



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

**Studio di deformazione rettilinea in materiali
incomprimibili iperelastici fibro-rinforzati**

**Rectilinear shear in incompressible
hyperelastic fiber-reinforced materials**

Relatore:
Prof. Marco Coco

Tesi di Laurea di:
Francesco Xhaferri

A.A. 2022/2023

A me stesso e ai miei genitori

Sommario

Lo scopo del presente elaborato è quello di investigare l'influenza dell'anisotropia e delle condizioni al contorno sulle modalità di deformazione in materiali iperelastici incomprimibili fibro-rinforzati. Si studia in particolare il caso di una lamina con spessore finito sottoposta a una deformazione di tipo rettilineo, facendo riferimento alla densità di energia di deformazione del modello standard. La prima parte del lavoro riguarda lo studio del modello matematico derivante dall'anisotropia introdotta dalle fibre e l'analisi delle possibilità di soluzione. A questo si è aggiunta la risoluzione numerica di alcuni casi notevoli di interesse i cui risultati permettono di evidenziare il ruolo dell'orientazione delle fibre sulla formazione del kink, della discontinuità della soluzione e delle sue derivate successive.

Parole chiave: Materiali iperelastici incomprimibili; fibre di rinforzo; deformazione rettilinea; kink; discontinuità.

Indice

1	Introduzione	5
2	Modello matematico	6
3	Studio della deformazione rettilinea in una lamina	13
4	Commento sul comportamento del materiale in base ai risultati ottenuti	31
5	Conclusioni	34
6	Appendice 1: Contesto teorico	36
6.1	Moto e coordinate spaziali	36
6.2	La derivata temporale materiale	39
6.3	Tensori gradiente di deformazione	40
6.4	Energia di deformazione	41
7	Appendice 2: funzione fzero di MATLAB e relativi metodi numerici	43
7.1	Metodo di bisezione	44
7.2	Metodo delle corde	45
7.3	Metodo delle secanti	46
7.4	Metodo Regula Falsi	47
7.5	Metodo di Newton	48
7.6	Controllo del residuo	49
7.7	Controllo dell'incremento	49
8	Ringraziamenti	50

Elenco delle figure

1	Lamina.	13
2	Grafico di U in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$	18
3	Grafico di U' in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$	18
4	Grafico di U'' in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$	19
5	Codice MATLAB fzero dell'equazione (79).	25
6	Grafico delle due curve (75) e (79).	26
7	Grafico $U-\hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$	27
8	Grafico $U'-\hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$	28
9	Grafico $U''-\hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$	28
10	Kink.	32
11	Grafico componenti del moto.	37
12	Il metodo di bisezione: a sinistra, i primi due passi; a destra la curva di convergenza.	45
13	Metodo delle corde (a sinistra), metodo delle secanti (a destra).	46
14	Primi due passi del metodo Regula Falsi per due diverse funzioni.	47
15	A sinistra: i primi due passi del metodo Newton, a destra: curve di convergenza dei vari metodi (1) delle corde, (2) di bisezione, (3) delle secanti, (4) di Newton. In ascissa è riportato il numero di iterazioni, in ordinata l'errore assoluto al variare di k	48

1 Introduzione

Nella presente tesi, si intende approfondire lo studio della deformazione rettilinea sfruttando i concetti e i principi della meccanica del continuo.

La deformazione rettilinea consiste nella deformazione lungo una sola direzione e ha ricevuto attenzione scientifica anche in studi avanzati di ricerca [1]. In particolare, l'attenzione sarà focalizzata sulla formazione di discontinuità, sull'analisi della deformazione, della sua variazione e dell'effetto delle condizioni al contorno sul caso che stiamo studiando. Saranno presi in considerazione materiali iperelastici fibro-rinforzati, i quali presentano caratteristiche peculiari legate alla loro struttura e composizione. Attraverso l'analisi teorica e lo sviluppo di modelli matematici, si cercherà di comprendere come l'anisotropia, ovvero la proprietà per cui il comportamento del materiale non risulta uguale in tutte le direzioni, viene sviluppata a causa dell'introduzione delle fibre di rinforzo; inoltre verranno analizzate le condizioni al contorno e il modo in cui esse influenzano il comportamento del materiale e la rispettiva deformazione, portando ad avere discontinuità per le quali il materiale va incontro ad un comportamento diverso da quello del caso isotropo. Sarà studiato il caso in cui le fibre di rinforzo sono disposte lungo il piano, con diverse angolazioni ognuna delle quali ha la propria specifica influenza. Analizzeremo alcuni dei grafici della deformazione, della sua derivata prima e seconda, per dedurre il comportamento del materiale. L'obiettivo finale di questa tesi è fornire una base teorica e una buona comprensione del comportamento della deformazione rettilinea in materiali iperelastici incomprimibili fibro-rinforzati. I risultati ottenuti potranno essere applicati nel campo dell'ingegneria strutturale, meccanica e biomedica consentendo una progettazione più accurata, una valutazione più precisa delle prestazioni dei componenti utilizzati e dei sistemi meccanici soggetti a questo tipo di deformazione. Con gli strumenti messi a disposizione si può fare una vera e propria caratterizzazione del materiale; in questo caso tramite test di laboratorio si conosce il comportamento delle tensioni e delle deformazioni e si possono determinare i parametri fisici del materiale come, ad esempio, il modulo elastico della matrice e delle fibre.

2 Modello matematico

Definiamo di seguito il campo degli spostamenti che studieremo

$$\begin{aligned}x &= X + u(Y) \\y &= Y \\z &= Z\end{aligned}\tag{1}$$

Denotato con \mathbf{F} il tensore gradiente di deformazione, ovvero un operatore tensoriale che trasforma gli elementi lineari dX definiti nel riferimento materiale, nei corrispondenti elementi lineari dx definiti nella configurazione attuale deformata, coniugati ai primi attraverso la deformazione associata al moto. Nel caso considerato le quantità cinematiche associate all'equazione (1) sono le seguenti

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & u' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

calcolando anche l'inversa abbiamo \mathbf{F}^{-1}

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -u' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalla referenza [2] definiamo \mathbf{C} e \mathbf{B} rispettivamente tensore destro e sinistro di Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}\tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T.\tag{3}$$

Per determinare i valori delle equazioni (2)-(3) calcoliamo \mathbf{F}^T , ovvero la trasposta del tensore \mathbf{F} , otteniamo quindi

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

dall'equazione (3) svolgendo i calcoli otteniamo mediante prodotto matriciale il tensore \mathbf{B} che risulta essere così definito

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + (u')^2 & u' & 0 \\ u' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

gli invarianti principali di \mathbf{B} ovvero: $I_1 = \text{Tr } \mathbf{B}$ e $I_2 = \text{Tr } \mathbf{B}^{-1}$ sono dati da:

$$I_1 = 3 + (u')^2 \quad (4)$$

$$I_2 = 3 + (u')^2. \quad (5)$$

In questa tesi consideriamo una classe speciale di materiali rinforzati con fibre orientate lungo il versore \mathbf{M} , le cui componenti sono

$$\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3); \quad (6)$$

essendo \mathbf{M} un versore vale la seguente relazione

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 1; \quad (7)$$

una volta definito \mathbf{M} possiamo calcolare l'invariante $I_4 = \mathbf{FM} \cdot \mathbf{FM}$:

$$I_4 = M_2^2 + M_3^2 + (M_1 + M_2 u')^2 = 1 + 2M_1 M_2 u' + (M_2 u')^2. \quad (8)$$

Definiamo la densità di energia di deformazione $W = W(I_1, I_4)$ che mette in relazione la densità di energia di deformazione di un materiale con il gradiente di deformazione attraverso gli invarianti principali I_1 e I_4 che descrivono rispettivamente il contributo isotropo e anisotropo. Il tensore delle tensioni di Cauchy è dato da

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2W_1\mathbf{B} - 2W_2\mathbf{B}^{-1} + 2W_4((\mathbf{FM})^T \cdot \mathbf{FM}) \quad (9)$$

in cui i pedici di W stanno ad indicare la derivazione parziale nei rispettivi invarianti, $p = p(X, Y, Z)$ indica il moltiplicatore di Lagrange arbitrario associato al vincolo isocorico e \mathbf{I} indica la matrice identità. Svolgendo i calcoli otteniamo le seguenti componenti di \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p - 2W_2 + 2W_4(M_1 + M_2u')^2 + 2W_1(1 + (u')^2) \\ T_{12} = T_{21} &= 2W_1u' + 2W_2u' + 2M_2W_4(M_1 + M_2u') \\ T_{13} = T_{31} &= 2M_3W_4(M_1 + M_2u') \\ T_{22} &= -p + 2W_1 + 2M_2^2W_4 - 2W_2(1 + (u')^2) \\ T_{23} = T_{32} &= 2M_2M_3W_4 \\ T_{33} &= -p + 2W_1 - 2W_2 + 2M_3^2W_4. \end{aligned}$$

Dalla referenza [3] consideriamo un modello di materiale iperelastico finito anisotropo incomprimibile che si estende al materiale neo-Hookeano tenendo conto dell'effetto del rinforzo nella direzione di \mathbf{M} . La densità di energia di deformazione associata per unità di volume non deformato nel modello standard [4] è data da

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\mu_1}{4}(I_4 - 1)^2 \quad (10)$$

in cui μ e μ_1 sono i moduli elastici rispettivamente del materiale e delle fibre di rinforzo. Sostituendo I_1 e I_4 nelle equazioni (4) e (8) otteniamo:

$$W = \frac{\mu}{2}(u')^2 + \frac{\mu_1}{4}(2M_1M_2u' + (M_2u')^2)^2. \quad (11)$$

Calcolando le componenti del tensore \mathbf{T} in funzione di W_1 e W_4 , in cui W_1 descrive il contributo della parte isotropa e W_4 della parte anisotropa si ottiene:

$$T_{11} = -p + 2W_4(M_1 + M_2u')^2 + 2W_1(1 + (u')^2)$$

$$T_{12} = T_{21} = 2W_1u' + 2M_2W_4(M_1 + M_2u')$$

$$T_{13} = T_{31} = 2M_3W_4(M_1 + M_2u')$$

$$T_{22} = -p + 2W_1 + 2M_2^2W_4$$

$$T_{23} = T_{32} = 2M_2M_3W_4$$

$$T_{33} = -p + 2W_1 + 2M_3^2W_4,$$

in cui W_1 e W_4 si ottengono derivando rispetto a I_1 e I_4 l'equazione (10):

$$W_1 = \frac{\mu}{2} \tag{12}$$

$$W_4 = \frac{\mu_1}{2}(I_4 - 1) = \frac{\mu_1}{2}(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2). \tag{13}$$

Sostituendo i conseguenti valori di W_1 e W_4 nella (9) si ottengono le seguenti componenti:

$$T_{11} = -p + \mu(1 + (u')^2) + \mu_1(M_1 + M_2u')^2(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2)$$

$$T_{12} = T_{21} = \mu u' + M_2\mu_1(M_1 + M_2u')(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2)$$

$$T_{13} = T_{31} = M_3\mu_1(M_1 + M_2u')(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2)$$

$$T_{22} = -p + \mu + M_2^2\mu_1(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2)$$

$$T_{23} = T_{32} = M_2M_3\mu_1(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2)$$

$$T_{33} = -p + \mu + M_3^2\mu_1(2M_1M_2u' + M_2^2(u')^2).$$

L'equazione di bilancio del momento lineare nel caso generale è

$${}^1\rho\vec{a} = \operatorname{div} \mathbf{T}; \quad (14)$$

nel caso statico essendo $\vec{a} = 0$ l'equazione (14) diventa

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad (15)$$

che nella forma estesa dà luogo alle seguenti 3 equazioni

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial X} + \frac{\partial T_{12}}{\partial Y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial Z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial X} + \frac{\partial T_{22}}{\partial Y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial Z} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial X} + \frac{\partial T_{32}}{\partial Y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial Z} = 0. \quad (18)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo le seguenti equazioni in funzione di W_1 e W_4

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial X} &= \frac{\partial(2W_1u' + 2M_2W_4(M_1 + M_2u'))}{\partial Y} \\ \frac{\partial p}{\partial Y} &= \frac{\partial(2W_1 + 2M_2^2W_4)}{\partial Y} \\ \frac{\partial p}{\partial Z} &= \frac{\partial(2M_2M_3W_4)}{\partial Y}. \end{aligned} \quad (19)$$

Sostituendo W_1 e le derivate parziali di W_4 otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial X} &= (\mu + 2M_1^2M_2^2\mu_1 + 3M_2^3\mu_1u'(2M_1 + 2M_2u'))(u'') \\ \frac{\partial p}{\partial Y} &= M_2^2\mu_1(2M_1M_2u'' + 2M_2^2u'u'') \\ \frac{\partial p}{\partial Z} &= M_2M_3\mu_1(2M_1M_2u'' + 2M_2^2u'u''). \end{aligned}$$

¹Indichiamo con ρ la densità e con \vec{a} l'accelerazione.

Siccome siamo nel caso della deformazione rettilinea $M_3 = 0$, il che significa che le fibre di rinforzo sono disposte sul piano (X, Y) , perpendicolare all'asse Z .

Sostituendo la precedente condizione otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial X} &= (\mu + 2M_1^2 M_2^2 \mu_1 + 3M_2^3 \mu_1 u' (2M_1 + 2M_2 u'))(u'') \\ \frac{\partial p}{\partial Y} &= M_2^2 \mu_1 (2M_1 M_2 u'' + 2M_2^2 u' u'') \\ \frac{\partial p}{\partial Z} &= 0;\end{aligned}$$

integrando possiamo ottenere il campo di pressione dato da p_x , p_y e p_z ; indicando con $A = (\mu + 2M_1^2 M_2^2 \mu_1 + 3M_2^3 \mu_1 u' (2M_1 + 2M_2 u'))(u'')$, $B = M_2^2 \mu_1 (2M_1 M_2 u'' + 2M_2^2 u' u'')$ e $C = cost$ si ha:

$$\begin{aligned}p_x &= AX \\ p_y &= BY \\ p_z &= C.\end{aligned}\tag{20}$$

Una volta ottenuto il campo di pressione, consideriamo le seguenti componenti di \mathbf{M}

$$\begin{aligned}M_1 &= \cos \theta \\ M_2 &= \sin \theta \\ M_3 &= 0\end{aligned}\tag{21}$$

in cui $\theta \in [0, \pi/2]$ perchè prendiamo in considerazione solamente la direzione della fibra e non il verso.

Riferendoci all'equazione (19) integrando possiamo ottenere il campo di pressione $p(x, y)$, indicando con $D = 2W_1 u' + 2M_2 W_4 (M_1 + M_2 u')$ e $C = cost$

$$p(x, y) = Dx + 2W_1 + 2W_4 \sin^2 \theta + C.\tag{22}$$

Adesso consideriamo il gradiente di pressione lungo x costante

$$p_x = cost = D, \quad (23)$$

otteniamo quindi:

$$\frac{d}{dY} \{2W_1 u' + 2W_4 (\cos \theta + u' \sin \theta) \sin \theta\} = D. \quad (24)$$

3 Studio della deformazione rettilinea in una lamina

L'equazione (24) è l'equazione differenziale che studieremo nel caso considerato. Consideriamo una lamina di spessore L e di lunghezza infinita nelle altre direzioni, composta da materiale elastomerico riportata qui sotto in figura.

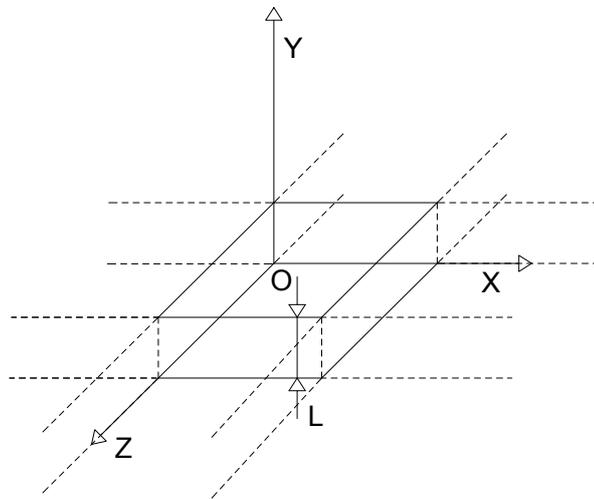


Figura 1: Lamina.

Sul piano superiore e inferiore della lamina ipotizziamo che non ci sia deformazione, condizione ideale che si verifica nel caso in cui la lamina è schiacciata tra due presse. Imponiamo quindi le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} .$$

Per semplificare le equazioni che verranno in seguito adottiamo un cambio di variabili, adimensionalizziamo quindi imponendo

$$\begin{aligned} Y &= L\hat{Y} \\ U &= \frac{u}{L} \\ W &= \mu\hat{W}. \end{aligned} \tag{25}$$

Sostituendo queste nuove variabili nell'equazione (24) otteniamo

$$\frac{1}{L} \frac{d}{d\hat{Y}} \left\{ 2\mu\hat{W}_1 U' + 2\mu\hat{W}_4 (\cos\theta + U' \sin\theta) \sin\theta \right\} = D \tag{26}$$

che diventa

$$\frac{d}{d\hat{Y}} \left\{ 2\hat{W}_1 U' + 2\hat{W}_4 (\cos\theta + U' \sin\theta) \sin\theta \right\} = \lambda, \tag{27}$$

in cui $\lambda = DL/\mu$.

Integrando la (27) rispetto alla variabile \hat{Y} si ottiene:

$$2\hat{W}_1 U' + 2\hat{W}_4 (\cos\theta + U' \sin\theta) \sin\theta + c_1 = \lambda\hat{Y}, \tag{28}$$

e tenendo conto del cambio di variabili fatto in precedenza

$$\frac{du}{dY} = \frac{d}{d\hat{Y}} \frac{1}{L} U L = \frac{dU}{d\hat{Y}}, \tag{29}$$

ovvero

$$u' = U' \tag{30}$$

se calcolata la derivata nelle rispettive variabili.

Scrivendo \hat{W}_1 e \hat{W}_4 considerando le nuove variabili, facendo riferimento alle equazioni (12)-(13) si ottiene:

$$\hat{W}_1 = \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2} \quad (31)$$

$$\hat{W}_4 = \frac{\mu_1}{2\mu} (2M_1M_2U' + (M_2U')^2) \quad (32)$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (27) si ottiene:

$$\frac{d}{d\hat{Y}} \left\{ 2\frac{1}{2}U' + 2 \left[\frac{\mu_1}{2\mu} (2M_1M_2U' + (M_2U')^2) \right] (\cos\theta + U' \sin\theta) \sin\theta \right\} = \lambda, \quad (33)$$

svolvendo i calcoli

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\hat{Y}} \left\{ U' + U' \left[\frac{\mu_1}{\mu} (2M_1M_2 \cos\theta \sin\theta) \right] + U'^2 \left[\frac{\mu_1}{\mu} (2M_1M_2 \sin^2\theta) \right] \right\} + \\ & + \frac{d}{d\hat{Y}} \left\{ U'^2 \left[\frac{\mu_1}{\mu} (M_2^2 \cos\theta \sin\theta) \right] + U'^3 \left[\frac{\mu_1}{\mu} (M_2^2 \sin^4\theta) \right] \right\} = \lambda. \end{aligned} \quad (34)$$

Sostituendo $M_1 = \cos\theta$ e $M_2 = \sin\theta$ si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{dU'}{d\hat{Y}} \left[1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2\theta \sin^2\theta \right] + \frac{dU'^2}{d\hat{Y}} \left[\frac{\mu_1}{\mu} (2\cos\theta \sin^3\theta + \cos\theta \sin^3\theta) \right] + \\ & + \frac{dU'^3}{d\hat{Y}} \left[\frac{\mu_1}{\mu} (\sin^4\theta) \right] = \lambda \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dU'}{d\hat{Y}} \left[1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2\theta \sin^2\theta \right] + \left(2U' \frac{dU'}{d\hat{Y}} \right) \left[\frac{\mu_1}{\mu} (2\cos\theta \sin^3\theta + \cos\theta \sin^3\theta) \right] + \\ & + \left(3U'^2 \frac{dU'}{d\hat{Y}} \right) \left[\frac{\mu_1}{\mu} (\sin^4\theta) \right] = \lambda \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{dU'}{d\hat{Y}} \left[1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2U' \left(\frac{\mu_1}{\mu} (2 \cos \theta \sin^3 \theta + \cos \theta \sin^3 \theta) \right) + 3U'^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu} \sin^4 \theta \right) \right] = \lambda \quad (37)$$

$$\frac{dU'}{d\hat{Y}} = \frac{\lambda}{\left[1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2U' \left(\frac{\mu_1}{\mu} (2 \cos \theta \sin^3 \theta + \cos \theta \sin^3 \theta) \right) + 3U'^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu} \sin^4 \theta \right) \right]}. \quad (38)$$

Adesso studiamo per quali valori di U' il termine al denominatore si annulla

$$\left[1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2U' \left(\frac{\mu_1}{\mu} (2 \cos \theta \sin^3 \theta + \cos \theta \sin^3 \theta) \right) + 3U'^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu} \sin^4 \theta \right) \right] = 0.$$

Semplificando, si ottiene la seguente equazione in funzione di U'

$$U'^2 \left(3\frac{\mu_1}{\mu} \sin^4 \theta \right) + U' \left(\frac{\mu_1}{\mu} (6 \cos \theta \sin^3 \theta) \right) + 1 + 2\frac{\mu_1}{\mu} \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0. \quad (39)$$

Ponendo $\frac{\mu_1}{\mu} = \gamma$ e $U' = K$ si calcolano le seguenti radici

$$K_{1,2} = \frac{-(\gamma(6 \cos \theta \sin^3 \theta)) \pm \sqrt{(\gamma(6 \cos \theta \sin^3 \theta))^2 - (12\gamma \sin^4 \theta)(1 + 2\gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta)}}{6\gamma \sin^4 \theta}$$

$$K_{1,2} = \frac{-(\gamma(6 \cos \theta \sin^3 \theta)) \pm \sqrt{(\gamma^2(36 \cos^2 \theta \sin^6 \theta)) - 12\gamma \sin^4 \theta - 24\gamma^2 \cos^2 \theta \sin^6 \theta}}{6\gamma \sin^4 \theta}$$

$$K_{1,2} = \frac{-(\gamma(6 \cos \theta \sin^3 \theta)) \pm \sqrt{12\gamma^2 \cos^2 \theta \sin^6 \theta - 12\gamma \sin^4 \theta}}{6\gamma \sin^4 \theta}$$

$$K_{1,2} = -\frac{1}{\tan \theta} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{\gamma(\gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 1)}}{3\gamma \sin^2 \theta}. \quad (40)$$

Affinchè il discriminante venga positivo bisogna imporre

$$\gamma > \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}; \quad (41)$$

per $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ U' tende a infinito, quindi analizziamo cosa succede per questi due angoli.

Sostituendo i valori di \hat{W}_1 e \hat{W}_4 nell'equazione (28) si ottiene:

$$U' + \frac{\mu_1}{\mu}(2 \cos \theta \sin \theta U' + U'^2 \sin^2 \theta)(\cos \theta + U' \sin \theta) \sin \theta + c_1 = \lambda \hat{Y}. \quad (42)$$

Per $\theta = 0$ l'equazione (42) diventa ²

$$U' = \lambda(\hat{Y} - c). \quad (43)$$

Integrando ottengo la funzione U

$$U = \frac{\lambda}{2}(\hat{Y}^2 - 2c\hat{Y}) + c_1 \quad (44)$$

e derivando la (43) ottengo la derivata seconda di U

$$U'' = \lambda. \quad (45)$$

²Si può imporre $c_1 = \lambda c$, essendo λ costante e c una costante arbitraria

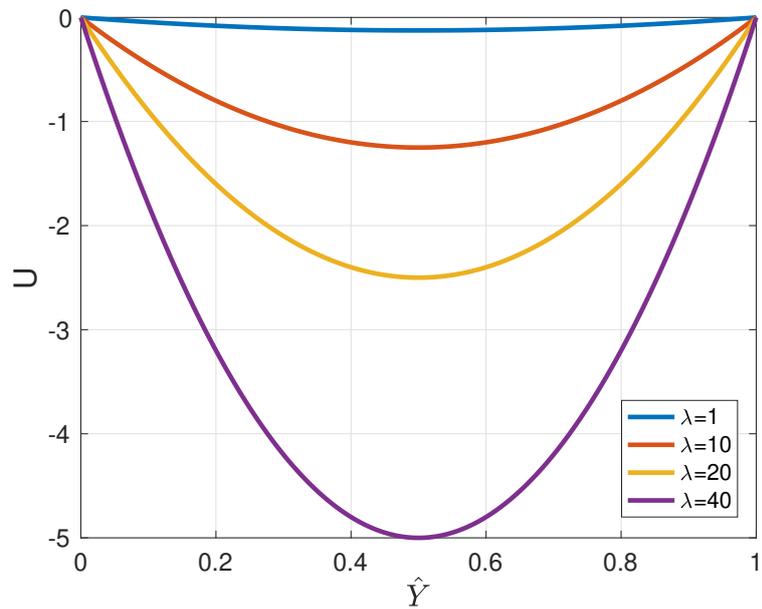


Figura 2: Grafico di U in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$.

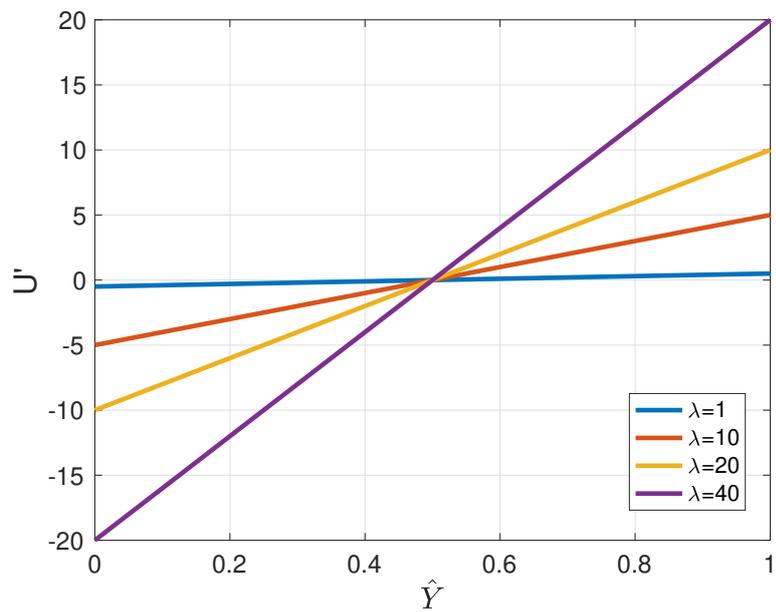


Figura 3: Grafico di U' in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$.

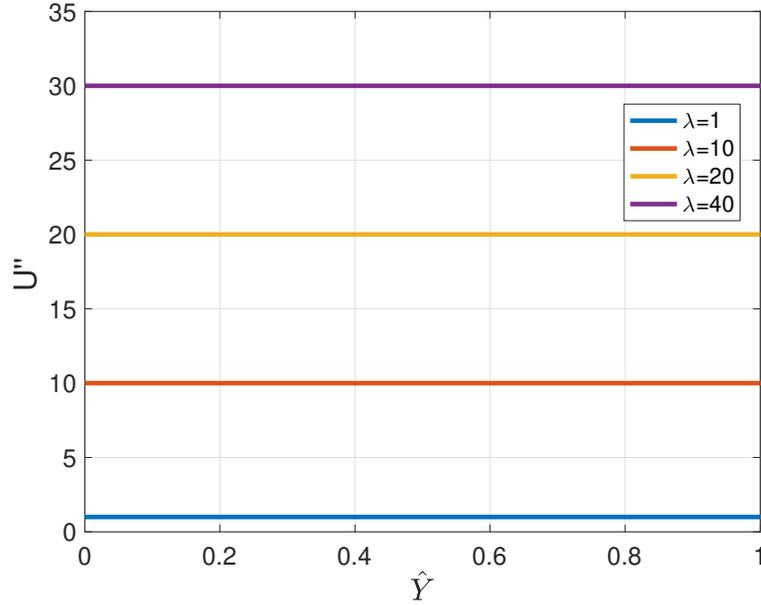


Figura 4: Grafico di U'' in funzione di \hat{Y} per $\lambda = 1, 10, 20, 40$.

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'equazione (42) diventa (ricordando che $\frac{\mu_1}{\mu} = \gamma$)

$$U' + \gamma U'^3 = \lambda(\hat{Y} - c). \quad (46)$$

U' è una funzione monotona, imponendo $U' = K$, per $\hat{Y} = 0$ ottengo $U'(0) = K(0)$, l'equazione (46) quindi diventa

$$K(0) + \gamma K^3(0) = \lambda(\hat{Y} - c). \quad (47)$$

Dalla condizione al bordo abbiamo per $K_0(1) = 0$ che $c = \frac{1}{2}$

$$K(0) + \gamma K(0)^3 = -\frac{\lambda}{2} \quad (48)$$

abbiamo quindi una cubica da cui possiamo calcolare la radice reale (dai calcoli svolti vengono due radici complesse e una reale).

La soluzione reale è

$$K(0) = -\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}(-9\gamma^2\lambda + \sqrt{3}\sqrt{16\gamma^3 + 27\gamma^4\lambda^2})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(-9\gamma^2\lambda + \sqrt{3}\sqrt{16\gamma^3 + 27\gamma^4\lambda^2})^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{2}{3}}\gamma}.$$

Derivando l'equazione (46) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dU'}{d\hat{Y}} + \frac{d(\gamma U'^3)}{d\hat{Y}} &= \lambda \\ \frac{d^2U}{d\hat{Y}^2} + 3\gamma(U')^2 \frac{dU'}{d\hat{Y}} &= \lambda \\ \frac{d^2U}{d\hat{Y}^2} + 3\gamma(U')^2 \frac{d^2U}{d\hat{Y}^2} &= \lambda \\ (1 + 3\gamma(U')^2) \frac{d^2U}{d\hat{Y}^2} &= \lambda. \end{aligned} \quad (49)$$

Per $\theta = \frac{\pi}{4}$, chiamando $U' = K$ l'equazione (38) diventa

$$\frac{dK}{d\hat{Y}} = \frac{\lambda}{1 + \frac{\gamma}{2} \left(1 + 3K + \frac{3}{2}K^2\right)}; \quad (50)$$

sempre sostituendo $\theta = \frac{\pi}{4}$ nell'equazione (42) si ha:

$$K + \gamma K \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}K^2 \right) = \lambda(\hat{Y} - c_1). \quad (51)$$

L'equazione (50) può essere riscritta come un problema alle condizioni al contorno in questa forma

$$\frac{d^2U}{d\hat{Y}^2} = \frac{\lambda}{1 + \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{dU}{d\hat{Y}} + \frac{3}{4} \left(\frac{dU}{d\hat{Y}} \right)^2 \right)} \quad (52)$$

con

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(1) = 0 \end{cases}$$

$K = \frac{dU}{d\hat{Y}} \in (-\infty, +\infty)$, ma il secondo membro della (50) non è sempre continuo o lipschitziano, quindi va opportunamente analizzato; inoltre dipende dai valori di λ e γ e anche questi vanno studiati. Si ha una discontinuità quando si annulla il denominatore, le radici del denominatore sono:

$$K_1 = \frac{-3\gamma - \sqrt{3}\sqrt{-4\gamma + \gamma^2}}{3\gamma} \quad (53)$$

$$K_2 = \frac{-3\gamma + \sqrt{3}\sqrt{-4\gamma + \gamma^2}}{3\gamma} \quad (54)$$

che semplificando diventano

$$K_1 = -\left(1 + \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}}\right) \quad (55)$$

$$K_2 = -\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}}\right). \quad (56)$$

Per fare un'analisi e vedere cosa succede al variare di λ e γ esplicitiamo \hat{Y} dalla (51)

$$\hat{Y} = \frac{K + \gamma K \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}K^2\right)}{\lambda} + c_1. \quad (57)$$

Sostituendo la soluzione (55) nella (57) si ottiene:

$$\hat{Y}_{max} = \frac{-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} + \gamma \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}}\right) + \frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}}\right)^2\right)}{\lambda} + c_1 \quad (58)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\hat{Y}_{max} = c_1 - \frac{1}{\lambda} [1 - \beta(\gamma)] \quad (59)$$

in cui si indica con $\beta(\gamma)$ il termine seguente

$$\beta(\gamma) = -\sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} + \gamma \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right) + \frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right)^2 \right).$$

Quando $\hat{Y}_{max} < 0$ non c'è discontinuità, quindi quando si ha che

$$c_1 < -\frac{1}{\lambda} [1 - \beta(\gamma)] \quad (60)$$

ovvero se λ è positivo e $\gamma \geq 4$ allora

$$c_1 < -\frac{\sqrt{\frac{-64+48\gamma-12\gamma^2+\gamma^3}{\gamma\lambda^2}}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{\lambda} \quad (61)$$

eccetto per $\gamma = 16$ dove ho $\hat{Y}_{max} = c_1$ e la relazione diventa

$$c_1 < 0. \quad (62)$$

Se invece $\hat{Y}_{max} > 0$ si può avere discontinuità $\forall \lambda$ nel caso in cui $0 < \gamma < 4$, inoltre quando $0 < \gamma < 4$ non esistono radici reali poichè il termine sotto radice risulta negativo, si ha continuità e lipschitzianità per $K \in (-\infty, +\infty)$, in cui si possono quindi utilizzare i teoremi di esistenza e unicità della soluzione.

Se $\gamma \geq 4$ dipende dai valori di λ , infatti si ha:

$$c_1 > -\frac{\sqrt{\frac{-64+48\gamma-12\gamma^2+\gamma^3}{\gamma\lambda^2}}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{\lambda} \quad (63)$$

eccetto quando $\gamma = 16$ caso in cui $\hat{Y}_{max} = c_1$ e quindi non si ha la dipendenza da λ .

Analizziamo ora il caso per cui $\gamma \geq 4$ partendo proprio da $\gamma = 4$.
Dall'equazione (51) effettuando la sostituzione si ha:

$$3K + 3K^2 + K^3 = \lambda(\hat{Y} - c_1) \quad (64)$$

aggiungiamo 1 a destra e sinistra dell'equazione per ottenere a sinistra il cubo di un binomio

$$1 + 3K + 3K^2 + K^3 = \lambda(\hat{Y} - c_1) + 1 \quad (65)$$

$$(1 + K)^3 = \lambda(\hat{Y} - c_1) + 1; \quad (66)$$

dalla (66) si può ricavare $K(\hat{Y}) = U'(\hat{Y})$:

$$i) \quad K(\hat{Y}) = [\lambda(\hat{Y} - c_1) + 1]^{\frac{1}{3}} - 1 \quad (67)$$

$$ii) \quad K(\hat{Y}) = -[-(1 + \lambda(\hat{Y} - c_1))]^{\frac{1}{3}} - 1 \quad (68)$$

le soluzioni appena trovate valgono rispettivamente se si verificano le seguenti condizioni:

i) per $\lambda(\hat{Y} - c_1) + 1 > 0$

ii) per $\lambda(\hat{Y} - c_1) + 1 \leq 0$.

Per capire quali valori può assumere c_1 analizziamo la seguente equazione

$$1 + \lambda(\hat{Y} - c_1) > 0 \quad (69)$$

$$\frac{1}{\lambda} > -(\hat{Y} - c_1); \quad (70)$$

per avere la certezza che l'equazione (70) sia verificata imponiamo che il secondo termine sia sempre negativo, quindi

$$\hat{Y} - c_1 > 0 \quad (71)$$

$$\hat{Y} > c_1 \quad (72)$$

essendo i valori di \hat{Y} compresi tra 0 e 1 perchè stiamo trattando le equazioni in forma adimensionale otteniamo che $c_1 \in [0, 1]$.

Sostituendo K ricavato nella (67) e $\gamma = 4$ all'equazione (50) si ottiene che

$$\frac{dK}{d\hat{Y}} = \frac{\lambda}{1 + 2(1 + 3([\lambda(\hat{Y} - c_1) + 1]^{\frac{1}{3}} - 1) + \frac{3}{2}([\lambda(\hat{Y} - c_1) + 1]^{\frac{1}{3}} - 1)^2)}. \quad (73)$$

Adesso si trova per quali valori di c_1 il denominatore si annulla, considerando il caso $\hat{Y} = 0$ perchè ci interessa fuori dall'intervallo

$$c_1 = \frac{1 + \lambda\hat{Y}}{\lambda}, \quad (74)$$

quindi per $\hat{Y} = 0$

$$c_1 = \frac{1}{\lambda}. \quad (75)$$

Integrando la (67) rispetto a \hat{Y} otteniamo:

$$U = \frac{3(1 - c_1\lambda + \lambda\hat{Y})^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} + c_2 - \hat{Y}. \quad (76)$$

Considerando le condizioni al contorno

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U(1) = 0 \end{cases},$$

applicando la prima condizione ottengo il valore di c_2

$$0 = \frac{3(1 - c_1\lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} + c_2 \quad (77)$$

$$c_2 = -\frac{3(1 - c_1\lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda}. \quad (78)$$

Sostituendo c_2 nella (76) e applicando la condizione $U(1) = 0$ si ottiene:

$$0 = \frac{3(1 - c_1\lambda + \lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} - \frac{3(1 - c_1\lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} - 1. \quad (79)$$

Questa equazione non è risolvibile analiticamente neanche utilizzando il software Wolfram Mathematica per ricavare c_1 in funzione di λ , si è quindi proceduto a una risoluzione numerica utilizzando il software di calcolo MATLAB, più precisamente il comando `fzero` che viene utilizzato per risolvere un'equazione non necessariamente algebrica e di cui si daranno maggiori dettagli in appendice.

Il comando `fzero` calcola la soluzione dell'equazione $fun = 0$ con un metodo iterativo partendo da un valore iniziale x_0 . Di seguito si allega l'immagine del codice utilizzato:

```

1      x=[0.1:0.1:50];
2      dx=0.5;
3      f=@(c,x) ((1+x*(1-c)).^4).^ (1/3)-((1-x*c).^4).^ (1/3)-4*x/3;
4
5
6      for i=1:length(x)
7          z(i)=fzero(@(c) f(c, x(i)),x(i)-dx);
8      end
9
10     z1=linspace(0, 1, 100);
11     x1=1./z1;
12
13
14
15
16     plot(z,x,z1,x1,'LineWidth',2)
17     grid on

```

Figura 5: Codice MATLAB `fzero` dell'equazione (79).

In MATLAB ho definito la variabile x (che sarebbe il nostro λ), fornendo il passo e il suo intervallo di variazione, e mediante il ciclo `for` ho in seguito impostato il comando `fzero` per ogni i -esimo elemento del vettore x .

Una volta fatto ciò si è definita la seconda equazione $(x1, z1)$ che nel nostro caso è la (75), infine sono state plottate le due curve per trovare il punto di interesezione, che è il punto di inizio delle discontinuità di U'' .

Il grafico che viene fuori è il seguente, in cui la curva arancione rappresenta l'iperbole dell'equazione (75) e la curva blu rappresenta la curva (79), entrambe ottenute esplicitando c_1 in funzione di λ .

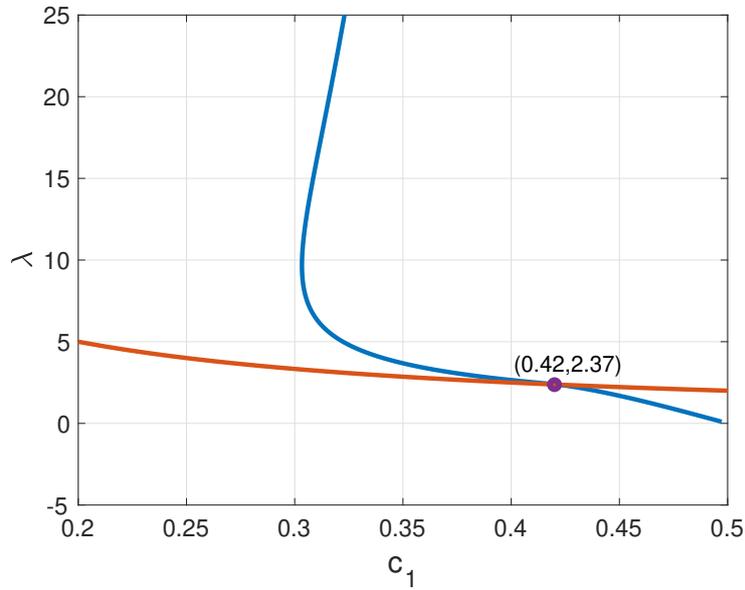


Figura 6: Grafico delle due curve (75) e (79).

Una volta ottenuto il grafico, vado a calcolare analiticamente il punto di intersezione delle due curve mettendo a sistema le equazioni

$$\begin{cases} 0 = \frac{3(1 - c_1\lambda + \lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} - \frac{3(1 - c_1\lambda)^{\frac{4}{3}}}{4\lambda} - 1 \\ c_1 = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (1 - c_1\lambda + \lambda)^{\frac{4}{3}} - (1 - c_1\lambda)^{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3}\lambda \\ c_1 = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{1}{c_1}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{4}{3c_1} \\ c_1 = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

da cui risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{27}{64} \simeq 0,42 \\ \lambda = \frac{64}{27} \simeq 2,37 \end{cases} .$$

Scegliendo valori di λ minori dell'intersezione, dato che la relazione con c_1 è data dalla (79), \hat{Y} viene negativo ed essendo fuori dall'intervallo non ci sono discontinuità, se invece scegliamo valori di λ maggiori, \hat{Y} viene positivo quindi può esserci discontinuità, dato che il denominatore si annulla e il valore di \hat{Y} mi dice esattamente dove la discontinuità si va a creare. Una volta fatto ciò, di seguito si tracciano i grafici di U , U' e U'' in funzione di \hat{Y} per diversi valori di λ

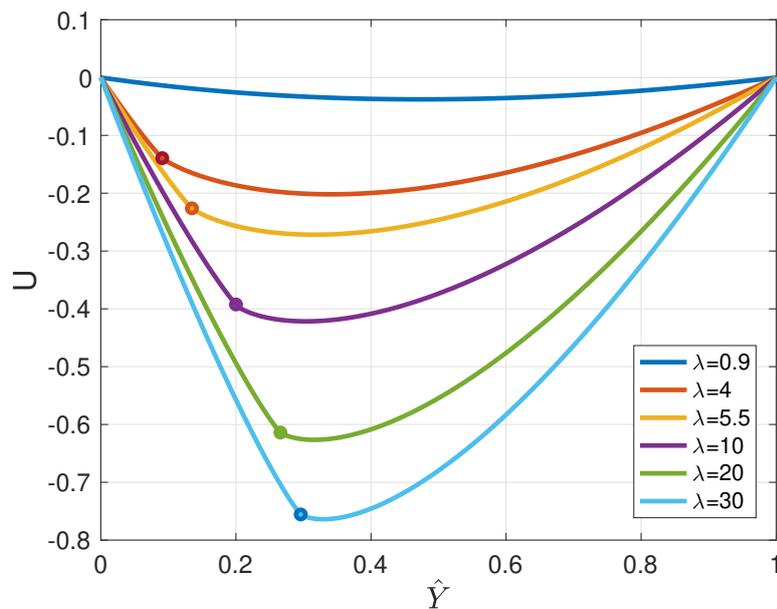


Figura 7: Grafico $U-\hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$.

In questo grafico della deformazione U (Fig. 7) abbiamo un andamento parabolico che aumenta in valore assoluto al crescere di λ e in cui sono evidenziati i punti in cui avviene la discontinuità nella derivata seconda per ogni curva.

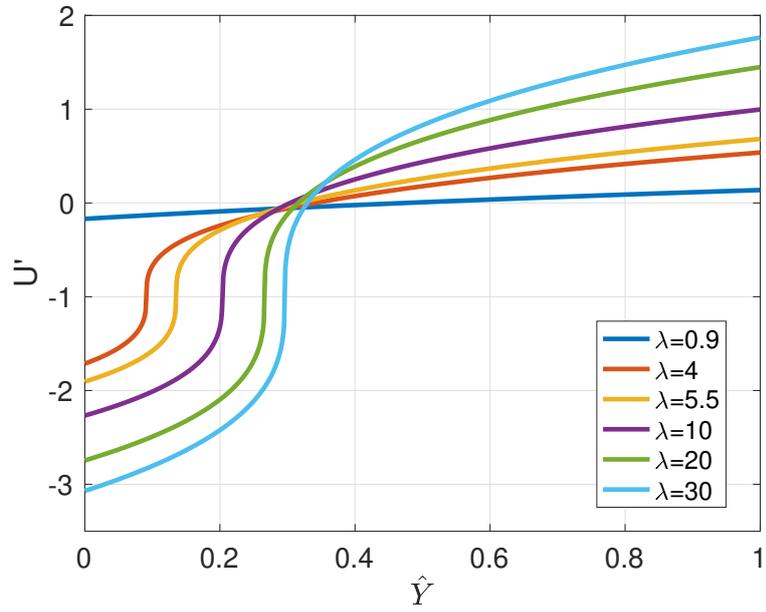


Figura 8: Grafico $U' - \hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$.

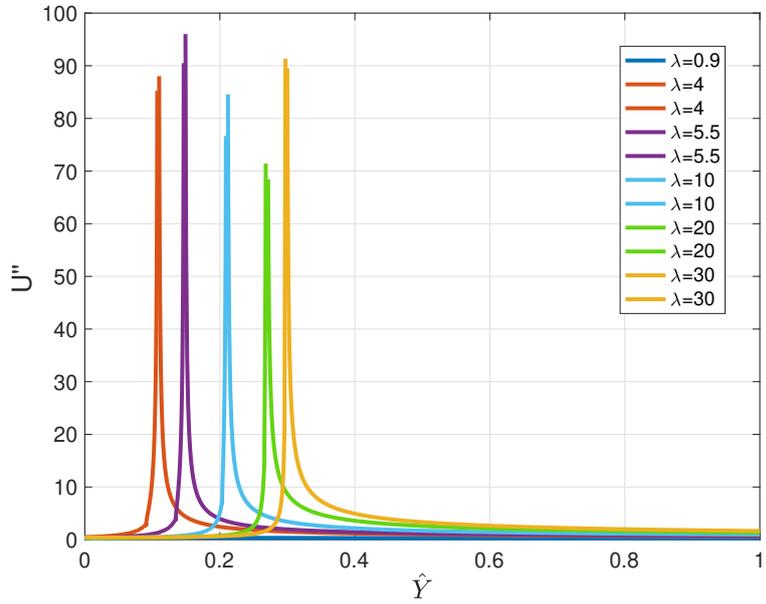


Figura 9: Grafico $U'' - \hat{Y}$ per $\lambda = 0, 9, 4, 5.5, 10, 20, 30$.

Nel grafico della derivata prima (Fig. 8) non si ha discontinuità, ma si ha solamente un cambio di curvatura con valori di U' sia positivi che negativi.

Nel grafico della derivata seconda (Fig. 9) si vengono a creare discontinuità per valori di $\lambda = 4; 5.5; 10; 20; 30$ dovuti alla presenza degli asintoti verticali. Per $\lambda = 0.9$ non ho problemi di discontinuità neanche in U'' . Riprendendo l'equazione (51)

$$K + \gamma K \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}K^2 \right) = \lambda(\hat{Y} - c_1).$$

Si impone $\hat{Y} = \varphi(K)$ che esplicitato diventa:

$$\hat{Y} = \frac{K + \gamma K \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}K^2 \right)}{\lambda} + c_1. \quad (80)$$

Per trovare \hat{Y}_{min} e \hat{Y}_{max} della funzione si calcola la derivata e si pone uguale a 0:

$$\frac{d\varphi(K)}{d\hat{Y}} = 0. \quad (81)$$

In forma estesa si ha:

$$\frac{dK}{d\hat{Y}} \left[1 + \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}K + \frac{3}{4}K^2 \right) \right] = 0, \quad (82)$$

da cui si hanno le soluzioni (55) e (56)

$$K_1 = - \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right) \quad (83)$$

$$K_2 = - \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right). \quad (84)$$

Sostituendo la soluzione (83) nella (80) \hat{Y}_{max} diventa:

$$\hat{Y}_{max} = \frac{-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} + \gamma \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right) + \frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{\frac{\gamma-4}{3\gamma}} \right)^2 \right)}{\lambda} + c_1. \quad (85)$$

Semplificando un po' i termini si ottiene:

$$\frac{-18 - 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{\gamma-4}{\gamma}} + \sqrt{3}\sqrt{\gamma-4} + 18c_1\lambda}{18\lambda}. \quad (86)$$

Si vuole adesso analizzare per quali valori di γ la (86) è ≥ 0 :

$$-\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{4}{18}\sqrt{3}\sqrt{\frac{\gamma-4}{\gamma}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{\gamma-4}\sqrt{\gamma} \right) + c_1 \geq 0. \quad (87)$$

Analizziamo il primo caso, in cui la (87) risulta sempre verificata indipendentemente dal valore di λ , ovvero quando il termine all'interno delle parentesi risulta negativo o uguale a 0:

$$\left(1 + \frac{4}{18}\sqrt{3}\sqrt{\frac{\gamma-4}{\gamma}} - \frac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{\gamma-4}\sqrt{\gamma} \right) \leq 0. \quad (88)$$

Svolgendo i calcoli si ha che la disequazione è verificata per valori di $\gamma \geq 16$. Quindi per valori di $\gamma \geq 16$ posso avere qualunque valore di λ senza poi avere ripercussioni o problemi sul materiale. Resta da valutare quindi il caso in cui $4 < \gamma < 16$. Riprendendo la (51) si trovano le soluzioni di K

$$K + \gamma K \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}K + \frac{1}{4}K^2 \right) = \lambda(\hat{Y} - c_1).$$

L'unica soluzione reale è

$$K = -1 - \frac{(2^{\frac{1}{3}}(12\gamma - 3\gamma^2))}{3\gamma(108(\gamma^2 - c_1\gamma^2\lambda + \gamma^2\lambda\hat{Y}) + \sqrt{4(12\gamma - 3\gamma^2)^3 + (108(\gamma^2 - c_1\gamma^2\lambda + \gamma^2\lambda\hat{Y}))^2})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(108(\gamma^2 - c_1\gamma^2\lambda + \gamma^2\lambda\hat{Y}) + \sqrt{4(12\gamma - 3\gamma^2)^3 + (108(\gamma^2 - c_1\gamma^2\lambda + \gamma^2\lambda\hat{Y}))^2})^{\frac{1}{3}}}{3(2^{\frac{1}{3}})\gamma}. \quad (89)$$

4 Commento sul comportamento del materiale in base ai risultati ottenuti

In questo capitolo analizziamo alla luce di tutti i calcoli e le considerazioni fatte finora, il comportamento che ci aspettiamo dal materiale.

Per iniziare possiamo affermare che la discontinuità nella derivata prima nel campo degli spostamenti coincide con la discontinuità nel gradiente di deformazione.

Queste discontinuità producono l'attorcigliamento delle fibre di rinforzo, che quindi non compiono più la loro funzione iniziale, ovvero quella di rendere la matrice del materiale considerato più resistente, nello specifico quando siamo nel caso di una deformazione rettilinea, che è quella che abbiamo analizzato in questa tesi.

Indichiamo con \hat{Y}_s le singolarità (punti in cui avviene la discontinuità), in cui ci sono due valori della derivata prima, K_1 e K_2 , calcolati nell'equazione (40):

$$K_{1,2} = -\frac{1}{\tan \theta} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{\gamma(\gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 1)}}{3\gamma \sin^2 \theta}.$$

Se volessimo calcolare i gradienti di deformazione, basta inserire rispettivamente K_1 e K_2 nel tensore \mathbf{F} nel modo seguente, dove abbiamo sostituito u' , calcolato derivando le equazioni del campo di deformazione da cui siamo partiti, con K_1 e K_2 ottenuti con le equazioni in forma adimensionale

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & K_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui possiamo valutare come varia la deformazione in base ai valori che può assumere l'angolo θ .

Introduciamo ora il fenomeno del kink (pieghe o attorcigliamento) che principalmente è una deviazione di un difetto di dislocazione lungo il suo piano di scorrimento. Nelle allusioni dei bordi, il piano di scorrimento costante consente a brevi regioni della dislocazione di trasformarsi, convertendosi in allusioni a vite e producendo nodi, come si può vedere dall'immagine

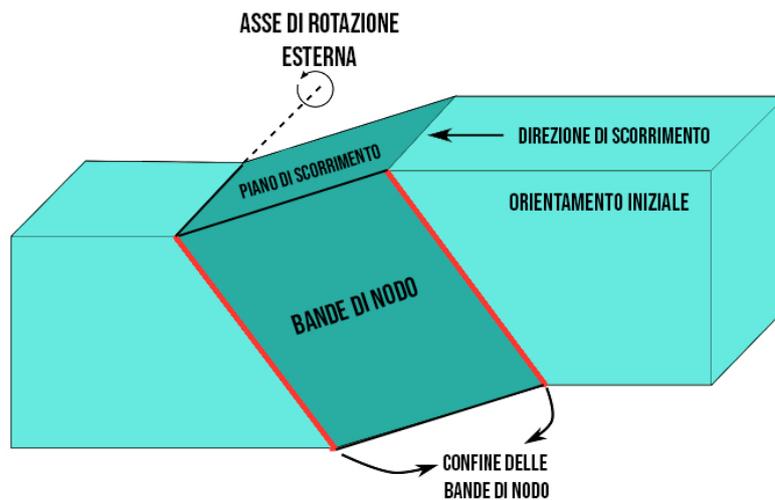


Figura 10: Kink.

Lo stiramento delle fibre nelle estremità del kink è descritto dall'invariante I_4 più precisamente se

$$I_4 < 1 \quad \text{Contrazione delle fibre}$$

$$I_4 > 1 \quad \text{Estensione delle fibre}$$

Considerando i casi in cui $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, non ho discontinuità il che significa che non incorro nel pericolo di kink, dato che le fibre subiscono solo allungamento ma non subiscono attorcigliamento.

Negli altri casi la discontinuità è presente e va valutato il gradiente di deformazione con K_1 e K_2 , per avere maggiori informazioni sul fatto che ci sia contrazione oppure allungamento. Nel caso di (Fig. 8) $U' = K$ ha sia valori positivi che negativi.

Quando si ha $U'=K > 0$ allora le fibre sono in allungamento. Si può dimostrare dalla referenza [8] che si ha contrazione se e solo se

$$0 > K > -\frac{2}{\tan \theta}; \quad (90)$$

essendo nel caso in cui $\theta = \frac{\pi}{4}$ abbiamo che

$$0 > K > -2. \quad (91)$$

Per questo intervallo di valori la fibra si accorcia e questo può portare a una rotazione dalla situazione in cui si trova nel piano (X,Y) con un angolo θ rispetto a X verso l'asse Y in senso antiorario, questo processo porta alla formazione delle discontinuità.

L'importanza di questi studi sta nel capire come si sviluppano e come si propagano alcune instabilità del materiale (le considerazioni sul tipo di materiale sono quelle fatte nell'Appendice 1) che possono portare a frattura o ad altri tipi di danno che possono indebolire il materiale causando la perdita di funzionalità per cui era stato progettato.

Un esempio lo troviamo anche in alcuni materiali biologici, come quelli in cui il collagene funge da fibra di rinforzo.

Malattie che fanno cambiare le caratteristiche del collagene e quindi delle fibre di rinforzo portano a fenomeni di instabilità, che è fondamentale prevedere con un adeguato modello matematico.

5 Conclusioni

Abbiamo considerato una lamina di spessore L la cui dimensione è trascurabile rispetto alle altre due (lunghezza e larghezza).

È stato analizzato il comportamento della nostra lamina al variare dell'orientamento delle fibre di rinforzo indicato con l'angolo θ , è stato definito λ che indica le caratteristiche geometriche e fisiche del materiale e γ che è il rapporto tra il modulo elastico delle fibre di rinforzo e quello del materiale.

Per $\theta = 0$ non ci sono discontinuità, e l'andamento della deformazione ha un andamento parabolico, la derivata prima un andamento lineare e la derivata seconda un andamento costante. Per $\theta = \frac{\pi}{4}$ abbiamo analizzato il caso di $\gamma = 4$ e abbiamo ricavato i valori di c_1 e λ da cui inizia la discontinuità che abbiamo riscontrato nella derivata seconda di U che presenta degli asintoti verticali; sempre per $\theta = \frac{\pi}{4}$ sono stati studiati anche i casi $4 < \gamma < 16$ e $\gamma = 16$.

Anche stavolta la discontinuità può essere presente, infatti abbiamo il fenomeno del kink, ovvero una deviazione delle fibre per una variazione di dislocazione lungo il loro piano di scorrimento; per essere più specifici va valutato il gradiente di deformazione con K_1 e K_2 , che sono i valori della derivata prima della deformazione nei punti in cui abbiamo la discontinuità, per avere maggiori informazioni sul fatto che ci sia contrazione oppure allungamento delle fibre.

Attraverso l'analisi teorica e lo studio di modelli matematici, abbiamo cercato di comprendere come l'anisotropia, dovuta appunto all'introduzione delle fibre di rinforzo all'interno del materiale che cambiano quindi la struttura stessa della lamina, e di conseguenza la risposta della deformazione, e le condizioni al contorno influenzino la deformazione rettilinea, che se non opportunamente studiata può portare a comportamenti imprevedibili del nostro materiale. L'obiettivo finale della tesi è stato fornire una base teorica sufficiente e una buona comprensione del comportamento della deformazione rettilinea in materiali iperelastici incomprimibili fibro-rinforzati.

I risultati ottenuti possono trovare applicazione nella progettazione più accurata e nella valutazione più precisa delle prestazioni dei componenti e dei sistemi meccanici soggetti a questo tipo di deformazione.

Complessivamente, questo lavoro contribuisce a migliorare la comprensione della deformazione rettilinea e dei fattori che ne influenzano il comportamento.

È stata quindi fatta un'analisi del caso specifico considerato in cui sono state applicate le conoscenze del campo della meccanica del continuo.

Inoltre si possono utilizzare queste considerazioni anche per caratterizzare il comportamento di eventuali nuovi materiali che vengono testati in laboratorio, avendo ad esempio la curva della deformazione si può risalire al suo modulo elastico, un esempio equivalente per materiali classici è proprio la prova di trazione, con la quale viene tracciato il diagramma $\sigma - \epsilon$ da cui ricaviamo il modulo di Young. Allo stesso modo per questi materiali può essere utile risalire da prove di laboratorio alla conoscenza dei moduli elastici della matrice e delle fibre.

6 Appendice 1: Contesto teorico

Nella trattazione di questa tesi che prende in considerazione l'approccio utilizzato nel libro [2], andiamo ad introdurre in generale alcuni concetti chiave ed alcune considerazioni, in modo tale che l'elaborato possa essere consultato in maniera coerente.

Nella trattazione consideriamo:

- i comportamenti macroscopici del materiale trascurando la struttura microscopica.
- materiale con distribuzione continua.
- cambiamenti di forma e dimensione degli elementi del materiale che chiamiamo deformazioni.
- le deformazioni verranno poi utilizzate nella derivazione delle equazioni di elasticità.
- consideriamo anche la natura delle forze che agiscono su porzioni arbitrarie del corpo.

6.1 Moto e coordinate spaziali

Nel nostro studio, ci occupiamo della cinematica dei corpi. Per semplificare, consideriamo un corpo come un insieme di particelle, in modo tale che ad ogni istante di tempo t ogni particella sia associata a un punto unico nello spazio tridimensionale ζ_t e ogni punto di ζ_t sia occupato da una sola particella. Chiamiamo in seguito ζ_t la configurazione del corpo all'istante t .

Per descrivere il moto del corpo, ovvero specificare la posizione di ogni particella ad ogni istante scegliamo un set di coordinate (X_1, X_2, X_3) e un vettore posizione \mathbf{X} riferito alle coordinate cartesiane; con \mathbf{X} possiamo riferirci anche alla particella stessa.

Il moto del corpo può essere ora descritto specificando la posizione \mathbf{x} della particella \mathbf{X} all'istante t nella forma della seguente equazione

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t); \tag{92}$$

in componenti:

$$\begin{aligned}x_1 &= \chi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= \chi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= \chi_3(X_1, X_2, X_3, t).\end{aligned}\tag{93}$$

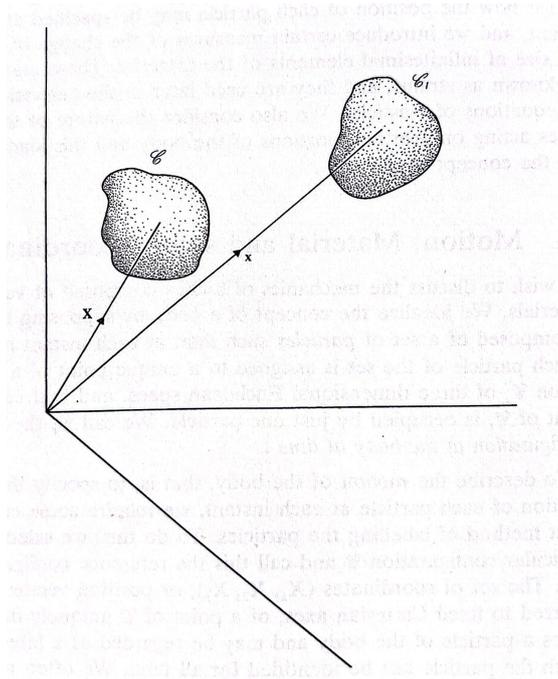


Figura 11: Grafico componenti del moto.

Si assuma che χ_1 , χ_2 e χ_3 siano infinitamente differenziabili rispetto a X_1 , X_2 e X_3 . Considerando due configurazioni del corpo agli istanti iniziale t_1 e finale t_2 , indichiamo la deformazione come la variazione del corpo dalla configurazione iniziale a quella finale.

Il moto del corpo può essere considerato come una sequenza di deformazioni ad un solo parametro, che definiamo come J ovvero la matrice Jacobiana

$$J = \det \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial X_A} \right), \quad i, A = 1, 2, 3 \quad (94)$$

che esiste in ogni punto di ζ_t e

$$J > 0. \quad (95)$$

Il significato fisico di queste ipotesi è che il materiale del corpo non può penetrare se stesso e che il materiale che occupa un volume finito $\neq 0$ in ζ non può essere compresso in un punto o espanso a volume infinito durante il moto.

Matematicamente la (95) implica che la (92) ha un'unica inversa

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (96)$$

La posizione della particella P è data dalle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) , inoltre P continua ad essere identificato in coordinate Lagrangiane (X_1, X_2, X_3) che determinano la posizione in ζ :

$$\begin{array}{ll} (X_1, X_2, X_3) & \text{Coordinate Lagrangiane} \\ (x_1, x_2, x_3) & \text{Coordinate spaziali.} \end{array}$$

La descrizione materiale $\Psi(\mathbf{X}, t)$ ha una corrispondente descrizione spaziale $\psi(\mathbf{x}, t)$, entrambe sono legate da

$$\Psi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \psi(\mathbf{x}, t) \quad (97)$$

$$\psi(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \Psi(\mathbf{X}, t). \quad (98)$$

La (97) indica la descrizione materiale, la (98) indica la descrizione spaziale. Adottiamo la seguente notazione per le derivate parziali:

$$u_{,k} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_K}(\mathbf{X}, t), \quad \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (99)$$

$$u_{,i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \quad (100)$$

6.2 La derivata temporale materiale

Supponiamo che una certa quantità sia definita su tutto il corpo e vogliamo sapere la variazione della velocità nel tempo, come verrebbe registrata in una determinata particella \mathbf{X} durante il moto.

Dobbiamo calcolare quindi la derivata temporale materiale

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{X}, t); \quad (101)$$

usando la regola della catena della differenziazione parziale abbiamo dalla (98)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \chi_i}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t). \quad (102)$$

6.3 Tensore gradiente di deformazione

Abbiamo discusso come può essere descritto il moto di un corpo, ora analizziamo la deformazione degli elementi infinitesimi del corpo dovuti al moto.

Supponiamo che ζ coincida con la configurazione iniziale ζ_0 e che due particelle vicine P e Q abbiano posizioni \mathbf{X} e $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ in ζ .

Allora all'istante t le loro posizioni in ζ_t sono \mathbf{x} e $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ in cui

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \mathbf{x} + d\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (103)$$

e le componenti del differenziale totale $d\mathbf{x}$ sono date in termini delle componenti di $d\mathbf{X}$ e le derivate parziali di χ da

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A}(\mathbf{X}, t) dX_A = x_{i,A} dX_A; \quad (104)$$

le quantità $x_{i,A}$ sono note come gradienti di deformazione. Sono le componenti del tensore del secondo ordine noto come tensore gradiente di deformazione che indichiamo con \mathbf{F} .

Una volta definito \mathbf{F} possiamo introdurre due misure della deformazione ad esso collegate, ovvero il tensore destro e sinistro di Cauchy-Green \mathbf{C} e \mathbf{B} , rispettivamente.

Il tensore destro di Cauchy-Green \mathbf{C} rappresenta la forma bilineare del materiale la cui associata forma quadratica genera i quadrati delle lunghezze delle linee spaziali:

$$dx^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}; \quad (105)$$

poichè il tensore identità spaziale \mathbf{I} è l'analogo spaziale del tensore destro di Cauchy-Green, ne consegue che

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{I} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (106)$$

L'inverso \mathbf{B}^{-1} del tensore sinistro di Cauchy-Green \mathbf{B} , analogamente al tensore destro di Cauchy-Green, rappresenta la forma bilineare spaziale la cui associata forma quadratica genera i quadrati delle lunghezze delle linee materiali:

$$d\mathbf{X}^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}; \quad (107)$$

abbiamo quindi

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \mathbf{I} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-1} \quad (108)$$

da cui

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^{\mathbf{T}}.$$

6.4 Energia di deformazione

L'energia di deformazione è una quantità che descrive l'energia immagazzinata all'interno di un materiale elastico quando viene sottoposto a uno sforzo che provoca una deformazione. In generale, l'energia di deformazione dipende dalla forma specifica del materiale e può essere determinata attraverso la conoscenza della funzione dell'energia di deformazione.

Questa funzione rappresenta la relazione tra lo sforzo applicato e la deformazione risultante nel materiale.

Nel caso dei materiali elastici isotropi comprimibili, l'equazione costitutiva per lo stress può essere esplicitamente derivata dalla forma della funzione dell'energia di deformazione. Ciò significa che, una volta nota la forma della funzione, è possibile determinare lo stress in base allo sforzo applicato.

Nel caso di un materiale incomprimibile, l'equazione per lo stress è determinata a meno di una costante di pressione arbitraria.

Nel caso specifico affrontato in questa tesi è stato considerato un materiale neo-Hookeano. Il termine “materiale neo-Hookeano” si riferisce a un tipo di materiale elastico, come la gomma, che segue il modello proposto da Treloar chiamato “modello neo-Hookeano”.

Questo modello considera la gomma come una rete di molecole a catena lunga e l'energia di deformazione del materiale è proporzionale a $(I_1 - 3)$, dove I_1 rappresenta il primo invariante del tensore deformazione. Il termine "neo-Hookeano" viene quindi utilizzato per descrivere materiali che mostrano un comportamento simile alla gomma e che possono essere approssimati in modo ragionevole dal modello neo-Hookeano.

Il materiale considerato deve anche essere iperelastico, dove con il termine iperelastico intendiamo materiali che possono subire grandi deformazioni reversibili senza subire danni permanenti. Questi materiali mostrano una risposta elastica estremamente elevata, con una curva stress-deformazione (σ - ϵ) non lineare.

Sono comunemente utilizzati per modellare il comportamento di gomme, elastomeri e materiali biologici, che hanno quindi la capacità di deformarsi significativamente per poi tornare alla forma originale.

7 Appendice 2: funzione `fzero` di MATLAB e relativi metodi numerici

Il comando `fzero` è una funzione del software MATLAB che serve a trovare gli zeri di una funzione, l'algoritmo creato da T. Dekker, utilizza una combinazione di metodi, tra cui: di bisezione, secante e il metodo di interpolazione quadratica inversa.

Per descrivere il suo funzionamento si fa riferimento alle referenze [5] e [6].

Definiamo una sintassi generale:

```
x = fzero(fun,x0)
```

```
x = fzero(fun,x0,options)
```

```
x = fzero(problem)
```

```
[x, fval, exitflag, output] = fzero (-)
```

Descrizione:

`x = fzero(fun, x0)` cerca di trovare un punto x dove $fun(x) = 0$.

Questa soluzione viene trovata nel punto in cui $fun(x)$ cambia segno: `fzero` infatti non riesce a trovare una radice di una funzione come x^2 proprio perchè è sempre positiva.

`x = fzero(fun,x0,options)` utilizza le opzioni per modificare il processo per arrivare alla soluzione, ad esempio esaminando il processo di soluzione impostando le opzioni che includono il grafico della funzione.

`x = fzero(problem)` risolve un problema di ricerca della radice specificata dal problema.

`[x, fval, exitflag, output] = fzero (-)` restituisce $fun(x)$ nell'output `fval`, `exitflag` codifica il motivo per cui `fzero` si è fermato e una struttura di output contenente informazioni sul processo di soluzione.

Di seguito vediamo alcuni metodi per la risoluzione di equazioni e sistemi non lineari, dove ci occuperemo dell'approssimazione delle radici (o zeri) di una funzione variabile reale ovvero

$$\text{data } f : I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{si cerca } \alpha \in \mathbb{C} / f(\alpha) = 0. \quad (109)$$

Esiste un approccio di tipo geometrico per la ricerca delle radici attraverso i seguenti metodi:

- metodo di bisezione
- metodo delle corde
- metodo delle secanti
- metodo della falsa posizione (o Regula Falsi)
- metodo di Newton.

Analizziamo ora in breve in cosa consistono, facendo riferimento alla referenza [7], da cui sono state prese anche le figure.

7.1 Metodo di bisezione

Il metodo di bisezione basa il suo funzionamento sul

teorema degli zeri per le funzioni continue.

Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(a)f(b) < 0$, allora $\exists \alpha \in (a, b) / f(\alpha) = 0$

Partendo da $\mathcal{I}_0 = [a, b]$, questo metodo genera una successione di sottointervalli $\mathcal{I}_k = [a^{(k)}, b^{(k)}], k \geq 0$, con $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k-1}, k \geq 1$ e ha la seguente proprietà: $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$.

Si pone $a^{(0)} = a, b^{(0)} = b$ e $x^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)}) / 2$;

quindi, per $k \geq 0$ si pone

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}, b^{(k+1)} = x^{(k)} \quad \text{se } f(x^{(k)})f(a^{(k)}) < 0$$

$$a^{(k+1)} = x^{(k)}, b^{(k+1)} = b^{(k)} \quad \text{se } f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$$

infine $x^{(k+1)} = (a^{(k+1)} + b^{(k+1)}) / 2$.

Il metodo di bisezione è il metodo iterativo più semplice e sicuramente convergente per calcolare le radici di un'equazione non lineare $f(x)$ reale e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ che assuma valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo.

Il metodo di bisezione consiste nel considerare il punto medio $x_m = (a + b) / 2$ dell'intervallo $[a, b]$ e verificare se x_m è una radice.

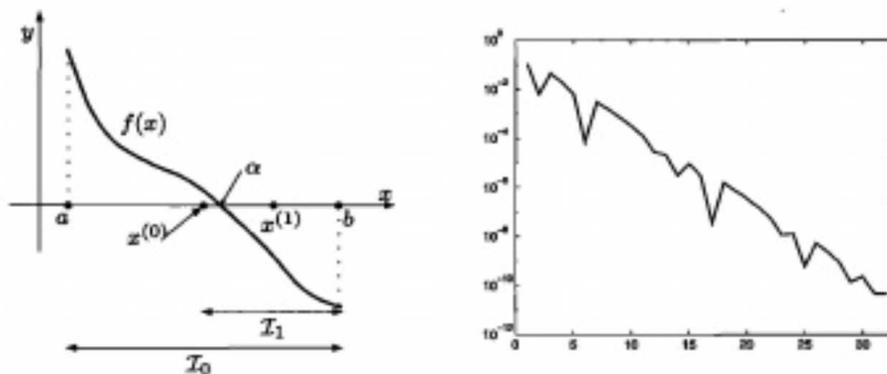


Figura 12: Il metodo di bisezione: a sinistra, i primi due passi; a destra la curva di convergenza.

Il punto di forza di questo metodo sta nella sua semplicità e sicura convergenza, il suo punto debole è invece nella scarsa efficienza rispetto agli altri metodi dato che, poiché ad ogni passo viene dimezzato l'intervallo contenente la radice, richiede un numero elevato di iterazioni.

7.2 Metodo delle corde

Per costruire algoritmi migliori sotto il punto di vista della convergenza rispetto al metodo di bisezione, è necessario utilizzare anche i valori assunti da f e, nel caso, dalla sua derivata f' (nel caso in cui f sia derivabile) o da una sua opportuna approssimazione. Proprio per questo motivo, sviluppando f in serie di Taylor in un intorno di α e arrestando lo sviluppo al prim'ordine, si ottiene

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi)$$

per un opportuno ξ compreso tra α ed x . Per ogni $k \geq 0$, dato $x^{(k)}$, si determina $x^{(k+1)}$ risolvendo l'equazione $f(x^{(k)}) + (x^{(k+1)} - x^{(k)})q_k = 0$, dove q_k è una opportuna approssimazione di $f'(x^{(k)})$.

Il metodo descritto equivale a trovare il punto di intersezione tra l'asse x e la retta di

pendenza q_k passante per il punto $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ e può essere riscritto nella forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - q_k^{-1} f(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0.$$

Si pone

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall k \geq 0,$$

ottenendo, una volta assegnato il valore iniziale $x^{(0)}$, la relazione ricorsiva

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x^{(k)}), \quad k \geq 0.$$

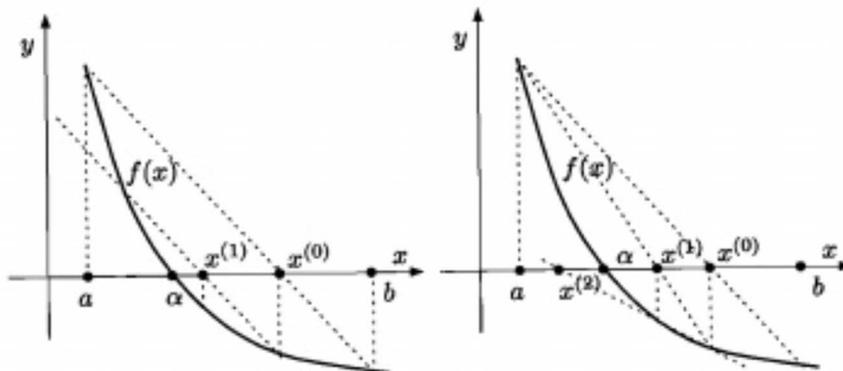


Figura 13: Metodo delle corde (a sinistra), metodo delle secanti (a destra).

7.3 Metodo delle secanti

Si pone

$$q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}, \quad \forall k \geq 0$$

ottenendo, una volta assegnati i due valori iniziali $x^{(-1)}$ e $x^{(0)}$, il metodo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}), \quad k \geq 0.$$

Rispetto al metodo delle corde, il processo iterativo ha bisogno che venga assegnato il punto iniziale $x^{(-1)}$ ed il calcolo del corrispondente valore $f(x^{(-1)})$, inoltre, per ogni k , il calcolo del rapporto incrementale. Tale aggiunta a livello computazionale è bilanciata da un incremento della velocità di convergenza.

7.4 Metodo Regula Falsi

È una variante del metodo delle secanti in cui, invece di scegliere la secante attraverso i valori $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ e $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$, si sceglie attraverso $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ e $(x^{(k')}, f(x^{(k')}))$, essendo k' il massimo indice minore di k per cui si ha $f(x^{(k')}) f(x^{(k)}) < 0$. Più precisamente, individuati due valori $x^{(-1)}$ e $x^{(0)}$ tali per cui $f(x^{(-1)}) f(x^{(0)}) < 0$, si pone

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k')}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k')})} f(x^{(k)}), \quad k \geq 0.$$

Fissata una tolleranza assoluta ε , la successione viene arrestata all'iterazione m -esima per cui abbiamo $|f(x^{(m)})| < \varepsilon$.

Possiamo osservare che la successione degli indici k' è non decrescente; quindi, per determinare al passo k il nuovo valore di k' , non è necessario scandire tutta la successione a ritroso, ma è sufficiente arrestarsi al valore di k' determinato al passo precedente.

Il metodo Regula Falsi, pur avendo una complessità computazionale simile a quella del metodo delle secanti, ha ordine di convergenza lineare. Inoltre, le iterate generate dalla successione sono tutte contenute nell'intervallo di partenza $[x^{(-1)}, x^{(0)}]$, a differenza di quanto può accadere per il metodo delle secanti.

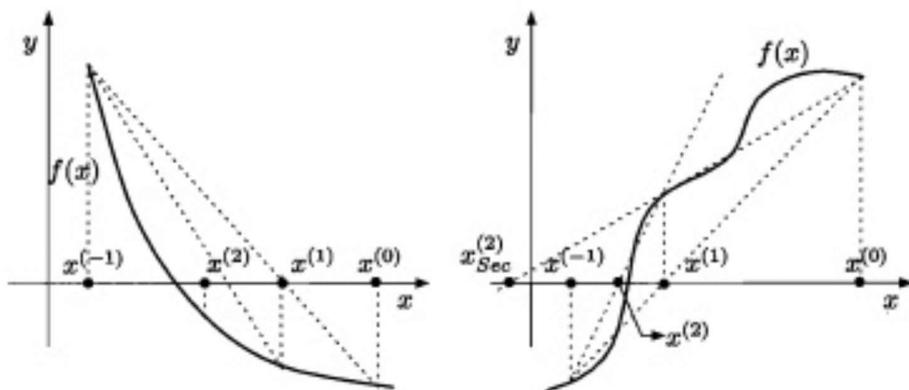


Figura 14: Primi due passi del metodo Regula Falsi per due diverse funzioni.

7.5 Metodo di Newton

Supponendo $f \in C^1(\mathcal{T})$ e assumendo $f'(\alpha) \neq 0$ (ovvero α radice semplice), se si pone

$$q_k = f'(x^{(k)}), \quad \forall k \geq 0,$$

dopo aver assegnato il valore iniziale $x^{(0)}$, si ottiene il cosiddetto metodo di Newton determinato da

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k \geq 0.$$

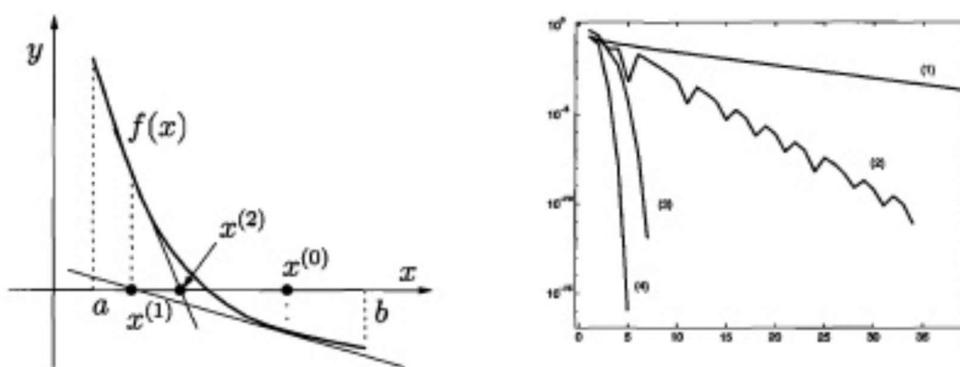


Figura 15: A sinistra: i primi due passi del metodo Newton, a destra: curve di convergenza dei vari metodi (1) delle corde, (2) di bisezione, (3) delle secanti, (4) di Newton. In ascissa è riportato il numero di iterazioni, in ordinata l'errore assoluto al variare di k .

Supponiamo che $\{x^{(k)}\}$ sia una successione convergente ad uno zero α della funzione f . Dato l'elevato numero di iterazioni per il calcolo di α , vediamo due condizioni per arrestare il processo iterativo (criteri d'arresto):

- controllo del residuo
- controllo dell'incremento

7.6 Controllo del residuo

Nel primo approccio il processo iterativo si arresta al minimo k per cui abbiamo che $|f(x^{(k)})| < \varepsilon$. Considerando ad esempio la seguente espressione

$$\frac{|e^{(k)}|}{|\alpha|} \left(\frac{m!}{|f^{(m)}(\alpha)| |\alpha|^m} \right)^{1/m} |f(x^{(k)})|^{1/m}$$

In particolare, nel caso di radici semplici, l'errore è legato al residuo dal fattore $1/|f'(\alpha)|$ e dunque possiamo concludere che:

1. se $|f'(\alpha)| \simeq 1$, si ha $|e^{(k)}| \simeq \varepsilon$ quindi il test produce un'indicazione soddisfacente sul valore dell'errore;
2. se $|f'(\alpha)| < 1$, il test è inaffidabile in quanto $|e^{(k)}|$ potrebbe essere molto grande rispetto ad ε ;
3. se infine, $|f'(\alpha)| > 1$, si ottiene $|e^{(k)}| < \varepsilon$ in questo caso il test è troppo restrittivo.

7.7 Controllo dell'incremento

Il processo iterativo si arresta non appena $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$.

Sia $\{x^{(k)}\}$ generata dal metodo di punto fisso $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$. Sviluppando ϕ in un intorno di α ed arrendandosi al prim'ordine, abbiamo

$$e^{(k+1)} = \phi(\alpha) - \phi(x^{(k)}) = \phi'(\xi^{(k)}) e^{(k)}$$

essendo $\xi^{(k)}$ compreso fra $x^{(k)}$ ed α . D'altra parte,

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k+1)} = \left(1 - \phi'(\xi^{(k)})\right) e^{(k)}$$

e quindi, supponendo di poter confondere il valore $\phi'(\xi^{(k)})$ con $\phi'(\alpha)$, si ottiene

$$e^{(k)} \simeq \frac{1}{1 - \phi'(\alpha)} \left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right).$$

8 Ringraziamenti

Voglio dedicare questa sezione a tutti coloro che hanno reso possibile non solo la realizzazione di questo elaborato, ma anche il mio percorso di vita e non solo quello accademico. In primis, un ringraziamento speciale al mio relatore Marco Coco, con il quale ho avuto la fortuna di intraprendere un percorso di tirocinio e tesi.

Sono grato a lui per la sua grande professionalità, la sua pazienza e i suoi indispensabili consigli che hanno reso possibile la realizzazione di questo elaborato.

Inoltre gli sono riconoscente soprattutto per la sua umanità e i suoi consigli, anche al di fuori dall'elaborato, necessari per la mia crescita personale e professionale.

Ringrazio infinitamente i miei genitori Artan e Silvana, che mi hanno sempre sostenuto e non mi hanno mai fatto mancare nulla, senza di loro raggiungere questo traguardo non sarebbe stato possibile.

Un ringraziamento speciale va a zio Giancarlo, zia Maria, Chiara, Carmen e Andrea, che pur non avendo con loro legami di sangue sono per me più di una famiglia, mi hanno sempre sostenuto in ogni mia decisione, mi hanno aiutato durante tutto il percorso fin dalla scuola materna al conseguimento di questo titolo, senza di loro non sarei la persona che conoscete oggi.

Ringrazio i miei nonni, tre di loro non ci sono più, ma sono sicuro che vegliano su di me, una menzione speciale va a nonna Maria, la mia nonna acquisita, che mi ha voluto bene più di quanto si possa esprimere a parole e ancora adesso mi protegge da lassù.

Ringrazio i miei zii, i miei cugini e tutti i miei parenti (essendo noi una famiglia molto numerosa sarebbe difficile elencarli tutti).

Un grazie di cuore ai miei amici e colleghi dell'università: Davide Mattoni, Alessandro Novelli, Andrea Merli, Vasco Pesce, Gianluigi Salvatore, Andrea Perna, Alessandro Morelli e Tommaso Verdini, che hanno reso il percorso universitario meno pesante, con i quali ho passato dei bei momenti e spesso anche condiviso le ansie e le difficoltà che la facoltà di Ingegneria Meccanica comporta.

Ringrazio Lorenzo Tatonetti, mio carissimo amico d'infanzia, che continua ad essere una presenza costante nella mia vita.

Ringrazio poi Federico Granatiero, con cui ho condiviso la casa per un anno e con il quale ho passato momenti indimenticabili.

È giunto il momento di dedicare qualche parola ad una persona che più di tutte su di me ha avuto la maggior influenza, sto parlando del mio migliore amico Simone di Francesco, che dire di lui, ci conosciamo da tredici anni, nei quali è successo veramente di tutto, dagli eventi migliori a quelli peggiori, nonostante tutto è sempre stato presente per me, abbiamo condiviso tutto, nel bene e nel male, gioie e dolori, ma siamo ancora qui.

A lui auguro il meglio che la vita ha da offrirgli, inoltre aggiungo che la nostra unione e il nostro “obiettivo unificatore” per me vengono prima di tutto e farò del mio meglio per far sì che queste non siano solo parole, ma fatti da dimostrare giorno dopo giorno.

In modo insolito voglio inoltre ringraziare tutte le persone che non sono presenti finora, perchè per un motivo o per un altro non fanno più parte della mia vita, le ringrazio perchè è anche grazie a loro se sono la persona che sono oggi, mi hanno insegnato che nella vita non sempre va tutto come sperato, ma nonostante ciò bisogna continuare ad andare avanti e portarsi dietro il meglio che queste persone avevano da offrire.

Ultimo, ma non per importanza voglio ringraziare me stesso, per averci creduto quando tutto sembrava remare contro, per tutte le notti insonni prima di un esame, per tutte le volte che nonostante tutto ho continuato a perseverare nel tragitto. A me auguro di avere la stessa tenacia e voglia di migliorare che ho avuto finora, di raggiungere i miei obiettivi e di vivere una vita piena, degna di essere vissuta.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Destrade, G. Saccomandi, “On the rectilinear shear of compressible and incompressible elastic slabs”, *International Journal of Engineering Science*, Volume 48, Issue 11,2010, Pages 1202-1211, <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2010.09.012>.
- [2] R.J. Atkin, N. Fox, “An Introduction to the Theory of Elasticity”, 2005. Courier Corporation.
- [3] G.Y. Qiu and T.J. Pence, “Remarks on the Behavior of Simple Directionally Reinforced Incompressible Nonlinearly Elastic Solids”, *Journal of Elasticity* 49: 1–30, 1997. 1 C 1997 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [4] M. Coco and G. Saccomandi, “Superposing plane strain on anti-plane shear deformations in a special class of fiber-reinforced incompressible hyperelastic materials”, *International Journal of Solids and Structures* 256 (2022) 111994.
- [5] R. Brent, “Algorithms for Minimization Without Derivatives”, Prentice-Hall, 1973.
- [6] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler, “Computer Methods for Mathematical Computations”, Prentice-Hall, 1976.
- [7] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, “Matematica Numerica”, Springer-Verlag Italia, Milano 2014, Pages 193-203; 215-217.
- [8] J. Merodio, G. Saccomandi, I. Sgura, “The rectilinear shear of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 42, Issue 2, 2007, Pages 342-354, <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.11.002>.