee permette di rappresentare un oggetto in uno spazio cartesiano di dimensione N-1, a meno di un fattore di scala. Ad esempio, valgono le seguenti relazioni:

$$p_{cart}\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = p_{om}\mathrm{k}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ 1 \end{Bmatrix}; \qquad p_{cart}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = p_{om}\mathrm{k}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.15)$$

Utilizzando queste considerazioni possiamo esprimere il vettore delle coordinate immagine *m* e il vettore delle coordinate mondo *M*, come:

$$\widetilde{m} = \mu \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{M} = \eta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

Dove μ e η sono fattori di proporzionalità arbitrari non nulli.

La relazione (4.7) può essere quindi scritta:

$$\lambda\begin{Bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & \delta & c_u & 0 \\ 0 & f_v & c_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.17)$$

dove $\lambda = \frac{\mu}{\eta} = z$.

per esprimere le coordinate immagine rispetto a un qualsiasi sistema di riferimento tridimensionale, verranno considerate anche le trasformazioni geometriche presentate in precedenza, quindi la relazione (4.14) in coordinate omogenee diventa:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Che sostituita nella precedente, scritta in forma compatta, ci permette di giungere alla relazione lineare tra punti mondo e punti immagine:

$$\lambda \widetilde{m} = \Psi [\Omega \quad t] \widetilde{M} \quad (4.19)$$

Se si considera un sistema costituito da una o più telecamere, normalmente si prenderà come sistema di riferimento assoluto quello di una fotocamera. I parametri estrinseci di questa, saranno costituiti da una matrice identità come matrice di rotazione e da un vettore di traslazione nullo.

4.3 Visione stereoscopica

La stereoscopia è una tecnica che riesce a dare informazioni sulla profondità degli oggetti, in questo caso però abbiamo bisogno di utilizzare due telecamere. Per estrapolare informazioni in 3-D utilizziamo la geometria epipolare, che si può definire come una matrice 3x3, la cui struttura è indipendente dalla scena inquadrata, e dipende solo dai parametri intrinseci ed estrinseci delle telecamere. Innanzitutto facciamo una distinzione, se sono i parametri intrinseci della telecamera, la matrice si chiama matrice essenziale ($E = t\ X\ \Omega$), se invece lavoriamo direttamente sui pixel delle immagini, la matrice si chiama matrice fondamentale ($F = \Psi_2^{-T} E \Psi_1^{-1}$), quest'ultima contiene tutte le informazioni necessarie per determinare i parametri estrinseci.

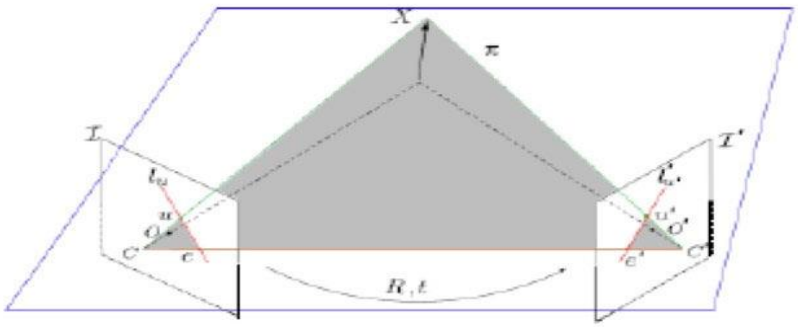


Figura 4.3

Facendo riferimento alla figura (4.3), introduciamo il concetto di linea di base, "baseline", ossia la linea che unisce i centri delle due telecamere (*C, C'*). Considerando un punto *X*, definiamo *u* e *u'* i punti ottenuti come proiezione sui due piani immagine di *X*, questi vengono chiamati punti corrispondenti, e individuano il piano π. Bisogna introdurre anche gli epipoli (*e,e'*), che sono i punti di intersezione della linea che congiunge i centri con i rispettivi piani di immagine (*I,I'*), e le linee epipolari l_u, l_u', che sono l'intersezione dei piani immagine con il piano epipolare. Sono piani epipolari tutti i piani che contengono la baseline, di conseguenza questi possono essere molteplici e costituire un fascio di piani. Tutte le linee epipolari si intersecano nell'epipolo, mentre la corrispondenza tra le linee è garantita dall'intersezione di un piano epipolare con i piani di immagine a destra e a sinistra. Possiamo ora notare che, conoscendo un punto *u*, per conoscere *u'* in termini di corrispondenza stereo, la ricerca non coprirà l'intera immagine, ma solamente il sottospazio ristretto della linea epipolare; e questo perché il piano π, è univocamente determinato dalla linea base e dal raggio definito da *u*. il raggio definito da *u* deve giacere su π, quindi *u'* deve per forza trovarsi su l_u'. La matrice fondamentale dal punto di vista geometrico realizza il trasferimento, di un punto u appartenente ad un inquadratura, sulla linea l_u' corrispondente nell'altra. F è quindi, una mappatura dei punti dal piano proiettivo bidimensionale dell'immagine alla famiglia delle epipolari che attraversano l'epipolo *e'* in I'; questa matrice operando un passaggio da uno spazio bidimensionale ad uno monodimensionale, avrà rango 2. Per come è strutturata la matrice, dati due punti e due immagini, ci permette di scrivere la seguente relazione che prende il nome di *vincolo epipolare*:

$$u'Fu = 0 \qquad (4.20)$$

Questa relazione è forse la proprietà più importante della matrice F non solo perché ci permette di limitare ad una linea lo spazio di ricerca del punto corrispondente per qualsiasi pixel dell'immagine, ma perché sta alla base dei metodi di stima della matrice date le coordinate in pixel di un numero maggiore di 7 di coppie corrispondenti. La ricerca delle corrispondenze con la sola condizione di vincolo epipolare non è perseguibile perché per ogni punto u esiste un luogo monodimensionale di punti (la linea epipolare l_u) per i quali tale condizione di vincolo è verificata.

4.4 Ricostruzione tridimensionale

Date una coppia di immagini acquisite da un sistema stereoscopico. Il processo di ricostruzione permette di calcolare la distanza di ogni punto dal piano immagine. Questo processo è diviso in due fasi: la rettificazione delle immagini e il calcolo della disparità. La rettificazione è una trasformazione geometrica che fa in modo che i punti corrispondenti nelle due immagini abbiano stessa coordinata *v*. Questo si traduce, in termini di immagini, nell'avere lo stesso indice di riga. Adesso i punti corrispondenti nelle due immagini differiranno per la sola coordinata *u*. La posizione per cui telecamere acquisiscono immagini già rettificate è detta *configurazione standard* (figura 4.4)

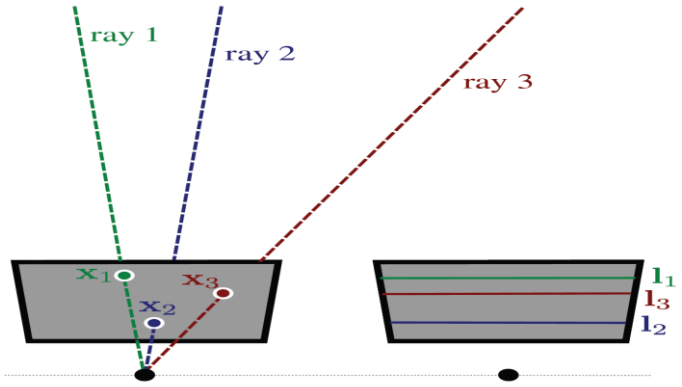


Figura 4.4

Per comprendere la rettificazione, consideriamo due telecamere che inquadrano lo stesso oggetto da due posizioni diverse, e consideriamo il sistema di riferimento centrato sulla prima telecamera. Dato un punto $m_1=\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$ sulla prima immagine, è la rappresentazione del punto $M_1=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ nello spazio. Sulla seconda immagine si avrà un punto $m_2=\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$ corrispondente al primo, che sappiamo appartenere alla retta epipolare (figura 4.5).

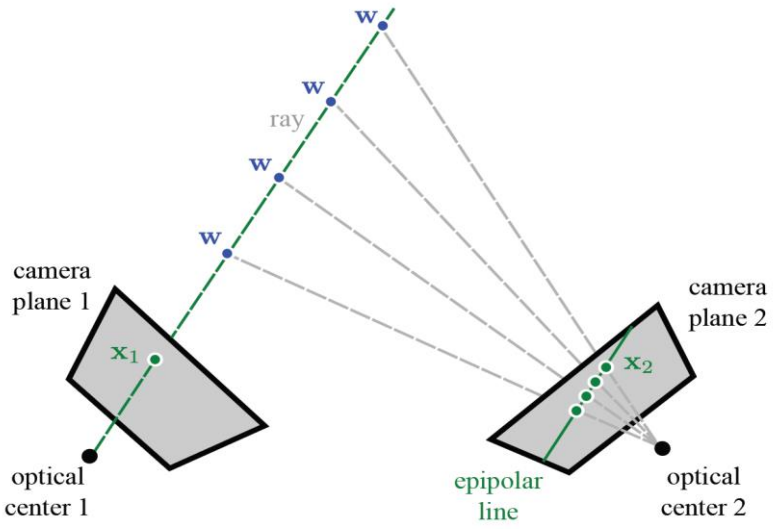


Figura 4.5

La rettificazione deve fare in modo che i punti corrispondenti nelle due immagini abbiamo stesso indice di riga. Questo vincolo è equivalente all'avere tutte le rette epipolari perfettamente orizzontali sulle due immagini. Ciò equivale all'avere tutte le rette epipolari perfettamente orizzontali sulle due immagini. Infatti, questa è l'unica configurazione per cui la seconda camera è orientata come la prima, ed è traslata solo lungo l'asse *X* rispetto alla prima $\left(t = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}\right)$. Considerando il punto definito precedentemente, dovremo definire una relazione tra i punti non rettificati ($\widetilde{m_i}$), e quelli già rettificati (m_i'), dove *i* può valere 1 o 2 in base alla telecamera. Per i punti non rettificati avremo:

$$\lambda_1 \widetilde{m_1} = \Psi_1 \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \widetilde{M} = \Psi_1 M \qquad (4.21)$$

mentre per i punti rettificati:

$$\lambda_1 \widetilde{m_1}' = \Psi_{ret}\, \Omega_{ret1}\, M \qquad (4.22)$$

dove $\Psi_{ret}=\frac{\Psi_1+\Psi_2}{2}$, che permette di considerare le telecamere identiche e Ω_{ret1} è proprio la trasformazione cercata che rende le epipolari parallele ed orizzontali. Tramite le uguaglianze precedenti, ottengo la relazione tra il punto rettificato e quello dell'immagine di partenza:

$$\frac{\lambda_1'}{\lambda_1} \begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ 1 \end{Bmatrix} = \Psi_{ret}\, \Omega_{ret1} \Psi_1^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.23)$$

Ragionando analogamente per la telecamera 2, dalla relazione dei punti non rettificati, possiamo scrivere:

$$\lambda_2 \widetilde{m_2} = \Psi_2 \, [\Omega \quad t] \, \widetilde{M} = \Psi_1 \, \Omega M + t \tag{4.24}$$

Per i punti rettificati ottengo dunque:

$$\lambda_2 \, \widetilde{m_2}' = \Psi_2 \, \Omega_{ret2} \, M + t \tag{4.25}$$

Da cui tramite l'uguaglianza si ottiene:

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} \begin{Bmatrix} u_2' \\ v_2' \\ 1 \end{Bmatrix} = \Psi_{ret} \, \Omega_{ret2} \Psi_2^{-1} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

Dove $\Omega_{ret2} = \Omega_{ret1} \, \Omega^{-1}$.

In pratica si applica ai punti una rotazione che orienta la seconda telecamera come la prima, e, in seguito, si compie una operazione di rettifica identica a quella della prima immagine. Queste immagini possono ora essere utilizzate per il calcolo della disparità.

Il calcolo delle disparità ci permette di calcolare la distanza rispetto al fuoco quando ci troviamo in configurazione standard. La disparità *D(u),* si definisce come la differenza in modulo delle coordinate *u*:

$$\mathrm{D(u)} = |u_2 - u_1| \tag{4.27}$$

Introducendo un sistema come in figura 4.5 per un punto $M = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$, indicando con B la distanza tra le due telecamere e con F la lunghezza focale sfruttando la similitudine dei triangoli che si può riscontrare in $u_1 M u_2$ e $O_1 M O_2$, possiamo scrivere:

$$\frac{B}{z} = \frac{B - D(u)}{z - F} \tag{4.28}$$

che risolta per z:

$$\mathrm{z} = \frac{BF}{D(u)} \tag{4.29}$$

Si noti che la rettifica è necessaria solo nel caso di tue telecamere orientate arbitrariamente, in tal caso le incognite caratterizzanti i punti sarebbero due (u,v) e non sarebbe possibile eseguire il calcolo della disparità.

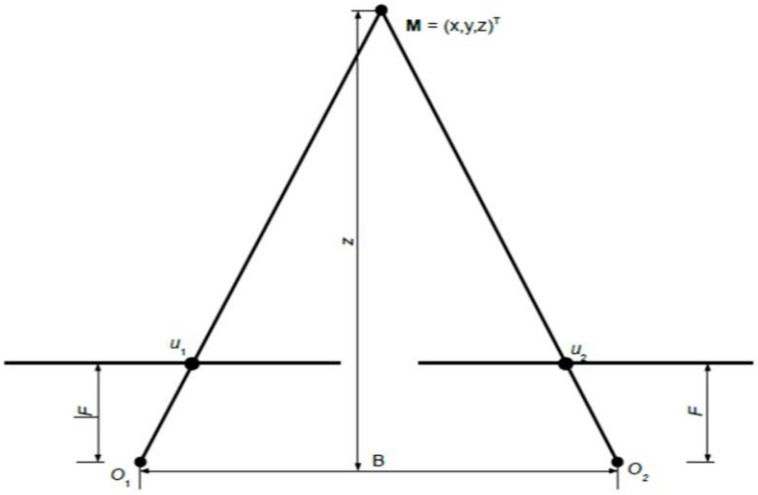


Figura 4.6

4.5 Calibrazione

La calibrazione consiste nella determinazione dei parametri appena descritti (Ψ,Ω,t), partendo dalla conoscenza delle coppie di punti corrispondenti *m,M.* Nel caso in cui avessimo una sola telecamera ci interesserebbero solo i parametri intrinseci, ma nel nostro caso ne abbiamo due, quindi dobbiamo conoscere anche i parametri estrinseci; quindi abbiamo bisogno che il sistema sia calibrato. Ci sono più modi per svolgere la stereo calibrazione, noi utilizziamo una metodologia che ci permette di eseguire prima la mono calibrazione di entrambe le telecamere, considerate indipendenti e quindi di ottenere i parametri intrinseci di entrambe; poi si considera il sistema complessivo e si ottengono i parametri estrinseci. Ci sono vari algoritmi che permettono questa analisi, noi per entrambi i passaggi utilizziamo l'algoritmo di Zhang.

L'algoritmo di Zhang sfrutta un oggetto per il quale risulta semplice definire il sistema di riferimento "mondo", questo oggetto deve essere piano e formato da parti chiaramente distinguibili poste ad una data distanza conosciuta in precedenza, ad esempio una piastrina con dei puntini come quella in figura 4.7.

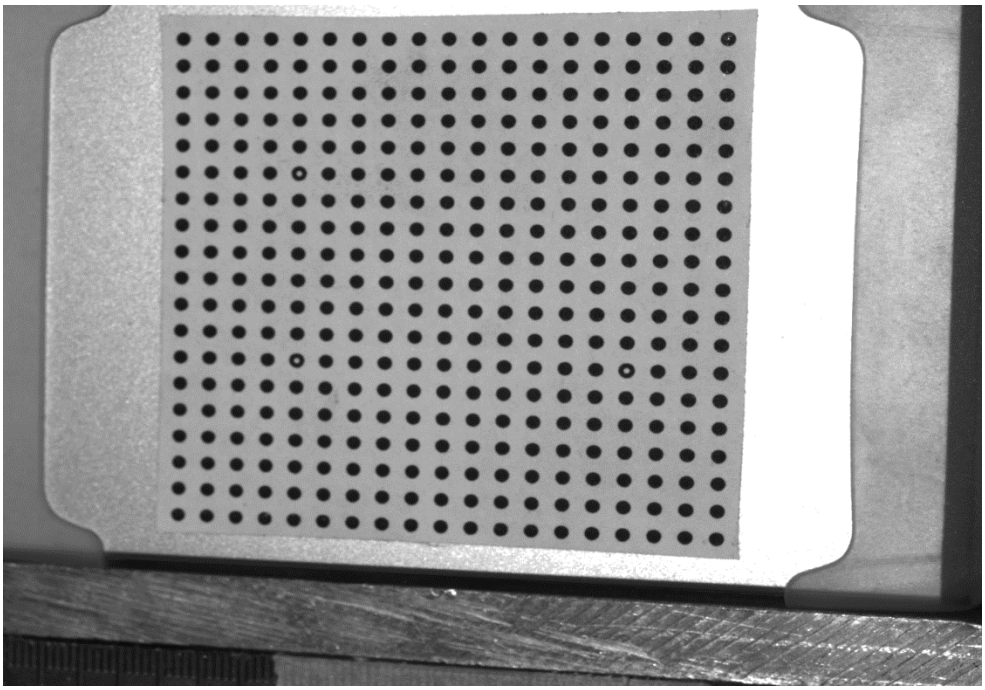


Figura 4.7

Per quanto riguarda il secondo passaggio, siccome le due telecamere saranno posizionate ovviamente in punti diversi e con orientazioni diverse, ognuna avrà i propri parametri intrinseci diversi dall'altra, ottenuti dalla mono calibrazione. Grazie alla stereo calibrazione, veniamo a conoscere la matrice di rotazione e il vettore di traslazione, e quindi possiamo sovrapporre i sistemi di riferimento e conoscere i parametri estrinseci relativi. Si potrà in questo modo ottenere le coordinate di uno stesso punto in un sistema di riferimento, conoscendo le sue coordinate nell'altro sistema di riferimento.

Per definire tutti i parametri di interesse l'algoritmo di Zhang ha bisogno di più fotografie dell'oggetto (piastrina nel nostro caso), eseguite con angolazioni diverse dell'oggetto e con le telecamere fisse; osservando la figura 4.8 si comprendono facilmente le varie angolazioni, sia per una sola camera, che per due camere.

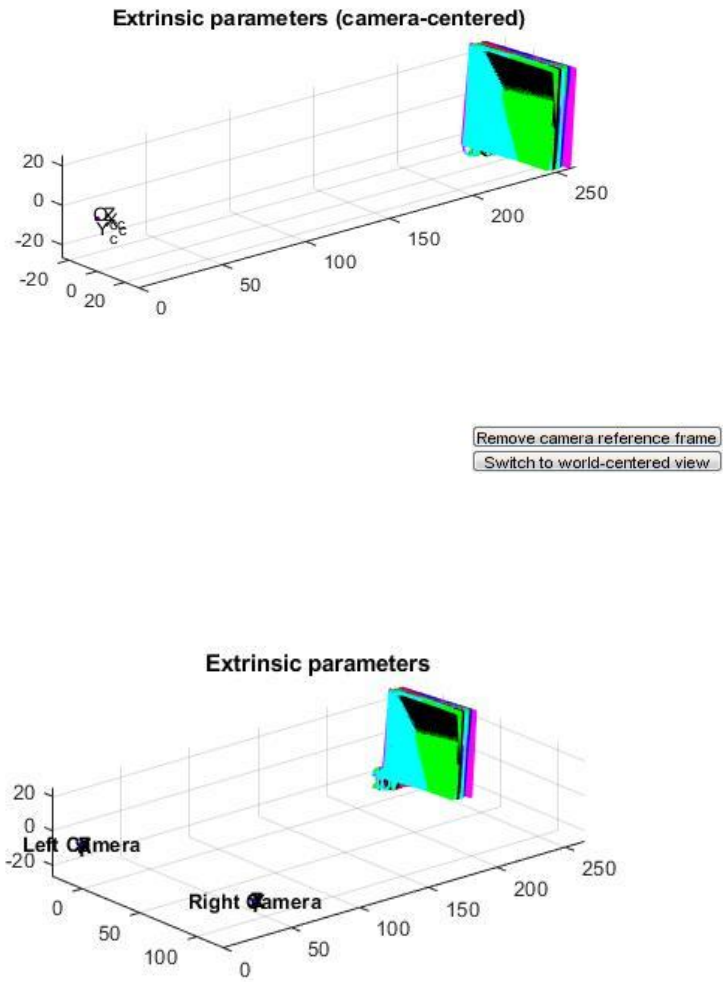

Extrinsic parameters (camera-centered)
20
0
-20
-20
0
20
0
50
100
150
200
250
Remove camera reference frame
Switch to world-centered view
Extrinsic parameters
20
0
-20
0
50
100
0
50
100
150
200
250

Figura 4.8

Capitolo 5

Algoritmo di calcolo D.I.C. utilizzato.

Come abbiamo detto, negli ultimi anni si sta diffondendo sempre di più la tecnica di correlazione delle immagini per la misura delle deformazioni, questa richiede l'acquisizione di almeno due immagini durante la prova, che verranno successivamente analizzare, tenendo sempre come riferimento l'immagine della configurazione indeformata. Successivamente verrà descritto l'algoritmo utilizzato nelle prove, questo è scritto sottoforma di codice MATLAB®, programma di calcolo interattivo basato sul linguaggio matematico. L'algoritmo utilizza una correlazione a campo intero basata sul metodo della griglia, descritto precedentemente.

5.1 Procedimento di calcolo

Il codice utilizzato si chiama SPECKLE_3D, ed è la versione tridimensionale del codice SPECKLE, utilizzato nei casi bidimensionali. Possiamo suddividere il codice in due parti, nella prima vengono eseguite tutte le operazioni preliminari: acquisizione dell'immagine di riferimento (quella indeformata, in genere la prima dell'elenco), creazione della maschera sull'immagine di riferimento, costruzione della griglia sull'immagine di riferimento, determinazione delle sotto-immagini di elemento e applicazione della maschera, calcolo dello jacobiano *J*, e infine il calcolo della matrice *A* e la sua decomposizione. La seconda fase si ripete ciclicamente per ogni immagine acquisita, la successione delle operazioni è la seguente: acquisizione dell'immagine Im_{n+1}, della sequenza, creazione della maschera sulla nuova immagine, stima di primo tentativo della griglia associata alla nuova immagine, ciclo di risoluzione del sistema errore (che si suddivide a sua volta in: determinazione delle sotto-immagini d'elemento, applicazione della maschera aggiornata, calcolo del vettore delle differenze D, calcolo del vettore b, calcolo delle nuove coordinate nodali, calcolo della norma degli incrementi e test di

convergenza); poi si calcola sui nodi lo spostamento e le componenti della deformazione, e si rappresentano grafici di mappe di deformazione.

5.2 Descrizione dell'algoritmo.

Inizialmente si suddivide la regione di interesse (ROI) in una serie di elementi e_i; si definisce la griglia, generalmente a 4 nodi, sull'immagine Im_0 di riferimento. La griglia durante la prova non sarà costante, ma i nodi subiranno spostamenti; quindi ogni nodo avrà coordinate nodali in funzione del tempo *t*, e possiamo definire un vettore *X*, detto vettore delle coordinate nodali:

$$X(t)=x(i)=\begin{bmatrix} x_{0i}(t) & y_{0i}(t) \\ x_{1i}(t) & y_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) & y_{2i}(t) \\ x_{3i}(t) & y_{3i}(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Ogni componente del vettore x_{ji} del vettore contiene le coordinate cartesiane x_{ji}, y_{ji}, dei nodi del i-esimo elemento, con $j\epsilon\{0,3\}$ che è il numero caratterizzante il nodo sull'elemento.

Successivamente si passa alla fase di analisi delle immagine acquisite Im_i, per ogni immagine si calcola la funzione di intensità *I* tramite interpolazione, come è stato già spiegato precedentemente. Per ogni elemento della griglia avviene l'associazione a sotto-immagini s_i di forma quadrata, attraverso opportune funzioni di forma Ff_i. Ci sono vari tipi di queste funzioni di forma, nel nostro caso si utilizzano funzioni di forma prospettiche, che rappresentano al meglio l'elemento della griglia se la deformazione è notevole, quindi avremo una funzione in questa forma:

$$Ff = \begin{cases} x_s = {a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}/{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}} \\ y_s = {a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}/{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}} \end{cases} \quad (5.2)$$

Con questa funzione si crea una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti dell'immagine Im_i appartenenti all'elemento e_i, e i rispettivi punti della sotto-immagine s_i ad essa associata, per la quale è stato calcolato il livello di intensità luminosa di ogni singolo pixel. Per una diversa configurazione degli elementi e_i della griglia, si avranno coordinate

nodali diverse, e quindi funzioni di forma diverse. In generale la sotto-immagine s_j associata all'elemento j, sarà diversa dalla sotto-immagine s_i associata all'elemento i. Quindi è chiaro quanto sia importante la determinazione delle sotto-immagini, che rendono confrontabili due configurazioni della griglia anche diverse, in termini di differenze tra le rispettive funzioni intensità. Una diversa impostazione della griglia, quindi con diverse componenti del vettore delle coordinate nodali, genera dei diversi valori dei coefficienti della trasformazione, facendo giungere ad una sotto immagine differente, questo mostra come la griglia sia completamente indipendente dall'area inquadrata, risulta formata da elementi indipendenti l'uno dall'altro.

Uno stesso elemento e_i, che su due immagini Im_1 e Im_2, riferite a due istanti t_1, t_2 *diversi,* ha due configurazioni diverse e_{i1}, e_{12}, potrebbe assumere forme quadrangolari diverse da quella iniziale. Per qualsiasi forma dei due quadrilateri (e_{i1},e_{i2}) le relative sotto-immagini saranno due immagini quadrate aventi le stesse dimensioni, caratterizzate dalla funzione di forma *Ff,* e dalla funzione intensità *I*. Per valutare quanto sia e_{i1} diverso da e_{i2}, è possibile calcolare la differenza, in termini di livello di grigio, fra le rispettive sotto-immagini:

$$e_{i1} - e_{i2} = s_{i1} - s_{i2} = I_{i1} - I_{i2} \qquad (5.3)$$

Lo scopo dell'algoritmo di correlazione è quello di rendere minima la differenza tra le sotto-immagini associate agli elementi della griglia dell'immagine indeformata e quelle associate agli elementi delle immagini deformate. Si tratta quindi di minimizzare la funzione errore *E*, che per quanto riguarda le sotto-immagini può essere scritta in questo modo:

$$E = \sqrt{\sum \left\| s_{ij}(X_j) - s_{i0}(X_0) \right\|^2} \qquad (5.4)$$

Per la costruzione di curve il tutto vuol dire cercare la migliore approssimazione ai minimi quadrati, il che si può scrivere:

$$S_j\,(X_j) = S_0\,(X_0) \qquad (5.5)$$

In cui i parametri incogniti sono le componenti del vettore delle coordinate nodali, i valori del vettore *X* che soddisfano la relazione precedente vengono chiamati X_j. I livelli di intensità luminosa non dipendono dalle coordinate in modo lineare, ciò rende

necessario un calcolo iterativo. Quindi si parte dallo sviluppo in serie di Taylor, limitato al primo ordine, cosi avremo una prima approssimazione del vettore:

$$S_j\ (\mathrm{X}) = S_j\ (\mathrm{X}') + \sum_k \frac{\partial S_j}{\partial x_k} \Big/_{\mathrm{X}=\mathrm{X}'} (x_k - x_k') + \dots \qquad (5.6)$$

Sostituito nella relazione di partenza, separandone i termini noti ($\mathrm{S_0(X_0)}$, $\mathrm{S_j(X_j)}$) permette di giungere ad una notazione matriciale in forma sintetica:

$$\mathrm{J}\,\Delta\mathrm{x} = \mathrm{D} \qquad (5.7)$$

In cui con J si indica il jacobiano delle sotto immagini riferito alle derivate delle coordinate nodali, con D, la differenza tra il contenuto delle sotto immagini deformate e non, e Δx il vettore che permette la minimizzazione di queste differenze. Bisogna notare inoltre, che gli elementi di D e di J non sono numeri, ma sotto-immagini derivate, che vengono calcolate per interpolazione. La relazione precedente quindi, è un sistema lineare sovradeterminato la cui incognita e proprio il vettore Δx, al quale si arriva tramite la definizione della matrice A e del vettore b, che invece sono composti da numeri, si ottengono infatti, moltiplicando e sommando i pixel corrispondenti delle sotto immagini che compongono J. I passaggi sono i seguenti:

$$\mathrm{A} = \mathrm{J}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{J}\ ; \qquad \mathrm{b} = \mathrm{J}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{D}\ ; \qquad \Delta\mathrm{x} = \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{b} \qquad (5.8)$$

La matrice A inoltre presenta delle caratteristiche tali permettono al programma di facilitare e velocizzare notevolmente il calcolo. L'algoritmo può essere ottimizzato, nella precedente descrizione, il processo iterativo prevede che siano calcolati per ogni successivo incremento i Δx che si devono andare a sommare alle coordinate nodali dei vari step di stima intermedia. Questo prevede per ogni iterazione quindi, il calcolo del jacobiano, del prodotto $J^T J$ e l'inversione della matrice A, che a livello computazionale sono le operazioni che richiedono maggior tempo. Procedura alternativa che permette di trovare una scorciatoia consiste nell' inversione dei termini del problema, si esegue il fitting non muovendosi dalle coordinate deformate, bensì andando ad adattare le coordinate X_0 dell'immagine di riferimento. Il problema di stima del calcolo degli incrementi può quindi essere esposto al seguente modo:

$$S_0\ (\mathrm{X_0}) = S_j\ (\mathrm{X}') - \sum_k \frac{\partial S_j}{\partial x_k} \Big/_{\mathrm{X}=X_0} (x_k - x_{k0}) + \dots \qquad (5.9)$$

Che può essere paragonato al precedente (5.6) solo per la forma, anziché modificare il vettore delle coordinate nodali dell'immagine indeformata, si vanno a modificare le coordinate della griglia deformata. In parole povere si cerca di ottenere un elemento che sia più somigliante alla configurazione di partenza. A partire dalla seconda iterazione il vantaggio inizia ad essere consistente, l'unico termine da modificare nell' equazione precedente è il vettore di sotto-immagini $S_j(X')$ che diverrà $S_j(X'')$. Oltre a dover essere eseguito un solo calcolo in un'intera sequenza di immagini, cosa che abbassa notevolmente l'errore, questo viene eseguito in una configurazione che ne permette la migliore accuratezza possibile.

5.3 Definizione della maschera

Per esaminare geometrie complesse senza creare griglie di elementi per ogni caso, e per esaminare molte immagini in cui ci sono grandi spostamenti, è utile l'utilizzo dell'oggetto maschera. Con questa tecnica si vuole associare ad ogni pixel un valore binario, che può essere 1 (bianco) oppure 0 (nero); è utile per distinguere le aree in cui è presente la marcatura speckle, quindi le aree da analizzare, dalle aree di sfondo, o coperte da ostacoli. La maschera non è costante, bensì si muove di immagine in immagine, per tener conto dello spostamento dell'oggetto (provino), infatti potrebbe anche uscire dall'inquadratura. L'identificazione automatica dell'area di interesse avviene considerando i pixel che hanno quelli adiacenti caratterizzati da una dispersione di livello di grigio. La sotto-immagine s_i, verrà associata all'elemento e_i, solo dopo aver verificato il suo grado di copertura con la machera; se più del 25% della sua area cade fuori dalla maschera, l'elemento viene disattivato e non viene considerato nelle operazioni successive. Allo stesso modo anche i nodi appartenenti solo ad elementi disattivati non verranno considerati. Il meccanismo di disattivazione dei nodi ed elementi è molto utile perché consente di gestire l'evoluzione della griglia senza modificare ogni volta lo jacobiano J e l matrice A. Al fine di limitare il più possibile il tempo di elaborazione di

ciascuna immagine della sequenza, è importantissimo limitare il numero di operazioni da ripetere per ogni immagine della sequenza.

5.4 Calcolo degli spostamenti e deformazioni

Dopo aver determinato gli incrementi per ogni nodo, definiti dalla risoluzione del sistema errore, bisogna proiettare tali valori sulle immagine deformate. Ciò è l'inverso dell'operazione di associazione delle sotto-immagini a quella di riferimento. Possiamo utilizzare una funzione di mapping locale di tipo prospettico, che per il generico nodo *k* è la seguente:

$$\begin{cases} x_{kj} = (ax_{k0} + by_{k0} + c) \Big/ (dx_{k0} + ey_{k0} + f) \\ \quad (gx_{k0} + hy_{k0} + i) \Big/ (dx_{k0} + ey_{k0} + f) \end{cases} \tag{5.10}$$

Queste funzioni di forma sono applicate ad ogni elemento della griglia, il quale possiede 4 nodi, ognuno descritto da una coppia di coordinate nodali; quindi per ciascun elemento calcoliamo il tensore gradiente di deformazione F:

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial x_0} & \frac{\partial x_j}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_0} & \frac{\partial y_j}{\partial j_0} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Dove:

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_j}{\partial x_0} = \frac{(a+by_{k0}+c)(dx_{k0}+ey_{k0}+f)-(d+ey_{k0}+f)(ax_{k0}+by_{k0}+c)}{(dx_{k0}+ey_{k0}+f)^2} \\ \frac{\partial x_j}{\partial y_0} = \frac{(ax_{k0}+b+c)(dx_{k0}+ey_{k0}+f)-(dx_{k0}+ey_{k0}+f)(ax_{k0}+by_{k0}+c)}{(dx_{k0}+ey_{k0}+f)^2} \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_0} = \frac{(g+hy_{k0}+i)(dx_{k0}+ey_{k0}+f)-(d+ey_{k0}+f)(gx_{k0}+hy_{k0}+i)}{(dx_{k0}+ey_{k0}+f)^2} \\ \frac{\partial y_j}{\partial y_0} = \frac{(gx_{k0}+hy_{k0}+i)(dx_{k0}+ey_{k0}+f)-(dx_{k0}+ey_{k0}+f)(gx_{k0}+hy_{k0}+i)}{(dx_{k0}+ey_{k0}+f)^2} \end{gathered} \tag{5.12}$$

Queste formule considerano il tensore per un generico nodo della griglia, calcolato come somma dei contributi parziali dei 4 elementi a cui il nodo appartiene.

Possiamo calcolare gli spostamenti applicndo il tensore F all'incremento delle coordinate nodali indeformate:

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_{kj} \\ \Delta y_{kj} \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} \Delta x_{k0} \\ \Delta y_{k0} \end{Bmatrix} \tag{5.13}$$

Così si ottiene la proiezione di tale incremento da sommare alla coordinate nodali riferite alla condizione deformata. Si calcola quindi il vettore spostamento $u(n_k,t)$ subito da ciascun nodo n_k della griglia associata all'immagine Im_0, come differenza tra le coordinate nodali calcolate per l'immagine deformata $x'(t)$ e quelle definite sull'immagine di riferimento $x(0)$:

$$u(n_k,t) = x_k'(t) - x_k(0) \tag{5.14}$$

Le deformazioni invece, necessitano della determinazione del tensore destro di Cauchy (C), precedentemente definito, che viene calcolato a partire dalla conoscenza del tensore gradiente di deformazione, per ogni nodo della griglia. Possiamo scrivere C in coordinate cartesiane come segue:

$$C = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial x}{\partial X}\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial X}\right]^2 & \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} & \left[\frac{\partial x}{\partial Y}\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial Y}\right]^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

È possibile determinare gli allungamenti principali λ_k, essendo gli autovalori di C; quindi conoscendo le direzioni principali N_k, possiamo calcolare le componenti cartesiane del tensore delle deformazioni principali E:

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} e_x = (N_1)^T E (N_1) \\ e_y = (N_2)^T E (N_2) \\ e_{xy} = (N_1)^T E (N_2) \end{cases} \tag{5.17}$$

Il calcolo realizzato per tutti i nodi della griglia, si estende a tutto il campo di interesse applicando tali grandezze a ciascun elemento attraverso le funzioni di forma.

Capitolo 6

Prove sperimentali

A questo punto passiamo all'analisi delle prove che abbiamo svolto in laboratorio. Come abbiamo detto il sistema D.I.C. viene utilizzato al fine di misurare spostamenti e/o deformazioni; nel nostro caso sono state eseguite 5 prove, 4 di queste con spostamenti, mentre l'ultima è stata effettuata senza toccare l'oggetto, quindi ci servirà per comprendere il rumore. Con il termine "rumore" intendiamo l'errore, che può essere semplicemente un problema causato da un qualunque fattore esterno, ad esempio dall'illuminazione, o dalla messa a fuoco non perfetta; questi possono creare errori nell'algoritmo che non riesce ad associare perfettamente i pixel, e si possono ottenere grafici nettamente sbagliati come quello in figura 6.1.

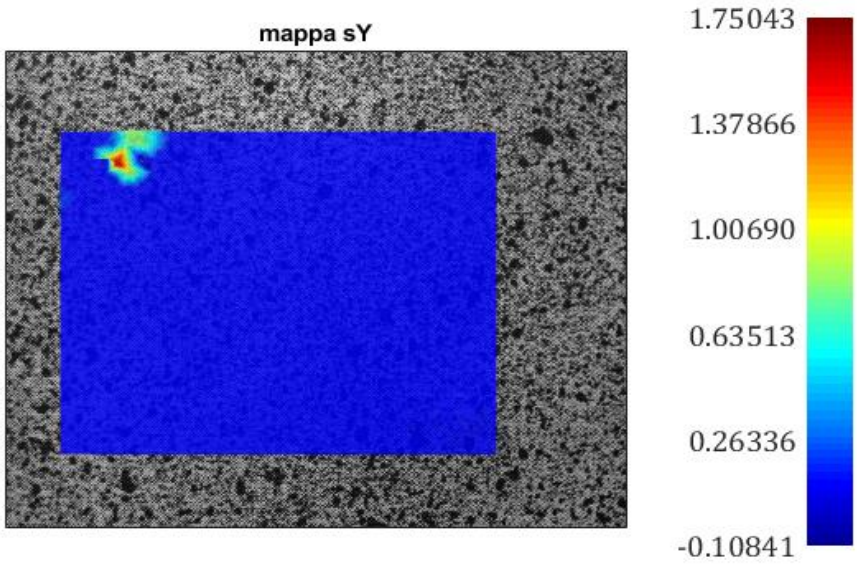


Figura 6.1

In questa prova era stato effettuato uno spostamento lungo l'asse *x* di 3 mm, e lo stesso lungo l'asse *z,* nonostante ciò è stato rilevato uno spostamento lungo *y* in una sola parte della zona d'interesse, con un picco di circa 1,7 mm; e grafici simili si erano riscontrati

anche per le deformazioni (che sarebbero dovute essere nulle), sempre nella stessa zona dell'immagine.

6.1 Setup delle prove

Prima di passare all'analisi vera e propria delle prove svolte, diamo una descrizione dello svolgimento delle prove e delle attrezzature utilizzate.

Come sappiamo il sistema necessita di due telecamere per le rilevazioni, che devono rimanere nella stessa identica posizione e angolazione durante le prove e anche durante la calibrazione; quindi una volta posizionate le stesse, viene posizionato il treppiedi con l'oggetto da inquadrare (figura 6.2).

Figura 6.2

Per non incorrere in errori sull'acquisizione, è necessaria un'adeguata illuminazione (senza riflessi sulla superficie inquadrata), e la migliore messa a fuoco possibile.

Per quanto riguarda la "scena" inquadrata si tratta di un'immagine speckle utilizzata per gli spostamenti, e di una piastrina metallica con dei puntini a una data distanza conosciuta per la calibrazione. La tipologia di immagine speckle è stata già spiegata nel

capitolo 3, e quella utilizzata nella nostra prova è molto simile (figura 6.3); abbiamo già visto anche la piastrina per la calibrazione nel capitolo 4, in particolare è stata utilizzata quella mostrata in figura (6.4).

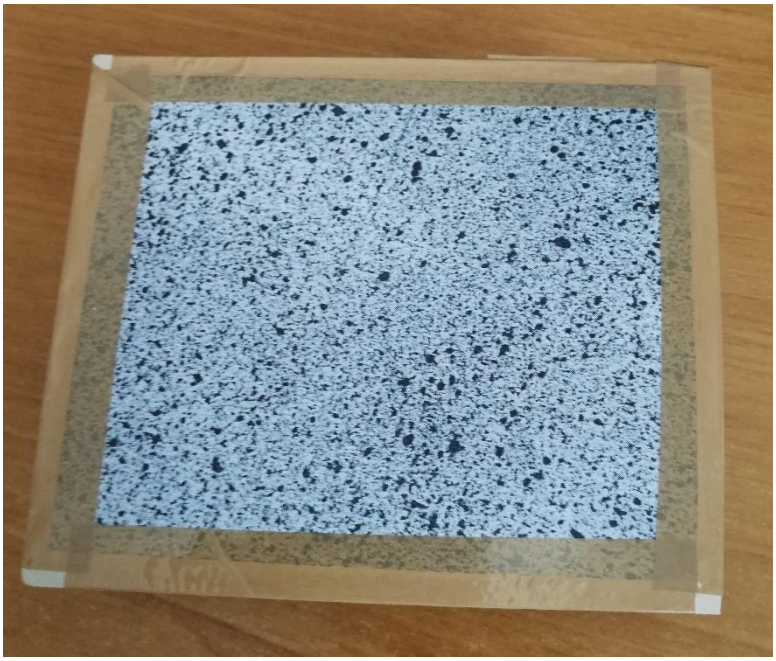


Figura 6.3

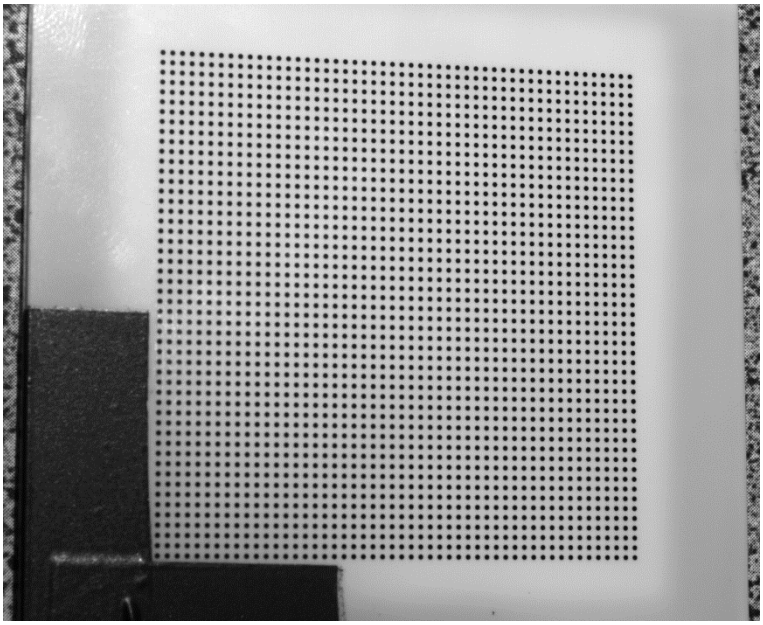


Figura 6.4

Gli spostamenti sono stati effettuati con un calibro (figura 6.5) attaccato all'oggetto da inquadrare, che grazie alla rotazione delle viti riesce ad ottenere spostamenti estremamente precisi dell'ordine del decimo di millimetro; ovviamente ci sono 3 viti per consentire spostamenti su tutti e 3 gli assi di riferimento (*x,y,z*). Questi sono stati definiti

in modo che l'asse *z* corrisponda alla profondità, mentre *x* e *y* corrispondano rispettivamente all'asse orizzontale e a quello verticale.

Non sono state effettuate prove di spostamenti lungo *y*, perché come si può notare dalla figura non risultava abbastanza stabile, quindi molto probabilmente ci sarebbero stati errori grossolani sulle misurazioni.

Figura 6.5

Delle 5 prove effettuate, a parte l'ultima per la stima del rumore, le altre 4 sono state eseguite con i seguenti spostamenti:

- X2: spostamento di 2 mm lungo l'asse *x* positivo;
- Z2: spostamento di 2 mm lungo l'asse *z* positivo;
- Z-4: spostamento di 4 mm lungo l'asse *z* negativo;
- X3-Z3: spostamenti di 3 mm lungo l'asse *x* negativo e di 3 mm lungo l'asse *z* negativo.

Durante le prove le telecamere erano collegate al pc, che tramite un programma permetteva di acquisire un determinato numero di foto con una data frequenza, e le salvava su un database distinguendole in base a quale telecamera le aveva scattate, se quella di sinistra (chiamata “0”), o quella di destra (chiamata “1”).

6.2 Analisi immagini

Acquisite le immagini si passa ad esaminarle, l’intera analisi è svolta su MATLAB, partendo dalla calibrazione delle camere fino all’analisi speckle, e all’ottenimento di grafici degli spostamenti.

Per quanto riguarda la calibrazione si sfrutta un toolbox di MATLAB chiamato *calib* (figura 6.6), che permette dapprima di estrarre i parametri intrinseci delle singole camere; e in seguito tramite la variante *stereo*, si calibra la coppia di telecamere e si ottengono i parametri estrinseci.

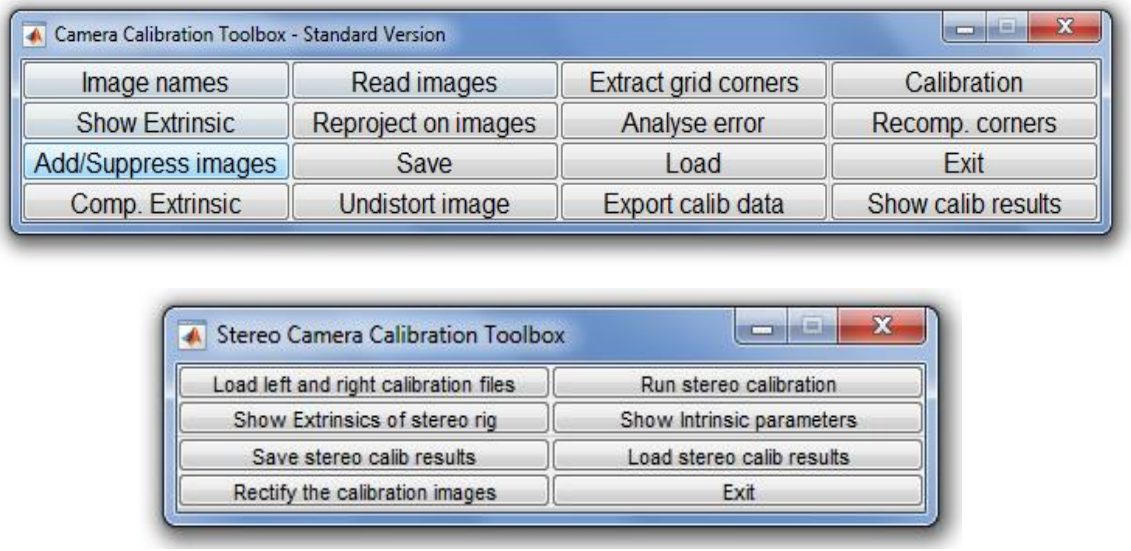


Figura 6.5

Dopo aver ottenuto i parametri intrinseci ed estrinseci dalla calibrazione stereo, si utilizzano due “*script*” *(scrivi_calibrazione, ex1_perspective),* dei quali il primo ci permette di avere due parametri (*calib0, calib1*), che vengono utilizzati nel secondo consentendo di vedere un’immagine (figura 6.6) con la vista del posizionamento delle telecamere.

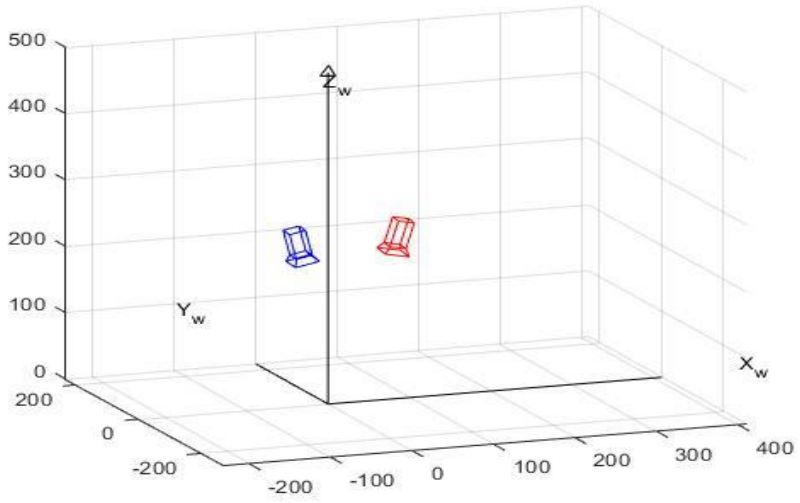


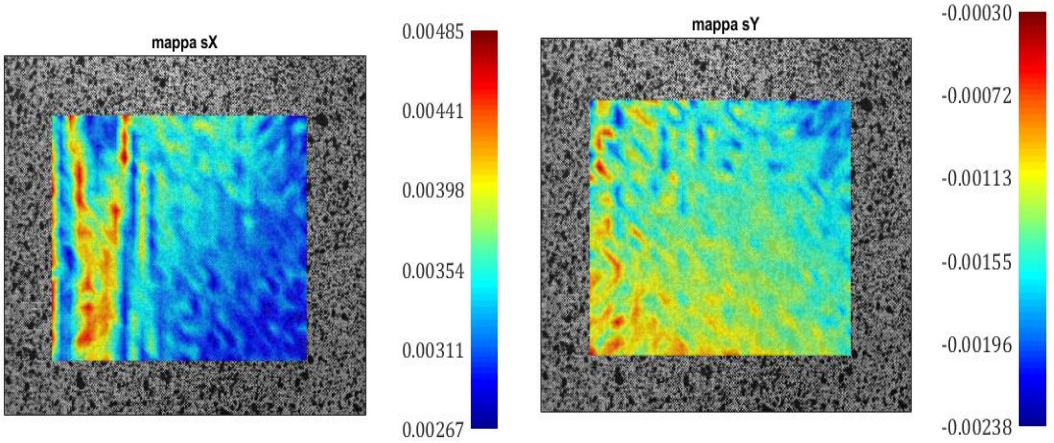
Figura 6.6

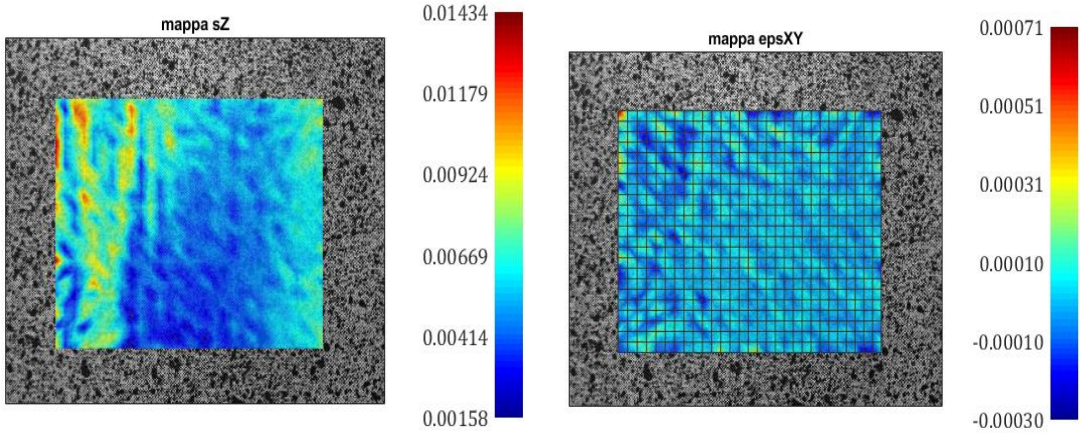
Non ci soffermiamo sull'analisi speckle perché è stato già spiegato in precedenza il funzionamento, si passa direttamente all'analisi di mappe e grafici (ottenute semre su MATLAB), per la determinazione finale degli spostamenti.

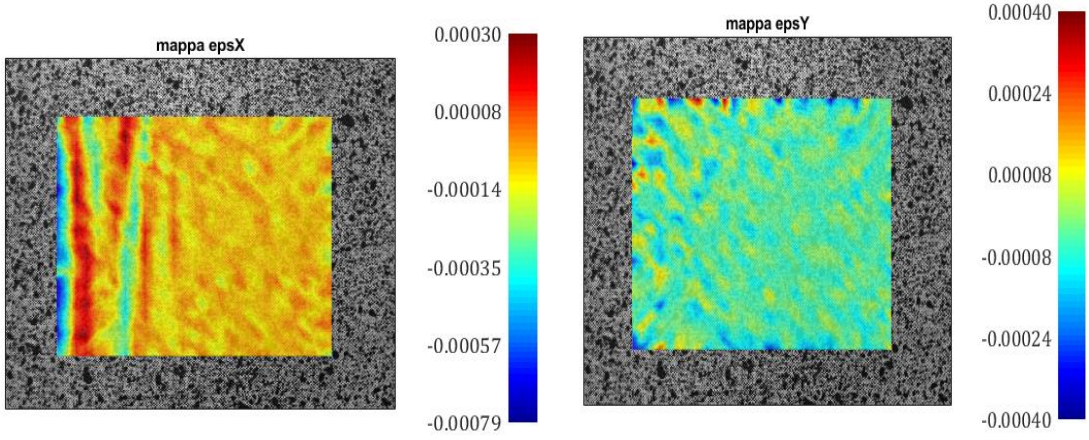
6.3 Risultati ottenuti

A questo punto ci possiamo soffermare sui risultati delle nostre prove. È necessaria un'ultima precisazione, i risultati ci danno grafici e mappe si spostamenti lungo *x,y,z* e di deformazioni lungo *x,y,xy,* ma anche *eps1,eps2,eps equivalente,* che rappresentano le deformazioni lungo le direzioni principali e la deformazione totale; inoltre bisogna considerare che i risultati lungo gli assi *x,y,z* non potranno essere perfetti perché i sistemi di riferimento della camera e del calibro non sono identici, bensì sono leggermente inclinati, tuttavia le variazioni saranno minime siccome le camere erano posizionate quasi parallele alla scena inquadrata. Per risolvere questo problema calcoliamo il grafico dello spostamento totale.

Partiamo dalla prova "*zero*", ossia la prova eseguita con spostamenti nulli. Come è stato accennato, questa prova ha lo scopo di farci capire il margine di errore. Per questa prova sono state acquisite 58 foto per camera, e in figura 6.7 vengono mostrate le mappe degli spostamenti e delle deformazioni.


mappa sX
0.00485
0.00441
0.00398
0.00354
0.00311
0.00267
mappa sY
-0.00030
-0.00072
-0.00113
-0.00155
-0.00196
-0.00238


mappa sZ
0.01434
0.01179
0.00924
0.00669
0.00414
0.00158
mappa epsXY
0.00071
0.00051
0.00031
0.00010
-0.00010
-0.00030


mappa epsX
0.00030
0.00008
-0.00014
-0.00035
-0.00057
-0.00079
mappa epsY
0.00040
0.00024
0.00008
-0.00008
-0.00024
-0.00040

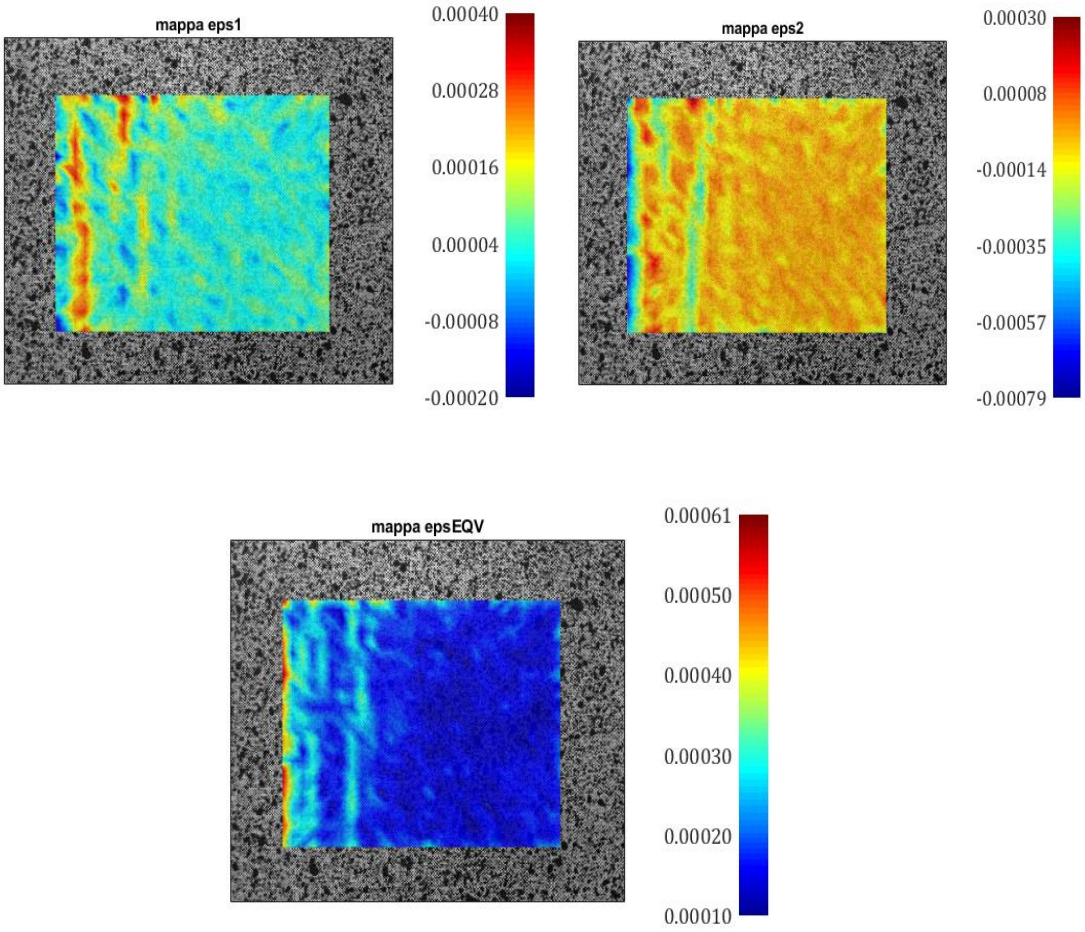


Figura 6.7

Si può notare come sono tutti valori prossimi allo zero, infatti tra tutti il valore più alto registrato si ha nello spostamento *z*, ed è dell'ordine del centesimo del millimetro (0,01434). Nella figura 6.8 invece vediamo a sinistra un grafico con lo spostamento medio *z* sull'asse delle ordinate e il numero dell'immagine sulle ascisse, si nota come il valore massimo è compreso tra 7 e 8 millesimi di millimetro, che è un valore più che accettabile. Bisogna precisare, siccome questo valore massimo è diverso da quello scritto precedentemente, che ora si calcola lo spostamento medio di tutti i punti valutato al variare delle immagini, prima invece era calcolato lo spostamento totale per ogni punto, quindi è chiaro come il valore massimo medio è inferiore a quello massimo nel punto nel quale è stato valutato lo spostamento maggiore. Nel grafico a destra è illustrata la variazione della deviazione standard per tutte le 58 immagini, che valuta la distanza dei singoli valori dal valore medio, anche questa risulta molto piccola, dell'ordine del millesimo del millimetro, quindi accettabile.

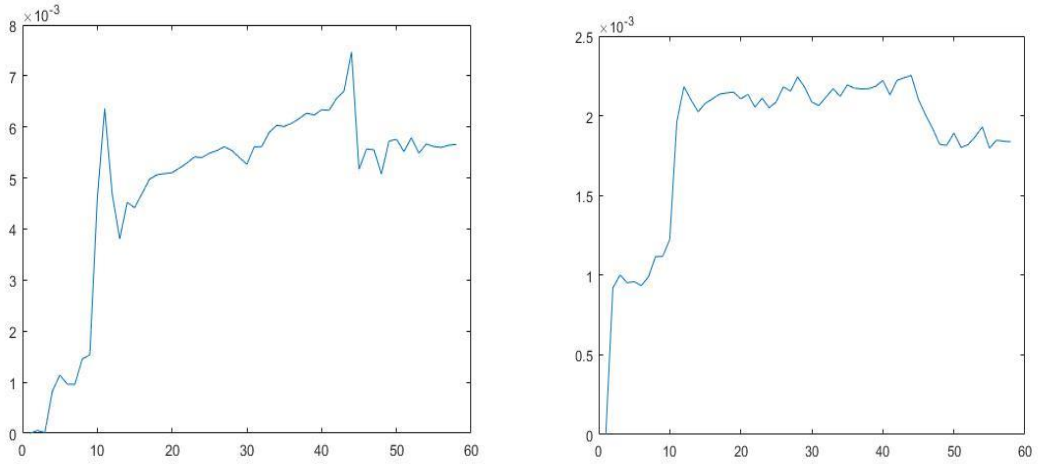


Figura 6.8

Un'altra funzione interessante è quella che ci permette di ottenere il grafico dello spostamento per un singolo nodo, valutato per tutte le immagini. In figura 6.9 è mostrato per il nodo numero "350" lo spostamento lungo l'asse *x*; ovviamente si può fare lo stesso per gli altri spostamenti e per le altre deformazioni, per qualsiasi nodo.

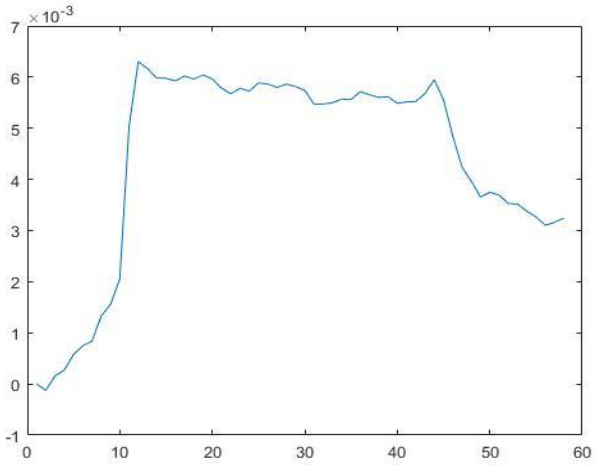


Figura 6.9

Risulterebbe ripetitivo mostrare tutte le mappe per tutte le prove, quindi ci limitiamo a mostrare le più significative.

La seconda prova è chiamata *"X2",* perché ovviamente è stato effettuato uno spostamento lungo l'asse *x* di 2 millimetri.

Mappa spostamento medio *x* per ogni punto della scena:

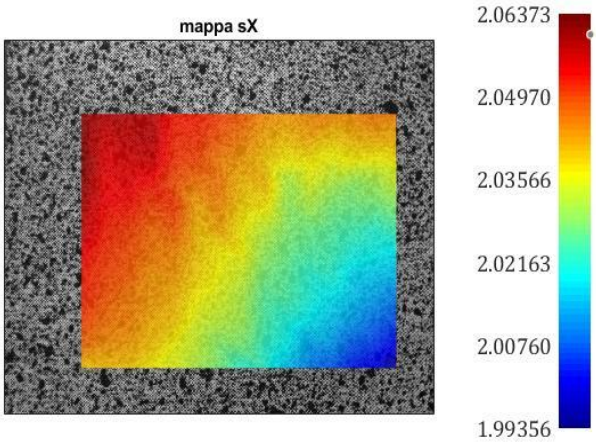


Figura 6.10

Spostamento *x* al variare del numero dell'immagine (105 foto), e deviazione standard dello spostamento *x*:

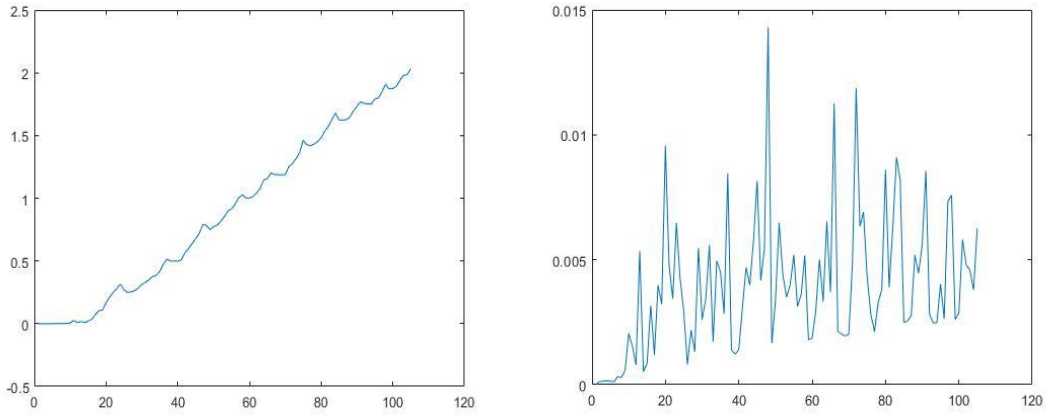


Figura 6.11

Come possiamo notare c'è un errore dell'ordine del centesimo di millimetro, che considerando il problema descritto in precedenza degli assi leggermente inclinati, è un ottimo risultato. A tal proposito mostriamo anche la mappa dello spostamento totale, e la sua deviazione standard:

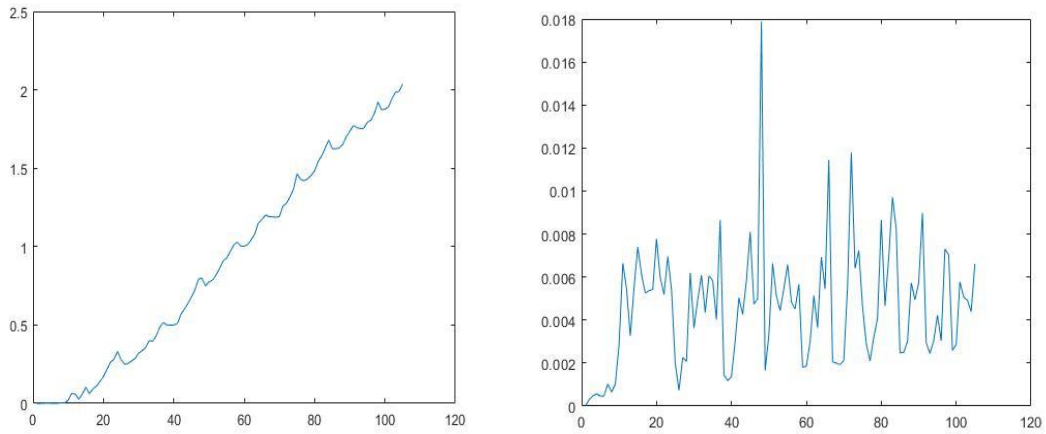


Figura 6.12

Da precisare che lo spostamento totale può essere calcolato al modo seguente:

$$s_{tot}=\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \qquad (6.1)$$

Dove ovviamente s_x, s_y, s_z, sono gli spostamenti lungo i tre assi cartesiani.

La terza prova riguarda invece uno spostamento lungo l'asse *z*, di 2 millimetri nel verso positivo (chiamiamo questa prova "*Z2*")

Mappa spostamento *z*:

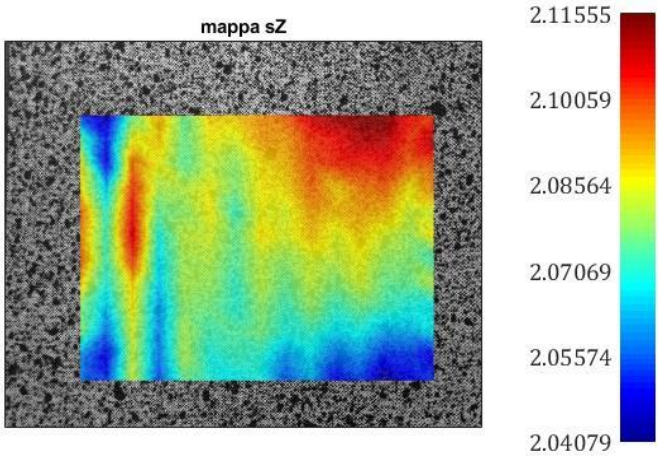


Figura 6.13

Spostamento progressivo *z*, e deviazione standard:

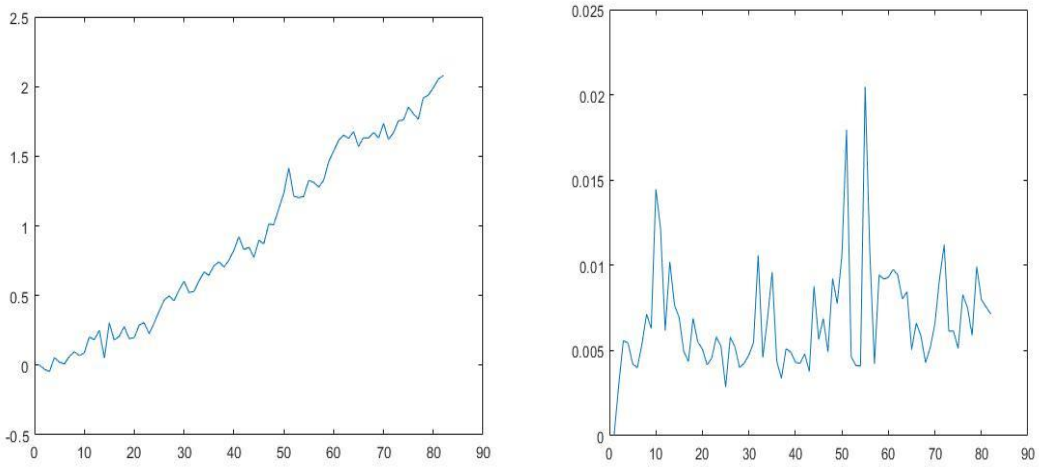


Figura 6.14

Spostamento totale e sua deviazione standard:

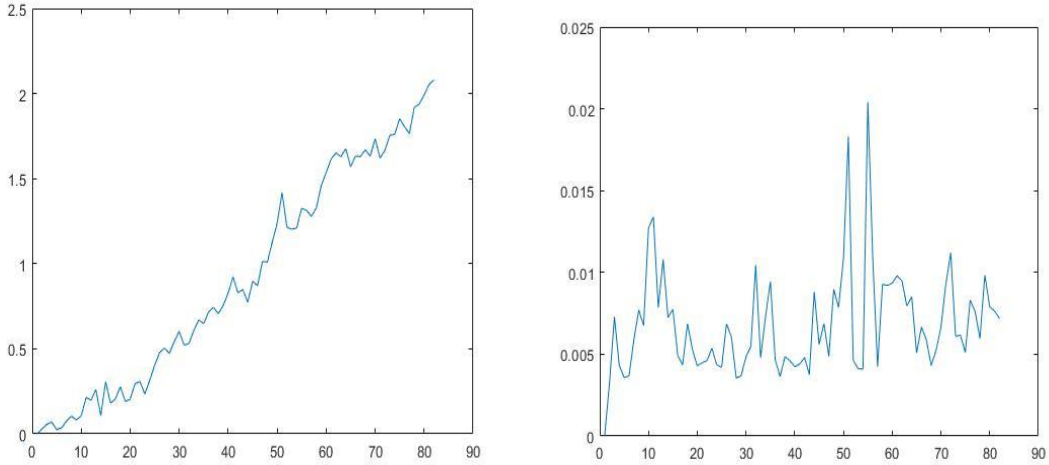


Figura 6.15

Nella quarta prova ci siamo mantenuti sullo spostamento lungo *z*, ma nella direzione opposta, di 4 millimetri ("*Z-4*")

Mappa spostamento *z*:

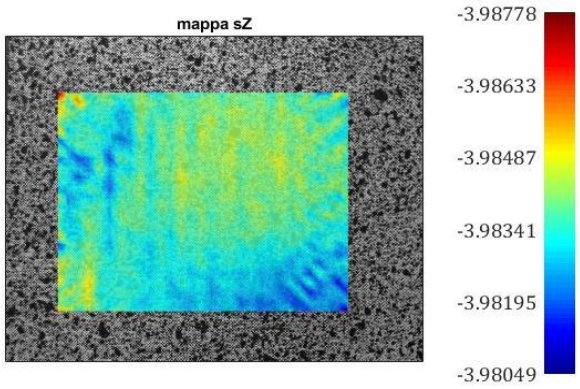


Figura 6.16

Spostamento progressivo *z* e sua deviazione standard:

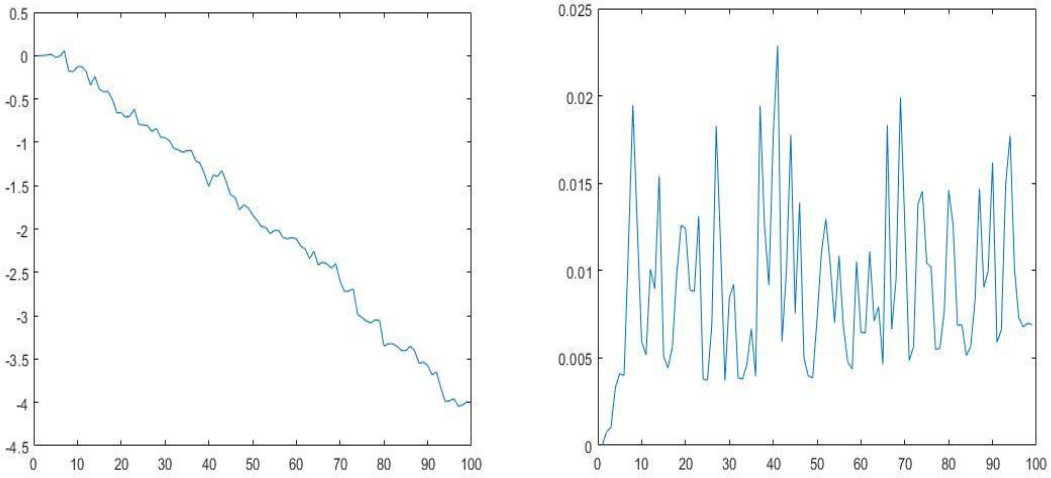


Figura 6.17

Spostamento totale e sua deviazione standard:

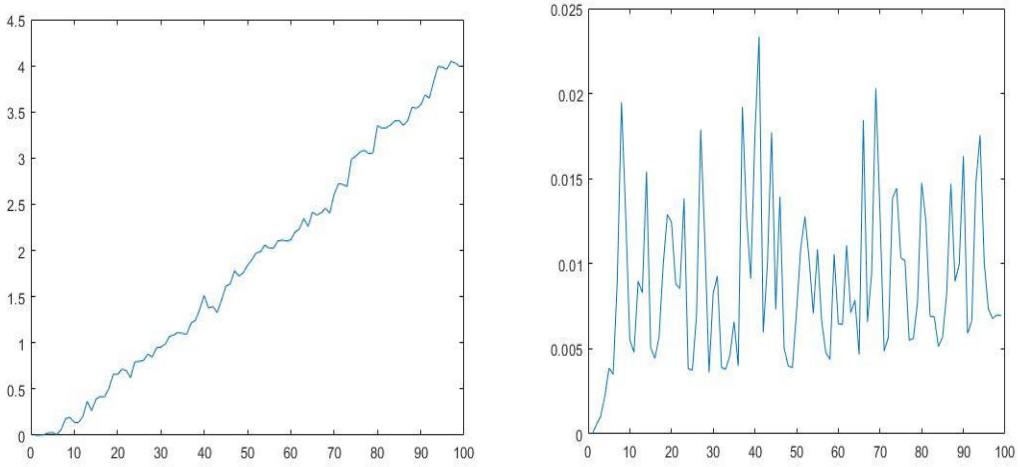


Figura 6.18

Nell'ultima prova presentata sono stati effettuati due spostamenti, uno lungo *x* di 3 millimetri e uno lungo *z* anch'esso di 3 millimetri, entrambi nelle relative direzioni negative ("*X3-Z3*")

Mappe spostamento *x* e spostamento *z:*

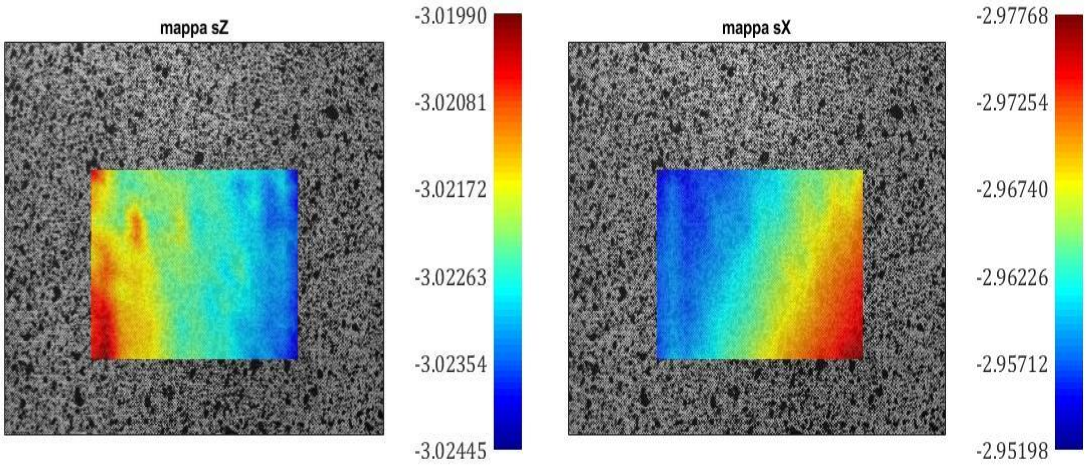


Figura 6.19

Spostamento progressivo *x* e sua deviazione standard:

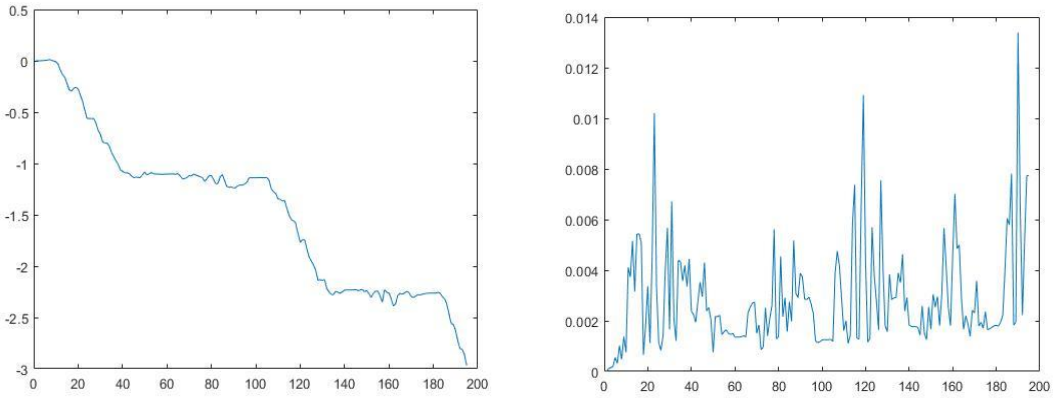


Figura 6.20

Spostamento progressivo *z* e sua deviazione standard:

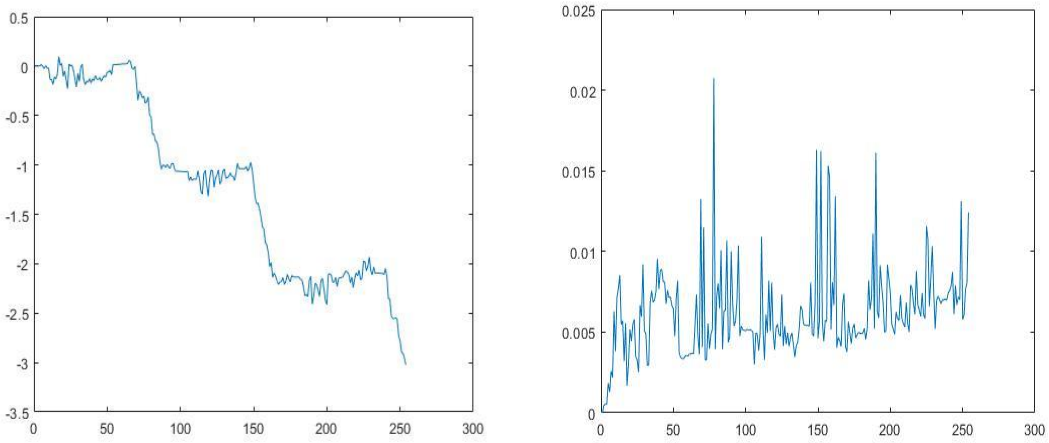


Figura 6.21

Dai grafici di spostamento progressivo si nota come è stata effettuata la prova, ossia spostando prima di un millimetro lungo *x,* poi di un millimetro lungo *z*, e ripetendo questa procedura per 3 volte.

Spostamento totale e sua deviazione standard:

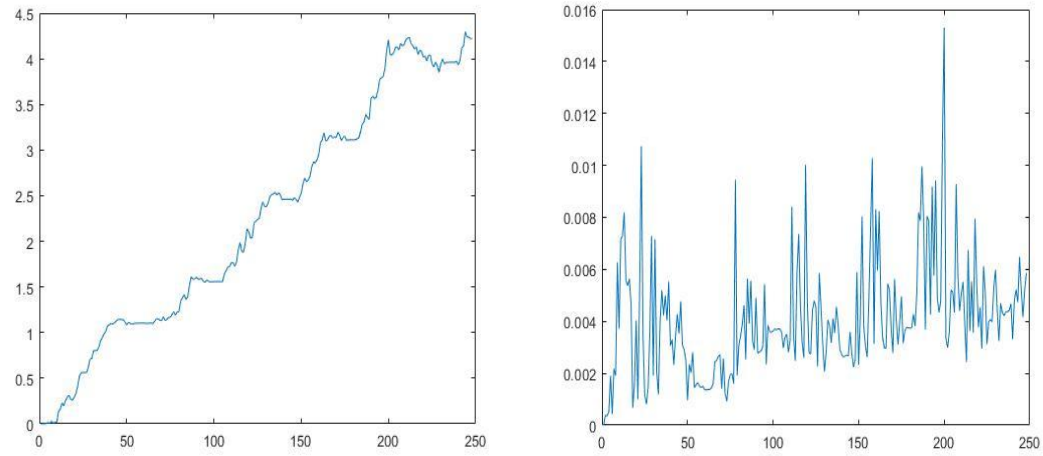


Figura 6.22

Il modulo dello spostamento dovrebbe essere circa s_{tot}=4,24; calcolato con la (6.1).

Infine accenniamo anche a qualche grafico di deformazione, per mostrare i valori ottenuti.

- Figura 6.23: deformazione lungo la prima direzione principale, nella prova X2;
- Figura 6.24: deformazione *XY*, nella prova Z2;
- Figura 6.25: deformazione *Y,* nella prova Z-4;
- Figura 6.26: deformazione equivalente, nella prova X3-Z3.

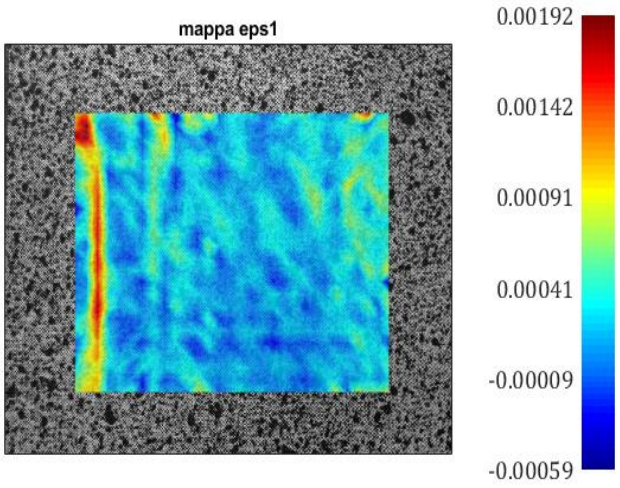


Figura 6.23

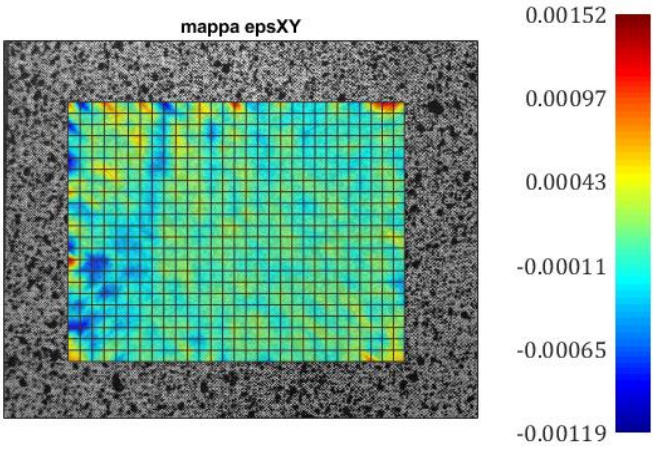


Figura 6.24

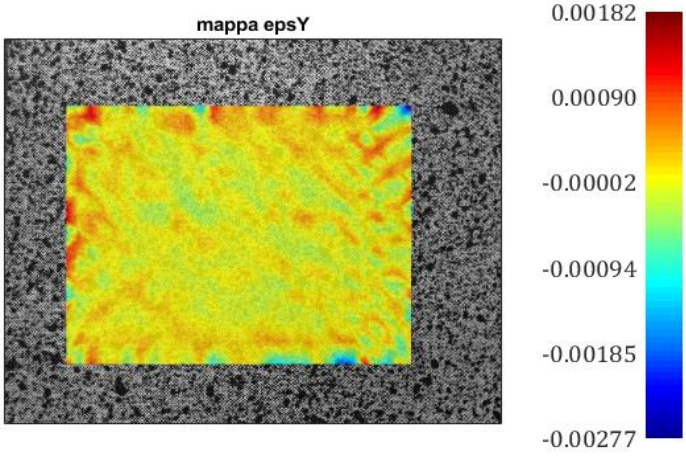


Figura 6.25

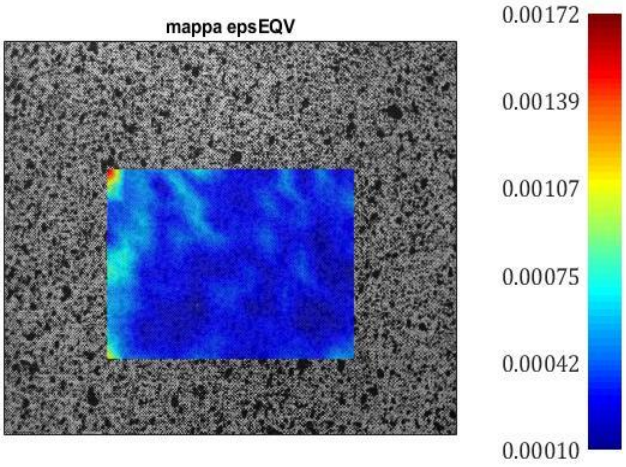


Figura 6.26

6.4 Considerazioni finali

I valori ottenuti di spostamenti sono in linea con i valori che abbiamo misurato manualmente, quindi che ci aspettavamo, gli errori sono risultati dell'ordine del centesimo di millimetro al massimo, quindi accettabili. Per quanto riguarda le deformazioni, ci aspettavamo valori nulli, e da come si nota nelle figure, non sono nulli ma trascurabili; in questo caso l'errore è anche inferiore rispetto agli errori nelle misure di spostamento, si tratta al massimo di ordini di grandezza del millesimo di millimetro, spesso anche inferiori.

Un'ulteriore vantaggio di questa tecnica è rappresentato dai tempi di elaborazione di immagini che, considerando le centinaia di immagini analizzate, sono stati brevi, e non eccessivamente complicati, essendo tutto sviluppato su MATLAB.

Inoltre risultano di estrema utilità i grafici e le mappe ottenute.

Bibliografia

- Gianluca Chiappini “Sviluppo di tecniche ottiche per il rilievo di forma e di deformazione”;
- Stefano Lenci “Lezioni di meccanica strutturale”;
- Fabio Saggese “Calibrazione di una coppia di telecamere stereoscopiche per la ricostruzione tridimensionale”;
- Paolo Pazziani “Progetto, realizzazione e calibrazione di un sistema di visione stereoscopica”;
- Daniele Ferrario “Acquisizione di modelli 3D tramite sensori a luce strutturata multipli”.

Ringraziamenti

Dopo 3 anni di intenso studio, finalmente sono giunto a questo giorno così importante. Vorrei a questo punto ringraziare tutte le persone che mi sono state accanto e mi hanno aiutato.

Parto i miei genitori e tutta la mia famiglia che mi hanno sempre sostenuto, e non li ho mai ringraziato abbastanza.

Ringrazio i miei amici, sia gli universitari che gli amici di Casalvecchio, che ci sono sempre stati nel momenti di svago e divertimento.

Ringrazio i miei coinquilini, i componenti della Casona, che mi hanno fatto sempre stare col sorriso, e hanno sperato che fossi bocciato all'ultimo esame così da restare più tempo con loro.

Ringrazio il io correlatore il professor. Gianluca Chiappini, che con grande pazienza mi ha sempre seguito e guidato.

Ringrazio tutto il dipartimento di ingegneria industriale e scienze matematiche, e il mio relatore professor. Marco Sasso.

Giovanni.